Hausdorff次元に関するSullivanの辞書

—C. McMullen の仕事から—

川平 友規　　　谷口 雅彦

まえがき（川平）

1980 年代前半，D.Sullivan は “Quasiconformal homeomorphism and dynamics I,II,III” と題する一連のプレプリントを発表した．Klein 群と複素力学系——彼のこの仕事は，両者の類似性を明示するとともに，擬等角写像という強力な道具をもって，これらの分野に圧倒的な進歩をもたらしたのであった．いわゆる,「Sullivan の辞書」の始まりである．

さらに Sullivan は Patterson による Fuchs 群の不変密度構成法を一般の Klein 群および複素力学系に適用し，不変密度や極限集合の Hausdorff 次元といった力学系的不変量に関する研究も押し進めた [33]．特に「辞書」という観点に限れば，彼が最も成功したのは,「拡大的」とよばれる安定な正則力学系に関してである.「拡大的」でない，たとえば放物的固定点をもつ正則力学系に関しては，幾つかの「辞書」的結果が他の研究者によってなされたが，全体としての見通しは決して良いものではなかった．

そして 1997 年夏——1998 年 Fields 賞に輝いた C.McMullen は，プレプリント３部作 “Hausdorff dimension and conformal dynamics I,II,III” を立て続けに発表する．これはまさに,「放物的分岐における不変量の連続性」という Sullivan の辞書項目を埋めるものであった.「幾何学的有限性」というキーワードをもとに，力学系の定量的収束という観点を確立し，両力学系の放物的分岐を明解かつ統一的に扱うことに成功したのである．先行する 3 次元多様体の幾何化とくりこみに関する「辞書」[25] で卓越した構成力，視野の広さを見せつけた彼は，この連作で再度，Sullivan の辞書作成の旗手としてその存在を強くアピールしたように思われる．

本稿は上記の McMullen によるプレプリントのうち，“II:Geometrically finite rational maps”[22]，及び “I:Strong convergence of Kleinian groups”[21] の解説である．この二つのプレプリントはほぼ並行した内容を扱っており，表題どおり，Julia 集合や極限集合の Hausdorff 次元（及びこれと等価な不変量）の連続性に関するものである．

１章から３章は，幾何学的有限な有理写像に関する第 II 部 [22] の結果の解説である．川平が，1997 年 10 月から 1998 年 3 月にかけて京都大学で行ったセミナーのノートをもとに作成した．４章は，Klein 群の強収束に関する第 I 部 [21] の結果の解説であり, 谷口がまとめた．これら前後半は一応独立しているが，内容的な並行性ははっきりと読み取ることができるはずである．これまでの成果を巧みに統合し，さらに

今後の研究に明確な枠組みを提示する，McMullen の明晰な議論が伝われば幸いである．また第 III 部 “Computation of dimension” [23] については，須川敏幸氏による解説 [31] があるので, この資料では割愛する．

ちなみに原論文は，1999 年 6 月現在，プレプリントとして彼のホームページ

http://www.math.harvard.edu/HTML/Indivisuals
/Curtis_T_McMullen.html

から入手可能である[1]．ただし，時折手が加えられているようである．最新版は本稿と多少内容が異っているかもしれないので, 注意しておく．

なお１章から３章は角大輝氏（東工大）と奥山裕介氏（京大）に，また４章は糸健太郎氏（東工大）と宮地秀樹氏（大阪市大）に目を通していただき，多くのご注意・ご指摘をいただいた．もちろん誤りがあれば，それは著者たちの不注意・無理解によるものである．

最後に，資料作成に当たっては、科学研究費補助金 基盤研究 (A)(1)「非線形偏微分方程式系の大域理論をめざしての総合的研究」（課題番号：10304012）（研究代表者：西田孝明）からの援助をいただいた．深く感謝する次第である．

[1] 2005 年 8 月現在，彼の URL は http://abel.math.harvard.edu/~ctm/ に変わっている．

用語と記号

- $\hat{\mathbb{C}}$ 上の計量は特に断らない限り球面計量 $\sigma = 2|dz|/(1+|z|^2)$ とする．また $|f'(z)|_\sigma$ とあるときは球面計量による微分

$$\frac{f^*\sigma}{\sigma} = \frac{1+|z|^2}{1+|f(z)|^2}\left|\frac{df(z)}{dz}\right|$$

  を表す.

- $A \asymp B$ (A is comparable to B) とはある正定数 C_1, C_2 （評価定数と呼ぶ）が存在して，$C_1 A \leq B \leq C_2 A$ となることをいう.

- $n \gg 0$ は n が十分大きいことを表す.

- $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ など，特にことわることなく自然数や整数として用いることがある.

目 次

第1章　種々の不変量と幾何学的有限性（川平）

Riemann 球面上の有理写像がなす力学系に対し，その複雑さを反映する定量的な不変量のひとつとして，力学系のカオス部分・Julia 集合の Hausdorff 次元があげられる．

以下 1 章から 3 章までは，Julia 集合の Hausdorff 次元とその連続性に関する McMullen の結果 [22] の解説である．まえがきにもあるように，この論文は [21] と合わせて，Sullivan の辞書を明確に意識して書かれている．こちらはその有理写像側の項目である．対応する Klein 群側の結果については，4 章を参照されたい．

以降，特に断らない限り $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は次数 2 以上の有理写像とする．また f と共役または半共役な写像は同じ記号 f で表わすことが多いので，注意していただきたい．さらに，基本的な集合達を以下のように定義する．

- **Julia 集合** $J(f)$:反発周期点の閉包
- **Fatou 集合** $\Omega(f) := \hat{\mathbb{C}} - J(f)$
- **分岐集合** (critical set) $C(f) := \{c \in \hat{\mathbb{C}}; f'(c) = 0\}$
- **分岐後方軌道** (postcritcal set) $P(f) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(C(f))}$
- **Herman-Siegel 集合** $HS(f)$:f の Herman 環, Siegel 円板の和集合

ここ 1 章ではまず，Julia 集合の Hausdorff 次元などいくつかの次元にまつわる不変量を定義する．これらは等角密度を通じて密接に関わり合っており，そのいくつかには普遍的な等価性がある（定理 1.2）．特に幾何学的有限な有理写像の場合これらの間に著しい等価性があり（定理 1.13），3 章で放物的分岐における力学系の定量的連続性を扱う際，中心的役割を果たすことになる．

1.1　Hausdorff 次元と基本不変量

まずは基本的だが，用語の定義もかねて Hausdorff 次元の定義をしておく．

1. 距離空間 M の部分集合 U の**直径**を $\operatorname{diam} U := \sup_{x,y \in U} d(x,y)$ とする．ただし $d(\cdot\,,\cdot)$ は M の距離である．

2. M の部分集合の族 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある M の部分集合 X にたいし $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ かつ $0 < \operatorname{diam} U_i \leq \delta$ であるとき，これを X の δ **被覆**とよぶ．

3. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ が δ 被覆全体を動くとき，
$$\mathcal{H}^s_\delta(X) := \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s$$
とおく．このとき，
$$\mathcal{H}^s(X) := \lim_{\delta \to +0} \mathcal{H}^s_\delta(X)$$
を X **の** s **次元外測度**いう．これは外測度として，以下を満たす．
   (a) $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$
   (b) $X \subset Y \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y)$
   (c) M の任意の部分集合列 $\{X_j\}$ にたいし，
$$\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j).$$
   とくに $\{X_j\}$ が互いに共通部分をもたなければ，
$$\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j).$$

4. この s 次元外測度により，
$$\begin{aligned} \mathrm{H.dim}(X) &:= \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(X) = \infty\} \\ &= \inf\{s \mid \mathcal{H}^s(X) = 0\} \end{aligned}$$
を X の **Hausdorff 次元**と定義する．

Hausdorff 次元を調べることで，力学系の変化に伴う Julia 集合の変化を定量的に知ることができる．この量は，いわば Julia 集合の空間占有率であるが，その片鱗はさまざまなところに姿を見せるのである．以下では，そのような次元に関わる基本的な不変量を定義していこう．

1.1.1 双曲的集合と非接 Julia 集合

ここでは，Julia 集合の部分集合として双曲的集合と非接 Julia 集合を定義する．これらは反発周期系を包含し，Julia 集合にかなり近い．しかも Hausdorff 次元の評価が比較的容易にできるため，Julia 集合の Hausdorff 次元の下界を知る上でも重要である．

$\hat{\mathbb{C}}$ 内のコンパクト集合 X に対し，ある $n > 0$ が存在して全ての $x \in X$ について $|(f^n)'(x)|_\sigma > 1$ とできるとき X は**拡大的** (expanding) であるという．また X がさらに $f(X) \subset X$ を満たすとき**双曲的** (hyperbolic) であるという．

このとき，

$$\mathrm{hyp.dim}(f) := \sup\{\mathrm{H.dim}(X) \mid X : f \text{ の双曲的集合 }\}$$

を f の**双曲次元** (hyperbolic dimension) という．定義より，$\mathrm{hyp.dim}(f) = \mathrm{hyp.dim}(f^n)$ は自明であろう．

注意 1.a この双曲的集合の条件は，$f(X) \subset X$ なる X を含む領域で定義された滑らかな等角計量 ρ で，全ての $x \in X$ に対し $\|f'(x)\|_\rho > 1$ となるものが存在することと同値である．例えば ρ として，

$$\rho = \sigma + f^*\sigma + \cdots + (f^{n-1})^*\sigma$$

ととればよい．実際これが $\|f'(x)\|_\rho > 1$ を満たすことは計算から容易にわかる．また逆にそのような ρ があるとき，X のコンパクト性と $f(X) \subset X$ から X の双曲性が導かれる．

次に，x が $J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ に属するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して x の近傍U で $\mathrm{diam}\, U < \epsilon$ なるものと適当な $n > 0$ が存在して，

$$f^n|U \to B(f^n(x), r) \tag{1.1}$$

が同相写像になることと定義する．すなわち，x のどんなに小さな近傍も f の適当な反復により一定半径 r のサイズにまで膨れ上がる．そのような点の集まりが $J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ である．

このとき，**非接 Julia 集合** (radial Julia set) を

$$J_{\mathrm{rad}}(f) := \bigcup_{r>0} J_{\mathrm{rad}}(f, r)$$

と定義する．$r' \le r$ ならば $J_{\mathrm{rad}}(f, r) \subset J_{\mathrm{rad}}(f, r')$ となることに注意しよう．$J_{\mathrm{rad}}(f)$ とは，$J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ の帰納的極限と考えればよい．この非接 Julia 集合の点の近傍上 $\{f^n\}$ は正規族にならないので，$J_{\mathrm{rad}}(f) \subset J(f)$ である．また，一般に $J_{\mathrm{rad}}(f) \neq J(f)$ である．例えば反発周期点は $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に属するが，放物的周期点は属さない．

この集合はKlein群論における非接極限集合 (radial limit set, *or* conical limit set) に対応し，類似の性質を持つものである．ただし，対応物としてここでの定義が定着しているわけではなく，実際さまざまな流儀があるようである [29].

さて，次の双曲的集合と非接 Julia 集合の包含関係はほとんど明らかであろう．

命題 1.1 $J_{\mathrm{hyp}}(f)$ を有理写像 f の双曲的集合の和集合とする．このとき，$J_{\mathrm{hyp}}(f) \subset J_{\mathrm{rad}}(f)$ である．

証明　X を f の双曲的集合とする．X が拡大的なコンパクト集合であることから，ある n, A が存在して X 上 $|(f^n)'(x)|_\sigma \geq A > 1$ とできる．さらに $f(X) \subset X$ より全ての $x \in X$ について，

$$|(f^{np})'(x)|_\sigma \geq A^p \to \infty \quad (\ p \to \infty).$$

すなわち，X の各点はその近傍が任意に膨れ上がる．あとは簡単な計算により，適当な $r > 0$ に対し $X \subset J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ が示される．■

逆の包含関係は，一般には成り立たない．すなわち，非接Julia集合のほうが真に大きいことがある．例えば $f(z) = z^2 + 1/4$ では，$J_{\mathrm{rad}}(f)$ はJulia集合から放物的固定点 $z = 1/2$ の原像となる可算個の点を除いたものになる（定理1.17）．しかし，$J_{\mathrm{hyp}}(f)$ はこれよりも小さい．

1.1.2　臨界次元と不変量の等価性

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の正値測度 μ が α **次元** f **不変密度** (f -invariant density of dimension α) であるとは，任意のBorel集合 E について $f|E$ が単射ならば，

$$\mu(f(E)) = \int_E |f'|_\sigma^\alpha d\mu \tag{1.2}$$

が成り立つことをいう．上式の $|f|_\sigma^\alpha$ の部分には，Jacobianをイメージすればよい．例えば，球面計量による面積素 $dA = 4dxdy/(1+|z|^2)^2$ を用いた球面上の面積

$$A(f(E)) = \int_E |f'|_\sigma^2 dA = \int_E \left(\frac{1+|z|^2}{1+|f(z)|^2} |f'(z)| \right)^2 \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2}$$

は，任意の f について2次元 f 不変密度となっている．(McMullenにならい，以後これをLebesgue測度と呼ぶことにする．)

しかしここで考えたいのは，そのような普遍的な測度ではない．f 固有の測度という枠組みで，f 不変性という性質がどの次元までの測度の存在を許すか，ということが問題意識としてある．ゆえに，特に $J(f)$ を台にもつような f 不変密度のとる次元の最小値を f の **臨界次元** (critical dimension) といい，$\alpha(f)$ と表わす．

注意 1.b 上の定義の「$J(f)$ に台をもつ」という条件は，実は必要ない（系 1.11）．

注意 1.c μ が α 次元 f 不変密度ならば α 次元 f^n 不変密度である．逆像で単射な分岐をとれる Borel 集合を考えれば n は負でもよい．よって，$\alpha(f) \geq \alpha(f^n)$ であるが，定理 1.2 より双曲次元と比較して，$\alpha(f) = \alpha(f^n)$ であることがわかる．

注意 1.d $\alpha(f)$ が 0 になることはない．$J(f)$ 上の点の近傍 U で適当な n に対し $f^n(U)$ が $J(f)$ を含むようにとれる．ここでもし，下限 0 を与える μ が存在すると，f 不変性より矛盾が生じる．

さて，この節の主定理が次のものである．

定理 1.2 f を次数 2 以上の有理写像とする．このとき，

$$\alpha(f) = \mathrm{hyp.dim}(f) = \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)).$$

全ての有理写像で成り立つこの結果は，不変密度に写像の「拡大的」性質が反映することを示している．証明の前に，いくつか予備的命題を与えておく．

注意 1.e 以後の計算には欠かせない **Koebe の歪曲定理** (Koebe distortion theorem) を使いやすい形にしておこう．一般には，次の形で与えられる．

$f(z)$ を $\{|z| < 1\}$ 上の単葉関数で，$f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たすものとする．このとき，次の評価式が成り立つ．

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$
$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

このままでは使いにくいので，次のように変形しておいた方がよい．

$f(x)$ が $B(x_0, s) := \{x \in C \mid |x - x_0| < s\}$ 上の単葉関数であるとき，$x \in B(x_0, s)$ に対し $(x) := |x - x_0|/s$（＝中心からの距離 $/B$ の半径）とすると

$$\frac{1-(x)}{(1+(x))^3}|f'(x_0)| \leq |f'(x)| \leq \frac{1+(x)}{(1-(x))^3}|f'(x_0)|$$
$$\frac{(x)}{(1+(x))^2}|f'(x_0)|s \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{(x)}{(1-(x))^2}|f'(x_0)|s$$

が成り立つ．特に $(x) = 1/2$ のとき

$$\frac{4}{27}|f'(x_0)| \leq |f'(x)| \leq 12|f'(x_0)|$$
$$\frac{2}{9}|f'(x_0)|s \leq |f(x) - f(x_0)| \leq 2|f'(x_0)|s$$

の形でよく使う．

命題 1.3 任意の $r>0$ と $x \in J_{\mathrm{rad}}(f,r)$，および β 次元 f 不変密度 μ について，いくらでも小さな開球 $B(x,s)$ がとれて，

$$\mu(B(x,s)) \asymp s^{\beta} \tag{1.3}$$

となる．ここで，評価定数は $x,\ s$ によらない．

証明 非接 Julia 集合の定義より，x の近傍 U を式 (1.1) のようにとる．逆に，f^{-n} の単葉な分岐 $f_0^{-n}|B(f^n(x),r)$ を考えよう．このとき円 $|z-f^n(x)|=r/10,\ |z-f^n(x)|=r/2$ 上の点 z をとり，Koebe の歪曲定理を $|(f^n)'(x)|=A$ として適用すると

$$\frac{10}{121}A^{-1}r \le |f_0^{-n}(z)-x| \le \frac{10}{81}A^{-1}r$$
$$\frac{2}{9}A^{-1}r \le |f_0^{-n}(z)-x| \le 2A^{-1}r$$

を満たす．よって

$$\frac{10}{81}A^{-1}r < s < \frac{2}{9}A^{-1}r$$

なる s をとれば，$f^n(B(x,s)) =: V$ に対し

$$B(f^n(x), r/10) \subset V \subset B(f^n(x), r)$$

とできる．よって $\mu(V) \asymp 1$ である（評価定数は r のみに依存する）．

$f^n|B(x,\epsilon)$ は単葉と仮定してよいから，再び Koebe の歪曲定理をこれに適用して，$s=M\epsilon\ \ (0<M<1),\ x' \in B(x,s)$ としたとき

$$\frac{1-M}{(1+M)^3}A \le |(f^n)'(x')| \le \frac{1+M}{(1-M)^3}A$$
$$\frac{r}{10} \le \frac{1}{(1+M)^2}As \le |f^n(x')-f^n(x)| \le \frac{1}{(1-M)^2}As \le r$$

が成り立つ．これらを合わせると，$|(f^n)'(x')| \asymp A \asymp 1/s$ を得る（ここでも評価定数は r のみに依存する）．

よって (1.2) より，

$$1 \asymp \mu(V) = \int_{B(x,s)} |(f^n)'(x)|_{\sigma}^{\beta} d\mu(x) \asymp \frac{1}{s^{\beta}} \cdot \mu(B(x,s))$$

となり，(1.3) を得る．■

命題 1.3 より，次の系を得る．

系 1.4 すべての有理写像 f について

$$\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) \leq \alpha(f)$$

証明 μ を $\alpha(f)$ 次元 f 不変密度とする．$r > 0$ を固定して，まず $\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f, r)) \leq \alpha(f)$ を示そう．

$\epsilon > 0$ を固定する．開球 $B(x_1, s_1)$ を $x_1 \in J_{\mathrm{rad}}(f, r)$, $s_1 \leq \epsilon$ かつ (1.3) を満たすように選び，以下帰納的に，$B(x_i, s_i)$ を $x_i \in J_{\mathrm{rad}}(f, r)$, $s_i \leq \epsilon$ かつ (1.3) を満たし互いに共通部分のないように限りなく選びとっていったとする．$J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ 上に中心をもつ開球で選ばなかったものは，必ず選んだ開球のどれかに交わるような状況である．よって $B(x_i, s_i)$ を適当に膨らまして（例えば半径を 3 倍にして）

$$J_{\mathrm{rad}}(f, r) \subset \bigcup B(x_i, 3s_i)$$

とできる．すなわち $B(x_i, 3s_i)$ 達は $J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ の 6ϵ 被覆である．(1.3) より

$$(\mathrm{diam}\, B(x_i, 3s_i))^{\alpha(f)} \;=\; (6s_i)^{\alpha(f)} \;\asymp\; s_i^{\alpha(f)} \;\asymp\; \mu(B(x_i, s_i)).$$

さらに開球達は互いに交わらず，また $J(f)$ は μ の台なので，

$$\sum (\mathrm{diam}\, B(x_i, 3s_i))^{\alpha(f)} \;\asymp\; \sum \mu(B(x_i, s_i)) \;\leq\; \mu(J(f)) \;< \infty$$

となる．ϵ は任意に小さくとれるので $\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f, r)) \leq \alpha(f)$ がいえる．

あとは $J_{\mathrm{rad}}(f) = \bigcup J_{\mathrm{rad}}(f, \frac{1}{n})$ とかけることから，$\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) \leq \alpha(f)$ を得る．■

では定理の証明を完結させよう．

証明 (定理 1.2) [28, Th9.3.11] により $\alpha(f) \leq \mathrm{hyp.dim}(f)$ が成り立つ．一方命題 1.1，系 1.4 より

$$\mathrm{hyp.dim}(f) \leq \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{hyp}}(f)) \leq \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) \leq \alpha(f)$$

であるから定理の主張を得る．■

注意 1.f [28] はまだ出版されていないが，原稿の大部分を Urbański 氏のホームページ

http://www.math.unt.edu/~urbanski

からダウンロードできるので，参照されたい．

補足として，非接 Julia 集合と不変密度の密接な関係を示す次の定理をあげておく．証明前半を見て分かるように，非接 Julia 集合の拡大性が不変密度の次元を制限しているのがわかる．

定理 1.5 $J_{\mathrm{rad}}(f)$ を台にもつ f 不変密度は（全測度が1になるように）正規化すれば高々1つであり，$\alpha(f)$ 次元，かつエルゴード性を持つ．

証明 ν，μ をそれぞれ β，$\alpha(f)$ 次元 f 不変密度で，ともに $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つと仮定する．まず $r > 0$ を固定しよう．命題1.3により，任意の $x \in J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ に対して

$$\frac{\nu(B(x,s))}{\mu(B(x,s))} \asymp \frac{s^{\beta}}{s^{\alpha(f)}}$$

とできる．$\beta > \alpha(f)$ のとき，上は $s \to 0$ とすれば0に収束するが，x は任意なのでこれは $\nu(J_{\mathrm{rad}}(f,r)) = 0$ を示し，$J_{\mathrm{rad}}(f)$ が ν の台になることに矛盾する．すなわち ν の次元 $\beta = \alpha(f)$ である．

次に ν_1, ν_2 が $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つ任意の f 不変密度とすれば，次元はともに $\alpha(f)$ であるから，上と同様の議論により

$$\nu_1(B(x,s)) \asymp \nu_2(B(x,s))$$

である．よって任意の $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ に対し，$J_{\mathrm{rad}}(f) \cap A$ の s -被覆を考えれば，$\nu_1(A) \asymp \nu_2(A)$ より ν_1, ν_2 は互いに絶対連続である事がわかる

ここで E を前方不変集合，すなわち $f(E) \subset E$ としよう．$\mu(E) > 0$ と仮定すると，ν, $\nu|E$ はともに $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つ不変密度であるから，$\nu \ll \nu|E$ がなりたつ．ゆえに $(\nu|E)(J_{\mathrm{rad}}(f) - E) = 0$ より，$\nu(J_{\mathrm{rad}}(f) - E) = 0$ となるから，E は全測度を持つ．これで ν のエルゴード性がわかる．

最後に正規化による一意性を示そう．再び ν_1, ν_2 が $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つ任意の f 不変密度とすれば，Radon-Nikodym 導関数 $\phi = d\nu_1/d\nu_2$ は f 不変 Borel 関数となり，エルゴード性より定数関数となる．よって正規化すれば $\nu_1 = \nu_2$ とできる． ■

1.1.3 花弁数と臨界次元の評価

不変量の具体的な計算は一般には難しい．ここでは，Denker，Urbański[9] にもすでに見られる結果であるが，放物的周期点の挙動により臨界次元が下から抑えられえるという定理1.6を示す．その前に，まず**花弁数** (petal number) を定義しなくてはならない．

c を f の周期点とする．c が p **花弁点**（parabolic point with p petals）であるとは，ある適当な自然数 i と $z(c) = 0$ なる局所座標が存在して，

$$f^i(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2}) \tag{1.4}$$

と書けることである．この用語は，Leau-Fatou の花弁定理 (Leau-Fatou flower theorem）に由来している [8].

注意 1.g より一般には $f^i(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2})$（ただし $a \neq 0$）の形になればよいが，局所座標を z から $a^{\frac{1}{p}}z$ に変換して共役をとれば (1.4) の形にできる．

注意 1.h ここで再び，f に共役な写像（同じ力学系を示す写像）も同じ記号 f で表わすことを注意しておこう．

p 花弁点 c に対し，$f^j(b) = c$（j は自然数）を満たす分岐点 (critical point) b が存在したとしよう．このとき b の近傍から c の近傍への f^j の局所被覆度を d として，b を dp **花弁分岐点**（preparabolic critical point with dp petals）と呼ぶ．

このような $b,\ c$ に対しては，f を適当に反復したものと置き換えて $f(b) = c,\ f(c) = c,\ f'(c) = 1$ が成り立つとしてよい．この f を用いれば，b 付近の力学系に対し c 付近の力学系との半共役をとることができる．具体的にいうと，$\zeta(b) = 0$ なる適当な局所座標をとってきて $z = f(\zeta) = \zeta^d$ とできるから，これを用いて $f^{-1} \circ f \circ f(\zeta)$ を計算し，さらに先の注意の要領で共役をとった

$$g(\zeta) = f^{-1} \circ f \circ f(\zeta) = \zeta + \zeta^{dp+1} + O(\zeta^{dp+2}) \tag{1.5}$$

を調べるのである．f^{-1} は $1 : d$ の多価関数であるから，実際には表示していないあと $d-1$ 個の互いに共役な分岐がある．(1.5) の b（$\zeta = 0$）における dp 枚の花弁は (1.5) の c における p 枚の花弁の原像となっていることに注意しよう．この g によって，b 付近の様子も c 付近と同様にあつかうことができる．

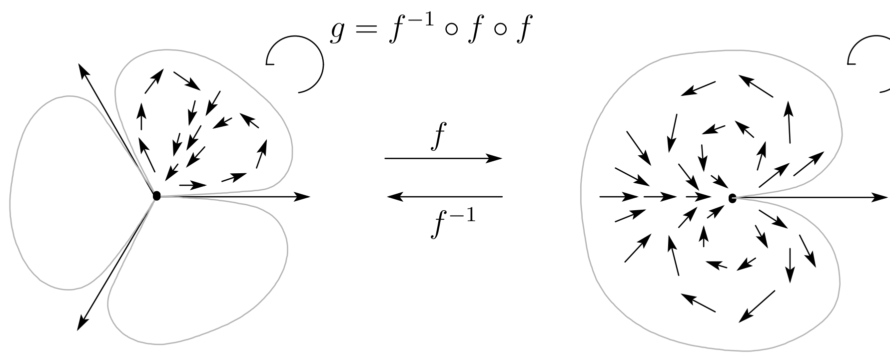

図 1.1: 花弁の半共役

以上をふまえて，f の**花弁数** $p(f)$ とは，これら花弁点と花弁分岐点における花弁の数の最大値と定義する．もしこれらの点が存在しないときは $p(f) = 0$ と定める．

例として $f(z) = z(1+z)^d$ を考えると，$z = 0$ は 1 花弁点，$z = -1$ は d 花弁分岐点，$p(f) = d$ である．

注意 1.i すべての自然数 i について，$p(f^i) = p(f)$ であることに注意．$p(f^i) \le p(f)$ は明らかなので，あとは f の p 花弁点（dp 花弁分岐点）は f^i の p 花弁点（dp 花弁分岐点）であることを局所座標表示から確かめれば逆の不等式もわかる．

さて，臨界次元の評価式とは次のものである．

定理 1.6 f の花弁数 $p(f)$ により，臨界次元は下から次のように抑えられる．

$$\alpha(f) > \frac{p(f)}{p(f)+1}.$$

詳しくは 3 章 2 節で述べるが，これは p 花弁点周りの力学系が Klein 群における階数 1 カスプの p 葉被覆とみなせることから出る，ひとつのアナロジーなのである．証明には，次の命題が本質的にはたらく．

命題 1.7 f が p 花弁点をもつならば，

$$\alpha(f) > \frac{p}{p+1}.$$

証明　f を適当に反復したものに置き換え，さらに p 花弁点を $z = \infty$ に写す共役をうまくとると，その近傍で

$$f(z) = z + z^{1-p} + O(z^{-p})$$

の形にできる．さらに $w = z^p$ について半共役をとれば，多価関数のひとつの分岐

$$f(w) = w + p + O(w^{-1/p}) \tag{1.6}$$

を得る．実際には $f(w)$ の p 個の分岐を貼り合わせたものによる $w = \infty$ での力学系が $z = \infty$ での力学系に対応している．すなわち，式 (1.6) による力学系はちょうど花弁 1 枚分の力学系と共役であり（このことは $w = \infty$ を 0 に移す共役をとれば式の形からも確かめることができる），これを調べれば十分である．しかし，臨界次元を評価するにあたって，f 不変密度の形が共役をとることで変化していることを忘れてはならない．そこで，球面計量を w のものに書き換えておこう．すなわち座標変換による引き戻しをとって

$$\sigma = \frac{2|dw|}{p(|w|^{1+1/p} + |w|^{1-1/p})}$$

としておく（同じ記号 σ を用いる）．

ここで (1.6) 式の成り立つような 1 花弁点 $w = \infty$ の近傍から，$J(f)$ に属する点 w_0 を一つ選ぶ．以降 f^{-1} は，この近傍に制限したもので考えることにする．この点が反発方向 (repelling direction) に属することは花弁定理からわかるので，$w_n = f^{-n}(w_0) \to \infty$ である．このとき，次の補題 (A),(B) を示そう．

補題　**(A)** $n \gg 0$ のとき $|w_n| \asymp n$ ，および $|(f^{-n})'(w_0)| \asymp 1$ が一様に（評価定数が n によることなく）成り立つ．

証明　(1.6) 式の代わりに，w を pw に移す座標変換による共役をとって $f(w) = w + 1 + O(w^{-1/p})$ を考えよう．[26, §7] によればこれは反発花弁上定義された単葉関数 $\alpha : w \mapsto \alpha(w)$（$= w^*$ と書く）で無限遠点の近傍で恒等写像に漸近的なもの，すなわちある正定数 $R,\ A,\ B$ が存在して，反発花弁上の点 w で $R \leq |w|$ なるもの全てについて

$$A \leq \left|\frac{\alpha(w)}{w}\right| \leq B \quad \leftrightarrows \quad |w^*| \asymp |w|$$

を満たすものにより，$f(w^*) = w^* + 1$ と共役である．w_0 を α の定義域にとり，$w_n^* = w_0^* - n$ よりある十分大きな N が存在して，$n > N$ のとき

$$0 \ < \ 1 - \left|\frac{w_0^*}{N}\right| \ \leq \ \left|\frac{w_n^*}{n}\right| \ \leq \ 1 + \left|\frac{w_0^*}{N}\right|$$

が成り立つ．よって $n \gg 0$ のときは n によらない評価定数で $|w_n| \asymp |w_n^*| \asymp n$ を得る．この結果をもとの (1.6) 式での座標に書き換えても，単に $1/p$ 倍なので同じ $|w_n| \asymp n$ が成り立つ．

次に，$f'(w) = 1 + O(w^{-1-1/p})$ とかけることから

$$\begin{aligned}|(f^{-n})'(w_0)| &= |(f^{-1})'(w_0)(f^{-1})'(w_1)\cdots(f^{-1})'(w_{n-1})| \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1 + O(w_i^{-1-1/p}))^{-1}.\end{aligned}$$

上の結果により $\sum |w_n|^{-1-1/p} \asymp \sum n^{-1-1/p}$ が成り立つが，これは収束するので無限積 $\lim_{n\to\infty} |(f^{-n})'(w_0)|$ は有界な値を持つ．よって十分大きい n については一様に $|(f^{-n})'(w_0)| \asymp 1$ を得る．□

補題　**(B)** ある s を f^{-n} が $B(w_0, s)$ 上単射となるようにとり，$B_0 = B(w_0, s/2)$ とおく．$w \in B_0$ のとき

$$|(f^{-n})'(w_0)|_\sigma \asymp |(f^{-n})'(w)|_\sigma$$

が $n \gg 0$ のとき一様に成り立つ．

証明　与式は

$$\frac{|w_0|^{1+1/p} + |w_0|^{1-1/p}}{|w_n|^{1+1/p} + |w_n|^{1-1/p}}|(f^{-n})'(w_0)| \asymp \frac{|w|^{1+1/p} + |w|^{1-1/p}}{|f^{-n}(w)|^{1+1/p} + |f^{-n}(w)|^{1-1/p}}|(f^{-n})'(w)|$$

と書けるから，(I):$|w_0| \asymp |w|$, (II):$|w_n| \asymp |f^{-n}(w)|$, (III):$|(f^{-n})'(w_0)| \asymp |(f^{-n})'(w)|$ が $n \gg 0$ のとき一様に成り立つことを示せば十分である．

(I)：
半径 $s/2$ を $|w_0|$ に比べ十分小さくとれば $|w_0| - s/2 \le |w| \le |w_0| + s/2$ より

$$1 - \frac{s}{2|w_0|} \ \le\ \left|\frac{w}{w_0}\right| \ \le\ 1 + \frac{s}{2|w_0|}$$

となる．両端は定数であるからＯＫ．
(II)：
Koebe の歪曲定理と最大値原理により，

$$\frac{2}{9}|(f^{-n})'(w_0)|s \ \le\ |f^{-n}(w) - w_n| \ \le\ 2|(f^{-n})'(w_0)|s.$$

n が十分大きいとき補題 (A) より $|(f^{-n})'(w_0)| \asymp 1$ だから，

$$|f^{-n}(w) - w_n| \asymp 1 \quad \rightleftarrows \quad \left|\frac{f^{-n}(w)}{w_n} - 1\right| \asymp \frac{1}{|w_n|} \asymp \frac{1}{n}.$$

必要ならより大きな n を考えれば $1/2 \le |f^{-n}(w)/w_n| \le 2$ が成り立つのでＯＫ．
(III)：
同じく Koebe の歪曲定理と最大値原理により

$$\frac{4}{27}|(f^{-n})'(w_0)| \ \le\ |(f^{-n})'(w)| \ \le\ 12|(f^{-n})'(w_0)|.$$

この式より明らかにＯＫ．
以上 (I)，(II)，(III) が $n \gg 0$ のとき一様に成り立つことを注意せよ．□

ではこれらの補題を用いて，命題の評価式を導こう．μ を $J(f)$ に台をもつ α 次元 f 不変密度とし，$\mu(J(f)) = 1$ となるよう正規化しておく．$B_n = f^{-n}(B_0)$ とおくと (以下の μ は同じ記号を使っているが，もとの μ の座標変換による引き戻しであることに注意)

$$1 \ \ge\ \sum \mu(B_n) \ \asymp\ \sum \int_{B_0} |(f^{-n})'|_\sigma^\alpha d\mu.$$

補題 (B) より，

$$\begin{aligned} &\asymp\ \sum \mu(B_0)|(f^{-n})'(w_0)|_\sigma^\alpha \ \asymp\ \sum |(f^{-n})'(w_0)|_\sigma^\alpha \\ &= \sum \left(\frac{|w_0|^{1+1/p} + |w_0|^{1-1/p}}{|w_n|^{1+1/p} + |w_n|^{1-1/p}}\right)^\alpha |(f^{-n})'(w_0)|^\alpha. \end{aligned}$$

補題 (A) より，上式に続いて

$$\asymp \sum \left(\frac{1}{|w_n|^{1+1/p} + |w_n|^{1-1/p}}\right)^\alpha = \sum |w_n|^{-\alpha(1+1/p)}\left(1 + |w_n|^{-2/p}\right)^{-\alpha}.$$

ここで $1 \leq (1+|w_n|^{-2/p}) \leq 2$ であるから，さらに続けて

$$\asymp \sum |w_n|^{-\alpha(1+1/p)} \asymp \sum n^{-\alpha(1+1/p)}.$$

これが収束しなければならないことから，$\alpha > p/(p+1)$ が成り立つ．よって $\alpha(f)$ の定義により，命題の式を得る．■

では，定理 1.6 の証明を完成させよう．

証明　(定理 1.6) $p(f) = 0$ のとき与式は明らか（注意 1.e ）．命題 1.7 により，あとは花弁分岐点について調べればよい．花弁数を定義したときと同様に $f,\ b,\ c,\ p\ ,d$ をとったとき，$p(f)$ および $\alpha(f)$ は変化しない（注意 1.a,1.j ）．g を (1.5) のような $f^{-1}\circ f \circ f$ のひとつの分岐とすれば，g の反復は f の反復と半共役だから，α 次元 f 不変密度は α 次元 g 不変密度である．あとは命題 1.7 と全く同様の議論により $\alpha(f) > dp/(dp+1)$ を得る．■

証明した評価式は，次節で使用する．

1.2　Poincaré 級数と等角密度の構成

ここでは Poincaré 級数を用いて，次元が 2 以下の f 不変密度を具体的に構成する．アイディア自体は Patterson が Fuchs 群の不変密度の構成のために導入し [27]，のち Sullivan が Klein 群，有理写像に適用した方法 [33] がもとになっている．

注意 1.j 以後**原像** (preimages) という言葉を多用するが，これは f の反復によるすべての逆像を意味する．すなわちある集合 X について，X の原像とは $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(X)$ のことをいう．

1.2.1　Poincaré 級数の収束指数

Poincaré 級数とその収束をつかさどる新たな不変量として**臨界指数**（critical expornent）を導入し，Julia 集合と Fatou 集合との関係を調べておこう．

定義　$x \in \hat{\mathbb{C}}$ における **Poincaré 級数**（Poincaré series）とは次のものをいう．

$$P_s(f,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_{\sigma}^{-s}$$

この級数に対し，

$$\delta(f,x) \ := \ \inf\{s > 0 \mid P_s(f,x) < \infty\}$$

を x における**臨界指数**（または**収束指数**）と呼び，さらに

$$\delta(f) \ := \ \inf_{x \in \hat{\mathbb{C}}} \delta(f, x)$$

を f の**臨界指数**と呼ぶ.

すべての有限値 s について $P_s(f,x)$ が発散するときは，$\delta(f,x) = \infty$ と定める．また x の原像にひとつでも分岐点があれば $P_s(f,x) = \infty$ であるから，$\delta(f,x) = \infty$ である

感覚的にいえば Poincaré 級数は f の反復で x に飛び込む全ての点の「勢い」を $-s$ をパラメーターとして和にしたものであり，原像からの情報をかき集めたゼータ関数のようにも思える.

x が f の Fatou 集合に属するときの Poincaré 級数は次のような性質をもつ.

命題 1.8 $x \in \hat{\mathbb{C}} - J(f) = \Omega(f)$ のとき，以下が成り立つ.

1. $\delta(f,x) = \infty \iff x \in P(f) \cup HS(f)$
2. $\delta(f,x) < \infty$ のとき
   (a) $\delta(f,x) \leq 2$
   (b) $P_2(f,x) < \infty$
   (c) x がある α 次元 f 不変密度の台に含まれるならば，$P_\alpha(f,x) < \infty$
   (d) Hausdorff 位相の意味で，$f^{-n}(x) \to J(f) \quad (n \to \infty)$

ここで Hausdorff 位相について，簡単にまとめておこう．X を局所コンパクトかつ可分な距離空間とし，その距離を $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ としよう．X の空でないコンパクト集合の全体を $\mathrm{Comp}(X)$ と表し，$K_1, K_2 \in \mathrm{Comp}(X)$ の間の **Hausdorff 距離** (Hausdorff distance) を次のように定める.

$$\delta(K_1, K_2) := \max\left\{\sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \ \ \sup_{y \in K_2} d(K_1, y)\right\}$$

ここで $\sup_{x \in K_1} d(x, K_2)$ を半距離として $\partial(K_1, K_2)$ と表せば，次のようにすっきりと書ける.

$$\delta(K_1, K_2) := \max\{\partial(K_1, K_2), \ \partial(K_2, K_1)\}$$

半距離 ∂ の具体的なイメージは次のようにいえる．$\partial(K_1, K_2) = r$ ということは，任意の $x \in K_1$ 中心，半径が最低 r の閉球内には，必ず K_2 の点があるということである．裏を返せば，K_2 の r 近傍 $N_r(K_2)$ の閉包に，K_1 がぎりぎり含まれている状態だといえる.

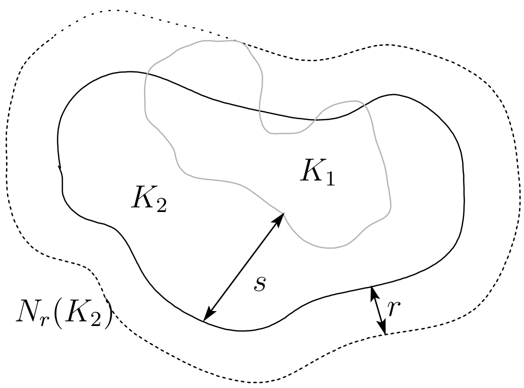

図 1.2: $\partial(K_1, K_2) = r,\ \partial(K_2, K_1) = s$

この距離が距離の公理を満たすことは容易に分かる．また X がコンパクトならば，$\mathrm{Comp}(X)$ もコンパクト距離空間になることが知られている [25]．この距離によって定まる $\mathrm{Comp}(X)$ の位相を **Hausdorff 位相**と呼ぶ.

例えば Julia 集合の連続性は，Hausdorff 位相によって定式化できる（2 章）.

証明 (命題 1.8) ＜1 の $\Longleftarrow$ ＞

$x \in HS(f)$ とする．x の原像には Herman 環または Siegel 円板内を回りつづけているものがあるから，Poincaré 級数はそのような原像による項が蓄積して発散する．よって $\delta(f, x) = \infty$．次に $x \in P(f) - HS(f)$ とする．この場合 x は直接原像に分岐点を持つような点か，Fatou 集合に限っていることから吸引周期点（attracting periodic point）かである．前者の場合は分岐点の項により明らかに発散である．後者の場合も x 自身がその原像に含まれるから，$|(f^n)'(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$ となり Poincaré 級数は発散する．よって $\delta(f, x) = \infty$.

＜1 の $\Longrightarrow$，2 の (a),(b) ＞

$x \notin P(f) \cup HS(f)$ と仮定する．このとき x 中心の開球 B で $B \cap P(f) = \emptyset$ かつ $B \cap \bigcup f^{-n}(B) = \emptyset$ なるものがとれる．f の次数を d としよう．このとき $f^{-n}(B) =: B_n$ は d^n 個の B と同相な互いに共通部分をもたない領域達の和集合である．B_n の B と同相な連結成分の 1 つを B_n^i $(1 \leq i \leq d^n)$ と表わし，f^{-n} の分岐で B を B_n^i に単葉に写すものを f_i^{-n} とする．このとき，球面上の B_n^i の面積は球面距離による測度 (Lebesgue 測度）A を用いて

$$A(B_n^i) = \int_B |f_i^{-n}(z)|_\sigma^2 dA \tag{1.7}$$

と書ける．ここで次の補題を示そう.

補題 任意の $z \in B$ について一様に $|(f_i^{-n})'(z)|_\sigma \asymp |(f_i^{-n})'(x)|_\sigma$．評価定数は $n,\ i$ によらない.

証明　必要なら $\hat{\mathbb{C}}$ 上の合同変換による共役をとり，B および B_n 達は ∞ のある近傍を含まないとしてよい．例えば $\infty \in J(f)$ となるようにし，B および B_n 達は $\{|z| > M\}$ に含まれないとしよう．

与式は
$$\frac{1+|z|^2}{1+|f_i^{-n}(z)|^2}|(f_i^{-n})'(z)| \asymp \frac{1+|x|^2}{1+|f_i^{-n}(x)|^2}|(f_i^{-n})'(x)|$$
の意味だが，任意の B および B_n 達の元 y について $1 \leq 1+|y|^2 \leq 1+M^2$ より，$|(f_i^{-n})'(z)| \asymp |(f_i^{-n})'(x)|$ を示せば十分である．

そこで，これまでの B を B' と改名し，その B' の半分の半径のものを改めて B としよう．こうしても B の条件より一般性を失わない． このとき全ての $n,\ i$ について $f_i^{-n}|B'$ は単葉であるから，Koebe の歪曲定理と最大値原理により
$$\frac{4}{27} \ \leq\ \left|\frac{(f_i^{-n})'(z)}{(f_i^{-n})'(x)}\right| \ \leq\ 12$$
が成り立ち，$|(f_i^{-n})'(z)| \asymp |(f_i^{-n})'(x)|$ を得る．□

この補題より (1.7) 式について $A(B_n^i) \asymp A(B)|(f_i^{-n})'(x)|_\sigma^2$ が成り立つから，
$$\begin{aligned}\infty \ >\ A(\hat{\mathbb{C}}) \ &\geq\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d^n} A(B_n^i)\\ &\asymp\ A(B)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d^n}|(f_i^{-n})'(x)|_\sigma^2\\ &=\ A(B)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f^n(y)=x}|(f^n)'(y)|_\sigma^{-2}\\ &=\ A(B)P_2(f,x)\end{aligned}$$
よって $P_2(f,x)$ は収束し，$\delta(f,x) \leq 2 < \infty$．以上で1が示された．同時に2の (a),(b) も示された．

＜ 2 の (c) ＞

上の証明で A を α 次元 f 不変密度に変えれば全く同様にして示される．

＜ 2 の (d) ＞

集合の ϵ 近傍を $N_\epsilon(\cdot)$ で表すことにする．任意の $\epsilon > 0$ に対し，$n \gg 0$ とすれば常に $f^{-n}(x) \subset N_\epsilon(J(f))$ かつ $J(f) \subset N_\epsilon(f^{-n}(x))$ とできることを示せばよい．

$x \in \Omega(f) - (P(f) \cup HS(f))$ より，x は（超）吸引鉢から（超）吸引固定点を除いたものか放物的吸引鉢に含まれ，原像はその境界に近づく．すなわち $f^{-n}(x)$ は Julia 集合に集積するから，$n \gg 0$ のとき $f^{-n}(x) \subset N_\epsilon(J(f))$ である．

次に逆の包含関係を示そう．$N_\epsilon(J(f)) = \bigcup_{y \in J(f)} B(y,\epsilon)$ は Julia 集合の ϵ-被覆であるが，Julia 集合のコンパクト性より有限被覆 $\{B(y_i,\epsilon)\}$ がとれる．f の例外点の任意

に小さい近傍 E を固定すると，$n \gg 0$ のとき，全ての i に対し $\hat{\mathbb{C}} - E \subset f^n(B(y_i, \epsilon))$ とできるから，$B(y_i, \epsilon)$ はそれぞれ $f^{-n}(x)$ の点を含むとしてよい (x は例外点でないことに注意)．よってそのような各 n に対し，$J(f) \subset \bigcup_{y \in f^{-n}(x)} B(y, 2\epsilon) = N_{2\epsilon}(f^{-n}(x))$ とできる．■

1.2.2 Patterson-Sullivan 測度の構成

まず，この節の主定理を掲げておこう．

定理 1.9 ある $x \in \hat{\mathbb{C}}$ において，$\delta(f, x) < \infty$ とする．このとき $J(f)$ に台を持つ $\delta(f, x)$ 次元 f 不変密度で，放物的点，反発周期点とその全ての原像が質点でないものが存在する．

ここで**質点** (atom) とは，その点のみで正の測度を持つ点のことである．

証明前のお膳立てとして，まず Patterson-Sullivan の方法をもとに $\delta(f, x)$ 次元 f 不変密度を構成する．重要だと思われるので，原論文に比べ冗長だが詳しく解説することにしよう．

定理の仮定どおり，ある $x \in \hat{\mathbb{C}}$ において $\delta := \delta(f, x) < \infty$ とする．まず第一段階として， $s > \delta$ に対し確率測度

$$\mu_s = \frac{1}{P_s(f, x)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_\sigma^{-s} \delta_y$$

を考える．ただし，δ_y は y における Dirac 測度である．

E を Borel 集合で $f|E$ が単射になるものとする．μ_s の台は x とその原像達だけであることに注意すると，

$$\int_E |f'|_\sigma^s d\mu_s = \frac{1}{P_s(f, x)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f)'(y)|_\sigma^s |(f^n)'(y)|_\sigma^{-s} \delta_y(E).$$

微分の連鎖律より，

$$= \underline{\frac{1}{P_s(f, x)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^{n-1})'(f(y))|_\sigma^{-s} \delta_y(E)} + \frac{1}{P_s(f, x)} |f'(x)|_\sigma^{-s} \delta_x(E).$$

ここで下線部の級数に注目しよう．一般に x または x の原像の 1 つを y と表し，その逆像 $f^{-1}(y)$ を $\{y_1, \cdots, y_l\}$ とする．$f|E$ の単射性により，$y \in f(E)$ のときは $f^{-1}(y)$ の元で E に属するものは 1 つだけであり，$y \notin f(E)$ のときは $f^{-1}(y)$ の元はどれも E に属さないことは明らかだろう．このことは $\sum_{i=1}^{l} \delta_{y_i}(E) = \delta_y(f(E))$ と書けるので，

$$\sum_{i=1}^{l} |(f^{n-1})'(f(y_i))|_\sigma^{-s} \delta_{y_i}(E) = |(f^{n-1})'(y)|_\sigma^{-s} \delta_y(f(E))$$

が成り立つ．この関係に注意して下線の級数を書き換えると，

$$\begin{aligned}&\underline{\frac{1}{P_s(f,x)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{f^n(y)=x}|(f^{n-1})'(y)|_\sigma^{-s}\delta_y(E)}\\ =&\frac{1}{P_s(f,x)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{f^{n-1}(y)=x}|(f^{n-1})'(y)|_\sigma^{-s}\delta_y(f(E))\\ =&\mu_s(f(E)).\end{aligned}$$

すなわち次が成り立つ．

$$\int_E |f'|_\sigma^s d\mu_s = \mu_s(f(E)) + \frac{1}{P_s(f,x)}|f'(x)|_\sigma^{-s}\delta_x(E). \tag{1.8}$$

これで第一段階は終了である．

さて第二段階として，この式をもとに μ_s から δ 次元 f 不変密度を作ろう．まず $\delta=\delta(f,x)$ において $P_\delta(f,x)$ が発散するときは，$s\searrow\delta$ として μ_s の弱収束極限の１つをとれば δ 次元 f 不変密度を得る．

次に $P_\delta(f,x)<\infty$ のときも，$P_s(f,x)$ が $s\searrow\delta$ に合わせて発散するように修正を加えればよい．これからがまた一仕事である．

$t=2\delta-s$ とする。ここである十分大きな自然数 N_s をとり，

$$\tilde{P}_s(f,x)=\sum_{n=0}^{N_s}\sum_{f^n(y)=x}|(f^n)'(y)|_\sigma^{-t}+\sum_{n=N_s+1}^{\infty}\sum_{f^n(y)=x}|(f^n)'(y)|_\sigma^{-s}$$

とおく．$t\nearrow\delta$ より $P_t(f,x)$ は発散するから，この値は N_s のとり方次第で任意に大きくできる．よって，$s\searrow\delta$ のとき，$\tilde{P}_s(f,x)\to\infty$ とできる．これを用いて，

$$\mu_s := \frac{1}{\tilde{P}_s(f,x)}\left\{\sum_{n=0}^{N_s}\sum_{f^n(y)=x}|(f^n)'(y)|_\sigma^{-t}\delta_y+\sum_{n=N_s+1}^{\infty}\sum_{f^n(y)=x}|(f^n)'(y)|_\sigma^{-s}\delta_y\right\}$$

とすることで，(1.8) に対応する式

$$\int_E \min(|f'|_\sigma^s,|f'|_\sigma^t)d\mu_s \le \mu_s(f(E)) \le \int_E \max(|f'|_\sigma^s,|f'|_\sigma^t)d\mu_s \tag{1.9}$$

を得る．

一応確認しておこう．第一段階の要領で計算すれば，

$$\begin{aligned}\mu_s(f(E)) =&\frac{1}{\tilde{P}_s(f,x)}\left\{\sum_{n=1}^{N_s+1}\sum_{f^n(y)=x}|f'(y)|_\sigma^t|(f^n)'(y)|_\sigma^{-t}\delta_y(E)\right.\\ &\left.+\sum_{n=N_s+2}^{\infty}\sum_{f^n(y)=x}|f'(y)|_\sigma^s|(f^n)'(y)|_\sigma^{-s}\delta_y(E)\right\}\end{aligned}$$

となる．一方

$$
\begin{aligned}
&\int_E \min(|f'|_\sigma^s, |f'|_\sigma^t) d\mu_s \\
=&\frac{1}{\tilde{P}_s(f,x)} \left\{ \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{f^n(y)=x} \min(|f'(y)|_\sigma^s, |f'(y)|_\sigma^t) |(f^n)'(y)|_\sigma^{-t} \delta_y(E) \right. \\
&\left. + \sum_{n=N_s+1}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} \min(|f'(y)|_\sigma^s, |f'(y)|_\sigma^t) |(f^n)'(y)|_\sigma^{-s} \delta_y(E) \right\}
\end{aligned}
$$

であるから，(1.9) 式の左側不等式について，この関係を阻害しそうな要因は $n=0$ と $n=N_s+1$ の項，すなわち

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tilde{P}_s(f,x)} \min(|f'(x)|_\sigma^s, |f'(x)|_\sigma^t) \delta_x(E), \\
&\frac{1}{\tilde{P}_s(f,x)} \sum_{f^{N_s+1}(y)=x} \min(|f'(y)|_\sigma^s, |f'(y)|_\sigma^t) |(f^n)'(y)|_\sigma^{-s} \delta_y(E)
\end{aligned}
$$

である．これらは N_s をとり直すことで $\tilde{P}_s(f,x)$ は任意に大きくできること，及び $P_s(f,x) < \infty$ であることから任意に小さいとしてよく，実際には不等式の成立には問題とならない．右側不等式も同様である．

よって (1.9) 式において $s \searrow \delta$ ，$t \nearrow \delta$ とすれば，μ_s の弱収束極限をとって δ 次元 f 不変密度を得る．

では以上で得られた弱収束極限を μ として，これが定理の条件を満たすことを示そう．

証明　(定理 1.9)　＜$J(f)$ に台を持つこと＞

命題 1.8(d) により，ある x について $\delta(f,x) < \infty$ ならば x が $J(f)$ と $\Omega(f)$ のどちらに属するかにかかわらず $f^{-n}(x) \to J(f)$　$(n \to \infty)$ であるから，$J(f)$ に台を持つ．

＜点測度を持たないこと＞

p を反発周期点または放物的周期点，またはその原像のひとつとしよう．このとき，直接 $\mu(p)=0$ を示すか，任意に小さい $\epsilon > 0$ についてある p の近傍 U が存在して，$s \searrow \delta$ のとき $\limsup \mu_s(U) < \epsilon$ とできることを示せばよい．これで p が弱収束極限 μ における質点でないことがわかる．

ここで $\delta = \delta(f,x)$, $t = 2\delta - s$，および $\delta \geq \alpha(f) > 0$ であることを確認しておこう．

・反発周期点

まず p が $|f'(p)| = \lambda > 1$ なる反発固定点としよう． $p \neq x$ のとき，その適当な近傍で局所線形化写像 ϕ により，$\phi(p) = 0$, $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = f'(p)w$ とできる．w

平面上 $w \mapsto f'(p)w$ の基本領域であるような原点中心のアニュラスを１つとり，それを ϕ で引き戻したものを A_0 とする．このとき A_n を $f^n|A_n \to A_0$ が同相写像になるようにとれば，穴の中に年輪状に並ぶ f の基本領域の列 $\{A_n\}$ ができる．ここで必要なら合同変換により $p \neq \infty$ とし，A_0 の有界性により ϕ' を評価することで，すべての $z \in A_n$ において一様に

$$|(f^n)'(z)|_\sigma = \frac{1+|z|^2}{1+|f^n(z)|^2} \cdot \frac{|\phi'(z)|}{|\phi'(f^n(z))|} \cdot \lambda^n \asymp \lambda^n$$

が成り立つことがわかる．(1.9) 式は f を f^n に変えても成り立つので，

$$\mu_s(A_0) \geq \int_{A_1} \min(|(f^n)'|_\sigma^s, |(f^n)'|_\sigma^t) d\mu_s \asymp \lambda^{nt}\mu_s(A_n).$$

これより

$$\mu_s(A_n) = O(\lambda^{-nt}\mu_s(A_0)) \asymp O(\lambda^{-nt}).$$

ゆえに δ に十分近い全ての s について，$N \gg 0,\ U := \{p\} \cup \bigcup_N^\infty A_n$ とすれば

$$\mu_s(U) = O\left(\sum_N^\infty \lambda^{-nt}\right) < \epsilon$$

とできる．$p = x$ のときは定義より $\mu_s(p) > 0$ となってしまうが，極限は $\mu(p) = |f'(p)|_\sigma^\delta \mu(p)$ より $\mu(p) = 0$ となる．

p が周期 l の反発周期点のときも同様である．f を f^l で置き換えて，p の周りに $\{A_n\}$ を構成し U を作ればよい．

・放物的周期点

まず p が1花弁点のときを考えよう．f は p の吸引花弁上に適当な局所座標をとって無限遠点の近傍上の $z \mapsto z+1$ と共役にできることから，さらには原点の近くで Möbius 変換 $T(w) = w/(1-w)$ に共役になる．原点近くの正の実軸は $J(f)$ を境界とするカスプ状領域に含まれるが，このカスプ内の f による基本領域を考えよう．以下 $f(z)$ と $T(w)$ を並行して扱う．

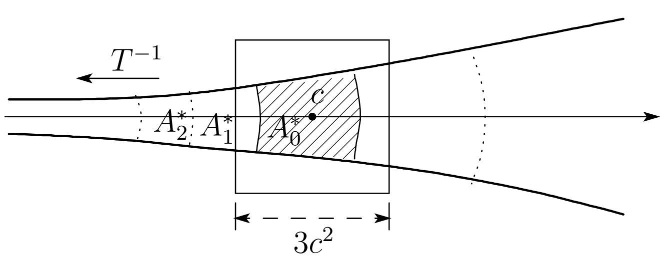

図 1.3: 正の実軸付近の基本領域

このカスプは K を十分大として，

$$\left\{w = x + yi \mid |y| \leq Kx^2 \log x^{-1} + o(y^2)\right\}$$

内に収めることができる [8, II-5]．すなわち，Julia 集合は正の実軸を漸近線にもつ．よって c を十分小さくとれば，$T^{\pm 1}(c) = c \pm c^2 + O(c^3)$ より，c 中心一辺 $3c^2$ の正方形に入るようなカスプ内の基本領域が存在する．これをもとの p の近くの力学系に引き戻したものを A_0 としよう．さらにカスプ内に $A_n := f^{-n}(A_0)$ なる基本領域の列 $\{A_n\}$ をとり，$w = \phi(z)$ を $\phi(p) = 0$, $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = T$ なる p の近傍の局所座標とする．このとき次の補題を示そう．

補題　$z \in A_n$ について，n によらず一様に $|(f^n)'(z)|_\sigma \asymp n^2$

証明

$$|(f^n)'(z)|_\sigma = \frac{1+|z|^2}{1+|f^n(z)|^2} \cdot \frac{|\phi'(z)|}{|\phi'(f^n(z))|} \cdot |(T^n)'(w)|$$

が成り立つが，$\{A_n\}$ は有界な領域に収まること，$|\phi'(z)|$ が一様に評価できることから，$|(T^n)'(w)| \asymp n^2$ を示せば十分である．

$\phi(A_n) = A_n^*$ $(n = 0, 1, \cdots)$ とおく．このとき A_0^* 上の点は $c + \zeta$, $|\zeta| = O(c^2)$ とかける．

$$T^{-n}(c+\zeta) \;=\; \frac{c+\zeta}{1+n(c+\zeta)} \;\in\; A_n^*$$

より，逆に全ての $w \in A_n^*$ に対し $w = T^{-n}(c+\zeta)$ とおけば，

$$|(T^n)'(w)| = \frac{1}{|1-nw|^2} = n^2 \left| \frac{1}{n} + c + \zeta \right|^2.$$

n を十分大きくすれば，例えば

$$\frac{c}{2} \le \left| \frac{1}{n} + c + \zeta \right| \le 1 + 2c$$

とできるので $|(T^n)'(w)| \asymp n^2$ が成り立つ．□

さて上の補題より，

$$\begin{aligned}
\mu_s(A_n) &= \mu_s(f^{-n}(A_0)) \\
&\le \int_{A_0} \max(\left|(f^{-n})'\right|_\sigma^s, \left|(f^{-n})'\right|_\sigma^t) d\mu_s \\
&\asymp n^{-2t} \mu_s(A_0).
\end{aligned}$$

ここで定理 1.6 より $\delta > 1/2$ であるから，s, t を十分 δ に近づければ $2t > 1$ とできる．よって $N \gg 0$, $U := \{p\} \cup \bigcup_N^\infty A_n$ として，

$$\mu_s(U) \;=\; O\left(\sum_N^\infty \frac{1}{n^{2t}} \right) \;<\; \epsilon$$

とできる．

p が一般の花弁点のときも，前節で扱ったようにして U を構成することができる．

・原像

p を反発的周期点または放物的点 q の原像の１つとする．すなわち，ある $j > i > 0$ について $q = f^i(p) = f^j(p)$ とする．まず，p が x の原像に含まれないときを考えよう．このとき，$f^{-i} \circ f^{j-i} \circ f^i(z)$ なる多価関数の分岐をうまくとって U を構成する．

$(f^i)'(p) \neq 0$ のとき，p の適当な近傍 V を $f^i|V$ が単射であるようにとる．すなわち，$f^i|V$ を局所座標変換として p の周りの $(f^i|V)^{-1} \circ f^{j-i} \circ (f^i|V) =: g$ による力学系は q の周りの f^{j-i} による力学系と共役である．あとは上と同様の議論である．すなわち q の周りに f^{j-i} の基本領域の列を構成し，さらに $f^i|V$ で引き戻せば g の基本領域の列 $\{A_n\}$ を得る．これから $U := \{p\} \cup \bigcup_N^\infty A_n$ $(N \gg 0)$ とすれば p の近傍で $\mu_s(U) < \epsilon$ なるものが存在することが示される．ここで各 $\mu_s(A_n)$ を評価するには（1.9）が f を g に変えても成り立つことを用いればよい．

$(f^i)'(p) = 0$ のとき，その局所被覆度を d としよう．今度は q の適当な近傍 W について，p の近傍 V で $f^i|V \to W$ が同相写像となるようなもの（少なくとも p 以外で互いに交わらない扇形 d 個が とれる）の１つをとる．あとは $(f^i)'(p) \neq 0$ のときと同様にすればよい．

最後に p は x の原像の１つとしよう．例えば $f^i(p) = x$ ならば，$\delta(f, x) < \infty$ より $(f^i)'(p) \neq 0$ であるから，μ_s の構成法より $\mu_s \to \mu$ のとき $\mu_s(p) \to 0$ となることは明らかである．■

この定理により，以下の系を得る．

系 1.10 $J(f)$ に台を持つ $0 < \alpha \leq 2$ なる α 次元 f 不変密度で，放物的点，反発周期点とその全ての原像を質点に持たないものが存在する．

証明 $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ ならば球面上の Lebesgue 測度をとればよい．$J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ のとき，$x \in \Omega(f) - (P(f) \cup HS(f))$ が存在し，かつ命題 1.8 より $\delta(f, x) \leq 2$ であるから，あとは Patterson-Sullivan の方法にしたがって $\delta(f, x)$ 次元 f 不変密度を直接構成すればよい．■

前に臨界次元 $\alpha(f)$ は「 $J(f)$ に台をもつような f 不変密度のとる次元の最小値」と定義したが，実は「 $J(f)$ に台をもつ」という条件を外しても同値な定義ができることがわかる．すなわち，

系 1.11 $\alpha(f)$ の定義として，単に（$\hat{\mathbb{C}}$ 上の）f 不変密度の次元の下限としてもよい．

証明 μ を α_0 次元 f 不変密度とし，$\mu(\Omega(f)) > 0$ とする．μ の f 不変性より，μ の台は $x \in \Omega(f) - (P(f) \cup HS(f))$ を含むが，命題 1.8，2 の (c) より $\delta(f, x) \leq \alpha_0$ であり，かつ定理 1.9 より $J(f)$ を台に持つような $\delta(f, x)$ 次元 f 不変密度が構成できる. よって，$\alpha(f) \leq \delta(f, x) \leq \alpha_0$ である．

ここで補足的に，非接 Julia 集合と Poincaré 級数，不変密度に関する結果を紹介しておこう．この結果は次節でも用いる．

定理 1.12 ある f 不変密度 μ について，それが $J_{\mathrm{rad}}(f)$ を台にもつならば，以下が成り立つ．

1. $s = \alpha(f)$ のとき，Poincaré 級数 $P_s(f, x)$ は全ての $x \in \hat{\mathbb{C}}$ について発散する．
2. Borel 集合 $A \in \hat{\mathbb{C}}$ について，$f(A) \subset A$ ならば A は μ について測度 0 かまたは全測度をもつ．
3. μ- a.e. z について，z の前方軌道は $J(f)$ 上稠密になる．

証明 1. まず言葉をひとつ定義しておこう． B' が開球 B の**子孫**（descendant）とは，ある n が存在して，$f^n|B' \to B$ が単葉写像になりかつ有界な歪曲度をもつことをいう．

さて $r > 0$ を $\mu(J_{\mathrm{rad}}(f, r)) > 0$ となるように選び，固定しよう． $J(f)$ のコンパクト性より，ある有限個の開球族 $(B_1, \cdots, B_n)$ が存在して，$J(f) \subset \bigcup_{i=1}^n B_j$ かつ全ての $x \in J_{\mathrm{rad}}(f)$ が $(B_1, \cdots, B_n)$ の無限個の子孫に含まれるようにできる．各 B_i に対し，$A_i \subset J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ を B_i の無限個の子孫に含まれるような点 x の集合としよう．少なくともある 1 つの i については $\mu(A_i) > 0$ だが，A_i を B_i の子孫達が無限回被覆することから，

$$\sum_{B' : B_i \text{ の子孫}} \mu(B') = \infty \tag{1.10}$$

が成り立つ．

ここで $x \in B_i$ を固定しよう．全ての B_i の子孫 B' は $f^n(y) = x$ なる点 y を含むから，子孫の定義より

$$\mu(B') \asymp |(f^n)'(y)|^{-\alpha}$$

とできる．ただし $\alpha = \alpha(f)$ である．右辺は Poincaré 級数 $P_\alpha(f, x)$ の項含まれるから，(1.10) より全ての $x \in B_i$ にたいして $P_\alpha(f, x)$ は発散する．

次に全ての $x \in \hat{\mathbb{C}}$ にたいして Poincaré 級数 $P_\alpha(f, x)$ が発散することを示そう． x の原像に分岐点があるときは明らかに $P_\alpha(f, x) = \infty$ である．そうでないとき x は例外点ではないので，その原像は $J(f)$ に集積点を持つ．よって原像で $y \in B_i$ なるものが存在する．あとは上と同様な議論により $P_\alpha(f, x) = \infty$ である． □

2. A を $A \subset J_{\mathrm{rad}}(f, r)$，$f(A) \subset A$ なる Borel 集合とし，x を A の Lebesgue 密度点，すなわち

$$\lim_{s \to 0} \frac{\mu(B(x, s) \cap A)}{\mu(B(x, s))} = 1$$

なる点とする． x はある $r > 0$ について $J_{\mathrm{rad}}(f, r)$ に含まれるので，適当な列 $s_n \to 0$ と $k_n \to \infty$ をとってきて，$f^{k_n}|B(x, s_n) \to D_n$ が単葉かつ有界な歪曲度をもち， $B(f^{k_n}(x), r/10) \subset D_n$ であるようにできる．

ここで μ について，D_n における A の密度を調べてみよう．μ の次元は α とする．$f(A) \subset A$ より，

$$\begin{aligned}\frac{\mu(D_n \cap A)}{\mu(D_n)} &\geq \frac{\mu\big(f^{k_n}(B(x,s_n)) \cap f^{k_n}(A)\big)}{\mu(f^{k_n}(B(x,s_n)))} \\ &\geq \frac{\mu\big(f^{k_n}(B(x,s_n) \cap A)\big)}{\mu(f^{k_n}(B(x,s_n)))} \\ &= \frac{\int_{B(x,s_n)\cap A} \left|(f^{k_n})'\right|_\sigma^\alpha d\mu}{\int_{B(x,s_n)} \left|(f^{k_n})'\right|_\sigma^\alpha d\mu}.\end{aligned}$$

x は A の Lebesgue 密度点であるから，$n \to \infty$ のとき上の式の値は1に収束する．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(D_n \cap A)}{\mu(D_n)} = 1 \tag{1.11}$$

が成り立つ．

次に，$z \mapsto s_n z + x$ なる写像を考えると，これは単位円板 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ から $B(x,s_n)$ への等角写像である．よって $g_n(z) := f^{k_n}(s_n z + x)$ とおけば，g_n は $\mathbb{D}$ から D_n への単葉写像となる．このとき $f^{k_n}|B(x,2s_n)$ が単葉かつ有界な歪曲度を持つとしてよいので，$\{g_n\}$ の適当な部分列は $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$ 上で一様収束極限 g をもつ．よって $g(\mathbb{D}) =: D$ に対し特性関数をみると，$\chi_{D_n}(z)$ は $\chi_D(z)$ へ各点で収束する．ゆえに(1.11)と合わせると，D は $\mu(D \cap A) = \mu(D)$ を満たすことがわかる．また $g(0) \in J(f) \cap D \neq \emptyset$ より，ある n が存在して $J(f) \subset f^n(D)$ とできる．ゆえに $\mu(f^n(A)) = \mu(J(f))$ が成り立ち，$f^n(A) \subset A$ より A は $J(f)$ 上全測度を持つ．□

3.　$B(x,s)$ を Julia 集合上に中心を持つ開球とする．さらに A を，$J(f)$ の点で前方軌道が $B(x,s)$ に入らないようなものの集合とする．このとき A は $f(A) \subset A$ を満たし，かつ

$$\mu(A) \leq \mu(J(f) - B(x,s)) < \mu(J(f))$$

であるから，2．より $\mu(A) = 0$．すなわち，μ-a.e. $z \in J(f)$ について，その前方軌道は $B(x,s)$ に入る．$J(f)$ が可算基をもつ事から，μ についてほとんど全ての前方軌道は稠密である．■

1.3　幾何学的有限な有理写像

ここではこの論文のメインテーマである「幾何学的有限」な有理写像について，その不変測度とからめつつ，いままでに定義した不変量らが一致することを見る．ちなみにこの「幾何学的有限」という用語は Klein 群論に由来しており，対応する性質が見られる．

定義　有理写像 f について $P(f) \cap J(f)$ が有限個の元からなるとき，f は**幾何学的有限** (geometrically finite) であるという．　すなわち $J(f)$ に含まれる分岐点がすべて前周期的 (preperiodic) であるときをいう．

このとき，Siegel 円板，Herman 環は $J(f) \cap P(f)$ を境界にもつことから存在し得ない．しかし放物的周期点はもち得る．

さて，この章の主要な結果が次のものである．Sullivan による幾何学的有限な Klein 群の結果にうまく対応している（定理 4.7，定理 4.11）．

定理 1.13 f を幾何学的有限な有理写像とする．このとき，

$$\delta(f) = \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) = \mathrm{H.dim}(J(f)) = \alpha(f)$$

が成り立つ．さらに $\delta(f)$ 次元 f 不変密度 μ が存在して，正規化すれば（確率測度として）$\hat{\mathbb{C}}$ 上一意的である．これは質点をもたず，かつ $J_{\mathrm{rad}}(f)$ 上に台をもつ．また，全ての $x \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し，$s = \delta(f)$ のとき Poincaré 級数 $P_s(f, x)$ は発散する．

特に，上の確率測度を幾何学的有限な有理写像 f の**標準密度** (canonical density) と呼ぶことにする．

系 1.14 f が幾何学的有限ならば，$J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ かまたは $\mathrm{H.dim}(J(f)) < 2$ である．

証明　$\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) = \delta(f) = 2$ と仮定すると，定理 1.13 より Lebesgue 測度は f の標準密度になる．よって台 $\hat{\mathbb{C}} = J_{\mathrm{rad}}(f) \subset J(f)$，$J(f) \subset \hat{\mathbb{C}}$ より $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ である．
■

系 1.15 ある円 C について $f^{-1}(C) = C$ ならば f は幾何学的有限であり，$J(f) = C$ かまたは $\mathrm{H.dim}(J(f)) < 1$ が成り立つ．

証明　$f^{-1}(C) = C$ より，C 上に分岐点は無い（存在すると，分岐点近傍での C の逆像は多岐に分裂してしまう）．また Montel の定理より $\{f^n\}$ は $\hat{\mathbb{C}} - C$ 上 正規族をなし，$J(f) \subset C$ である．すなわち $P(f) \cap J(f)$ は存在すれば放物的点であるから，f は幾何学的有限である．

では，$J(f) \neq C$ と仮定しよう．このとき，C 内の部分弧 $I \subset C - J(f)$ を原像が互いに共通部分を持たないようにとることができる．　μ を 1 次元 Hausdorff 測度とすると，

$$\begin{aligned}\int_I P_1(f, x) d\mu &= \int_I \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_\sigma^{-1} d\mu \\ &= \sum_0^{\infty} \mu(f^{-n}(I)) \\ &< \mu(C) < \infty.\end{aligned}$$

よって a.e. $x \in I$ について，$P_1(f,x) < \infty$ である．ゆえに収束指数の定義及び定理 1.13 より，$\mathrm{H.dim}(J(f)) = \delta(f) < 1$ が成り立つ．■

注意 1.k 幾何学的有限性がわかれば，あとは系 1.14 と同様に示すこともできる．$\mathrm{H.dim}(J(f)) = \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) = \delta(f) = 1$ と仮定すると，定理 1.13 より C 上の 1 次元 Lebesgue 測度は f の標準密度になる．よって台 $C = J_{\mathrm{rad}}(f) \subset J(f)$, $J(f) \subset C$ より $J(f) = C$ である．

この系において，f か f^2 のいずれかは Blaschke 積と共役であることがわかる．すなわち，C の内部を内部に写せば f が，外部に写せば f^2 が，単位円板を単位円板に写す写像と共役になる．

では，定理 1.13 の証明にとりかかろう．まずつぎの補題 1.16 と定理 1.17 を示す．

補題 1.16 f が幾何学的有限ならば，$\delta(f) \leq 2$ である．

証明　まず $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ としよう．f が幾何学的有限なので，$HS(f)$ は空集合である．また，$\Omega(f)$ は開，$P(f)$ は閉集合なので，$x \in \Omega(f) - P(f)$ なる x がとれる．よって $x \notin P(f) \cup HS(f)$ 及び命題 1.8 より，$\delta(f,x) \leq \delta(f) \leq 2$ が成り立つ．

次に $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ のときを示すが，**軌道体** (orbifold) についての結果を用いる．この場合幾何学的有限性より $P(f)$ は有限個の点であるから，$\hat{\mathbb{C}}$ を底空間とする f の軌道体 $\mathcal{O}_f$ を考えることができる [24, §A]．[24, Thm.A.4] より，このような $\mathcal{O}_f$ に対し，$\|f'\|_\rho \geq C > 1$ を満たす計量 ρ および定数 $C > 1$ が存在する．特に，ρ は $P(f)$ 上の各点で $|dz|/|z|^{1-1/m} = |d(z^{1/m})|$ $(m > 1)$ の形の特異性をもつので，$\hat{\mathbb{C}}$ から自身への恒等写像は計量 ρ から球面計量に関して Hölder 連続である．

さて，$B \subset \hat{\mathbb{C}} - P(f)$ を一定半径をもつ球面上の開球とし，B' を $f^{-n}(B)$ の任意の連結成分とする．このとき上のことから，B' 上 $\|(f^n)'\|_\rho = C^n \asymp |(f^n)'|_\sigma$ とできる．よって Koebe の歪曲定理を用いて，任意の $y \in B'$ について $|(f^n)'(y)|_\sigma \asymp C^n$ を得る．すなわち，f^{-n} によって B' の直径は指数関数的に減少する．

ここで A を球面上の面積測度とすると，固定した n と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\int_B \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_\sigma^{-2-\epsilon} dA(x) \leq A(f^{-n}(B)) \sup_{y \in f^{-n}(B)} |(f^n)'(y)|_\sigma^{-\epsilon} = O(C^{-n\epsilon})$$

であるから，n で和をとって

$$\int_B P_{2+\epsilon}(f,x) dA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O(C^{-n\epsilon}) < \infty.$$

ゆえに，a.e. $x \in B$ にたいし $\delta(f,x) \leq 2$ が成り立つ．すなわち，$\delta(f) \leq 2$ である．
■

定理 1.17 f が幾何学的有限ならば，$J(f)-J_{\mathrm{rad}}(f)$ は放物的点とその原像，および $J(f)$ に含まれる分岐点の原像からなる．特に，$J(f)-J_{\mathrm{rad}}(f)$ は可算集合である．

すなわち，幾何学的有限ならばJulia集合と非接Julia集合の違いははっきりしている．幾何学的有限なKlein群において非接極限集合は極限集合からカスプ点の可算集合を除いたものであった．

証明 $x \in J_{\mathrm{rad}}(f)$ のとき，$\limsup |(f^n)'(x)| = \infty$ より x の前方軌道上には分岐点も放物的点も無い．逆に，$x \in J(f)$ の前方軌道上に分岐点も放物的点も無いと仮定する．このとき $x \in J_{\mathrm{rad}}(f)$ を示そう．

まず x の前方軌道が $P(f)$ に入るときは，幾何学的有限性より $P(f) \cap J(f)$ の前方軌道は $J(f)$ 内の周期系に入ってしまう．仮定より前方軌道に放物的周期系はないので，これは反発周期系である．ゆえに，$x \in J_{\mathrm{rad}}(f)$ である．

では x の前方軌道が $P(f)$ に入らないときはどうだろうか．$P(f)$ の点は前方軌道が放物的周期系か反発的周期系に乗るので，x の軌道が近づいてもはね返される．そこで，$s = \limsup d(f^n(x), P(f))$ とおこう．さらに部分列をとって $s = \lim d(f^n(x), P(f))$ となるようにしておく．$n \gg 0$ のとき，f^{-n} の任意の枝は $B(f^n(x), s/2)$ 上単葉とできるから，そのうち1つ f_0^{-n} を $f_0^{-n}|B(f^n(x), s/2) \to V_n$ が単葉，$x \in V_n$ となるものとする．このとき $s' = s/2,\ r = s'/2$ として固定し，任意に小さい ϵ について適当な $n \gg 0$ と $\operatorname{diam} U_n < \epsilon$ なる U_n が存在して，$f^n|U_n \to B(f^n(x), r)$ が単葉となるようにできれば，定義通りに $x \in J_{\mathrm{rad}}(f)$ がいえる．

ところで，Koebeの歪曲定理より，全ての $x' \in B(f^n(x), r)$ について

$$\frac{2}{9}|(f_0^{-n})'(x)|s' \leq |f_0^{-n}(x') - f_0^{-n}(x)| \leq 2|(f_0^{-n})'(x)|s'$$

が成り立つ.(球面計量に直して考える，等の手間がかかるが）これより容易に $\operatorname{diam} U_n \asymp |(f_0^{-n})'(x)| \asymp |(f^n)'(x)|^{-1}$ がわかるから，後は $|(f^n)'(x)| \to \infty$ がいえれば証明は終わりである．

まず，$|P(f)| < 3$ のとき．このとき，f は $z \mapsto z^k$ と共役であり [24, Thm.3.5], $J(f) = \{|z| = 1\}$ 上 $|(f^n)'(x)| \to \infty$ は容易にわかる．それ以外のときは，$\hat{\mathbb{C}} - P(f)$ 上のPoincaré計量について $\|(f^n)'(x)\| \to \infty$ がいえる [24, Thm.3.6]．U_n は $P(f)$ から一定離れているので $\|(f^n)'(x)\| \asymp |(f^n)'(x)|$ とでき，よってこの場合も $|(f^n)'(x)| \to \infty$ がいえる．■

では目標の定理1.13の証明をしよう．

証明 (定理 1.13) f が幾何学的有限という仮定から，補題1.16より $\delta(f) \leq 2$ である．すなわちある $x \in \hat{\mathbb{C}}$ について $\delta(f, x) < \infty$ が成り立つ．よって定理1.9を適用して，$J(f)$ に台を持つ $\delta(f, x)$ 次元 f 不変密度 μ が構成できる．この密度は放物的点，反発周期点，およびそれらの原像に質点をもたないことに注意しよう．幾何学的有

限性より $P(f) \cap J(f)$ は有限個の（前）放物的点または（前）反発的周期点であり，それらとそれらの原像は分岐点も含めて質点でないのである．よって定理1.17より，μ は $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つことがわかる．さらに定理1.5から，そのような μ は次元 $\alpha(f)$ でなくてはならない．すなわち，$\delta(f,x) = \alpha(f)$ である．x は $\delta(f,x) < \infty$ ならばどれでもいいので，$\delta(f) = \alpha(f)$ がいえる．

また定理1.17より，$J(f) - J_{\mathrm{rad}}(f)$ は可算集合であるから，$\mathrm{H.dim}(J(f)) = \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f))$ は明らか．あとは定理1.2より全ての有理写像について $\alpha(f)$ と $\mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f))$ が等しいことから，定理の等式が成り立つ．

以下，$\delta = \delta(f)$ とする．全ての $x \in \hat{\mathbb{C}}$ に対しPoincaré級数 $P_\delta(f,x)$ が発散することは，μ が $J_{\mathrm{rad}}(f)$ に台を持つことから定理1.12の1よりいえる．

最後に μ が正規化すれば $\hat{\mathbb{C}}$ 上一意的な，質点をもたない $\delta(f)$ 次元密度であることを示そう．ν を $\hat{\mathbb{C}}$ 上に台を持つ $\delta(f)$ 次元 f 不変密度とし，正規化しておく．これが定理の主張する μ と等しいことをいえばよい．

まず ν が $J(f)$ に台をもつことを示そう．もしFatou集合 $\Omega(f)$ 上に台をもつとすると，命題1.8の2(c)より $P_\delta(f,x) < \infty$ なる $x \in \Omega(f)$ が存在する．これは $\hat{\mathbb{C}}$ 上全ての $P_\delta(f,x)$ が発散することに矛盾である．

次に質点を持たないことを示そう．もし ν に質点があったとすると，f 不変性より $P(f)$ には質点はない．また質点が周期点だとすると，再び f 不変性より放物的点でなくてはならないが，これは $P(f)$ の点であるからありえない．ゆえにある周期的でない点 $x \notin P(f)$ に質点をもつはずである．このとき，

$$P_\delta(f,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_\sigma^{-\delta} = \sum\sum \frac{\nu(y)}{\nu(x)} \le \frac{\nu(\hat{\mathbb{C}})}{\nu(x)} < \infty$$

であるが，これもまた，$\hat{\mathbb{C}}$ 上全ての x について $P_\delta(f,x)$ が発散することに矛盾である．

定理1.17より $J(f) - J_{\mathrm{rad}}(f)$ は可算集合であるから，質点が無いことより ν も $J_{\mathrm{rad}}(f)$ 上台をもつ．しかし定理1.5からそのような不変密度は高々1つであり，$\nu = \mu$ でなくてはならない．■

系 1.18 幾何学的有限な有理写像 f について，その正規化された f 不変密度で $J(f)$ に台をもつものは次のいずれかである．

- $\delta(f)$ 次元の標準密度
- 放物的点とその原像および $J(f)$ に含まれる分岐点の原像に，質点のみの台をもつ次元 $s > \delta(f)$ の測度

証明　定理1.5の証明の前半を参考にすれば，$s > \delta(f) = \alpha(f)$ なる次元の f 不変密度は $J_{\mathrm{rad}}(f)$ 上に台をもたず，よって定理1.17の可算集合 $J(f) - J_{\mathrm{rad}}(f)$ 上に台をも

つ．この集合は放物的点とその原像および $J(f)$ に含まれる分岐点の原像であった．
■

さて有理写像 f が**拡大的** (expanding) とは，$J(f)$ 自身が双曲的集合であるときをいう．これは $J(f)\cap P(f)=\emptyset$ または $J(f)=J_{\mathrm{rad}}(f)$ と同値であり，拡大的ならば幾何学的有限である [24, Thm.3.13]．定理 1.17，および拡大的写像の Julia 集合は分岐点，放物的点を含まないことから，これまでの結果とまとめて次の系を得る．

系 1.19 拡大的な写像 f について，その Julia 集合が台になる f 不変確率測度がただ 1 つ（標準的密度のみが）存在する．

要するに拡大的ならば系 1.18 の前者の場合しかないわけであるが，では拡大的でない幾何学的有限な有理写像については，系 1.18 の後者のような測度が任意の $s>\delta(f)$ に対し存在するのだろうか．実はこれは簡単で，$J(f)-P(f)$ に分岐点または放物的点 x が取れるから Poincaré 級数 $P_s(f,x)$ が発散し，(1.8) 式より μ_s が後者の条件を満たしているのである．

第2章　放物的分岐現象下における Julia集合の連続性（川平）

これまでは力学系の定量的な不変量を扱ってきたわけだが，加えてJulia集合自身も，広い意味での不変量ということができるであろう．その「集合」としての幾何学的な変化は，基盤である力学系の変化を色濃く反映しているはずである．例えば構造安定性をもつ力学系に対しては，摂動に対してもJulia集合の変化は安定していることが知られている．一方放物的分岐現象のもとでは，その変化はあまりに多様で，コントロールが極めて難しい．

この章では，放物的分岐に対して，その安定性の限界を探る．特に幾何学的有限な有理写像への収束列があるとき，Julia集合が収束するための十分条件を与えるのが目的である．

注意 2.a 一般に中立固定点を摂動させたとき，Julia集合の変化は極めて不安定である．簡単な例としては，Siegel円板の中心での不連続性がある．中心点 x を $f_n \to f$ なる写像列 f_n の反発周期点 x_n に摂動させたとき，$x_n \in J(f_n)$ であるが $x \in \Omega(f)$ である．一方，Rat_d の構造安定性をもつ点 f の近傍ではJulia集合の変化は連続であることが知られている．特に，f が拡大的（双曲的）なときもその近傍では連続であることが知られており，両者が同値ではないかと予想されている [24, Thm.4.2,Conj.4.5].

では，収束性（連続性）を考える枠組みを説明しておこう.「Julia集合」という概念は,「有理写像 f に対しあるコンパクト集合 $J(f)$ を対応させる写像」を定めている，とも考えられる．次数 d の有理写像全体のなす空間 Rat_d には係数の空間による位相が，$\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合全体のなす空間 $\mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ にはHausdorff位相が入るから，その意味で写像 $J : \mathrm{Rat}_d \to \mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ としての連続性を考えるのは自然であろう．

Rat_d の位相による収束列 $f_n \to f$ は，写像を多項式の商として表わしたときの係数がそれぞれ収束するようにできる．この写像の収束を**代数的に**収束すると呼ぶことにする（これは $f_n \to f$ が球面距離について一様収束することと同値である）．おそらくこれが最も自然な収束の定義だろうが，この収束が実際どの程度，Julia集合の収束に反映されるのだろうか.

実は一般に，Julia集合は有理写像の代数的収束に対し，下半連続性を持っているのである．集合の半連続性というのは，Hausdorff位相に関連して次のように定義される概念である．

Λ を位相空間としたとき，$\phi : \Lambda \to \mathrm{Comp}(X)$ の半連続性を次のように定義する．ここで X は，Hausdorff 位相の定義（1 章 2 節）で用いた距離空間である．ϕ が**上半連続** (upper semi-continuous) であるとは，Λ 内の任意の収束列 $\lambda_n \to \lambda$ と $\epsilon > 0$ に対し，$n \gg 0$ のとき

$$\phi(\lambda_n) \subset N_\epsilon(\phi(\lambda))$$

とできることとする．すなわち，

$$\partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるときを言う．また，ϕ が**下半連続** (lower semi-continuous) であるとは，Λ 内の任意の収束列 $\lambda_n \to \lambda$ と $\epsilon > 0$ に対し，$n \gg 0$ のとき

$$\phi(\lambda) \subset N_\epsilon(\phi(\lambda_n))$$

とできることとする．すなわち，

$$\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_n)) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるときをいう．

Hausdorff 位相の定義から，ϕ がある $\lambda \in \Lambda$ で連続であるとは，任意の収束列 $\lambda_n \to \lambda$ に対し $\delta(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \to 0$，すなわち $\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_n)) \to 0$ かつ $\partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \to 0$ が成り立つことである．言い換えれば，その点で上半連続かつ下半連続であることだといえる．具体的には，写像 $J : \mathrm{Rat}_d \to \mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ のある点での連続性を調べるとき，その点での上下の半連続性を調べればよい，ということである．

また，言葉遣いが楽になるので，このことを次のように言い換えておく．あるコンパクト集合の列 K_n があるとき，次のような 2 つのコンパクト集合 K_1, K_2 を考える．まず，その任意の近傍が $n \gg 0$ のとき全ての K_n と交わるような点の集合の中で，最大のもの K_1．次に，その任意の近傍が無限に多くの K_n と交わるような点達を含む集合で，最小のもの K_2．これらを $K_1 = \liminf K_n$，$K_2 = \limsup K_n$ と表わす．そしてこのとき，$K_n \to K$ は $K = K_1 = K_2$ と同値である．

では，Julia 集合の下半連続性を示す次の補題を証明しておこう．

補題 2.1 $f_n \to f$ が代数的収束のとき，$J(f) \subset \liminf J(f_n)$ である．

証明　$x \in J(f)$ の任意の近傍 U が，$n \gg 0$ のとき全ての $J(f_n)$ と交わることを言えばよい．これは簡単で，U には f の反発周期点が存在するから，$n \gg 0$ のとき，その反発周期点に収束する f_n の反発周期点列が U にすべて含まれる．■

この性質から，問題は Julia 集合の上半連続性がどこに現れるか，ということである．そして放物的分岐の中にそれを実現する，定理 2.10 の証明がこの章の目標である．そのためには，少し長い準備が必要となる．

2.1 放物的分岐のコントロール

この節では 2.2 節以降の諸定理を証明するための，補題的な定理や命題を与える．その目的は，放物的分岐の中から比較的コントロールしやすいものをピックアップすることと，放物的点周辺の力学系と Möbius 変換の力学系に位相的な共役を与えることである．

2.1.1 放物的周期系と優収束

まずは，原点に p 花弁点をもつ写像への収束列

$$f_n(z) = \lambda_n z + z^{p+1} + O(z^{p+2}) \ \longrightarrow\ f(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

を考察する．

知りたいのは放物的点の局所的な力学系についてであるから，その解析的写像としての芽 (germ) に着目する．

まずは舞台となる空間を構成しよう．$\hat{\mathbb{C}}$ の開領域 U を定義域とする正則写像 $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ の全体 $\mathcal{G}_U$ を考え，さらに U 全体について和をとった集合 $\bigcup \mathcal{G}_U$ を $\mathcal{G}$ とする．何か $f \in \mathcal{G}$ があったら，その定義域は $U(f)$ と表わすことにする．このとき $\mathcal{G}$ 上 $f_n \to f$ とは，全てのコンパクト集合 $K \subset U(f)$ に対し，$n \gg 0$ ならば $K \subset U(f_n)$ かつ $f_n|K \to f|K$ が一様収束であることをいう．この収束の定義より明らかに，$\mathcal{G}$ は Hausdorff でない位相空間になる．

このとき**写像・固定点** (maps with fixed points) の空間 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \times \hat{\mathbb{C}}$ を

$$\mathcal{F} = \{(f, c) \mid c \in U(f) \text{ かつ } f(c) = c\}$$

と定義し，$\mathcal{G}$ と $\hat{\mathbb{C}}$ の積位相から相対位相を入れておく．この $\mathcal{F}$ に，優収束を定義することになる．

次に $f'(c) = 1$ なる写像・固定点 $(f, c) \in \mathcal{F}$ について，その固定点 c の**重複度**が $r > 1$ であるとは，c を原点に写す適当な局所座標をとることにより，$f(z) = z + z^r + O(z^{r+1})$ と書けることをいう．この重複度 r を $\mathrm{mult}(f, c)$ と表わすことにする．このとき $p = r - 1$ として，1 章にならって (f, c) は p **花弁放物的** (parabolic with p petals) であるという．ここで局所座標により計算すれば，任意の自然数 n に対し (f^n, c) も p 花弁放物的であることがわかる．

さて，優収束を定義するにあたって，重複度について

$$\mathrm{mult}(f, c) = r > 1 \iff \begin{cases} f'(c) &= 1 \\ f^{(i)}(c) &= 0 \quad (1 < i < r) \\ f^{(r)}(c) &\neq 0 \end{cases}$$

であることに注意しておこう．ただし，微分は局所座標についてのものである．$f'(c)=1$，$\mathrm{mult}(f,c)=r$ なる (f,c) に対し $\mathcal{F}$ 上の収束列 $(f_n,c_n)\to(f,c)$ があるとき，これが**優収束** (dominant convergence) とは，ある M が存在して

$$|f_n^{(i)}(c_n)|\leq M|f_n'(c_n)-1|$$

が常に成り立つことをいう．上式の左辺は $|f_n^{(i)}(c_n)-0|$ と解釈すればわかりやすい．すなわち，優収束とは $f_n'(c_n)$ が $f_n^{(i)}(c_n)$ の収束状態を支配する (dominate) ような写像・固定点の収束である．特に，$r=2$ のときはすべて優収束である．

より一般に，(f,c) について $f'(c)=\lambda$ が1の原始 q 乗根であるとき (f,c) を**放物的**といい，(f^q,c) が p 花弁を持つとき (f,c) も p **花弁放物的**という．また $(f_n,c_n)\to(f,c)$ が**優収束**するとは $f_n\to f$ が $\mathcal{G}$ での収束であり，かつ $(f_n^q,c_n)\to(f^q,c)$ が優収束であることをいう．

また $f'(c)$ が1の累乗根でないときにも，全ての $\mathcal{F}$ での収束 $(f_n^q,c_n)\to(f^q,c)$ を優収束と呼ぶことにする．

次に，優収束性と座標変換について述べておこう．ここで収束列 $(g_n,d_n)\to(g,d)$ と $(f_n,c_n)\to(f,c)$ が**座標変換**により共役であるとは，ある $\mathcal{G}$ 内の全単射列 $\phi_n\to\phi$ が存在して，以下の関係を満たしながらの収束列であるときをいう．

$$(g_n,d_n)=(\phi_n\circ f_n\circ\phi_n^{-1},\phi_n(c_n))$$
$$(g,d)=(\phi\circ f\circ\phi^{-1},\phi(c))$$

このとき，次の命題は基本的である．

命題 2.2 座標変換をしても優収束性は保存される．

証明 ϕ_n が平行移動のときは，明らかに優収束性は保存される．よって $z\mapsto z-c_n$ なる形の平行移動を f_n,f,g_n,g にほどこして，$c_n=c=d_n=d=0$ と仮定してよい．また一般に $f'(0)$ は1の累乗根だが，優収束の定義より $f'(0)=1$ と仮定してよい．

さて，$\lambda_n=f_n'(0)\to1$，$r=\mathrm{mult}(f,0)$ としよう．このとき，

$$f_n(z)=z+z\epsilon_n(z)+O(z^r)$$

と書くことにする．ここで，$\epsilon_n(z)$ は $r-2$ 次多項式で，係数は $M|\lambda_n-1|$ でおさえられる（特に，定数項は λ_n-1 である）．$\zeta=\phi_n(z)$ とおくと，

$$g_n(\zeta)=\phi_n(f_n(z))=\phi_n(z+z\epsilon_n(z)+O(z^r))$$

これを z 中心に Tayler 展開して，

$$=\phi_n(z)+\phi_n'(z)\epsilon_n(z)z+\cdots+\frac{\phi_n^{(r-1)}(z)}{(r-1)!}\epsilon_n^{r-1}(z)z^{r-1}+O(z^r)$$

ここで $g_n(\zeta)=\zeta+\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i=\lambda_n\zeta+\sum_{i=2}^{\infty}b_i\zeta^i$ とおいてみると，上式より $1\le i<r$ のとき a_i は ϕ_n を級数展開した係数（優収束性とは無関係）と ϵ_n の各係数（優収束性に関わる）によって決まるから，$|a_i|=O(|\lambda_n-1|)$ である．また $z=\phi_n^{-1}(\zeta)=O(\zeta)$ より，$g_n(\zeta)=\zeta+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_n^{-1}(\zeta)^i$ であるから，$2\le i<r$ のとき b_i は a_i $(1\le i<r)$ と ϕ_n^{-1} の係数に依存する．よって ϕ, ϕ_n^{-1} の z,ζ による級数展開の係数と M に依存する $M'>0$ が存在して，$|b_i|\le M'|\lambda_n-1|$ とできる．ゆえに，$(g_n,0)\to(g,0)$ は優収束である．■

優収束列の正規化

さらに優収束列は次の定理のかたちに正規化できる．

定理 2.3 $\mathrm{mult}(f,c)=r$ なる優収束列 $(f_n,c_n)\to(f,c)$ は，うまく部分列と座標変換をとれば $c=c_n=0$ かつ

$$\begin{aligned}f_n(z)&=\lambda_nz+z^r+O(z^{r+1})\\ f(z)&=z+z^r+O(z^{r+1})\end{aligned}$$

とできる

証明 座標変換により，$c=c_n=0$ としておく．そもそも f は $f(z)=z+Az^r+O(z^{r+1})$ $(A\neq 0)$ の形をしているから，証明は f_n の共役と部分列をとることで z^s $(2\le s<r)$ の項を消去できることを言えばよい．よって，$n\gg 0$ のとき全ての f_n について $f_n^{(s)}(0)\neq 0$ となる最小の s $(2\le s\le r)$ をとろう．すなわち，$A_n\neq 0$ として

$$f_n(z)=\lambda_nz+A_nz^s+O(z^{s+1})$$

と書くことができる．$s=r$ ならば $z\mapsto A_n^{1/s}z$ なる座標変換をすれば終わりであるから，$s<r$ とする．

さて，天下り的だが

$$\phi_n(z)=z-B_nz^s\ ,\quad B_n=\frac{A_n}{\lambda_n(\lambda_n^{s-1}-1)} \tag{2.1}$$

とおこう．優収束性より $|A_n|\le M|\lambda_n-1|$ なる $M>0$ が存在するから，

$$|B_n|\le\frac{M|\lambda_n-1|}{|\lambda_n(\lambda_n^{s-1}-1)|}=\frac{M}{|\lambda_n||\lambda_n^{s-2}+\cdots+1|}\to\frac{M}{s-1}.$$

すなわち，$|B_n|$ は有界である．よって $\phi_n'(z)=1-sB_nz^{s-1}$ より，0 のある十分小さな近傍では n によらず $\phi_n'(z)\neq 0$ であり，単射である．また $|B_n|$ の有界性より，$\phi_n(z)\to\phi(z)=z-Bz^s$ となる部分列を定めることができる．冗長になるので計

算は割愛するが，ここで $\zeta = \phi_n(z)$ とおき，$O(z) = O(\zeta)$ であることに注意して $\phi_n \circ f_n \circ \phi_n^{-1}(\zeta)$ を計算すると，

$$\phi_n \circ f_n \circ \phi_n^{-1}(\zeta) = \lambda_n \zeta + (A_n + \lambda_n B_n - \lambda_n^s B_n)\zeta^s + O(\zeta^{s+1})$$

となり,（2.1）より見事 ζ^s の係数は 0 となる．座標変換において優収束性は保たれるので，$\phi_n \circ f_n \circ \phi_n^{-1} \to \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ を改めて $f_n \to f$ とおくことにする．このとき新しい f はやはり $f(z) = z + Az^r + O(z^{r+1})$ の形をしていることに注意しよう．

この操作を有限回繰り返すことで，

$$f_n(z) = \lambda_n z + A_n z^r + O(z^{r+1})$$

なる形の収束列を得る．最後に $A_n = A = 1$ となるように座標変換をすればよい．■

証明を振り返って，優収束性の効き目を認識しておこう．(2.1) 式において $|A_n| = O(|\lambda_n - 1|)$ でないならば，B_n は発散してしまう．すなわち ϕ_n は収束せず，定理のような正規化は途中で破綻してしまう．このことが一体，どのように影響するのだろうか．

ある有理写像が放物的固定点をもつ場合，その有理写像への収束列と対応する Julia 集合列の関係はいわゆるカオス的であり，コントロールが極めて難しい．吸引鉢の収束は,（線形化によって）本質的には吸引固定点の固有値の収束のみによって処理できるのに対し，放物的吸引鉢の場合は固定点付近だけを局所的に見ても，極めて多様な変化が考えられるのである．

例えば，固有値の絶対値を 1 に保ったまま摂動させたときの変化は言うまでもないだろう．しかし反発固定点になるように摂動させたときにも，次のような現象が考えられる．

原点を固定点にもつような写像の収束列 $f_n \to f$ を

$$\begin{aligned} f_n(z) &= (1 + \epsilon_n^2)z + \epsilon_n z^2 + z^4 \\ \longrightarrow f(z) &= z + z^4 \end{aligned}$$

のように定める．単純に正の実軸に沿って $\epsilon_n \searrow 0$ として原点での局所的な力学系を調べると，f_n は常に 1 花弁的なのに対し，f は 3 花弁的である．ϵ_n を一般の複素数で 0 に近づけた場合など，もっと複雑であろう．このように，放物的点での局所的な性質は固有値以外の要素が強く影響する．その点優収束列に関しては，上の定理より p 花弁点へ p 花弁的に収束することが分かる．この場合各花弁は対称性を保ちながら収束するから，比較的扱いやすいわけである．

では，優収束の具体的条件として次の命題を証明しよう．

命題 2.4 (f, c) を p 花弁放物的とし，$f'(c) = \lambda$ は 1 の原始 p 乗根とする．このとき，$\mathcal{F}$ での収束列 $(f_n, c_n) \to (f, c)$ は全て優収束する．

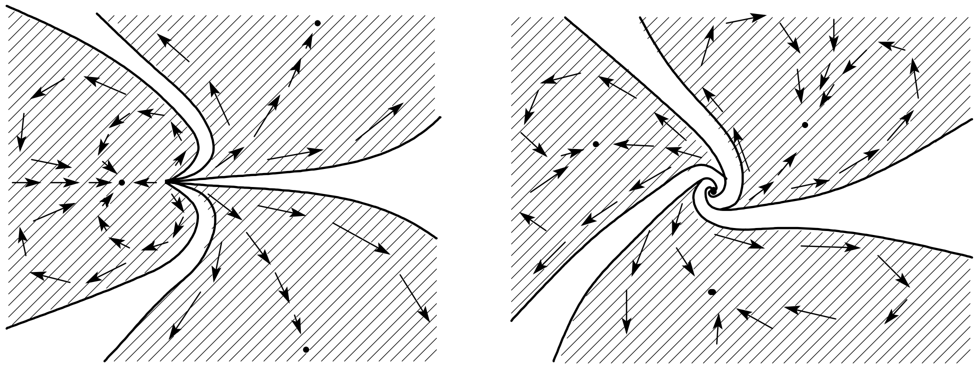

図 2.1: 3 花弁点の摂動．左は上の例の原点周辺の様子．優収束的でない形に摂動したため，分岐した 3 つの吸引固定点は非対称に分布する．一方右は優収束的に摂動したもので，力学系は一定対称性を持つ．

証明　上の定理のときと同様に，$c = c_n = 0$ となるように平行移動しておく．$\lambda_n = f_n'(0)$ としよう．このとき，$f_n \to f$ を座標変換により

$$f_n(z) = \lambda_n z + O(z^{p+1}) \;\to\; f(z) = \lambda z + O(z^{p+1}) \tag{2.2}$$

の形にできることを示せば，

$$f_n^p(z) = \lambda_n^p z + O(z^{p+1}) \to f^p(z) = z + O(z^{p+1})$$

となり明らかに優収束であるから，命題は証明される．

それにはやはり，上の定理と同じ方法を用いる．今度は $s = 2$ から p まで z^s の項の消去を続ける．$\phi_{s,n}(z) = z - B_{s,n} z^s$ について，f_n の z^s の係数 $A_{s,n}$ が $f_n \to f$ で収束すること，$\lambda^{s-1} \neq 1$ であることから $B_{s,n}$ は収束し，$\phi_{s,n}$ は座標変換 ϕ_s に収束する．あとは $\phi_{p,n} \circ \cdots \circ \phi_{2,n} \to \phi_p \circ \cdots \circ \phi_2$ による座標変換により，(2.2) の形を得る．■

また次の命題は前放物的な分岐点を扱うのに役立つ．

命題 2.5 $(f_n, 0) \to (f, 0)$ を優収束列とする．このとき収束列 $(g_n, 0) \to (g, 0)$ が

$$g_n(z)^d = f_n(z^d)$$

なる関係を満たすとき，$(g_n, 0) \to (g, 0)$ は優収束列である．

証明　まず，$g'(0) = f'(0) = 1$ で $(f, 0)$ が p 花弁放物的な場合を考えよう．このとき，$(g, 0)$ は dp 花弁放物的である（1 章参照）．

命題2.2により優収束列 $f_n \to f$ に座標変換をして，$f_n(\zeta) = \lambda_n \zeta(1 + O(\zeta^p))$ としてよい．さらにこの座標変換と $z \mapsto z^d$ の合成を引き戻し，適当な座標近傍を取り直せば，

$$g_n(z) = f_n(z^d)^{1/d} = \lambda^{1/d} z\big(1 + O(z^{dp})\big)$$

とできる．このとき，優収束性は明らかである．

$f'(0) = \lambda$，λ が1の原始 p 乗根のときは，$g'(0) = \lambda^{1/d}$（1の原始 dp 乗根）となる．このときの優収束性も上の同様に示される．■

以上の定理，命題では固定点を0にして正規化したが，以下でこれらを応用するときには，固定点を無限遠点に写して適用することになる．

2.1.2　放物的力学系の線型化

ここでの目的は，優収束に対応する放物的分岐がより扱いやすい形へ変形できることを示すことである．まず無限遠点を1花弁点とするような写像が,「ほとんど等角」な擬等角写像によって局所的に Möbius 変換 $T(z) = z + 1$ と共役になることがわかる．それだけではなく，一定条件下では収束列 $f_n \to f$ も Möbius 変換の収束列 $T_n(z) = \lambda_n z + 1 \to T(z)$ と共役になるのである．このような Möbius 変換によるモデリングにより，以降の Julia 集合，Hausdorff 次元についての考察が容易になる．

とりあえず，3つの主定理をまとめておこう．

定理 2.6 無限遠点を放物的固定点とするような写像の無限遠点での芽を

$$f(z) = z + 1 + O(1/z)$$

とする．このとき任意に小さな ϵ に対して，f はある無限遠点の近傍で $(1+\epsilon)-$ 擬等角写像により Möbius 変換 $T(z) = z + 1$ と共役にできる．

次に $\mathbb{C}^*$ 上の収束列 $\lambda_n \to 1$ について，天下り的だが条件を設定しておく．$\lambda_n = \exp(L_n + i\theta_n)$ としたとき，$\lambda_n \to 1$ が**非接的** (radially) であるとは

$$\theta_n = O(|L_n|)$$

を満たすことをいう．また**円接的** (horocyclically) であるとは

$$\theta_n^2 / L_n \to 0$$

を満たすときをいう．またいずれの場合についても，$\lambda_n = 1$ のときを含むものとする．

注意 2.b 正則写像 f に対し $f(c)=c\in\mathbb{C},\ f'(c)=\lambda$ であるとき，

$$\iota(f,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-f(z)}$$

を**正則指数** (holomorphic index) と呼ぶ．ただし積分路は円内に他の固定点を含まないように r を十分小さくとる．例えば，$\lambda\neq 1$ のとき $\iota(f,c)=1/(1-\lambda)$ である．この値は座標変換に対し不変である．逆に座標変換を用いて，無限遠点が固定点である場合の値を定義できる [26]．

円接的収束は，この正則指数を用いても定義できる．すなわち $f_n\to f$ なる収束列があって $f_n(c_n)=c_n\to f(c)=c,\ f_n'(c_n)=\lambda_n\to f'(c)=1$ であるとき，$\lambda_n\to 1$ が円接的であることは $|\mathrm{Re}(\iota(f_n,c_n))|\to\infty$ と同値である．

定理 2.7 無限遠点の近傍を中心に正規化された収束列 $f_n\to f$ が

$$f_n(z)=\lambda_n z+1+O(1/z)$$
$$f(z)=z+1+O(1/z)$$

のかたちで，$\lambda_n\to 1$ は円接的な収束であるとする．このとき任意に小さな ϵ に対して，無限遠点の近傍で定義された $(1+\epsilon)$-擬等角写像列 $\phi_n\to\phi$ により，$f_n\to f$ は Möbius 変換の収束列 $T_n(z)=\lambda_n z+1\to T(z)=z+1$ と共役である．

定理 2.8 無限遠点の近傍を中心に正規化された収束列 $f_n\to f$ が

$$f_n(z)=\lambda_n z+z^{1-p}+O(1/z^p)$$
$$f(z)=z+z^{1-p}+O(1/z^p)$$

のかたちで，$\lambda_n\to 1$ は円接的な収束であるとする．このとき任意に小さな ϵ に対して，無限遠点の近傍で定義された（収束するとは限らない）$(1+\epsilon)$-擬等角写像 $\phi_n,\ \phi$ により，$f_n\to f$ は次のような収束列 $T_n\to T$ と共役である．

$$T_n(z)=\lambda_n(z^p+1)^{1/p}$$
$$T(z)=(z^p+1)^{1/p}$$

ただしうまく部分列をとって $\phi_n\to\phi$ とできる．

これら収束列 $f_n\to f$ は，上で扱った写像・固定点の収束列を正規化してさらに原点を無限遠点に写したものであるから，逆に，任意の放物的写像・周期点への優収束列について局所的に上と同様な結果が得られるわけである．

ちなみに，定理のいうところの擬等角写像による変形は,「ほとんど」等角にできるが，完全に等角にすることは一般に不可能である．これは放物的固定点をもつ解析的芽の等角共役類 (moduli) が無限次元となることに起因する（Ecalle-Volonin moduli）．一方，反発・吸引的固定点をもつ解析的芽の場合，常に等角写像で線形化可能であった．従って等角共役類は固有値分（複素 1 次元）の自由度しかない．放物的固定点はこの意味でも特殊なのである．

定理 2.6 の証明

では，最も基本的な定理 2.6 を証明しよう．アイディアとしては，無限遠点まわりの f を Riemann 球面の自己擬等角写像に拡張し，複素構造の擬等角変形により Möbius 変換との共役をつくる，というものである．

証明 (定理 2.6) $\hat{\mathbb{C}}$ を 2 つの円板 $D \sqcup B$ に分割する．ここで $D = \{|z| > R\}$ とし，R は $f|D$ が単射になるように十分大きくとる．ここで次の補題を示そう．

補題 $f|D$ は $F : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ なる擬等角写像で，全ての $n > 0$ に対し最大歪曲度が $K(F^n) = 1 + O(R^{-1})$ となるものに拡張できる．

この補題によって，F のなす力学系はいわゆる擬正則 (quasiregular) 性をもつことになり，次の Sullivan の結果 [33, Theorem9] に当てはめることができる．すなわち，ある Riemann 面上の自己擬等角写像のつくる力学系を写像の合成に関する半群とみなしたとき，各元の最大歪曲度が一様に上から押さえられるならば，その力学系は等角力学系と共役である，というものである．

そのような共役を与えるには，Riemann 球面上の複素構造を適当に入れ替えることにより，F を等角自己同型（この場合 Möbius 変換）とみなせばよい．そのためには F 不変，すなわち $f^*\mu = \mu$ なる Beltrami 微分 μ を構成して，それを係数に持つ Beltrami 方程式を可測型 Riemann 写像定理（measurable Riemann mapping theorem) によって解けば，その解があたらしい複素構造を与えるようにできる．

証明 (補題) 実際にそのような F を構成することができる．例えば，$\overline{D} = \{|z| \geq R\}$ 上

$$F(z) = (f|D)(z) = z + 1 + \epsilon(z)$$

と書くことにする．この $\epsilon(z) = O(R^{-1})$ の部分を用いて $z \in B$ のときは

$$F(z) := z + 1 + \epsilon(R^2/\bar{z})$$

と定義する．点 $R^2/\bar{z} \in D$ は点 $z \in B$ の円 $\{|z| = R\}$ に対する鏡像であるから，簡単な計算により $K(F) = 1 + O(R^{-2})$ であることが分かる．よって問題は $K(F^n)$ が一様に押さえられるか，ということになる．F は D 上等角であるから，B 上の擬等角性に注目すれば十分である．そこで，ある点が B 内を通過するときに要する F の反復回数が問題になる．

F は $\hat{\mathbb{C}}$ 上一様に $F(z) = z + 1 + O(R^{-1})$ の形をしているから，ある M が存在して，$|F(z) - (z+1)| \leq MR^{-1}$ とできる．これより

$$n - nMR^{-1} \leq \mathrm{Re}(F^n(z) - z) \leq n + nMR^{-1}$$

であるから，R が十分大きければ $\mathrm{Re}(F^n(z) - z) \asymp n$ であることがわかる．よって B の半径は R だから，$O(R)$ 程度のオーダーで反復すれば B 内を通過できる．ゆえに，$K(F^n)$ は高々 $(1 + O(R^{-2}))^{O(R)} = 1 + O(R^{-1})$ である．□

注意 2.c McMullen は F を次のように構成している．まず

$$\rho_D = \frac{2R|dz|}{|z|^2 - R^2}$$

を D 上の Poincaré 計量とする．また $Sf(z)$ を f の Schwarz 微分とすれば，無限遠点近傍における正則 2 次微分 $Sf(z)dz^2$ が定まる．ここで Schwarz 微分を評価すると $Sf(z) = O(z^{-4})$ ，さらに $\rho_D^2 = O(R^2) \cdot O(z^{-4})|dz|^2$ より，R は十分大きいから

$$\|Sf\|_D = \sup_{z \in D} \frac{|Sf(z)dz^2|}{\rho_D^2} = O(R^{-2}) < \frac{1}{2}$$

とできることがわかる．よって Ahlfors-Weill 拡張により f は擬等角写像 $F : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ で，$F|D = f|D$ かつ

$$K(F) = \frac{1 + \|Sf\|_D}{1 - \|Sf\|_D} = 1 + O(R^{-2})$$

なるものに拡張できる．ここで，

$$F(z) = z + 1 + O(R^{-1}) \tag{2.3}$$

であることを示そう．D 上は明らかなので，B 上を示せばよい．まず，$F(z) - 1$ が $\pm R$ を固定する場合を考える．このとき，$\hat{\mathbb{C}} - \{\pm R, \infty\}$ の Poincaré 計量を ρ とすると，$F(z) - 1$ は各点を ρ について $\log K(F) = O(R^{-2})$ 程度しか動かさない．ゆえに γ を z と $F(z) - 1$ を結ぶ測地線とすると，$\rho = O(R^{-1})|dz|$ より，ある $M > 0$ が存在して，

$$O(R^{-2}) \ = \ \int_\gamma \rho \ \geq \ \frac{M}{R} \int_\gamma |dz| \ \geq \ \frac{M}{R} |F(z) - 1 - z|$$

すなわち，$F(z) - 1 - z = O(R^{-1})$ を得る．

次に $F(z) - 1$ が $\pm R$ を固定しない場合を考えよう． それでも $\pm R$ は $O(R^{-1})$ 程度しか動かない．ここで，

$$\begin{aligned} R_1 &:= \ F(-R) - 1 \ = -R + O(R^{-1}) \\ R_2 &:= \ F(R) - 1 \ = \ R + O(R^{-1}) \end{aligned}$$

としよう．このときアファイン写像 $h(z) = az + c$ を

$$\begin{aligned} a &:= \ \frac{2R}{R_2 - R_1} \ = \ 1 + O(R^{-2}) \\ c &:= -R \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \ = \ O(R^{-1}) \end{aligned}$$

と定めると，$h(R_1) = -R,\ h(R_2) = R$，すなわち $h(F(z)-1)$ は $\pm R$ を固定する．あとは先ほどと同様にして $h(F(z)-1) = z + O(R^{-1})$ であることが分かる．ゆえに，

$$F(z) - 1 \ = \ h^{-1}\big(z + O(R^{-1})\big) \ = \ z + O(R^{-2})z + O(R^{-1})$$

B 上 $O(R^{-2})z$ は高々 $O(R^{-1})$ であるから，(2.3) が示された．$K(F^n)$ の有界性は補題の証明と同様にやればよい．

さて定理 2.6 の証明を完結させよう．任意の ϵ について適当な R をとれば，$K(F^m) < 1 + \epsilon\ (m \in \mathbb{Z})$ となるように $F(z) = z + 1 + O(R^{-1})$ を構成できる．このとき，たとえば R は十分大きくて，$E = \{\mathrm{Re}\ z > 2R\}$ は $F(E) \subset E$ を満たすとしてよい．E 上の標準的な複素構造を σ_0 とする．$m \geq 0$ のとき $F^{-m}(E)$ 上の概複素構造を $\sigma_F = (F^m)^*(\sigma_0)$ と定めると，$F^*\sigma_F = \sigma_F$ を満たす．σ_F に対応する F 不変 Beltrami 係数は $\|\mu\| = O(\epsilon)$ をみたすので，可測型 Riemann 写像定理を適用し，定理 2.6 のような共役を得る．■

くりこみと定理 2.7 の証明

次に定理 2.7 の証明に入るが，その前に最も手の込んだアイディアである,「くりこみ」や「第一回帰写像」を解説しておこう．

簡単のため線形写像，$f(z) = \lambda z$ を考える．特に $\log\lambda = L + i\theta,\ L > 0,\ 0 < \theta < \pi$ としておく．すなわち，$|\lambda| > 1,\ \mathrm{Im}\lambda > 0$ のときを考える.（従って，反発的固定点周りの力学系を線形化したものと考えてよい.）このとき，領域

$$S = \{z \in \mathbb{C}^* \mid 0 \leq \arg z \leq \theta\}$$

に対し，$z \in S$ を $f(z)$ に貼り合わせることによってできる Riemann 面を S/f を書くことにしよう． $z \in S$ に写像 f を反復すると，原点の周りを一回りして，また S に帰ってくる．この帰ってきた点を $F(z)$ と定める．すなわち，$f^N(z) \in S$ となるような最小の $N > 1$ に対し，$F(z) := f^N(z)$ とするのである．F はそのままで S/f から自身への双正則写像となっていることに注意しよう．この $F : S/f \to S/f$ を**第一回帰写像** (first return map) と呼ぶ．さらにこれを用いて，f の**くりこみ** (renormalization) を

$$\begin{aligned} Rf : S/f &\to S/f \\ z &\mapsto F(z) \end{aligned}$$

と定める．

明らかに S/f は $\mathbb{C}^*$ と同相であるが，さらに $0,\ \infty \in \partial S$ をそれぞれ $0,\ \infty \in \partial\mathbb{C}^*$ に対応させるような同型を構成しよう．S の定義されている $\mathbb{C}^*$ への普遍被覆 $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*,\ z = \pi(w) = \exp(w)$ により，S は帯状領域 $\tilde{S} = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im} w \leq \theta\}$

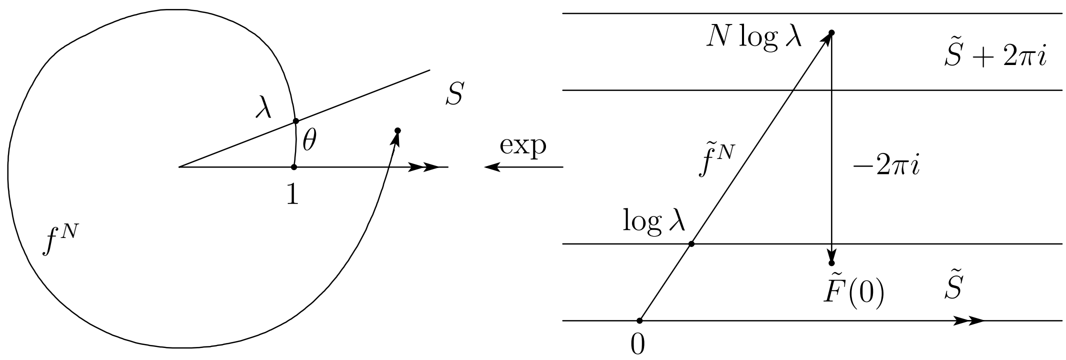

図 2.2: 第一回帰写像

で覆われる．このとき，f の持ち上げ $\tilde{f}$ は $\pi \circ f = \tilde{f} \circ \pi$ より $\tilde{f}(w) = w + \log \lambda$ であり，F の持ち上げ $\tilde{F} : \tilde{S} \to \tilde{S}$ について

$$\tilde{F}(w) = \tilde{f}^{N_w}(w) - 2\pi i = w + N_w \log \lambda - 2\pi i$$

となる．ただし N_w は $f^{N_w}(w) \in \tilde{S} + 2\pi i$ となる自然数である．ここで $\tilde{S}/\tilde{f}$ を S/f と同様に構成すれば，これらは明らかに同型である．ここで新たに ζ を座標とする $\mathbb{C}^*$ を考え，写像（正確には普遍被覆の制限）$\zeta = \pi_R(w) = \exp(2\pi i w / \log \lambda)$ によって $\tilde{S}/\tilde{f}$ と $\mathbb{C}^*$ の同型を作る．すると

$$\begin{aligned}
\pi_R \circ \tilde{F}(w) &= \exp\left(\frac{2\pi i(w + N_w \log \lambda - 2\pi i)}{\log \lambda}\right) \\
&= \exp\left(\frac{4\pi^2}{\log \lambda}\right) \cdot \exp\left(\frac{2\pi i w}{\log \lambda}\right) \\
&= \exp\left(\frac{4\pi^2}{\log \lambda}\right) \cdot \pi_R(w)
\end{aligned}$$

となることから，もとの Rf の作用は同型 $S/f \cong \tilde{S}/\tilde{f} \cong \mathbb{C}^*$ を経て，この $\mathbb{C}^*$ 上

$$\begin{aligned}
Rf &: \zeta \mapsto R(\lambda) \cdot \zeta \\
R(\lambda) &:= \exp\left(\frac{4\pi^2}{\log \lambda}\right)
\end{aligned}$$

という形で線形に作用していることになる．

このように，一見複雑な回帰的軌道も，巧みな同一視で非常に単純な写像に帰着できるわけである．もしある力学系が固定点中心の扇形にたいし回帰的に振る舞うなら，それに上のような議論を適用できる．

ところで

$$\log|R(\lambda)| = \mathrm{Re}(\log R(\lambda)) = \mathrm{Re}\left(\frac{4\pi^2}{L+i\theta}\right)$$
$$= \frac{4\pi^2 L}{L^2+\theta^2} = \frac{4\pi^2}{L+\theta^2/L}$$

であるから，次の命題を得る．

命題 2.9 $|\lambda_n| > 1$ すなわち $L_n > 0$ のとき，$\lambda_n \to 1$ が円接的であることは $R(\lambda_n) \to \infty$ と同値である．

では，定理 2.7 の証明に入ろう．

証明　(定理 2.7) まず定理 2.6 と同様にして，$D = \{|z| > R \gg 0\}$, $B = \hat{\mathbb{C}} - D$ に対し，$f_n|D$ を $(1+O(R^{-2}))$-擬等角写像 $F_n : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $F_n(z) = \lambda_n z + 1 + O(R^{-1})$ に Ahlfors-Weill 拡張する．ここでもやはり，全ての点の F_n による前方，後方軌道が高々 $O(R)$ 個しか B を通過しないことを示し，F_n が affine 写像 T_n に共役であることをいいたい．具体的には，次の補題を示さなくてはならない．

補題　n, $R \gg 0$ に対し，ある正整数 $I = O(R)$ が存在して，$|i| \geq I$ のとき

$$F_n^i(B) \cap B = \emptyset$$

とできる．

証明　$\lambda_n = 1$ ならば定理 2.6 が適用できるから，最初から $\lambda_n \neq 1$ としてよい．$n \gg 0$ のとき，F_n の無限遠点近傍におけるもうひとつの固定点を a_n としよう．このとき，Rouché の定理によって

$$a_n = \frac{1}{1-\lambda_n} + O(1)$$

であることがわかる（たとえば $b_n = (1-\lambda_n)^{-1}$ とおいて，円周 $|z - b_n| = r$ 内で $f_n(z) = z$ と $\lambda_n z + 1 = z$ の根の数が等しくなるような r を評価すればよい）．また ∞ の近傍で $f_n'(z) = \lambda_n + O(1/z^2)$ であるから，

$$\lambda_n' = f_n'(a_n) = \lambda_n + O(|1-\lambda_n|^2)$$

が成り立つ．このとき，直接計算によって $\lambda_n' \to 1$ も円接的に収束することがわかる (正則指数を用いる方法もある）．すなわち無限遠点と a_n の挙動は，固有値も互いの逆数に近くほぼ対称的である．よって簡単のために，必要ならば適当な Möbius 変換をほどこして無限遠点と a_n を交換し，条件 $|\lambda_n| > 1$ を仮定しよう．

・$\lambda_n \to 1$ **が非接的なとき**

ある $M > 0$ が存在して，$n \gg 0$ のとき $|\theta_n| < ML_n$ としてよい．

$T_n(z) = \lambda_n z + 1$ の固定点を $b_n = (1-\lambda_n)^{-1}$ とする．$|\lambda_n| > 1$ を仮定しているから，b_n は T_n の反発（湧き出し）固定点であり，T_n による軌道は，b_n から遠ざかるはずである．F_n もほぼ同様のはずであるから，計算で確かめてみよう．F_n を変形すると，

$$\begin{aligned} F_n(z) - b_n &= \lambda_n(z - b_n) + O(R^{-1}) \\ |F_n(z) - b_n| &= |\lambda_n||z - b_n| + O(R^{-1}) \end{aligned}$$

となることが分かる. ここで $n \gg 0$ とし $|b_n| = |1-\lambda_n|^{-1}$ が十分大きいとして，$z \in B$ のとき $|z - b_n| > |b_n|/2$ としてよい．よって，

$$\begin{aligned} |F_n(z) - b_n| - |z - b_n| &= (|\lambda_n| - 1)|z - b_n| + O(R^{-1}) \\ &\geq (|\lambda_n| - 1)\frac{|b_n|}{2} + O(R^{-1}) \\ &= \frac{|\lambda_n| - 1}{2|\lambda_n - 1|} + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{|\lambda_n| - 1}{2|\lambda_n - 1|} \approx \frac{L_n}{2|L_n + i\theta_n|} > \frac{1}{2(M+1)}$$

であるから，R を十分大きくすれば

$$|F_n(z) - b_n| - |z - b_n| > \frac{1}{2M+3}$$

とできる．すなわち F_n の反復により，z は b_n 中心の同心円の外へ外へと移っていくことになる．ゆえに z の軌道は F_n の高々 $O(R)$ 回の反復で B を通過し，再び戻ることはない．

F_n による後方軌道に関しても，a_n と無限遠点の対称性より同様に示される．

・$\lambda_n \to 1$ **が円接的だが非接的でないとき**

ここでは $\theta_n^2/L_n \to 0$ かつ $|\theta_n| > L_n$ と仮定してよい．これは，$L_n \to 0$ の収束速度に比べて，$\theta_n \to 0$ の収束速度が遅い状態だと考えられる．すなわち，F_n により a_n から湧き出す軌道は幾度となく回転し，巻きつくように無限遠点に近づいていくのである．そこで，a_n から見た F_n によるの軌道の回転量を測ってみよう．そのためには

$$\rho_n(z) = \frac{F_n(z) - a_n}{z - a_n}$$

とおき，$\arg \rho_n$ を見ればよい．

まずは簡単のため，$\theta_n > 0$ としておく．実は $n \gg 0$ のとき，$\arg \rho_n \asymp \theta_n$ が成り立つのである．このことは，原論文のように z, $F(z)$, a_n のなす三角形からおおまかに

求めることもできるが，次のような直接計算による評価も容易である．$a_n = F(a_n)$ より，

$$\begin{aligned}\rho_n(z) &= \frac{F_n(z) - F_n(a_n)}{z - a_n} \\ &= \lambda_n + \frac{O(R^{-1})}{z - a_n}\end{aligned}$$

と書けるから，$z \in B$ のとき，$n \gg 0$ ならば $\arg\rho_n \asymp \arg\lambda_n = \theta_n$ である．次に $z \in D$ のときを考えよう．$\rho_n(\infty) = \lambda_n,\ \rho_n(a_n) = \lambda_n'$ とすれば ρ_n は D 上正則かつ $\rho_n \neq 0$ である．よって $\log\rho_n$ が定義でき，虚部 $\arg\rho_n$ の調和性から最大値原理が適用できる．$\arg\rho_n \asymp \theta_n$ は ∂B でも成り立つことから，D 上でも $\arg\rho_n \asymp \theta_n$ がいえる．

すなわち F_n の作用によって，各点は a_n を中心に一定量の回転を行うわけである．また $\theta_n > 0$ と仮定したが，θ_n の符号の正負はこの回転の方向を定めているだけであって，本質的でない．よって以下でも $\theta_n > 0$ を仮定することにする．

さて回転しているということは，B から出た軌道が再び B に戻ってくる危険性がある．しかし $n \gg 0$ のとき，そうはならないことを示そう．ここからが，くりこみと第一回帰写像の出番である．

a_n から正の実軸方向へ半直線を引き，その F_n による像とで囲まれる部分を S_n とする．$S_n \subset D$ としてよいから，$F_n|S_n = f_n|S_n$ より S_n/f_n は $\mathbb{C}^*$ と同型な Riemann 面になる．ここで S_n/f_n の第一回帰写像を考えたいが，この場合力学系としては F_n のものを考えているので，一周するまでの軌道が B を通過する場合，その影響で RF_n は擬等角写像になってしまう．ただし，B を 1 回通過するには高々 $O(R)$ 回の反復で十分であるから，RF_n は $(1 + O(R^{-1}))$-擬等角写像である．しかも，RF_n が擬等角写像になってしまう領域（F_n による軌道が B を通ってしまう部分）を $A_n \subset S_n/f_n$ とすると，RF_n は A_n を除く部分で正則である．特に，A_n はモジュラス $O(R)$ のアニュラスと同型な有界円柱となることに注意しよう．

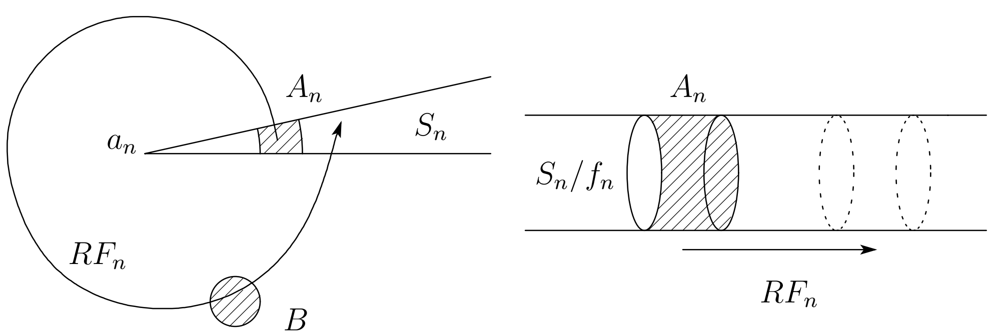

図 2.3: A_n 上でのくりこみ

ここで，$S_n/f_n \cong \mathbb{C}^*$ に対数写像をうまくほどこし，半径 1 の無限円柱とみなそう．このとき，A_n は幅 $O(R)$ の部分円柱となる．この場合 RF_n は，円柱に対しほ

ぼ等長変換として作用し，その移動距離は

$$\log |RF_n'(\infty)| = \log |R(\lambda_n)| \to \infty$$

であることが命題 2.9 よりわかる．よって全ての $n \gg 0$ に対し，A_n は商トーラス $\mathbb{C}^*/\lambda_n^{\mathbb{Z}}$ (正確な表現ではないが，原論文に従う）に埋め込まれ，全ての $i \neq 0$ に対し $RF_n^i(A_n) \cap A_n = \emptyset$ が成り立つようにできる．これは $n \gg 0$ のとき，B から出た軌道が再び戻ってこないことを示している．□

では，証明を完成させせよう．まず f に関しては，定理 2.6 と同様に F と μ を構成しておく．次に f_n に関して，任意の ϵ について適当な R をとれば，Ahlfors-Weill 拡張により $F_n(z) = \lambda_n z + 1 + O(R^{-1})$ を構成でき，かつ一様に $K(F_n^m) < 1+\epsilon$ $(m \in \mathbb{Z})$ とできる．さらに無限遠点の十分小さい近傍 E_n を取ると，無限遠点は吸引固定点であるから，$F_n(E_n) \subset E_n$ を満たすとしてよい．E_n 上の標準的な複素構造を σ_0 とし，$m \geq 0$ のとき $F_n^{-m}(E_n)$ 上の概複素構造を $\sigma_n = (F_n^m)^*(\sigma_0)$ と定めると，$F_n^*\sigma_n = \sigma_n$ を満たす．σ_n に対応する F_n 不変 Beltrami 係数 μ_n は $\|\mu_n\| = O(\epsilon)$ をみたすので，可測型 Riemann 写像定理を適用できる．

μ_n の収束性を見ておこう．そもそも D 上では，Schwarz 微分 Sf_n が C^∞ 位相に関して Sf に収束することから，それぞれの Ahlfors-Weill 拡張により B においても $F_n \to F$ とでき，$\mu_n \to \mu$ であることがわかる．

よって μ_n を歪曲係数にもつ擬等角写像 ϕ_n をとり，$\phi_n(0) = 0$, $\phi_n(\infty) = \infty$, $\phi_n(F_n(0)) = 1$ となるように正規化しておく（ μ についても同様に ϕ を構成しておく）．このとき $\mu_n \to \mu$ であるから，$\hat{\mathbb{C}}$ 上でも一様に $\phi_n \to \phi$ となる．この $\phi_n \to \phi$ により $F_n \to F$ は $T_n(z) = \alpha_n z + 1 \to T(z) = z + 1$ と共役になる（この係数は正規化条件からでる）．所望の無限遠点近傍を含む D 上では，これは $f_n \to f$ と $T_n \to T$ の共役を与えていることになる．

さて最後に，α_n と λ_n を入れ替える共役をとらなければならない．無限遠点近傍における，f_n と T_n それぞれによる商空間であるトーラスを考えよう．ここでも原論文にならって，便宜的に前者を $\mathbb{C}^*/\lambda_n^{\mathbb{Z}}$，後者を $\mathbb{C}^*/\alpha_n^{\mathbb{Z}}$ と表す．このとき，共役を与える ϕ_n はこの商空間に落とせば，トーラス間の擬等角変形

$$\Phi_n : \mathbb{C}^*/\lambda_n^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^*/\alpha_n^{\mathbb{Z}}$$

となる．もちろん，$K(\Phi_n) = K(\phi_n)$ である．ところで Φ_n は A_n の像の外では等角写像であり，また $R(\lambda_n) \to \infty$ より $\mathbb{C}^*/\lambda_n^{\mathbb{Z}}$ のほとんどの部分で等角である．よって Φ_n と同じホモトピー類にある Teichmüller 写像 Ψ_n は $K(\Psi_n) \to 1$ をみたす．ゆえに Ψ_n の適当な持ち上げ ψ_n により，ϕ_n を $\psi_n^{-1} \circ \phi_n$ と置き換えれば, T_n における α_n を λ_n に置き換えることができる．■

定理 2.8 の証明

つぎに定理 2.8 の証明に入る．この定理は命題 2.5 における写像・固定点の収束列を擬等角共役によって扱いやすくしようというものである．これは放物的分岐を扱う１つのモデルであって，上の定理 2.6，定理 2.7 が 1 花弁放物的な場合に対応し，この定理 2.8 が一般の p 花弁放物的な場合に対応する．証明は各花弁の対称性と $w = z^p$ による半共役を利用して，定理 2.7 に帰着させる方法による．

証明 **(定理 2.8)** 簡単のために $|\lambda_n| > 1$ と仮定しよう．$\lambda_n = 1,\ |\lambda_n| < 1$ のときも同様である．$f_n,\ f$ およびそのモデル $T_n,\ T$ は affine 変換の p 葉被覆に近いものである．これを見るには，$w = z^p$ として半共役をとり

$$
\begin{aligned}
f_n(w) &= \lambda_n^p w + p\lambda_n^{p-1} + O(w^{-1/p}) \\
f(w) &= w + p + O(w^{-1/p})
\end{aligned}
$$

と表示すればよい．ただし，$w^{-1/p}$ の分岐をどうとるかは， z での力学系にあわせ p 枚の被覆面にうまく対応させることにする．

例えば， f において $z = \infty$ は重複度 $p+1$ の固定点である．$z^p \in \mathbb{R}_-$ となる方向，$z^p \in \mathbb{R}_+$ になる方向はそれぞれ吸引，反発方向で f に関してほぼ不変である．一方 f_n については，$z = \infty$ は固有値 λ_n^{-1} の吸引固定点であり，さらに p 個 の反発周期点が分岐して $z \approx (1-\lambda_n)^{1/p}$ に対称的に並ぶ．これらの固有値はほぼ λ_n^p である．

証明のアイディアは，p 花弁に収束していく p 枚の扇形ごとに f_n と T_n の共役を作るというものである．特に，これらはある affine 変換の p 乗根の形をしているから，定理 2.7 の議論に帰着できる．

まず，その扇形を定義しよう．十分大きな正数を R として，$R_j = Re^{2\pi ij/p}$ とおく．このとき仮定より無限遠点は吸引固定点であるから，$f_n^k(R_j) \to \infty\ (k \to \infty)$ が全ての n について成り立つとしてよい．さらに，以下のような経路 (path) を $\gamma_{nj} : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ を各 $n,\ j$ ごとに定める．

$$
\gamma_{nj}(t) = \begin{cases} R_j & (t = 0) \\ (1-t)R_j + tf_n(R_j) & (0 < t < 1) \\ f_n(\gamma_{nj}(t-1)) & (t \geq 1) \end{cases}
$$

ここで R を十分大きくすれば，それぞれの γ_{nj} は自己とも他とも交叉することなく $\mathbb{C}$ に埋め込まれ，また $R < |z| < 2R$ 上ではほぼまっすぐである．

これらの経路により領域 $D(R) := \{z \mid |z| \geq R\}$ は p 枚の扇形に分割される．γ_{nj} と $\gamma_{n,j+1}$ にはさまれる扇形を，S_{nj} としよう．

この S_{nj} 上に，新しい力学系を構築する．$\gamma_{nj}(t)$ と $\gamma_{n,j+1}(t)$ をすべての t について同一視することで，S_{nj} は穴あき閉単位円板と同型な Riemann 面とみなせる．同

時に，これらは $D(R^p)$ とも同型であるから，適当な同型写像

$$\psi_{nj} : S_{nj} \to D(R^p)$$

がとれて，$\psi_{nj}(R_j) = R^p$ とすれば一意的に定まる．$n \gg 0$ のとき，$\psi_{nj}(z) \approx z^p$ となっていることに注意しよう．この ψ_{nj} によって f_n の共役をとると，

$$f_{nj}(z) = \lambda_{nj} z + O(1)$$

の形になる．ただし，$\lambda_{nj} \approx \lambda_n^p$ である．もう少し詳しくいうと，R を十分大きくすれば，log をとったときに半平面上の双曲計量により，

$$d(\log \lambda_{nj}, \log \lambda_n^p) < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.4}$$

とできる．また $f_\infty := f$ とおいて，$n = \infty$ の場合として上と同様の構成を施せば，共役

$$f_{\infty,j}(z) = z + c_j + O(1/z)$$

を得る．ただしこのとき $\psi_{nj}(z) \approx z^p$ より，R を十分大きくすれば $c_j \approx p$ である．こうして，$D(R^p)$ における収束列 $f_{nj} \to f_{\infty,j}$ ができる．特に，$\lambda_{nj} \to 1$ は円接的収束である．

次に T_n についても，f_n のときと同じ方法で経路 $\gamma'_{nj}(t)$ と扇形 S'_{nj} を構成する．こちらの方は 1 の p 乗根倍による回転に対して可換であるから，各扇形を回転によってきれいに貼り合わすことができる．すなわち単純に $\psi'_{nj}(z) = z^p$ とすれば，$\psi'_{nj} : S'_{nj} \to D(R^p)$ なる同型を得るわけである．この ψ'_{nj} により T_n と共役をとれば，

$$T_{nj}(z) = \lambda_n^p(z+1)$$

となる．また同様に，$T_{\infty,j}(z) = z+1$ とすれば，$D(R^p)$ における収束列 $T_{nj} \to T_{\infty,j}$ ができる．

では，$D(R^p)$ に含まれる適当な無限遠点近傍において，$f_{nj} \to f_{\infty,j}$ と $T_{nj} \to T_{\infty,j}$ の間の共役を与える $(1+\epsilon)$-擬等角写像列 $\phi_{nj} \to \phi_j$ を構成しよう．

$f_{nj} \to f_{\infty,j}$ にたいし，適当な定数倍で共役をとり

$$f^*_{nj}(z) = \lambda_{nj} z + 1 + O(1/z) \ \to \ f^*_{\infty,j}(z) = z + 1 + O(1/z)$$

とできる．$\lambda_{nj} \to 1$ は円接的であるから，定理 2.7 を適用すると，$(1+\epsilon/2)$-擬等角写像列によって

$$T^*_{nj}(z) = \lambda_{nj} z + 1 \ \to \ T^*_{\infty,j}(z) = z + 1$$

とできる．ここで $T^*_{nj}(z)$ の基本領域をトーラスとみなすと，(2.4) より，$(1+\epsilon/2)$-擬等角写像による基底の変換によって

$$T^*_{nj}(z) = \lambda_n^p z + 1 \ \to \ T^*_{\infty,j}(z) = z + 1$$

と共役にできる．あとは $\{z \mapsto \lambda_n^p z\}$ なる写像列で共役をとれば，$T_{nj} \to T_{\infty,j}$ となる．以上の共役の合成をとり，定義域である無限遠点の近傍を適当に縮めれば $(1+\epsilon)$-擬等角写像列 $\phi_{nj} \to \phi_j$ を得る．

残りの作業としては，各扇形上に構成された力学系の共役を，切れ目である経路に沿ってきれいに貼り合わせることが必要である．そのためには，全ての $t \geq 0$ に対して

$$\phi_{nj} \circ \psi_{nj} \circ \gamma_{nj}(t) = \psi'_{nj} \circ \gamma'_{nj}(t) \tag{2.5}$$

としたい．

再度 R を大きくすることにより，ϕ_{nj} の定義域に $D(R^p)$ が含まれるようにしよう．ここで，$T_{\infty,j}$ は任意の平行移動に対し可換であるから適当な平行移動によって $\phi_{\infty,j}(R^p) = R^p$ とできる．また $T_{n,j}$ は ∞ でない方の固定点 $\lambda_n^p/(1-\lambda_n^p)$ を0にうつす共役によって $z \mapsto \lambda_n^p z$ と共役であるから，$\lambda_n^p/(1-\lambda_n^p)$ を中心とした定数倍について可換である．よって $n \gg 0$ のとき，適当な定数倍で $\phi_{nj}(R^p) = R^p$ となるようにできる．これで基点については $\phi_{nj} \circ \psi_{nj} \circ \gamma_{nj}(0) = \psi'_{nj} \circ \gamma'_{nj}(0) = R^p$ とできることになる．

次に，T_{nj} の力学系による商空間はトーラスであるが，このトーラス上から経路 $\psi'_{nj} \circ \gamma'_{nj}(t)$ に持ち上がるべき擬円 (quasicircle) はほとんどまっすぐといってよい．f_{nj} についても同様な商トーラスと擬円を考えることができるが，これらは同じ基点を持つので，わずかな擬等角アイソトピーによって一致させることができる．これを持ち上げれば，上の (2.5) が実現できる．$z = \infty$ のときは，商空間として円柱を考えて同様にやればよい．

よって $\widetilde{\phi}_{nj} := (\psi'_{nj})^{-1} \circ \phi_{nj} \circ \psi_{nj}$ とおけば，これは無限遠点の近傍で S_{nj} を S'_{nj} に写し，かつ γ_{nj} を γ'_{nj} へパラメーターも込みで写すことができる．よって $\widetilde{\phi}_{nj}$ をそれぞれ貼り合わせることで，求める $\phi_n \to \phi$ を得る．

特に，$\phi_n(R) = R$ と正規化したとき，$K(\phi_n) \leq 1+\epsilon$ となることから ϕ_n は定義域上コンパクトな族をなし，部分列に $\phi_n \to \phi$ なるものが存在する．■

注意 2.d 証明の議論からもわかるが，実際には収束列をとることができる．

2.2　Julia集合の連続性

この節では前節の結果を用いて，放物的分岐の中からJulia集合の連続性を探り出す．

まず言葉の定義をしよう．b は $J(f)$ 内の前周期的分岐点で，$f^i(b) = f^j(b)$, $i > j > 0$ を満たすとする．このときそのような全ての b と $n \gg 0$ に対して f_n が b と同じ重複度の分岐点 $b_n \in J(f_n)$ をもち，$f_n^i(b) = f_n^j(b_n)$ を満たすとする．このとき $f_n \to f$ は**分岐関係を保つ** (preserving critical relations) 収束であるという．

有理写像の放物的周期点は有限個であるから，適当な正整数 k をとることにより，f の任意の放物的周期点 c は f^k の固定点でかつ $(f^k)'(c)=1$ を満たすとしてよい．このとき収束列 $f_n \to f$ が**円接的** (**非接的**) とは，f の任意の放物的固定点 c に対し，ある f_n の固定点 c_n が存在して以下の条件を満たすときを言う．

- 組 $(f_n, c_n) \to (f, c)$ は $\mathcal{F}$ 上の優収束
- $(f_n^k)'(c_n) = \lambda_n \to 1$ が円接的（非接的）

特に，これらの条件の成立は k のとり方に依存しない．

次が，この章の主定理である．

定理 2.10 f が幾何学的有限で，f_n は分岐関係を保つ円接的収束列とする．このとき $n \gg 0$ ならば f_n は幾何学的有限であり，Hausdorff 位相の意味で $J(f_n)$ は $J(f)$ に収束する．

注意 2.e 実は Julia 集合の収束性だけならば，分岐関係の保存は仮定しなくてもよい．さらに f の幾何学的有限性も本質的ではなく，単にその Fatou 集合が Siegel 円板と Herman 環をもたければよい [15, 2.4].

また，定理 2.10 の仮定のもと，Julia 集合上の力学系は保存される．すなわち，$n \gg 0$ のとき，$f_n|J(f_n)$ と $f|J(f)$ の間の共役写像 $h_n : J(f_n) \to J(f)$ が存在する [16, Thm.1.1]．さらに，定理 2.10 の仮定をみたすような摂動は常に存在する [17, Thm.1.1].

証明 (定理 2.10) f の吸引周期点と放物的点の数は有限個であるから，適当な k により $f_n \to f$ と $f_n^k \to f^k$ を置き換えて，それらは全て固定点であるとしてよい．また，放物的固定点の固有値は全て 1 としてよい．

補題 2.1 により，$\limsup J(f_n) \subset J(f)$，すなわち上半連続性（収束性）を言えば十分である．そこで，次の補題を用いる．

補題 K_n を $\mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ 内の点列，K を $\mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ の点とする．さらに $A_n := \hat{\mathbb{C}} - K_n$, $A := \hat{\mathbb{C}} - K$ とおいたとき，次は同値．

(i) $\partial(K_n, K) \to 0 \quad (n \to \infty)$

(ii) すべての $x \in A$ に対しある近傍 $U \subset A$ が存在して，$n \gg 0$ ならば $U \subset A_n$ とできる

証明 ＜(i)⟹(ii)＞ $x \in A$, $\partial(x, K) = r$ とする．x の近傍として開球 $U = B(x, r/3)$ をとろう．$\overline{N_{r/3}(K)} \cap \overline{U} = \emptyset$ であり，また $\partial(K_n, K) \to 0$ より $n \gg 0$ のとき $K_n \subset N_{r/3}(K)$ とできることから，$K_n \cap \overline{U} = \emptyset$ が成り立つ．よって $U \subset A_n$ とできる．

＜(ii)$\Longrightarrow$(i)＞任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し，$\hat{\mathbb{C}} - N_\epsilon(K)$ は A のコンパクト部分集合である．よってこの集合の各元はそれぞれ (ii) の条件を満たすような近傍を持つ．その全体の中から $\hat{\mathbb{C}} - N_\epsilon(K)$ の有限開被覆をとりだし，$\{U_i\}_{i=1}^m$ としよう．このとき $n \gg 0$ とすれば，全ての U_i に対して $U_i \subset A_n$ とできる．ゆえに $\hat{\mathbb{C}} - N_\epsilon(K) \subset \hat{\mathbb{C}} - K_n$ であるから，(i) が示された．□

すなわち，任意の $x \in \Omega(f)$ に対しある近傍 U が存在して，$n \gg 0$ のとき $U \subset \Omega(f_n)$ とできればよい．

また Fatou 集合の完全不変性より，x の代わりに適当な $f^i(x)$ と置き換えて考えてもよい．特に f は幾何学的有限であるから，x は（超）吸引鉢または放物的吸引鉢（以下，放物鉢とよぶ）にあって，それぞれ（超）吸引固定点，放物的固定点の十分近くまで来ていると仮定してよい．一般に，x が吸収される固定点を c と表そう．

・c が吸引固定点のとき

f の係数を摂動させるとき，その「ブレ」がわずかならば c は吸引固定点のままである．よって c の近傍 U を十分小さく取れば，$n \gg 0$ のとき $\overline{f_n(U)} \subset U$ とできる．よって $U \in \Omega(f_n)$ であり，また x は U に入るぐらい c に近いとしてよいのであった．

・ c が 1 花弁点のとき

円接的収束性より，ある固定点列 c_n が存在して $(f_n, c_n) \to (f, c)$ が優収束となっている．また固有値 $f_n'(c_n) = \lambda_n \to 1$ は円接的収束である．このとき定理 2.3 より，c_n，c を無限遠点に写す座標変換をほどこせば，

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + 1 + O(1/z) \\ \longrightarrow f(z) &= z + 1 + O(1/z) \end{aligned}$$

を考えればよいことになる．さらに定理 2.7 を適用すれば，無限遠点のある近傍上

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \lambda_n z + 1 \\ \longrightarrow T(z) &= z + 1 \end{aligned}$$

を考えればよいことがわかる．特にこの共役を与える擬等角写像 $\phi_n \to \phi$ は T_n，T の方で共通の値域 $\{|z| > R \gg 0\}$ をもつとしてよい．

x は無限遠点の十分近くに来ているとしているから，$x' = \phi(x)$ が定義されているとしてよい．また，λ_n が十分 1 に近ければ，T_n の反復により実部は増大するから，$\mathrm{Re}\, x' > R$ としてよい．

さて T については，領域 $\{\mathrm{Re}\, z > R\}$ は自身の中に写されるので，x' の十分小さな近傍 V をとれば， V 全体は無限遠点へ吸収される．

また $T_n \to T$ より，T_n による力学系は T によるものと似た形になるので，$n \gg 0$ とすると V は無限遠点もしくは無限遠点からわずかに分岐したもう 1 つの固定点のいずれか，吸引固定点である方に向かって吸収される．したがって V の軌道は D

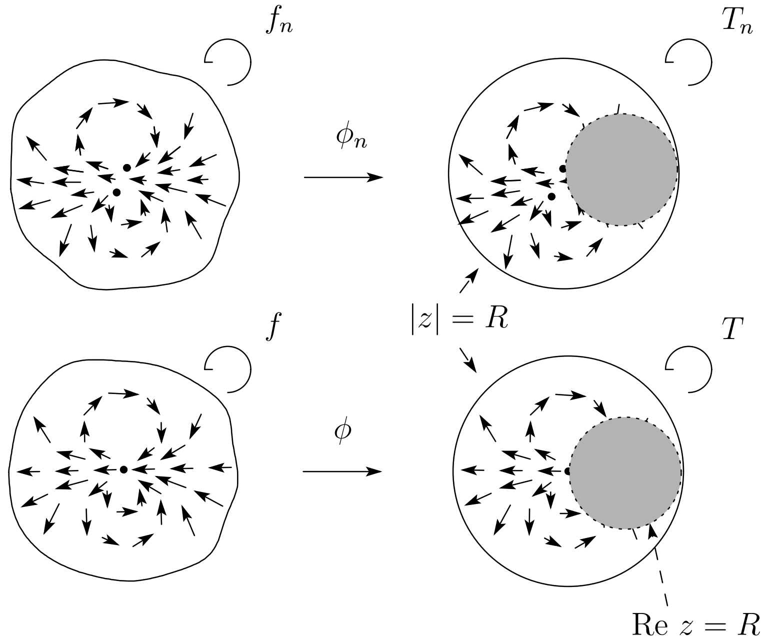

図 2.4: 無限遠点近傍の力学系

内に留まり，共役 T_n による議論が維持できるのである．詳しくは [15, 2.4] もしくは [16, Lem.2.1] を参照されたい．

注意 2.f McMullen は後に述べる補題 2.11 によってこのような V の動きを説明している．

ところで $\phi_n \to \phi$ および $\phi(x) \in V$ より，x の近傍 U が存在して，$n \gg 0$ のとき $\phi_n(U) \subset V$ とできることから，U は f_n の吸引鉢もしくは放物鉢に入っている．すなわち，この U は $n \gg 0$ のとき $\Omega(f_n)$ に含まれる．

• c が p 花弁点のとき

円接的収束性と定理 2.3 より，$f_n \to f$ を適当に座標変換して c が無限遠点になるようにうつし，その近傍上次のような形にできる．

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + z^{1-p} + O(1/z^p) \\ \longrightarrow f(z) &= z + z^{1-p} + O(1/z^p) \end{aligned}$$

ただし，$\lambda_n \to 1$ は円接的な収束である．このとき定理 2.8 より，ある無限遠点の近傍で定義された擬等角写像 $\phi_{p,n}$，ϕ_p により，$f_n \to f$ は次のような収束列 $T_{p,n} \to T_p$ と共役である．

$$\begin{aligned} T_{p,n}(z) &= \lambda_n(z^p + 1)^{1/p} \\ \longrightarrow T_p(z) &= (z^p + 1)^{1/p} \end{aligned}$$

また，うまく部分列をとって $\phi_n \to \phi$ とできる．ただし，$(z^p+1)^{1/p} = z + O(1)$ となるようにうまく分岐をとることにする．すると，$T_{p,n} \to T_p$ は半共役 $w = z^p$ により，花弁 1 枚ごとに $p = 1$ のときと全く同様にして扱うことができる．

ここで，$\mathrm{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$ の点列コンパクト性より，f_n から適当な部分列をとってきて，その Julia 集合があるコンパクト集合 J に集積するようにできる．その中からさらに $\phi_n \to \phi$ となる部分列をとることで，1 花弁点のときと同様にして $J(f_n) \to J(f) = J$ となることがわかる．すなわち，$J(f_n)$ の任意の集積点が $J(f)$ に一致することから，もとの f_n について $J(f_n) \to J(f)$ でなくてはならない．

・幾何学的有限性

代数的収束性より，f_n の任意の分岐点 b_n は f のある分岐点 b に近づく．$b \in J(f)$ のときこれは前周期的であり，分岐関係の保存性から $b_n \in J(f_n)$ かつ前周期的である．また $b \in \Omega(f)$ のとき，Julia 集合の収束性より $n \gg 0$ のとき $b_n \in \Omega(f_n)$ が言えるので，f_n は幾何学的有限である．■

注意 2.g ちなみに原論文では，上の定理の証明には次の補題が使われている:

補題 2.11 $T_n(z) = \lambda_n z + 1$ に対し，$\lambda_n \to 1$ は円接的収束とする．このとき任意の $R > 0$ に対し，ある N が存在して，$|z| < R,\ n > N,\ |k| > N$ のとき $|T_n^k(z)| > R$ とできる．

すなわち，$|z| < R$ から出た軌道は一定以上反復すると再び戻ることはなく，その反復回数も n によらず前後一様に抑えられるというものである．しかし下の証明では，前後 N 回の反復の間，何度か戻ってくる可能性は除けない．この場合，f_n の代わりに共役 T_n で議論する，という方法が維持できず，やや不明確さが残る．

証明（補題 2.11） $\lambda_n = 1$ のときは明らかなので，$\lambda_n \neq 1$ と仮定してよい．また円接的収束性より，$\lambda_n = \exp(L_n + i\theta_n)$ としたとき $L_n \to 0,\ \theta_n^2/L_n \to 0$ である．このとき，

$$T_n^k(z) = \lambda_n^k z + \lambda_n^{k-1} + \cdots + \lambda_n + 1 = \lambda_n^k z + \frac{\lambda_n^k - 1}{\lambda_n - 1}$$

が成り立つ．$\lambda_n^k z$ は $n \gg 0$ のとき有界な範囲に収まるから，

$$T_n^k(0) = \frac{\lambda_n^k - 1}{\lambda_n - 1}$$

について調べれば十分である．また $|\lambda_n - 1| \ll 1/R$ としてよいから，$|\lambda_n^k - 1|$ が 0 に近いときを調べれば十分である．

このとき，

$$|T_n^k(0)| \asymp \frac{|kL_n + i\{k\theta_n\}|}{|L_n + i\theta_n|}$$

がなりたつ．ただし，$\{k\theta_n\}$ は $\{k\theta_n\} \equiv k\theta_n \mod 2\pi$ なる数で絶対値が最小ものとする．

$|k| < |1/\theta_n|$ のとき，$|k\theta_n| < 1$ より $\{k\theta_n\} = k\theta_n$ である．よって $|T_n^k(0)| \asymp |k|$ となり，k を十分大にして，$|k| < |1/\theta_n|$ が成り立つような n の下限をとれば $|T_n^k(0)| > R$ とできる．

$|k| \geq |1/\theta_n|$ のときは，

$$\frac{|kL_n + i\{k\theta_n\}|}{|L_n + i\theta_n|} \geq \frac{|L_n/\theta_n|}{|L_n + i\theta_n|} = \frac{1}{|\theta_n + i\theta_n^2/L_n|} \to \infty$$

より，この場合も $|T_n^k(0)| > R$ となる n の下限をとればよい．■

実際には，$n \gg 0$ のとき一旦 $|z| < R$ から出た軌道は戻ってこない．これは定理 2.7 の証明にある議論を見れば容易に推察される事実である．

第3章　Hausdorff次元の連続性と力学系的収束（川平）

この章では，Hausdorff 次元の連続性，不連続性を「力学系的収束」という一般的な枠組みで扱う.「Sullivan の辞書」という観点からも非常に興味深い内容であるから，対応する 4 章 3 節の内容と対照されたい.

3.1　Hausdorff次元の連続性と力学系的収束

この節では，収束写像列の Julia 集合の Hausdorff 次元が収束するための条件を構成しよう．これから構成されるであろう Hausdorff 次元の収束条件下では，伴っていくつかの不変量などの収束が見られる．それらをまとめて，次のように「力学系的収束」を定義する.

定義　$f_n \to f$ が**力学系的収束** (dynamical convergence) とは以下の条件を満たすときを言う.

D1. $f_n \to f$ は代数的収束

D2. Hausdorff 位相の意味で $J(f_n) \to J(f)$

D3. $\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to \mathrm{H.dim}(J(f))$

D4. 臨界次元について，$\alpha(f_n) \to \alpha(f)$

D5. f，及び $n \gg 0$ のとき f_n は幾何学的有限

D6. $J(f_n)$, $J(f)$ 上の標準密度 μ_n, μ は弱位相に関して $\mu_n \to \mu$.

この定義は，f_n の代数的収束による力学系的な振るまいと，Julia 集合や不変密度に反映される統計的，定量的な性質が f のものへとそれぞれ収束していく状態をまとめて言い表わしたものといえる．特に，条件 D5 がその仲を取り持つ本質的条件であろうことは，今までの結果から想像がつくだろう.

しかし条件 D5 のように，幾何学的有限性を収束の途中からすべてにおいて実現することは，一般には難しい．例えば，分岐関係の保存などを仮定しなくてはなら

ない．ただし極限の写像が幾何学的有限でも双曲的な場合，次の結果は比較的容易である．

定理 3.1 $f_n \to f$ が代数的収束でかつ f が拡大的なとき，$f_n \to f$ は力学系的収束する．

証明　拡大的写像の全体は Rat_d の中で開集合をなすから，f_n は $n \gg 0$ のとき拡大的（ゆえに幾何学的有限）である．よってその収束は自動的に分岐関係を保つことになり，また放物的分岐の起こる点もないので，定理 2.10 より Hausdorff 位相の意味で $J(f_n) \to J(f)$ である．また系 1.19 より拡大的である f_n，f には標準密度 μ_n，μ が存在して，その次元は $\delta(f_n)$，$\delta(f)$ である．ところで μ_n の弱位相による任意の集積点 ν は Julia 集合の収束性より $J(f)$ に台を持つが，標準密度の一意性から $\mu = \nu$ でなくてはならない．これから $\delta(f_n) \to \delta(f)$ を得る．ここで幾何学的有限性より $\delta(f) = \alpha(f) = \mathrm{H.dim}(J(f))$（定理 1.13）であるから，以上，$f_n \to f$ が力学系的収束であることが示された．■

では，一般の幾何学的有限な写像列が力学系的収束する十分条件は何だろうか．拡大的な場合と違って，Julia 集合内の放物的点や分岐点にも目を向けたうえでの条件が導かれるであろう．そしてその十分条件の 1 つが，次の定理に与えられる．

定理 3.2 f が幾何学的有限で，$f_n \to f$ は分岐関係を保つ代数的収束列とする．このとき，

(a) $f_n \to f$ が非接的，または

(b) $f_n \to f$ が円接的かつ

$$\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) > \frac{2p(f)}{p(f)+1}$$

であれば，$f_n \to f$ は力学系的収束する．ここで $p(f)$ は 1 章で定義した f の花弁数である．また，条件 (b) を（より強くなってしまうが）次のものに書き換えてもよい．

(b') $f_n \to f$ が円接的かつ

$$\mathrm{H.dim}(J(f)) > \frac{2p(f)}{p(f)+1}.$$

注意 3.a (b) から (b') への書き換えは定理 1.13 と定理 2.10，及び下の命題 3.5 により，

$$\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) = \liminf \alpha(f_n) \geq \alpha(f) = \mathrm{H.dim}(J(f))$$

が成り立つことを踏まえている．またこれらの条件の必要性については，3.4 節で扱う．

次に，この定理の証明に必要な道具立てを行っておこう．

3.1.1 放物的周期系と Poincaré 級数

ここでは，定理 3.2 の条件を本質的に支える定理を証明する．放物的力学系に関わる Poincaré 級数の一様収束条件を考えるのだが，ここで扱うのは向きの違う Poincaré 級数である．

定義 $f \in \mathcal{G}$ (2 章で定義）に対し，その**（前方）Poincaré 級数**とは

$$P_\delta(f,x) = \sum_{i \geq 0} \left|(f^i)'(x)\right|_\sigma^\delta$$

のことをいう．この級数の収束の度合を考えるのに，任意の開集合 V に対してその部分和

$$P_\delta(f,V,x) = \sum_{f^i(x) \in V} \left|(f^i)'(x)\right|_\sigma^\delta$$

を定義しておこう．これらは共に $i = 0$ から $f^i(x)$ の定義域が $U(f)$ にある間だけ和をとることにする．一度でも外に出たらそれ以上は加算しない．

注意 3.b 1 章で定義したこれまでの Poincaré 級数との違いは明白である．前に定義した方はある点の後方軌道全てに対し，その点に到達するまでの「勢い（微分係数の絶対値)」を和にしたものであった．一方こちらは，ある点から始めて前方軌道上の各点に到達するまでの「勢い」を和にしたものである．

このとき $\mathcal{F} \times \mathbb{R}_+$ における収束列

$$(f_n, c_n, \delta_n) \to (f, c, \delta)$$

を考えよう．ただし，

(a) (f_n, c_n) は (f, c) に優収束

(b) (f, c) が p 花弁放物的なら $\delta > p/(p+1)$

であるとする．

この収束列 (f_n, c_n, δ_n) の定める Poincaré 級数の列が**一様収束**するとは， $U(f_n)$ と $U(f)$ を適当に小さくして，$n \gg 0$ のとき任意のコンパクト集合 $K \subset U(f) - \{c\}$ と $\epsilon > 0$ に対し，c の近傍 V が存在して，

$$P_{\delta_n}(f_n, V, x) < \epsilon$$

が全ての $x \in K$ について成り立つことを言う．すなわち，十分小さな c の近傍 V をとれば，n によることなく Poincaré 級数の値を小さくできるときをさす．

例えば，次の定理は定義の意味を理解するのに良いだろう．

定理 3.3 (f,c) の c が（超）吸引固定点のとき，任意の収束列 $(f_n,c_n,\delta_n)\to(f,c,\delta)$ の Poincaré 級数は一様収束する．

証明　適当に定義域を制限すれば，$n\gg 0$ のとき $U(f_n)$ は c_n の直接吸引鉢に入るとしてよい．すると各 $U(f_n)$ 上，n によらず一様に $|f_n'|<\lambda<1$ が成り立つとしてよいから，各 Poincaré 級数 $P_{\delta_n}(f_n,V,x)$ は $\sum_{f^i(x)\in V}\lambda^i$ で抑えられる．この値も V を十分小さくすれば，一様に ϵ で抑えることができる．■

では，c が放物的な場合はどうだろうか．$f_n\to f$ を考えるとき，当然ながら放物的分岐が発生するわけで，上のような一様収束性は一般には難しい．しかし収束条件をうまくコントロールすることで，次の定理を得る．

定理 3.4 (f,c) は p 花弁放物的で，$\lambda=f_n'(c_n)$ とする．このとき

(a) $\lambda_n\to 1$ が非接的に収束するか，

(b) $\lambda_n\to 1$ が円接的に収束，かつ $\delta>2p/(p+1)$

のいずれかであれば，(f_n,c_n,δ_n) の Poincaré 級数は一様収束する．

証明　まずは 2 章と同様のモデルリングを行う．

$$\begin{aligned}T_n(z)&=\lambda_n(z^p+1)^{1/p}\\ \longrightarrow T(z)&=(z^p+1)^{1/p}\end{aligned}\tag{3.1}$$

として，$(f_n,c_n)=(T_n,\infty)$，$(f,c)=(T,\infty)$ の場合を考えよう．$U(T_n)=U(T)=\{|z|>R\gg 0\}$ としておく．

$p=1$ の場合，$\langle T_n\rangle$，$\langle T\rangle$ はそれぞれ巡回 Klein 群 L_n，L をなし，$\lambda_n\to 1$ が円接的収束ならば L_n は L に幾何学的収束を行う. この場合は [21, Thms.5.1,6.1-6.3] を用いれば，条件 (a),(b) 下における Poincaré 級数の一様収束が示される．

$p>1$ のとき，$w=z^p$ による半共役をとり，T_n，T の代わりに

$$\begin{aligned}S_n(w)&=\lambda_n^p(w+1)\\ \longrightarrow S(w)&=w+1\end{aligned}$$

を考える．このとき，球面計量 $\sigma=2|dz|/(1+|z|^2)$ は $|w|\gg 0$ において

$$\rho=\frac{2|dw|}{p(|w|^{1+1/p}+|w|^{1-1/p})}\asymp\frac{|dw|}{|w|^{1+1/p}}$$

になる（この ρ は 1 章でも登場した）．このとき Poincaré 級数の一様収束性を示すには，[21, §6] にある $p=1$ のときと同様の議論をすればよい．例えば $p=1$ のときは σ から評価して

$$P_{\delta_n}(T_n,V,x)=O\left(\sum_{k>K}k^{-2\delta_n}\right)$$

という評価式が出るが，$p>1$ では

$$P_{\delta_n}(T_n,V,x)=O\left(\sum_{k>K}k^{-(1+1/p)\delta_n}\right)$$

となり，$(1+1/p)\delta_n \to (1+1/p)\delta > 1$ (仮定 (b)) より V を縮めれば全ての $n,\ K \gg 0$ に対してこの値は任意に小さくできる．

では，一般の (f_n,c_n,δ_n) について考えよう．ここからの議論は計算が主だが，どことなく巧妙で面白い．

$\delta_n \to \delta > p/(p+1)$ より，$L>1$ を $n \gg 0$ のとき $\alpha_n=\delta_n/L>p/(p+1)$ となるよう 1 に十分近く取る．このとき，定理 2.3 と定理 2.8 により，L-擬等角写像 $\phi_n,\ \phi$ が存在して $(f_n,c_n)\to(f,c)$ と (3.1) の $(T_n,\infty)\to(T,\infty)$ の間に共役を与える．さらに $f_n,\ f,\ T_n,\ T$ は，定義域（$U(f_n)$ 等）を固定点の十分近傍に縮めることで単葉であるとしてよい．すると森の定理 [1, Ch.III.C] によって $\phi_n,\ \phi$ は指数 $1/L$ の Hölder 連続写像であるから，任意の $B\subset U(f)$ について

$$\operatorname{diam} B = O\Big((\operatorname{diam}\phi_n(B))^{1/L}\Big) \tag{3.2}$$

が成り立つ．この評価を用いて，T_n に関する一様収束性から f_n に関するそれを導きたい．

コンパクト集合 $K\subset U(f)-\{c\}$ と $\epsilon>0$ を固定しよう．$\phi_n\to\phi$ の収束性より，$n\gg 0$ のときコンパクト集合 K' を $K'\subset U(T)-\{\infty\},\ \phi_n(K)\subset K'$ となるようにとれる．また $(1+1/p)\alpha_n>1$ であるから，(T_n,∞,α) の Poincaré 級数は一様収束するので，ある無限遠点の近傍 V' が存在して，$n\gg 0$ のとき

$$\sup_{x\in K'} P_{\alpha_n}(T_n,V',x)<\epsilon \tag{3.3}$$

とできる．この V' に対し，c の近傍 V を $n\gg 0$ のとき $\phi_n(V)\subset V'$ となるように選んでおこう．

さて，$x\in K$ を任意にとる．x 中心の小さな開球 B を固定すると，Koebe の歪曲定理によって $|(f_n^i)'(x)|_\sigma \asymp \operatorname{diam} f_n^i(B)$ であることがわかる．さらに $x_n=\phi_n(x),\ B_n=\phi_n(B)$ とおくと，(3.2) より

$$\operatorname{diam} f_n^i(B)=O\Big(\big(\operatorname{diam}\phi_n(f_n^i(B))\big)^{1/L}\Big)=O\Big(\big(\operatorname{diam}T_n^i(B_n)\big)^{1/L}\Big)$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}P_{\delta_n}(f_n,V,x) &\asymp \sum_{f_n^i(x)\in V}\big(\operatorname{diam} f_n^i(B)\big)^{\delta_n}\\ &= O\left(\sum_{T_n^i(x_n)\in V'}\big(\operatorname{diam}T_n^i(B_n)\big)^{\delta_n/L}\right).\end{aligned}$$

一方，同じく Koebe の歪曲定理により，

$$P_{\alpha_n}(T_n, V', x_n) \asymp \sum_{T_n^i(x_n) \in V'} \big(\operatorname{diam} T_n^i(B_n)\big)^{\alpha_n}$$

であるから，$\alpha_n = \delta_n/L$ 及び (3.3) より，$P_{\delta_n}(f_n, V, x) = O(\epsilon)$ となることがわかる．■

3.1.2　定理 3.2 の証明

さらに，証明に必要な命題を与えておく．

命題 3.5 $f_n \to f$ が代数的収束であるとき，臨界次元について

$$\alpha(f) \leq \liminf \alpha(f_n)$$

が成り立つ．

証明　(その 1) $\alpha_0 := \liminf \alpha(f_n)$ とおく．確率測度全体のコンパクト性より，適当な部分列を取ることで $\alpha_{n_j} \to \alpha_0$ かつ μ_n に弱収束極限 μ があるとしてよい．また，$f_{n_j} \to f$ より μ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の α_0 次元 f 不変密度であるから，$\alpha(f)$ の定義と系 1.11 より，$\alpha(f) \leq \alpha_0$ である．■

証明　(その 2．[30, §1] 参照) 任意の f について $\alpha(f) = \mathrm{hyp.dim}(f)$ であることを用いる（定理 1.2）．f の双曲的集合 X が存在したとき，その構造安定性より，f をわずかに摂動させて f_n にしても，X はやはり双曲的な集合 X_n に変化するだけである．また，$f|X$ と $f_n|X_n$ は指数が 1 に近い Hölder 連続写像によって共役となり．特に，$f_n \to f$ であるから Hölder 指数は 1 に近づく．よって $\mathrm{H.dim}(X_n) \to \mathrm{H.dim}(X)$ である．一方，f_n の双曲的集合 X_n があっても，f の双曲的集合 X が存在してそれに連続的に変化できるとは限らないことに注意しよう．ゆえに，$\mathrm{hyp.dim}(f) \leq \liminf \mathrm{hyp.dim}(f_n)$ が成り立つ．■

この命題 3.5 は臨界次元に関する一般的な性質であり，不変量の半連続性を示唆している．これから次のような系を得る．

系 3.6 f が幾何学的有限でかつ $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ とする．このとき $f_n \to f$ が代数的収束ならば $\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to 2$ である．

証明　まず一般に，

$$2 \geq \limsup \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \geq \liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n))$$

は当然である．さらに定理 1.2 と定理 1.13，および上の命題から，

$$\begin{aligned}\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) &\geq \liminf \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f_n)) = \liminf \alpha(f_n)\\ &\geq \alpha(f) = \mathrm{H.dim}(J(f)) = 2\end{aligned}$$

■

以上を踏まえれば，定理 3.2 の証明のポイントが「$\mathrm{H.dim}(J(f)) = \alpha(f)$ が小さくなりすぎない」ことを示すことだということがわかる．定理 1.13 と系 1.18 によれば，そのためには f_n の標準密度の極限が $J(f)$ 上に台を持つ，質点を持たない f 不変密度となることを示せばよい．

証明 (定理 3.2) まずは力学系的収束条件 (D1)-(D6) を見返しておこう．(D1) は本質的仮定である．また定理 2.10 より，(D2),(D5) は示されている．よって以下，f_n, f については定理 1.13 の結果（不変量の一致と標準密度の存在）は前提としてよい．

$\delta_n := \alpha(f_n)$ とし，$J(f_n)$ 上の標準密度を μ_n とおく．このとき任意の部分列で，δ_n がある極限 δ をもち，μ_n が弱収束極限 ν をもつものを考える．(D2) より，ν は δ 次元 f 不変密度でなくてはならないが，以下ではこれが f の標準密度 μ と一致することを示し (D6)，これから μ が $\alpha(f)$ 次元であることがわかるので，(D3) 及び (D4) が導かれる．

さて，$\nu = \mu$ であることを示すためには，系 1.18 より，$J(f)$ 内の任意の (前) 周期的点 c ついて，これが質点でない，すなわち $\nu(c) = 0$ を言えばよい．具体的には，任意の ϵ に対しある c の近傍 V が存在して, $n \gg 0$ のとき一様に $\mu_n(V) = 0$ とできればよい．

• c が反発周期点のとき

f を適当な f^i と置き換えて，$f(c) = c$ としてよい．すると $n \gg 0$ のとき，$c_n \to c$ は f_n の反発固定点の収束列である. 各 c_n の近傍では f_n は単射であるから，局所的に逆写像 $f_n^{-1} = g_n$，$f^{-1} = g$ をとり，$\mathcal{F}$ 内の収束列 $(g_n, c_n) \to (g, c)$ を考えることにしよう．このとき，定理 3.3 により，$U(g_n)$, $U(g)$ を小さく制限すれば (g_n, c_n, δ_n) の Poincaré 級数は一様収束する．

さて g は c の近傍において局所線形化可能であるが，その基本領域はアニュラスをなす．特に，c のある近傍 V に対し，基本アニュラス $K \subset U(g) - \{c\}$ を

$$V \subset \{c\} \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} g^i(K)$$

となるようにとる．また K をできるだけ大きなものにして，$n \gg 0$ のとき

$$V \subset \{c_n\} \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} g_n^i(K)$$

となるように K に余裕を持たせておく．

Poincaré 級数の一様収束性から，V を十分小さくすれば全ての $x \in K$ について $P_{\delta_n}(g_n, V, x) < \epsilon$ とできる．μ_n は標準密度なので質点をもたず，$\mu_n(c_n) = 0$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\mu_n(V) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu_n\big(g_n^i(K) \cap V\big) = \int_K \sum_{g_n^i(x) \in V} \big|(g_n^i)'(x)\big|_\sigma^{\delta_n} d\mu_n(x) \\
&= \int_K P_{\delta_n}(g_n, V, x)\ d\mu_n(x) \\
&< \epsilon\ \mu_n(K) \leq \epsilon
\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成り立つ．

・c が p 花弁点のとき

このときも，基本的な考え方は上の反発的周期点の場合と同じである．まずは，$f(c) = c,\ f'(c) = 1$ と仮定してもよい．円接的収束の仮定により，$(f_n, c_n) \to (f, c)$ なる写像・固定点の優収束列がある．さらに仮定 (b) と (D5) より，

$$\begin{aligned}
\delta &\geq \liminf \alpha(f_n) = \liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \\
&> \frac{2p(f)}{p(f)+1} > \frac{2p}{p+1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

である．またここでも，$f_n \to f$ の固定点近傍での逆写像列 $g_n \to g$ に対し定理 3.4 を適用し，$(g_n, c_n, \delta_n) \to (g, c, \delta)$ の Poincaré 級数が一様収束するとしてよい．

さて定理 2.8 を参照すれば，$(f_n, c_n) \to (f, c)$ は局所的に $(T_n, \infty) \to (T, \infty)$ と擬等角共役であった．このモデリングによれば，十分小さな無限遠点近傍 U 内の点 x について，$T_n,\ T$ による振るまいとしては，

(i) x 自身が反発固定点，

(ii) x の前方軌道は U から遠ざかる，

(iii) x の前方軌道は U に留まり，その中にある吸引固定点か放物的固定点に収束していく，

の 3 種類しかない．これは U 内に放物的固定点である無限遠点自身か，それが分岐して生じた合計 $p+1$ 個の吸引，反発固定点が存在することからわかる．

共役性より $n \gg 0$ のとき，c の十分小さな近傍 V 上の点 x の $f_n,\ f$ による振るまいも同じである．ここで，$x \in V \cap J(f)$ としよう．そもそも考えるべき μ_n は $J(f_n)$ 上に台をもつから，そのような x を考えれば十分である．このとき，x の振るまいとしては (i),(ii) の場合しかない．さて，ここでも再びコンパクト・アニュラス $K \subset U(g) - \{c\}$ を考えるのだが，V は十分小さくとり，また K は余裕を持た

せて適当に大きくとり，f および $n \gg 0$ のときの f_n による (ii) のタイプの軌道が必ずそこを通過するようにとっておく．すなわち，R_n を f_n の c 近傍の固定点集合とすれば，

$$V \cap J(f_n) \subset R_n \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} g_n^i(K)$$

とできるようにとる．すると，μ_n は質点を持たず $J(f_n)$ 上に台を持つことから，

$$\mu_n(V \cap J(f_n)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu_n(V \cap g_n^i(K))$$

が成り立つ．

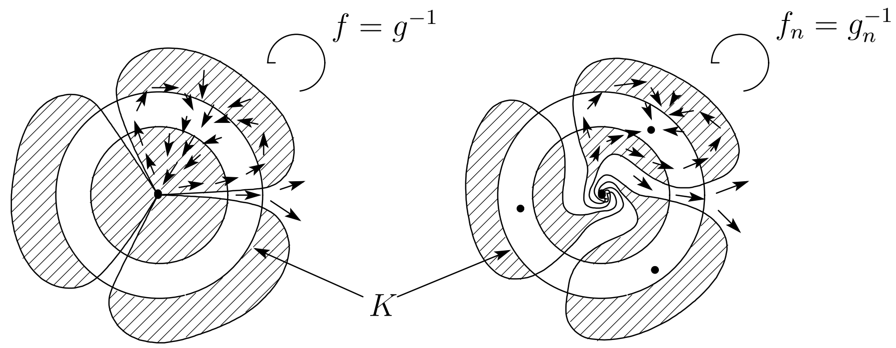

図 3.1: コンパクト・アニュラス K

(3.4) と定理3.4 より，V をさらに小さくとれば任意の $x \in K$ に対し $P_{\delta_n}(g_n, V, x) < \epsilon$ とできるのだった．すなわち，$n \gg 0$ のとき $\mu_n(V) < \epsilon$ がいえた．

・c が前周期的のとき

$b \in J(f)$ を前周期的な点とし，f をその適当な反復と置き換えて $f(b) = c,\ f(c) = c$ としてよい．このとき，1 章と同様に $g = f^{-1} \circ f \circ f$ による b 周辺の力学系を考えて，上の固定点の議論に帰着させよう．

$c_n \to c$ なる固定点列があるから，$f_n(b_n) = c_n$，$b_n \to b$ なる点列もとっておこう．b が分岐点のとき，f の局所被覆度を d とする．分岐関係の保存を仮定しているから，b_n も f_n によって局所被覆度 d で c_n に写るとしてよい．ここで，b が分岐点でないときも含めて，$g_n = f_n^{-1} \circ f_n \circ f_n$ に対し適当な分岐をとれば，$\mathcal{F}$ 内の写像・固定点列 $(g_n, b_n) \to (g, b)$ を得る．命題2.5 によれば，$(f_n, c_n) \to (f, c)$ の優収束性より $(g_n, b_n) \to (g, b)$ も優収束である（もちろん局所座標変換をほどこしてから命題2.5 を適用する）．また $f_n'(c_n) = \lambda_n$ とすると $g_n'(b_n) = \lambda_n^{1/d}$ であるから，$g_n'(b_n) \to g'(b) = 1$ は $\lambda_n \to 1$ とともに非接的または円接的収束を行う．すなわち，(a),(b) の仮定が成立する．特に b が分岐点かつ c が p 花弁点であるとき，b は dp 花弁分岐点となるが，花弁数 $p(f)$ の定義より

$$\delta > \frac{2p(f)}{p(f)+1} > \frac{2dp}{dp+1}$$

であることに注意しておこう．

ゆえに定理 3.3, 定理 3.4 を適用して，(g_n, b_n, δ_n) の Poincaré 級数について一様収束性が示される．μ_n は g_n 不変でもあるから，あとは上と同様に $n \gg 0$ のとき，b の近傍 V について $\mu_n(V) < \epsilon$ が導かれる．■

3.2　2 次元に近い Julia 集合

この節では Julia 集合の Hausdorff 次元の下界を考える．Klein 群からのアナロジーで，非常に面白い結果である．花弁点がその下界を与える評価において重要な役割を果たすのだが，これをコントロールして 2 次元に限りなく近い Julia 集合の存在を導く．

3.2.1　階数 2 カスプの被覆

まずは有理関数の放物的点と階数 2 カスプ，及び幾何学的極限，2 次元に近い Julia 集合の関係について概観をまとめておこう．

$0 < r < 1/2$ に対し，$p(z) = z + 1$, $r(z) = -r^2/z$ で生成される Hecke 群 $\Gamma_r \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ を考えよう．Γ_r の極限集合 Λ_r は $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に含まれる Cantor 集合である．ここで $r \to 0$ とすると，一見不思議な現象が起きる．Λ_r は 0 次元集合 $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ へと押し潰されていくにもかかわらず，全ての $r > 0$ に対して

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_r) > \frac{1}{2}$$

なのである．

このような下界が生じる原因は，実は Γ_r の放物的部分群 $\langle p(z) \rangle$ にある. これを確かめるには，Λ_r 上に $\delta = \mathrm{H.dim}(\Lambda_r)$ 次元 Γ_r 不変密度 μ が存在することを用いなければならない [23]．整数 n に最も近い Λ_r の極限集合の一部分（Cantor 集合なので全体と相似な部分のひとつ）を $\Lambda_r(n)$ としよう．このとき，

$$\begin{aligned}
\mu(\Lambda_r) = \mu\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_r(n)\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(p^n(\Lambda_r(0))) \\
&\asymp \mu(\Lambda_r(0)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(p^n)'(0)|_\sigma^\delta \\
&\asymp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{|(p^n)'(0)|}{1+|p^n(0)|^2}\right)^\delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^\delta}
\end{aligned}$$

であるから，$\mu(\Lambda_r)$ の有限性より最後の級数は収束しなければならず，$\delta > 1/2$ となるのである．

さらに同様の理由で，Klein 群 Γ が階数 2 カスプを持つとき，$\mathrm{H.dim}(\Lambda(\Gamma)) > 1$ が成立する．すなわち，階数が増えて下界は 2 倍になる．

さて次に，$f(z)$ は無限遠点を p 花弁点として持つ有理写像としよう．2 章によれば，f は無限遠点近傍で

$$T(z) = (z^p + 1)^{1/p}$$

と共役であった．すなわち，階数 1 カスプの p 葉被覆である．ここで Hausdorff 次元については，定理 1.2 と命題 1.7 より，少なくとも

$$\mathrm{H.dim}(J(f)) \geq \mathrm{H.dim}(J_{\mathrm{rad}}(f)) = \alpha(f) > \frac{p}{p+1}$$

だけは分かっている．ここでもまた，階数 1 カスプに対応する点によって Hausdorff 次元の下界が与えられている．これらの事実を踏まえれば，有理写像においても階数 2 カスプに対応するものがあれば，より高い次元で下から押さえられる可能性が出てくる．

これを実現し 2 次元に近い Julia 集合の存在をみるには，円接的収束列 $f_n \to f$ の**幾何学的極限** (geometric limit) を考え合わせなくてはならない．その中のひとつ，無限遠点近傍で定義され, f と可換，かつ

$$S(z) = (z^p + \tau)^{1/p} \qquad (\tau \in \mathbb{H})$$

と共役となっているものが重要である．これを g とおこう．$\langle S, T\rangle$ によって生成される力学系は階数 2 カスプの p 葉被覆であり，後に定義するその臨界指数は

$$\delta(S,T) \geq \frac{2p}{p+1}$$

を満たしている（命題 3.9)．また f_n の等角密度 μ_n の極限は $\langle g, f\rangle$ 不変密度を与えることから，上の評価式と共役性により，

$$\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \geq \frac{2p}{p+1} - \epsilon$$

が示される (定理 3.7）．ここで ϵ が出てくるのは，$\langle g, f\rangle$ と $\langle S, T\rangle$ が $(1+\epsilon)$-擬等角写像によってしか共役にできないからである．

では，ここでの主定理をまとめておこう．次のような状況を考える．c を有理写像 f の放物的固定点 ($f'(c) = 1$) とし，$f_n \to f$ を $c_n \to c$ となるような代数的収束とする．ここで

$$\lambda_n = \exp(L_n + i\theta_n) = f_n'(c_n) \to 1$$

が η-**円接的**に収束するとは，L_n，$\theta_n \to 0$ かつ

$$\theta_n^2 / L_n \to \eta \neq 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．ただし，η の正負は問わない．すなわち，$\eta < 0$ ならば c_n は吸引固定点として c に近づき，$\eta > 0$ ならば c_n は反発固定点として c に近づく．中立的固定点として，ということはない．

　これがこの章の主定理である．

定理 3.7 f が p 花弁点 c を持ち，写像・固定点列 $(f_n, c_n) \to (f, c)$ は優収束，$\lambda_n \to 1$ は η-円接的収束とする．このとき，

$$\liminf \alpha(f_n) \geq \frac{2p}{p+1} - \epsilon$$

が成り立つ．ここで，$\eta \to 0$ のとき $\epsilon = \epsilon(f, \eta) \to 0$ とできる．

　定理1.2より $\alpha(f_n) \leq \mathrm{H.dim}(J(f_n))$ であるから，上定理の左辺は $\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n))$ に置き換えてよい．すなわち，花弁数 p が十分大きく η が十分小さければ，$\mathrm{H.dim}(J(f_n))$ はいくらでも2に近づけることができるのである．

3.2.2　定理3.7の証明

　定理の証明の前に，2章で扱ったMöbius変換の p 葉被覆によるモデリングについてもう少し詳しく調べておこう．ここで

$$T_n(z) = \lambda_n (z^p + 1)^{1/p}$$
$$T(z) = (z^p + 1)^{1/p}$$

は $\mathcal{G}$ での芽であり，ある $R \gg 0$ について $U(T_n) = U(T) = \{z \mid |z| > R\}$ であるものとする．

命題 3.8 $\lambda_n \to 1$ が η-円接的収束とする．このとき，n の適当な部分列をとって，無限遠点の近傍で定義された写像 $S(z) = (z^p + \tau)^{1/p}$ に対し $T_n^{k(n)} \to S$ となるようにできる．ただし，$k(n) = [2\pi/\theta_n]$，$\mathrm{Im}\tau = -2\pi/p\eta$ である．

証明　簡単のために，$\theta_n > 0$ としておこう．まずは $p = 1$ のときを考える．λ_n は $[2\pi/\theta_n]$ 乗することで原点まわりをほぼ1周し，再び正の実軸付近に戻ってくる．そのとき絶対値は $\exp([2\pi/\theta_n]L_n)$ であるが，η-円接性よりこれは1に収束する．よって $k(n) := [2\pi/\theta_n]$ とすると，$\lambda_n^{k(n)} \to 1$ である．

　ここで

$$T_n^{k(n)}(z) = \lambda_n^{k(n)} z + \frac{\lambda_n^{k(n)} - 1}{\lambda_n - 1}$$

について考える．$n \to \infty$ のとき，$\lambda_n^{k(n)} z$ は一様に z に収束する．また $\lambda_n - 1 \sim i\theta_n$ であるから，

$$\frac{\lambda_n^{k(n)}-1}{\lambda_n-1} \sim \frac{k(n)L_n + i(k(n)\theta_n - 2\pi)}{i\theta} = -i\left[\frac{2\pi}{\theta_n}\right]\frac{L_n}{\theta_n} + \left(k(n) - \frac{2\pi}{\theta_n}\right)$$

となる．この虚部は $-2\pi/\eta$ に収束し，実部は絶対値 1 以下であるから，さらに部分列をとって $T_n^{k(n)} \to S$ とできる．

$p > 1$ のときも，$T_n(z) = (\lambda_n^p z^p + 1)^{1/p}$ として $w = z^p$ による半共役を考えれば，$p = 1$ の場合に帰着できる（ただし，$\lambda_n^p \to 1$ は $p\eta$ -円接的であることに注意しておこう）．■

さて，上の命題で構成された S は半群 $\langle T_n \rangle$ の**幾何学的極限**に属する．$\langle S, T \rangle$ は階数 2 の放物的 Klein 群の p 葉被覆であり，S と T は可換である．これは $p = 1$ のときは明らかである．$p > 1$ のときも $w = z^p$ による半共役を考えれば，$p = 1$ のときの可換性を引き継いでいることがわかる．

一般に可換な単葉写像 $f,\ g \in \mathcal{G}$ に対し，臨界次元を

$$\delta(f,g,x) := \inf\{\delta \geq 0 \mid \sum_{i,j} \left|(f^i g^j)'(x)\right|_\sigma^\delta < \infty\}$$

$$\delta(f,g) := \inf \delta(f,g,x)$$

と定める．$\sum$ については $f^i g^j$ が定義されている全ての $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ をわたって和をとるものとする．

このとき次の命題が，定理 3.7 の証明において中心的な役割を果たすことになる．

命題 3.9　上の $S,\ T$ について，$\delta(S,T) = 2p/(p+1)$.

証明　R を十分大として，$U(S) = U(T) = \{z \mid |z| > R\}$ としよう．まずは $p = 1$ とする．このとき放物的固定点 ∞ では $\delta(S,T,\infty) = \infty$ になってしまうので，ここから $\delta(S,T)$ の値は出てこない．よって $x \neq \infty$ としよう．

$|(S^i T^j)'(x)| = 1$ より，

$$\sum \left|(S^i T^j)'(x)\right|_\sigma^\delta \asymp \sum \frac{1}{(1+|S^i T^j(x)|^2)^\delta} \asymp \sum \frac{1}{(1+|i+j\tau|^2)^\delta}$$

と評価できる．$\mathbb{Z}^2$ を平面 $\mathbb{R}^2$ の格子と見たとき，τ に依存するある半平面上の $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ については $S^i T^j$ が定義されている．よって $\delta \geq 1$ であれば，これは収束する．すなわち，$\delta(S,T) = 1$ である．

$p > 1$ のとき，$w = z^p$ によって球面計量 σ を書きなおすと，$\sigma \asymp |dw|/|w|^{1+1/p}$ となる．よって

$$\sum \left|(S^i T^j)'(x)\right|_\sigma^\delta \asymp \sum \left(\frac{1}{|i+j\tau|}\right)^{(1+1/p)\delta}.$$

ゆえに収束条件 $(1+1/p)\delta \geq 2$ より $\delta(S,T) = 2p/(p+1)$ が導かれる．■

では最後に，定理の証明を完成させせよう．

証明　(定理 3.7) $\delta = \liminf \alpha(f_n)$ とし，$\alpha(f_n)$ 次元 f_n 不変確率測度 μ_n をとっておく．さらに部分列をとることで，$\alpha(f_n) \to \delta$ かつ μ_n は弱収束極限として δ 次元 f 不変密度 μ を持つとしてよい．

次に，$f_n \to f$ と $T_n \to T$ の間の共役がほしいのだが，定理 2.8 とは $\lambda_n \to 1$ が η-円接的という点で状況が異なる．しかし，定理 2.7，定理 2.8 の証明を見返すと，円接的収束性が本質的にはたらくのはそのくりこみにおいて $\log|R(\lambda_n)| \to \infty$ となることであったから，ここでも η を十分小さくすれば

$$\log|R(\lambda_n)| = \frac{4\pi^2}{L_n + \theta_n^2/L_n} \sim \frac{4\pi^2}{\eta} \gg 0$$

とでき，共役は実現し得る．よって定理 2.8 の記述に習えば，さらに適当な部分列をとることで，$(1+\epsilon)$-擬等角写像列 $\phi_n \to \phi$ が存在して，$(f_n, c_n) \to (f, c)$ と $(T_n, \infty) \to (T, \infty)$ の間の共役を与えることができる，ということになる．特に，$\eta \to 0$ とすれば $\epsilon(\eta, f) \to 0$ である．

さて命題 3.8 によれば，さらなる部分列をとると $T_n^{k(n)} \to S$ とできるのであった．これに対応して，上の共役より $f_n^{k(n)}$ も c のある近傍で $g = \phi^{-1} \circ S \circ \phi$ に収束する．このとき μ_n の f_n 不変性より，μ は g 不変性をもつことがわかる．

c の十分近くに $x \in J(f)$ をとろう．このとき，x は μ の台に属するものを選んでおく．c の近傍では $f^i g^j$ は $T^i S^j$ と同様に作用するが，これは一次独立な 2 つの平行移動の p 葉被覆に他ならない．よって x 中心の小さな開球 B をとり，$|i|,\ |j| \gg 0$ のとき $f^i g^j(B)$ 達が互いに共通部分を持たないようにできる．さらに，$f^i g^j|B$ が有限歪曲度の単葉写像であることから，

$$\sum \left(\operatorname{diam} f^i g^j(B)\right)^\delta \asymp \sum \mu(f^i g^j(B)) = \mu\Big(\bigcup f^i g^j(B)\Big) \le 1$$

を得る．ただし，$\sum$ や $\bigcup$ は $f^i g^j$ が c の近傍で定義されるような全てをわたるものとする．

一方，$y = \phi(x),\ A = \phi(B)$ とすれば，ϕ^{-1} が $(1+\epsilon)^{-1}$-Hölder 連続写像であることから，

$$\begin{aligned} \sum |(T^i S^j)'(y)|^{\delta(1+\epsilon)} &\asymp \sum \left(\operatorname{diam} T^i S^j(A)\right)^{\delta(1+\epsilon)} \\ &= O\Big(\sum \left(\operatorname{diam} f^i g^j(B)\right)^\delta\Big) \end{aligned}$$

を得る．ゆえに命題 3.9 より，$\delta(1+\epsilon) \ge \delta(S,T) = 2p/(p+1)$ でなくてはならない．

よって

$$\liminf \alpha(f_n) = \delta \ge \frac{2p}{p+1}(1+\epsilon)^{-1}$$

であるから，$\eta \to 0$ のとき $\epsilon(\eta, f) \to 0$ より定理は示された．■

3.3 2次多項式

以下の節では，次数2の写像の例を通して，今までの結果を見直していくことにする．この節では2次多項式に焦点を当て，Julia集合のHausdorff次元についてその連続性を考察していこう．

λ を1の原始 p 乗根としたとき，2次多項式

$$f(z) = \lambda z + z^2$$

を考える．f の唯一の分岐点 $z = -\lambda/2$ は放物的点 $z = 0$ に吸い寄せられるから，この写像は幾何学的有限である．また，f の $\mathbb{C}$ 上の周期点は放物的点 $z = 0$ を除いてすべて反発周期点である．

ここで $(f, 0)$ は p 花弁放物的であると仮定しよう．事実，全ての花弁は f^p の臨界値 (critical value) を含み [8, III,Thm.2.3]，かつ f^p は無限遠点を除きその p 個しか臨界値を持たない．

さて収束列 $\lambda_n \to \lambda$ に対し，収束写像列

$$f_n(z) = \lambda_n z + z^2$$

を考えよう．以下で $\lambda_n \to \lambda$ が非接的に収束するとは $\lambda_n^p \to 1$ が非接的に収束するときを言う．これは $\lambda_n/\lambda \to 1$ が非接的であることと同値である．

定理 3.10 λ を1の原始 p 乗根とし，$\lambda_n \to \lambda$ が非接的に収束するとする．このとき，$J(f_n) \to J(f)$ かつ $\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to \mathrm{H.dim}(J(f))$ かつ対応する標準密度は測度の弱収束の意味で $\mu_n \to \mu$ である．

証明 $(f, 0)$ は p 花弁放物的だから，命題2.4より $(f_n, 0) \to (f, 0)$ は優収束である．ゆえに定理3.2を適用して，この収束が力学系的収束であることがわかる．■

定理 3.11 λ を1の原始 p 乗根とする．このとき $|\lambda_n| < 1$ なる円接的収束列 $\lambda_n \to \lambda$ がとれて，

$$\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \geq \frac{2p}{p+1}$$

証明 定理3.7より，$\eta = -1/n$ に対して $|\lambda_n - 1| < 1/n$ なる η-円接的収束列 λ_n が存在し，$\epsilon_n \to 0$ のとき $\mathrm{H.dim}(J(f_n)) > 2p/(p+1) - \epsilon_n$ とできる．この収束列は $\eta < 0$ であるから，$|\lambda_n| < 1$ である．■

上の2つの定理は，λ_n がMandelbrot集合の任意の双曲成分 (hyperbolic component) 内からその境界への収束列である場合に拡張できる．上の λ_n を吸引周期点での固有値に対応させて考えればよい．また同様な結果が写像族 $f_c(z) = z^d + c,\ d > 1$ についても示される．

系 3.12 $\mathrm{H.dim}(J(\lambda_n z + z^2)) \to 2$ となるような収束列 $|\lambda_n| < 1$ がとれる．

注意 3.c $\mathrm{H.dim}(J(f)) = 2$ となる幾何学的無限な 2 次多項式の存在が宍倉氏によって示されている [30].

実 2 次式への応用

最後に $f_c(z) = z^2 + c$ の形の関数で，c が実数であるようなものの族を考えよう．ここで $c_{\mathrm{Feig}} = -1.401155...$ で Feigenbaum 点を表すことにする．

定理 3.13 c の関数 $\mathrm{H.dim}(J(f_c))$ は $c \in (c_{\mathrm{Feig}}, 1/4]$ 上連続である．

証明 $c \in (c_{\mathrm{Feig}}, 1/4)$ のとき，f_c は周期 2^n の吸引周期系をもつか，周期 2^n，固有値 -1 の 2 花弁放物的周期系となることが知られている [13].

吸引的な場合，f_c は拡大的であるから，定理 3.1 より Hausdorff 次元の連続性がわかる．また放物的な場合は，その点を p，固有値を $\lambda = -1$ とし，実平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上のグラフで考えるとよい．点 (p,p) は曲線 $y = f_c^{2^n}$ と直線 $y = x$ の交点であるが，局所的に直交しており，少々の摂動ではその交叉性は失われない．すなわち，$c_n \to c$ なる実数列が存在して，$f_{c_n} \to f_c$ の実周期点列 $p_n \to p$ について

$$\lambda_n = (f_{c_n}^{2^n})'(p_n) \to \lambda = -1$$

が成り立っている．これは実軸にそった収束列であるから，$\lambda_n \to \lambda$ は非接的である．よって $f_{c_n} \to f_c$ は非接的であるから，定理 3.2 より Hausdorff 次元の収束性がわかる．

次に $c = 1/4$ のときは，$p = 1/2$ が固有値 $\lambda = 1$ の 1 花弁固定点となる．$c_n \nearrow c = 1/4$ とすると，対応する $f_{c_n} \to f_c$ は実数の固有値 $\lambda_n = 1 - \sqrt{1 - 4c_n}$ をもつ固定点 $p_n \to p$ をもつから，上と同様に $\lambda_n \to \lambda$ は非接的となり定理 3.2 が適用できる．■

$c \searrow 1/4$ のときは $f_c(z) = z^2 + c$ の全ての固定点は反発的で，固有値は 1 に接するある小円に沿って 1 に近づく．このときの Hausdorff 次元の不連続性が Douady-Sentenac-Zinsmeister[12] に，Julia 集合自身の不連続性が Douady[11, Thm.11.3] によって示されている．また上定理と同じく，$c \nearrow 1/4$ のときの Hausdorff 次元の連続性は，Bodart-Zinsmeister[4] においても示されている．

さらに次節では，力学系的収束とのからみで Hausdorff 次元の不連続性を扱うことにしよう．

3.4 Hausdorff 次元が不連続になる例

この節では，次のような性質を持つ収束列の例を 2 つ挙げよう．

(a) $f_n \to f$ は代数的収束

(b) f ，及び $n \gg 0$ のときの f_n は幾何学的有限

(c) Hausdorff 位相の意味で $J(f_n) \to J(f)$ ，しかし

(d) $\mathrm{H.dim}(J(f_n))$ は $\mathrm{H.dim}(J(f))$ に収束しない！

これらの例は定理 3.2 の条件の必要性を示すものである．

分岐関係の保存を仮定しない例

まず，分岐関係は保存しないが $f_n \to f$ が円接的であり，

$$\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to 2 > \mathrm{H.dim}(J(f))$$

となる例を挙げよう．これは定理 3.2(a) において，分岐関係の保存を仮定しない例である．

$f(z) = z^2 + c$ において，c を Misiurewicz 点としよう．すなわち，分岐点 $z = 0$ が真に前周期的となるような c である．当然幾何学的有限であり，系 1.14 より $\mathrm{H.dim}(J(f)) < 2$ が成り立つ．特に Julia 集合は樹上突起 (dendrite) となることが知られている．具体的な例として，$c = -2$（Julia 集合は閉区間 $[-2, 2]$）や $c = i$ がある．

ここで系 3.12 から，Hausdorff 次元が 2 に収束する拡大的な写像列（連結な Julia 集合をもつ）をとってくることができる．その共役をとった列 $g_n(z) = z^2 + a_n$ を考えよう．[23, Thm.1.3] によれば，適当な列 $c_n \to c$ について $f_n(z) = z^2 + c_n$ が適当な制限のもとでくりこみ可能（renormalizable），すなわち適当な領域 U_n, V_n ，自然数 $k(n)$ が存在して，$f_n^{k(n)}|U_n \to V_n$ が 2 次式類似写像（quadratic-like map）にできて，また任意に小さい ϵ_n について g_n と $(1+\epsilon_n)$-擬等角共役にできる．ゆえに f_n は g_n のほとんど等角に近い写像によるコピーを含むことになり，$\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to 2$ とできる．すなわち Hausdorff 次元は不連続である．

しかし Julia 集合自身については，Douady[11, Cor.5.2] によって Misiurewicz 点で Julia 集合は連続的に変化することがわかっているので，$J(f_n) \to J(f)$ なのである．さらに，g_n が拡大的であることから f_n は拡大的（よって幾何学的有限）であり，また f に放物的点がないことから，形式的に $f_n \to f$ は非接的収束である．

この例における $J(f_n)$ 上の標準密度 μ_n の弱収束極限 μ は，系 1.18 でいうところの後者，すなわち分岐点 $z = 0$ の原像が台となる，点測度を持つ測度になる．点測度 $\mu(\{0\})$ は，$J(f_n)$ に含まれるくりこみされた $J(g_n)$ の小コピーの Hausdorff 測度が収束したものである．この意味でも，力学系的収束の条件を満たしていないことが確認できる．

円接的に収束するときの条件を省いた例

もうひとつの例は 2 次の有理写像列で，$f_n \to f$ は分岐関係を保つ円接的な収束だが，

$$\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to 1 > \mathrm{H.dim}(J(f)) = \frac{1}{2} + \epsilon \tag{3.6}$$

となる．ただし，任意の $1/2 < \epsilon < 1$ に対してそのような例を構成できる．これは定理 3.2(b') において条件 $\mathrm{H.dim}(J(f)) > 2p(f)/(p(f)+1)$ を省いた例である．

$r > 0$ のとき，

$$f(z) = z + 1 + \frac{r}{z}$$

を考える．これは幾何学的有限であり，$c = \infty$ は 1 花弁固定点である．また $f^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ であるから，系 1.15 より $J(f) \subset \hat{\mathbb{R}}$ かつ $\mathrm{H.dim}(J(f)) < 1$ である（Cantor 集合になる）．

さて任意の $1/2 < \epsilon < 1$ に対して，適当な $r > 0$ をとって $\mathrm{H.dim}(J(f)) = 1/2 + \epsilon$ としたい．これは [23] により r が小さいとき

$$\mathrm{H.dim}(J(f)) = \frac{1 + \sqrt{r}}{2} + O(r)$$

となることがわかっている（2 次の Blaschke 積を考える）ので，うまく r をとり固定しておく．

ある円接的な収束列 $\lambda_n \to 1$ に対して，写像列

$$f(z) = \lambda_n z + 1 + \frac{r}{z}$$

が式 (3.6) の関係を満たすようにとれることを示そう．

まず分岐関係であるが，f の分岐点 $z = \pm\sqrt{r}i$ は反復により実軸上 $c = \infty$ に吸引されていくから，そもそも前周期的でない．一応，分岐関係の保存は空集合に対し成り立っていることになる．

よって $f_n \to f$ は円接的収束，分岐関係を（形式的に）保つから，定理 2.10 より $J(f_n) \to J(f)$ かつ $n \gg 0$ にたいして f_n は幾何学的有限（ここでは拡大的）である．

次に $\lambda_n = \exp(L_n + \theta_n)$ とする．定理 3.7 によって，各 n について $\eta = 1/n$ とし，λ_n を $\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \geq 1 - \epsilon(f, \eta)$ かつ $|\lambda_n - 1| < 1/n$, $\theta_n^2/L_n = \eta$ となるようにとることができる．また，$\eta \to 0$ のとき $\epsilon(f, \eta) \to 0$ より，$\liminf \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \geq 1$ である．ここで $\alpha := \limsup \mathrm{H.dim}(J(f_n)) > 1$ と仮定すると，$\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \to \alpha$ となる部分列をとることで定理 3.2 が適用でき，Hausdorff 次元の連続性より $\alpha = \mathrm{H.dim}(J(f)) > 1$ となってしまうが，これは $J(f) \subset \hat{\mathbb{R}}$ に反する．よって $\limsup \mathrm{H.dim}(J(f_n)) \leq 1$ も成り立つので，式 (3.6) が成り立つ．

この例では，μ_n の弱収束極限 μ は放物的点 $c = \infty$ の f による原像を台とする点測度を持つ測度である．$J(f_n)$ の Hausdorff 測度は $c = \infty$ とその原像に螺旋状に集中し，極限 μ で質点となる．

第4章　Klein群の力学系的収束性（谷口）

この章では，以上の議論に対応するクライン群に関する結果を McMullen ([21]) に従って概説する．一部の用語の定義や Sullivan の辞書の対照項目については以下の節中に述べるが，その主たる結果は以下の通りである．

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上に作用するクライン群 Γ は，一方では 3 次元完備双曲 orbifold $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ の基本群であるが，他方で $\hat{\mathbb{C}}$ 上の共形力学系を与えていると考えられる．以下，簡単のためクライン群は特に断らない限り torsion-free かつ非初等的であるとする．

どちらの見方にとっても重要な不変量に，極限集合 Λ の Hausdorff 次元 D がある．特に Γ が幾何学的有限なら，この値 $D = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$ は様々な不変量と関連付けられる．たとえば，M 上のラプラシアンのスペクトラム底 λ_0 は，$D \geq 1$ ならば

$$\lambda_0 = D(2 - D)$$

を満たす．

そこで，まず M の幾何学的収束と Λ の収束，さらにはその次元の連続性との関連が問題であるが，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 Γ_n が Γ に強収束し，さらに M が幾何学的有限なら，十分先の各 Γ_n も幾何学的有限で，Λ_n は Λ に Hausdorff 収束する．

ただし，ここでの，強収束は幾何学的収束かつ id に各点収束する全射準同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ の列の存在で定義する.（Thurston による定義より一般的である）

定理 4.2 上定理の仮定の下で，さらに $\mathrm{H.dim}(\Lambda) \geq 1$ とすると

$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

である．さらに $\mathrm{H.dim}(\Lambda) > 1$ であれば標準密度 μ_n は μ に弱収束する．

注意 4.a 幾何学的有限なクライン群の極限集合上には標準的に D 次元の等角密度 μ が構成できるが，これを (Patterson-Sullivan の）標準密度という．特にカスプが無ければ μ は D-次元 Hausdorff 測度に一致することが知られている．

しかし，$\mathrm{H.dim}(\Lambda) < 1$ の場合には事態は一変する．

定理 4.3 任意の $\epsilon \in (0, 1/2)$ に対し，幾何学的有限な Γ_n および Γ で Γ_n が Γ に強収束するが

$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = 1 > \mathrm{H.dim}(\Lambda) = 1/2 + \epsilon$$

となるものが存在する．

すなわち，次元の連続性を得るにはさらに精密な収束概念が必要であることが分かる．

定義 Γ_n が Γ に代数的収束するとは id に各点収束する同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ の列が存在することである．

この状況で放物元 $g \in \Gamma$ が 偶発的放物元 (accidental parabolic) であるとは，無限個の $\chi_n(g)$ が双曲型であることとする．このとき $\chi_n(g)$ の複素的長さ $L_n + i\theta_n$ は 0 に収束するが，この収束は $\theta_n = O(L_n)$ のとき非接的，$\theta_n^2/L_n \to 0$ のとき円接的であるという．

定理 4.4 M が幾何学的有限で，Γ_n が Γ に代数的に収束するとき，

1. Γ_n が Γ に強収束することと，任意の偶発的放物元の収束が円接的であることとは同値である．
2. 任意の偶発的放物元の収束が 非接的であれば，

$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

かつ　$\mu_n \to \mu$ である．

ここで，λ_0 は $D > 1$ の場合にのみ変化することから，次の結果も得られる．

定理 4.5 M_n が幾何学的有限な M に強収束するとき，

$$\lim_n \lambda_0(M_n) = \lambda_0(M)$$

が成り立つ．

注意 4.b M が幾何学的無限だが素直 (tame) であるときは，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda) = 2$$

である．従って Γ_n が Γ に幾何学的に，あるいは代数的に，収束すれば

$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

が成り立つ．

一方，そのような群の極限集合上の２次元等角密度は，一般には一意に決まらない．

例 4.6 (擬フックス群) コンパクト面 S のタイヒミュラー空間の Bers モデルで表された擬フックス多様体 $M_n = Q(X_n, Y)$ の列に対し，

1. S 上の Dehn ツイスト τ に対し，$X_n = \tau^n(X_0)$ であれば M_n は相異なる代数的極限 M_A と幾何学的極限 M_G を持つが，M_n は M_G に強収束し，
$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda_G) > \mathrm{H.dim}(\Lambda_A)$$
が成り立つ．

2. S （あるいはその部分面）上の擬アノゾフ写像 ϕ に対し，$X_n = \phi^n(X_0)$ であれば，任意の幾何学的極限は幾何学的無限で
$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = 2$$
である．

3. S 上の共通点のない単純閉曲線族での pinching で X_n が得られれば M_n は幾何学的有限な M に強収束し，
$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda) < 2$$
が成り立つ．

また，単純測地線 C に沿う Fenchel-Nielsen ツイストで得られる族 $\{M_t = Q(\tau^t(X), Y)\}$ に対し，周期 $\ell_C(X)$ を持つ周期函数 $\delta(t)$ で，
$$\lim_{t\to\infty} |\mathrm{H.dim}(\Lambda_t) - \delta(t)| = 0$$
が成り立つものが存在する．

注意 4.c 最後の例では $\delta(t)$ は定数でないと思われる．２次多項式の場合には，$c > 1/4$ が $1/4$ に収束するとき，H.dim が実際に振動するという Douady-Sentenac-Zinsmeister ([12]) の結果に対応する．

なお，クライン群に対する同様の結果や関連する結果については Anderson, Canary, Taylor らの論文 [2], [37] がある．

4.1　種々の不変量と幾何学的有限性

4.1.1　基本不変量

$d \geq 2$ とし，完備双曲多様体 $M = \mathbb{H}^{d+1}/\Gamma$ を固定する．

定義　$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ の離散部分群をクライン群という．（このノートでは，向きを保つものに限る．）またクライン群は特に断らない限り torsion-free かつ非初等的であるとする．

クライン群 Γ の極限集合 Λ は，任意に固定された $x \in \mathbb{H}^{d+1}$ の軌道 Γx を用いて

$$\Lambda = \overline{\Gamma x} \cap S^d_\infty$$

で定義する．補集合 Ω を不連続領域という．

非接極限集合 Λ_c とは M 上の recurrent な測地線の端点に対応する S^d_∞ の点全体である．

さて，基本的不変量としてたとえば以下のものがある．

1. $\lambda_0(M)$：ラプラシアンのスペクトラム底

$$\begin{aligned}\lambda_0(M) &= \inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2} \mid f \in C_0^\infty(M)\right\} \\ &= \sup\{\lambda \geq 0 \mid f > 0; \Delta f = \lambda f \text{ がある }\}\end{aligned}$$

（たとえば $\lambda_0(\mathbb{H}^{d+1}) = d^2/4$ である．また実際 λ_0 に対する正値固有函数が存在する．従って，sup は max である．）

2. $\delta(\Gamma)$：ポアンカレ級数の収束指数

ポアンカレ級数

$$P_s(\Gamma, x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x,\gamma x)} \qquad (x \in \mathbb{H}^{d+1})$$

（ただし，$x \in \Omega$ なら球面計量 σ を用いて

$$P_s(\Gamma, x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|_\sigma^s$$

）に対し，

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s \geq 0 \mid P_s(\Gamma, x) < \infty\}$$

と定義する．（これは x の取り方に依らない）

3. $\alpha(\Gamma)$：臨界指数（Γ-不変密度の最小次元）

   ここで，次元 α の Γ-不変等角密度とは，S^d_∞ 上の正測度 μ で，任意の Borel 集合 E と γ に対し，

$$\mu(\gamma E) = \int_E |\gamma'|^\alpha_\sigma d\mu$$

   を満たすもので，全測度 1 に正規化されているとする．

4. $\mathrm{H.dim}(\Gamma_c)$：非接極限集合の Hausdorff 次元

注意 4.d （次元 α の）等角密度は，S^d_∞ 上の等角計量 $\rho(z)^2|dz|^2$ の集合から S^d_∞ 上の測度の集合への射 μ で C

$$\frac{d\mu(\rho_1)}{d\mu(\rho_2)} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha$$

を満たすものと考えられる．S^d_∞ の等角写像 γ は自然に μ に作用するが，上記の条件は不変性 $\gamma_*(\mu) = \mu$ を意味する．

定理 4.7 (Sullivan [32],[35] ; Bishop-Jones [3]) 任意の（非初等的）完備双曲多様体 M に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_c) = \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$$

かつ

$$\begin{aligned}\lambda_0(M) &= d^2/4 \qquad (\delta(\Gamma) \le d/2)\\ &= \delta(\Gamma)(d-\delta(\Gamma)) \qquad (\delta(\Gamma) > d/2)\end{aligned}$$

が成り立つ．

これは定理 1.2 に対応する結果である．

注意 4.e Bishop-Jones の定理は，任意の非初等的な離散群に対し，

$$\delta(\Gamma) = \mathrm{H.dim}(\Lambda_c)$$

であることを述べている．

また次の系は定理 1.6 に対応している．

系 4.8 Γ が rank r のカスプを持てば，$\delta(\Gamma) > r/2$ である．

証明 ∞ が rank r のカスプの安定化群 L の固定点としていいが，このとき L は $\mathbb{R}^r$ 内の格子 $\{g(0) \mid g \in L\}$ を与える．

そこで 0 中心の球 $B \subset \mathbb{R}^d$ で $\mu(B) > 0$ となるものを固定する．ただし，μ は δ 次元の不変等角密度とする．このとき，球面計量を σ として

$$\begin{aligned}\infty > \sum_L \mu(gB) &\asymp \sum_{g\in L} |g'(0)|_\sigma^\delta = \sum_L (1+|g(0)|^2)^{-\delta} \\ &\asymp \int_{\mathbb{R}^r} (1+|x|^2)^{-\delta} dx\end{aligned}$$

より，主張を得る．■

定理 4.9 (Sullivan [32]) 次元 α の Γ-不変密度 μ が非接極限集合上で測度正なら，$\alpha = \delta(\Gamma)$ である．

定理 4.10 ポアンカレ級数が臨界指数で発散すれば，次元 $\delta(\Gamma)$ の任意の不変密度 μ の台は極限集合に含まれる．

証明　$\Omega(\Gamma)$ の基本領域 F を取ると

$$\int_F P_\delta(x) d\mu(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_F |\gamma'(x)|_\sigma^\delta d\mu(x) = \sum_\Gamma \mu(\gamma F) < \infty$$

であるが，$P_\delta(\Gamma, x) = \infty$ より $\mu(F) = 0$ を得る．■

4.1.2　幾何学的有限なクライン群

定義　M の凸核 (convex core) $K(M)$ とは，極限集合内に両端点を持つすべての測地線を含む最小の凸集合の M への射影である．

M あるいは Γ が幾何学的有限であるとは，凸核と単射半径が一定以上の点からなる部分集合 M_{thick} との共通部分がコンパクトであることとする．

注意 4.f 3 次元の場合には，種々のよく知られた定義と一致する．高次元の場合については，Bowditch [5] を参照せよ．

幾何学的有限な Γ に対し，$\Lambda - \Lambda_c$ はカスプ点の可算集合で，特に放物元を含まなければ $\Lambda = \Lambda_c$ で $K(M)$ はコンパクトとなる．このような群を convex cocompact であるという．このようなクライン群は，Sullivan の辞書では拡大的有理写像に対応する．

定理 4.11 (Sullivan [34]) 幾何学的有限な M に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_c) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

が成り立つ．

さらに，S_∞^d 上に次元 $\delta(\Gamma)$ で全測度 1 の Γ-不変密度 μ が一意的に存在する．μ はアトムを持たず Λ 内に台を持つ．またポアンカレ級数は臨界指数で発散する．

従って，定理 4.7 と上定理を合わせれば，定理 1.13 に対応する結果が得られたことになる．また次の系は，系 1.14 に相当する．

系 4.12 幾何学的有限な M に対し，$\Lambda \neq S^d_\infty$ なら，$\mathrm{H.dim}(\Lambda) < d$ が成り立つ．

証明 そうでなければ，Lebesque 測度がもう一つの不変密度を与えることになる．■

系 4.13 幾何学的有限な Γ で不変で極限集合内に台を持つ正規化された任意の密度は

1. 次元 $\delta(\Gamma)$ の標準密度か
2. カスプ点でのアトムで，次元は $\delta(\Gamma)$ より大きい．

証明 μ の次元 $\alpha > \delta(\Gamma)$ なら定理 4.9 より $\mu(\Lambda_c) = 0$ であるから，カスプ点のみに台を持つ．■

注意 4.g カスプが存在するときは，任意の $\alpha > \delta(\Gamma)$ に対し，α-次元の不変アトムが実際存在する（Sullivan [35]）．

系 4.14 Convex cocompact な群の極限集合上の正規化された Γ-不変密度は一意的である．

次に M がコンパクトな $d+1$ 次元多様体の内部に同相なとき（位相的に）素直という．

定理 4.15 幾何学的無限かつ素直な M に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_c) = \mathrm{H.dim}(\Lambda) = 2$$

が成り立つ．

証明 Canary の定理より， M が幾何学的無限かつ素直なら $\lambda_0(M) = 0$ である．$\delta > 0$ より定理 4.7 から主張を得る．■

次の結果と比較せよ．

命題 4.16 (Bishop-Jones [3]) 解析的有限で幾何学的無限の Γ に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda) = 2$$

が成り立つ．

従って，解析的有限な Γ が幾何学的有限であることと $\mathrm{H.dim}(\Lambda) < 2$ であることは同値である．

注意 4.h このような特徴付けは，有理写像の場合には成り立たない．実際， Collet-Eckmann map や Fibonacci map などがその例である．

例 4.17 (密度の一意性の反例) M が素直だが幾何学的有限でない場合には，二次元の正規化密度は一意的とは限らない．

例として，コンパクトで，acylindrical かつ atoroidal な 3 次元多様体 N で 3 個の境界成分を持つものをとる．双曲化定理より N は凸双曲多様体の構造 $M(X,Y,Z)$ を持ち，境界成分 X,Y,Z の等角構造でパラメーター付けられる．二つの擬アノゾフな写像類 ϕ, ψ を取り， $M_n = M(\phi^n(X), \psi^n(Y), Z)$ の代数的極限のひとつを M とし，X,Y に対応する M の幾何学的無限エンドを E_1, E_2 とする．

E_1 から出て行く極をもつ Green 函数を正規化し， M 上の正値調和函数 (Evans 函数）ϕ_1 を作る．すなわち，ϕ_1 は E_1 で無限大，E_2 で 0 になる．同様に ϕ_2 を作ると ϕ_1, ϕ_2 は比例しないから，互いに特異な 2 次元不変密度 μ_1, μ_2 を定める．

予想 素直な群に対し，不変密度の空間は有限次元である？

有限生成なら素直だという Marden 予想に対して，次の広義アールフォルス予想がある．

予想 任意の有限生成クライン群 Γ に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_c) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

が成り立つ？

$\Lambda \neq \hat{\mathbb{C}}$ の時が，本来の古典的な Ahlfors 予想である．実際，$\Lambda \neq \hat{\mathbb{C}}$ の場合にこの予想に対する反例が有るとすれば，次の命題より面積正の極限集合を持たなければならない．

命題 4.18 (Bishop-Jones [3]) 非初等的で解析的有限な Γ に対し，$|\Lambda| = 0$ であれば

$$\delta(\Gamma)(= \mathrm{H.dim}(\Lambda_c)) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

が成り立つ．

4.2 幾何学的極限と偶発的放物元

4.2.1 幾何学的極限

クライン群の収束の概念にはいくつかの定式化がある．まず Γ_n が Γ_G に幾何学的に収束するとは，$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ の閉集合として Hausdorff 収束することである．これは以下に述べる Gromov の意味での収束と同値である．(たとえば，[20] Theorem 7.7 を参照せよ.）

次に Γ_n が Γ_A に代数的に収束するとは， id に各点収束する同型 $\chi_n : \Gamma_A \to \Gamma_n$ の列が存在することである．

注意 4.i 幾何学的極限 Γ_G は存在すれば一意的だが，マーキングの取り方で，代数的極限は変わり得る．しかし，幾何学的極限が存在すれば，いかなる代数的極限をも含む．

最後に Γ_n が Γ_S に強収束するとは， Γ_n が Γ_S に幾何学的に収束し，かつ十分大きい任意の n に対し，全射準同型

$$\chi_n : \Gamma_S \to \Gamma_n$$

で $id : \Gamma_S \to \Gamma_S$ に各点収束するものが存在することである．

注意 4.j Γ_n が Γ_S に幾何学的かつ代数的に収束するとき，狭義強収束という．狭義強収束すれば，当然強収束する．しかし，強収束の概念は狭義強収束より一般的である．また Γ_S が有限生成なら，χ_n は十分大きい任意の n に対し一意的に定まる．
さらに，一般に有限生成な Γ に幾何学的に収束すれば id に各点収束する（全射とは限らない）準同型

$$\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$$

は常に構成できる ([20] Proposition 7.13).

定理 4.19 (核の収束) Γ_n が幾何学的有限な Γ に強収束するとき，

1. M_n は十分大きい任意の n に対し幾何学的有限で
2. Λ_n は Λ に Hausdorff 収束し，
3. 任意の $\epsilon > 0$ に対し，切りつめられた凸核 $K_\epsilon(M_n)$ は $K_\epsilon(M)$ に強収束する．

ここで，$M_{(n)}$ の ϵ-thin part すなわち，単射半径が ϵ 未満の点からなる部分集合を $M_{(0,\epsilon)}$ として，切りつめられた凸核は

$$K_\epsilon(M_{(n)}) = K(M_{(n)}) - M_{(0,\epsilon)}$$

で定義される．
従って，幾何学的有限な M の場合には ϵ が Margulis 定数および M の最短測地線の長さより小さければ，標準的な retraction $\rho : M \to K_\epsilon(M)$ が存在する．
次に，(M_n, ω_n) が (M, ω) に（ Gromov の意味で）幾何学的に収束する：すなわち

> 与えられた枠 ω を含む任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対し，滑らかな埋め込み $\phi_n : K \to M_n$ で ω を ω_n にうつし，C^1-位相で isometry に収束するものが存在する

とき，コンパクト集合 $K_n \subset M_n$ が $K \subset M$ に強収束するとは

1. 十分大きい n に対し K_n は $\phi_n(K)$ の 1-近傍に含まれ，
2. $\phi_n^{-1}(K_n)$ が K に Hausdorff 収束する

ことである．

注意 4.k 条件 (1) は K_n の一部が散逸しないことを保証していて，強収束性は条件

$$d(K_n, \phi_n(K)) \to 0$$

と同値である．

上定理は，次の結果を含んでいる．

命題 4.20 (Jørgensen-Marden [14]) Γ_n が幾何学的有限な Γ に狭義強収束するとき，Λ_n は Λ に Hausdorff 収束する．

一方，代数的収束から強収束を導くための条件として次のものがある．

定理 4.21 (強収束の判定) Γ_n が幾何学的有限な Γ_A に代数的に収束するとする．
このとき Γ_n が Γ_A に強収束するのは，任意のカスプ部分群 $L_A \subset \Gamma_A$ に対し，対応する $L_n = \chi_n(L_A) \subset \Gamma_n$ が L_A に幾何学的に収束することと同値である．

ここで，$L \subset \Gamma$ がカスプ部分群とは極大放物部分群のことである．言い換えれば，L は極限集合内のあるカスプ点の安定化部分群である．

系 4.22 Convex cocompact な Γ_A に対し，代数的収束は強収束を意味する．

注意 4.l Γ_n が有限生成の Γ_A に代数的に収束し，$\Lambda_A \neq \hat{\mathbb{C}}$ の場合に，Λ_n が Λ に Hausdorff 収束すれば，逆に Γ_n が Γ に狭義強収束することが知られている (Jørgensen-Marden [14])．

さらに，型を保つ場合には次の結果がある．

命題 4.23 (Anderson-Canary [2]) Γ_n が型を保ち，有限生成の Γ に代数的に収束するとする．

1. $\Lambda \neq \hat{\mathbb{C}}$ なら，Γ_n は Γ に狭義強収束し，Λ_n は Λ に Hausdorff 収束する．
2. $\Lambda = \hat{\mathbb{C}}$ なら，さらに Γ は面群や巡回群のいくつかの自由積でないと仮定すると，Γ_n は Γ に狭義強収束し，Λ_n は Λ に Hausdorff 収束する．

さて証明のために，２つの補題を用意する．まず [20] Proposition 7.13 から次がわかる．

補題 4.24 Γ_n が 幾何学的極限 Γ_G と代数的極限 $\Gamma_A \subset \Gamma_G$ を持ち，Γ_G が有限生成であるとする．このとき Γ_n は Γ_G に強収束する．

補題 4.25 Γ_n が Γ_A に代数的に収束するとき，Γ_n が Γ_A に強収束するのは，∞ に向かう任意の列 $\{g_n \in \Gamma_A\}$ に対して常に $\chi_n(g_n)$ も $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ 内で ∞ に向かう時でかつそのときに限る．ただし，$\chi_n : \Gamma_A \to \Gamma_n$ は id に各点収束する同型の列である．

証明 If-part は，任意に $\{\Gamma_n\}$ が集積する $h \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ をとると，$h = \lim_n \chi_n(g_n)$ となる $g_n \in \Gamma_n$ が存在するとしてよいが，仮定より g_n は ∞ に向かわないから，離散性から g_n は無限個の n で同じ元となり，$h \in \Gamma_A$ となり，$\Gamma_G = \Gamma_A$ が分かる．

逆は，$\chi_n(g_n) \to h$ となる $g_n \in \Gamma_A$ が存在するとき，$h \in \Gamma_A$ だから，十分大きい n にたいし $g_n = h$ となり，$g_n \not\to \infty$ である．■

証明 (定理 4.21) 部分列をとり，幾何学的極限 Γ_G が存在するとしてよい．このとき，M_A は M_G の被覆多様体，つまり被覆写像 $\pi : M_A \to M_G$ が自然に定まり，定義より M_G から M_n への広義一様に C^∞ 位相で等距離埋め込みに収束する様な $\phi_n : M_G \to M_n$ が存在する．ここでさらに枠は凸核の中にあり，互いに移り合うとしてよい．

まず，Γ_A が convex cocompact のときに示す．このとき，$K(M_A)$ はコンパクトだから，$\phi_n \circ \pi$ は $K(M_A)$ 上 C^∞ 位相で等距離埋め込みに収束し,（上記の基点に関し）

$$(\phi_n \circ \pi)^* : \pi_1(K(M_A)) \to \pi_1(M_n)$$

は id に各点収束する．

さて，$g_n \in \Gamma_A \to \infty$ に対し，対応する基点から出て基点に終わる測地線分 $\ell_n(\subset K(M_A))$ を考えると，$\ell'_n = \phi_n \circ \pi(\ell_n)$ はあまり曲がらず長さも ℓ_n とあまり変わらない．従って ℓ'_n の測地線表現も長さが無限大に発散する．従って補題 4.25 より Γ_n が Γ_A に強収束することが分かる．

一般に，Γ_A が幾何学的有限とする．Margulis 定数および M の最短測地線の長さより小さい ϵ をとれば，標準的な retraction $\rho : M_A \to K_\epsilon(M_A)$ が存在した．g_n，ℓ_n を同上とすると，ℓ_n は今度は thin-part に何度か飛び込むかも知れないが，長さがたとえば 1 以上の成分を $c_1, \cdots, c_s$ とし，残りを d で表す．$d' = \phi_n \circ \pi(d)$ とし，c_j を切りつめられた凸核にレトラクトしてから $\phi_n \circ \pi \circ \rho(c_j)$ を端点を固定して直線化したものを c'_n とすると，

$$\ell'_n = d' \cup c'_1 \cup \cdots \cup c'_s$$

は M_n で $\chi_n(g_n)$ を表現している．一方カスプ部分群の幾何学的収束より，c_n の長さが無限大に発散すれば c'_n の長さもそうである．従って，ℓ'_n がほぼ測地的（擬測地線）である．

実際，c_j が十分長ければ c'_n も d' も thin-part の境界にほぼ垂直だから主張を得る．すべての c_j の長さが有界なら $\phi_n \circ \pi$ が等距離写像に広義一様に収束することから分かる．

さて ℓ_n の長さが発散すれば，ある c_j か d の長さが発散するか，分割の成分の数が発散するかであるが，いずれにしろ ℓ'_n についても長さが発散するから，$\chi_n(g_n) \to \infty$ を得，補題 4.25 より主張を得る．■

さらに次の命題は基本的である．

命題 4.26 (Kerckhoff-Thurston [18]) Γ_n が Γ に幾何学的に収束し，M_n の単射半径が，凸核 $K(M_n)$ 上一様に有界であるとする．このとき，$\Lambda(\Gamma_n)$ は $\Lambda(\Gamma)$ に Hausdorff 収束する．

証明 (定理 4.19) まず (1), (3) を示そう．$\epsilon > 0$，$\rho : M \to K_\epsilon(M)$ は同前とする．また仮定より，等距離写像に収束する $\phi_n : K_\epsilon(M) \to M_n$ とそこから得られる全射準同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ が存在するとしてよい．さらに，$\phi_n(M_{thin}) \subset (M_n)_{thin}$ とする．

さて $(M_n)_{thick}$ を通る閉測地線 ℓ_n をとり，M 内の閉測地線 ℓ として $\phi_n(\rho(\ell))$ が ℓ_n にホモトピックになるような測地線のうちで最短のものを選び，上証明のように

$$\ell = d \cup c_1 \cup \cdots \cup c_s \qquad (d = \ell \cap K_\epsilon(M))$$

と分解する．このとき $d' = \phi_n(d)$ とおき，$\phi_n \circ \rho(c_j)$ の直線化したものを c'_j とすると

$$\ell'_n = d' \cup c'_1 \cup \cdots \cup c'_s$$

は ℓ_n にホモトピックである．

ここで，c_j が長いと c'_j も長い．実際，任意の $R > 0$ に対し n が十分大なら c_j の長さが R 以上なら c'_j の長さは $R/2$ 以上でなければならない．(そうでなければ，c_j を $\phi_n^{-1}(c'_j)$ で置き換えれば ℓ の長さを短くできることになる.)

従って定理 4.21 の証明での議論を繰り返せば ℓ'_n はほぼ測地線で，

> (∗) ℓ'_n と ℓ_n は $(M_n)_{thick}$ 内で C^1-close で，その評価は n のみに依存し，
> $n \to \infty$ のとき 0 に収束する

ことが分かる．

さて，任意の $x \in K_\epsilon(M_n)$ は頂点が極限集合にあるような $\mathbb{H}^{d+1}$ の適当な理想単体 S の射影に含まれるから，そのような S の辺を十分長い閉測地線で近似し，(∗) を使えば x は $\phi_n(K_\epsilon(M))$ に近いことが分かる．

特に，$K_\epsilon(M_n)$ はコンパクトで， M_n は幾何学的有限である．さらに同様に任意の $x \in K_\epsilon(M)$ は $\phi_n^{-1}(K_\epsilon(M_n))$ にも近いことが示せるから，切りつめられた凸核は強収束する．最後に，この切りつめられた凸核の収束から単射半径が $K(M_n)$ 内で一様に有界であることがわかり，上命題 4.26 から極限集合の収束が得られる．■

注意 4.m [20] Corollary 7.34 は「幾何学的収束」を「代数的収束」(あるいは「強収束」) に置き換えれば正しい．実際このとき，系 4.22 から強収束しているので，定理 4.19 から主張を得る．

4.2.2 偶発的放物元

カスプの存在は最も注意すべき事柄である．特に偶発的放物元の存在は代数的収束と幾何学的収束との違いを生じさせる．

定義 上半平面 $\mathbb{H}$ の点列 $\{t_n = iL_n + \theta_n\}$ で 0 に収束するものに対し，t_n が非接的に 0 に収束するとは

$$|\theta_n|/L_n < M$$

となる $M > 0$ が存在することで，円接的 (horocyclic) に収束するとは

$$\theta_n^2/L_n \to 0$$

となることである．

さらに，$\mathbb{C}^*$ 上で $|\lambda_n| > 1$ かつ $\to 1$ の場合には λ_n が非接的，あるいは円接的に 1 に収束するとは $t_n = i \log \lambda_n \to 0$ が同様の収束をするときとする．

注意 4.n たとえば λ_n が非接的に 1 に収束するのは，Stolz 条件

$$|\lambda_n - 1| \leq M(|\lambda_n| - 1)$$

を満たすときである

定義 双曲元 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の複素的長さは

$$\mathcal{L}(g) = L + i\theta = \log \lambda$$

で与えられる．ただし，λ は g の multiplier で，$|\lambda| > 1$ とする．また，λ が 1 に近い時は，θ は 0 の近くに選ぶこととする．

Γ_n が Γ_A に代数的に収束する，すなわち，同型 $\chi_n : \Gamma_A \to \Gamma_n$ が id に各点収束するとき，放物元 $g \in \Gamma_A$ が偶発的放物元 (accidental parabolics) であるとは，無限個の n に対し，$g_n = \chi_n(g)$ が双曲元であることとする．従って特に $i\mathcal{L}(g_n) \to 0$ だが，この収束がすべて非接的あるいは円接的のとき,「すべての偶発的放物元が非接的あるいは円接的に収束する」という．

さて次の定理は定理 4.19 と合わせて，２章の主定理 2.10 に対応する．

定理 4.27 $d = 2$ として，Γ_n が幾何学的有限な Γ_A に代数的に収束するとする．

このとき Γ_n が Γ_A に強収束するのは，任意の偶発的放物元が円接的に収束することと同値である．

証明 定理 4.21 より，任意のカスプ部分群 L_A に対し，対応する L_n が L_A に幾何学的に収束することを示せばよいが，すべての L_n がカスプ部分群なら容易に分かる（次節の定理 4.30 を見よ）．

そこで L_A が偶発的放物元で rank 1 とする．従って L_n は multipier $\lambda_n \to 1$ なる双曲元で生成されているとしてよい．さらに対応するトーラスを

$$X_n = \Omega(L_n)/L_n \cong \mathbb{C}^*/\lambda_n^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z} \oplus (\log \lambda_n)\mathbb{Z})$$

極限のシリンダーを

$$X_A = \Omega(L_A)/L_A$$

とする．

λ_n が円接的に 1 に収束するときは，モデュライ空間 $\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ 内で X_n の表す点 $[X_n]$ が ∞ に発散する．従って X_n は X_A に幾何学的に収束する．

一方，そうでなければ，$[X_n]$ は一点 $[X_G] \in \mathcal{M}_1$ に収束するとしてよい．このとき L_n は rank 2 のカスプ部分群 L_G に幾何学的に収束する．従って $L_A \neq L_G$ で強収束しない．■

注意 4.o 以下で，極限集合の次元の収束のためにはさらに強い（たとえば非接的）収束性が必要であることを見る．

4.3 力学系的収束

4.3.1 カスプとポアンカレ級数

まず以下への準備として，カスプ部分群の場合にポアンカレ級数の収束を調べる．３章１節と比較せよ．

定義 Torsion-free な初等的クライン群 L に対し，$r = \mathrm{rank}(L)$ とおく．さらに，L が双曲型とは双曲元を含むときで，そうでなければ放物型という．双曲型のとき $r = 1$ で，そうでなければ $0 < r \leq d$ である．

さて，表現 $\chi_n : L \to L_n$ の列と実数列 $\{\delta_n\}$ で，以下の条件を満たすものを考える．

1. L_n および L の元は，すべて共通の固定点 $c \in S^d_\infty$ を持つ．

2. L は放物型で rank $r \geq 1$ である．

3. χ_n は全射準同型で，id に各点収束する．

4. $\delta_n \to \delta > r/2$

例 4.28 (Dehn filling) クライン群 Γ の rank 2 のカスプ部分群 L に対し，(p_n, q_n) 型 Dehn filling をほどこしてできた群 Γ_n では，カスプは測地線に対応する．その安定化部分群を $L_n = \langle g_n \rangle$ とすると，自然に全射準同型 $\chi_n : L \to L_n$ が定まる．

このとき $\mathrm{rank}(L_n) < \mathrm{rank}(L)$ で L_n は $p_n, q_n \to \infty$ のとき代数的極限を持たない（実際，$g_n \to \infty$ である）が，幾何学的には L_n は L に収束する．また $\delta_n = \delta(\Gamma_n)$ とおけば条件を満たす．(系 4.8 と定理 4.35 を参照せよ)．

定義　任意のクライン群 $\Gamma(\subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{d+1}))$ と任意の $x \in S^d_\infty$, $\delta \geq 0$ に対し，絶対ポアンカレ級数は

$$P_\delta(\Gamma, x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|^\delta_\sigma$$

で定義される．ただし，今までどおり σ は球面計量を表す．また，任意の開集合 U に対し，

$$P_\delta(\Gamma, U, x) = \sum_{\gamma(x) \in U} |\gamma'(x)|^\delta_\sigma$$

とおく．

(L_n, δ_n) に対するポアンカレ級数が一様収束するとは，$S^d_\infty - \{c\}$ の任意のコンパクト集合 K と $\epsilon > 0$ に対し c の近傍 U で

$$P_{\delta_n}(L_n, U, x) < \epsilon$$

が $x \in K$ と十分大きい n で成り立つものが存在することである．

この節では，一様収束性を保証する定理をいくつか示す．

定理 4.29 L_n が L に幾何学的に収束し，

$$\begin{aligned} \delta &> 1 & (d = 2) \\ &> (d-1)/2 & (d \neq 2) \end{aligned}$$

であれば，(L_n, δ_n) に対するポアンカレ級数は一様収束する．

証明　簡単のため， K が一点 p からなる場合に示す．また $c=0$ で $L(p)\subset\mathbb{R}^d$ としてよい．そこで p 中心の十分小さい半径 r の球 B を，軌道 $L(B)$ が有界かつ互いに共通点を持たないように選ぶ．仮定より，各軌道 $L_n(B)$ についてもそうであるとしてよい．また，$\delta>d/2$ の場合にのみ証明する（$d=1,2$ の場合にはこれで十分である）．

まず，各 L_n が放物群とすると，L_n は計量

$$\rho=\frac{|dx|}{|x|^2}$$

に関し等距離的だから，$\mathrm{diam}(B)\asymp d(0,B)^2$ である．従って $2(\delta-d)>-d$ より

$$P_\delta(L,p)\asymp\sum_L \mathrm{diam}(gB)^\delta\asymp\sum_L\int_{gB}|x|^{2(\delta-d)}|dx|^d<\infty$$

が分かる．さらに n を十分大とし $2(\delta_n-d)>\alpha>-d$ なる α を選べば，$U=\{|z|<s\}$ 上

$$P_{\delta_n}(L_n,U,p)=O(\int_U|x|^\alpha|dx|^d)=O(s^{d+\alpha})$$

だから一様収束性を得る．

次に L_n が双曲型の群とし，対応する測地線の端点が $\{c(=0),a_n\}$ であるとする．このときは不変計量は

$$\rho_n=\frac{|dx|}{|x-a_n||x|}$$

で，$\mathrm{diam}(B)\asymp d(0,B)d(a_n,B)$ となる．従って同上の計算で

$$P_{\delta_n}(L_n,U,p)=O(\int_U|x-a_n|^{\alpha/2}|x|^{\alpha/2}|dx|^d)=O(s^{d+\alpha})$$

となるから主張を得る．■

定理 4.30　（上記の状況の下で）L_n が放物型で，常に $\mathrm{rank}(L_n)\ge d-1$ なら，L_n は L に強収束し，(L_n,δ_n) に対するポアンカレ級数は一様収束する．

証明　やはり $K=\{p\}$ として，今度は $c=\infty, p=0$ とする．このとき rank の仮定から L_n および L は $\mathbb{R}^d_\infty$ の平行移動からなることが分かる．そこで，$g\in L$ に対し $g(z)=z+\ell(g)$，$\chi_n(g)(z)=z+\ell_n(g)$ とおく．このとき χ_n は id に各点収束するから

$$\sup_{L-\{id\}}\frac{|\ell_n(g)|}{|\ell(g)|}\to 1$$

で，特に χ_n はやがて同型になり， L_n は L に代数的に収束する．補題 4.25 の仮定も満たすから，さらに強収束する．

次に， $U=\{|z|>R\}$ とすると，上式より

$$\begin{aligned} P_{\delta_n}(L_n,U,p) &= \sum_{|\ell_n(g)|>R}(1+|\ell_n(g)|^2)^{-\delta_n} \\ \le \sum_{|\ell_n(g)|>R}|\ell_n(g)|^{-2\delta_n} &= O(\sum_{|\ell(g)|>R/2}|\ell(g)|^{-2\alpha}) \end{aligned}$$

である．ただし，n は十分大で，$\delta_n>\alpha>\mathrm{rank}(L)/2$ とする．従って一様収束性を得る．■

特に定理 4.30 は $d=2$ なら任意のカスプに対し成り立つ．しかし $d>2$ なら一般には成り立たない．

例 4.31 $\mathbb{R}^3_\infty$ の，直線 $\{x=0,y=n\}$ のまわりの $2\pi/n$ の回転を R_n とする．また

$$T_n(x,y,z)=(x,y,z+1/n)$$

とし， $g_n=T_n\circ R_n$ とおくと， $L_n=\langle g_n\rangle$ は rank 1 の放物群で，rank 2 の放物群 $L_G=\langle g,h\rangle$ に幾何学的に収束する．ただし

$$g(x,y,z)=(x+2\pi,y,z),\quad h(x,y,z)=\lim_n g_n^n=(x,y,z+1)$$

である．

代数的極限は $L=\langle g\rangle$ で準同型 $\chi_n:L\to L_n$ も自然に決まる．そこで $\delta_n=\delta=1/2+\epsilon$ と置けば，rank の条件以外の定理の仮定をみたす．L_n は L に強収束せず，$P_\delta(L_G,x)=\infty$ よりポアンカレ級数は一様収束しない．

定理 4.32 $d=2$ の場合に，L_n が L に代数的に収束し， L_n が双曲型ですべての偶発的放物元が非接的に収束するとき， L_n は L に強収束し，ポアンカレ級数は一様収束する．

証明 やはり $K=\{p\}$ とし，$L=\langle g\rangle$ として $\chi_n(g)=g_n$ とおく．さらに $c=\infty,p=0,g(p)=1$ とし，$\mathbb{R}^2_\infty=\mathbb{C}$ として

$$g(z)=z+1,\quad g_n(z)=\lambda_n z+1\quad(|\lambda_n|>1)$$

としてよい．仮定の非接収束性より $k>0$ に対して

$$|g_n^k(0)|\ge\frac{k|\lambda_n|^{k/2}}{2M}$$

が示せるから，補題 4.25 より L_n は L に強収束する (さらに定理 4.27 も見よ)．十分大きい n に対し

$$\delta_n>\alpha>\mathrm{rank}(L)/2=1/2$$

が成りたつ α をとれば

$$\sum_{k>k_0} |(g_n^k)'(0)|_\sigma^{\delta_n} = \sum_{k>k_0} \left(\frac{|\lambda_n|^k}{1+|g_n^k(0)|^2} \right)^{\delta_n} = O(\sum_{k>k_0} k^{-2\alpha})$$

を得る．

もう一つの g_n の固定点 a_n を ∞ に正規化して同じ議論をすれば，

$$\sum_{|k|>k_0} |(g_n^k)'(0)|_\sigma^{\delta_n}$$

がいくらでも小さくできることも示せる．そこで $c=\infty$ の近傍 U を，任意の n と $|k| \le k_0$ に対し $g_n^k(0) \notin U$ となるように選べば， $P_{\delta_n}(L_n, U, p)$ がいくらでも小さくできる．■

4.3.2 Hausdorff 次元の連続性

定義 Γ_n が Γ に力学系的収束するとは

1. Γ_n が Γ に強収束し，
2. Λ_n が Λ に Hausdorff 収束し，
3. $\mathrm{H.dim}(\Lambda_n) \to \mathrm{H.dim}(\Lambda)$
4. $\delta(\Gamma_n) \to \delta(\Gamma)$
5. Γ と十分大きい任意の n に対する Γ_n が幾何学的有限で，
6. （正規化された）標準密度 μ_n が，標準密度 μ に弱収束する

ことである．

注意 4.p Γ が幾何学的有限であれば，条件 (1), (6) から他の条件が導ける（定理 4.11 と 4.19 を見よ）．

次の定理は定理 3.1 に対応する．

定理 4.33 Γ_n が convex cocompact な Γ に代数的に収束すれば，力学系的収束する．

証明 カスプがないから，Γ_n は Γ に強収束する（系 4.22）．従って定理 4.19 からすべての Γ_n が幾何学的有限としてよく，Λ_n は Λ に収束する．そこで部分列をとり，$\delta_n \to \alpha$ かつ $\mu_n \to \nu$ とすると， ν は Λ 上の Γ-不変な密度である．系 4.13 の一意性から $\nu = \mu$ 従って (1), (6) が成り立ち，上注意から主張を得る．■

次に定理 3.2(b) に対応するのが，次の力学系的収束条件である．

定理 4.34 (力学系的収束条件) Γ_n が幾何学的有限な Γ に強収束し，

$$\begin{aligned}\liminf_n \delta(\Gamma_n) &> 1 \qquad (d=2)\\ &> (d-1)/2 \quad (d\neq 2)\end{aligned}$$

ならば，力学系的収束する．

証明 仮定から，全射準同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ で id に各点収束するものが存在する．また（定理 4.19 から，Γ_n はいずれ幾何学的有限になり，$\Lambda_n \to \Lambda$ かつ $K_\epsilon(M_n) \to K_\epsilon(M)$（強収束）であるから）(6) のみを示せばよい．そこで前と同様に $\delta_n = \delta(\Gamma_n) \to \delta$ で μ_n が ν に弱収束しているとして， $\nu = \mu$ を示そう．

$\epsilon > 0$ と，カスプ点 $c \in \Gamma$ を固定する．c の安定化群を $L \subset \Gamma$ とし，$L_n = \chi_n(L)$ とする．適当な共役で，L_n も c を固定するとするとしてよい．系 4.8 より

$$\delta = \lim_n \delta(\Gamma_n) \geq \delta(\Gamma) > \mathrm{rank}(L)/2$$

だから，前述（4.3.1）とおなじ状況が得られる．

ここで $c = \infty$ として，コンパクト集合 $F \subset \mathbb{R}^d$ で

$$\Lambda \subset L(F) \cup \{\infty\}$$

となるものが存在する.（実際，$K_\epsilon(M_n) \to K_\epsilon(M)$ となる ϵ を固定し c に対応する ∂M_{thin} の成分が H/L であるような horosphere を $H \subset \mathbb{H}^{d+1}$ とする．c への測地線による射影で Λ/L はコンパクト集合 $H/L \cap \quad K_\epsilon(M)$ にうつるから，求める F が見つけられる．さらにこのような）F を少し大きく取りなおして，十分大きい任意の n に対し，

$$\Lambda_n \subset L_n(F) \cup \{\infty\}$$

が成り立つとしてよい．

仮定と定理 4.29 から (L_n, δ_n) に対するポアンカレ級数は一様収束し，F がコンパクトであることから c の近傍 U で

$$P_{\delta_n}(L_n, U, x) < \epsilon$$

が F 上で成り立つものがとれる．ここで $\mu_n(c) = 0$ より

$$\mu_n(U) = \mu_n(U \cap L_n(F)) = \int_F P_{\delta_n}(L_n, U, x) d\mu_\epsilon \leq \epsilon$$

を得るから，ν は c にアトムを持たない．従って $\nu = \mu$ である．■

一方，次の定理は定義から分かる．

定理 4.35 Γ_n が Γ_G に幾何学的に収束すれば

$$\delta(\Gamma_G) \le \liminf_n \ \delta(\Gamma_n),$$

$$\lambda_0(M_G) \ge \limsup_n \ \lambda_0(M_n)$$

が成り立つ．

証明 臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ の定義より，$\delta(\Gamma_n)$ 次元の正規化された Γ_n-不変密度 μ_n が存在するが，その弱集積した密度は $\liminf_n \delta(\Gamma_n)$ 次元の Γ-不変密度であるから，最初の主張を得る．

次に $f \in C_0^\infty(M_G)$ を Rayleigh 比が $\lambda_0(M_G)+\epsilon$ より小さくなるように選ぶと，その台は M_n にほとんど等距離的に埋め込まれるから

$$\lambda_0(M_n) \le \lambda_0(M_G) + \epsilon$$

を得る．■

系 4.36 Γ_n が幾何学的有限な Γ に強収束すれば,

$$\lim_n \ \lambda_0(M_n) = \lambda_0(M)$$

が成り立つ．

証明 $\lambda_0(M_n)$ の任意の収束部分列の極限を λ とする．$\lambda = d^2/4$ なら上定理より

$$d^2/4 \ge \lambda_0(M_G) \ge \lim_n \lambda_0(M_n)$$

だから主張を得る．

一方 $\lambda < d^2/4$ とすると，定理 4.7 より

$$\lim_n \delta(\Gamma_n) = \lambda(d-\lambda) > d/2$$

である．従って定理 4.34 から δ が，従って λ_0 も収束する．■

系 4.37 $d=2$ として，M_n が幾何学的無限かつ素直な双曲多様体 M に代数的あるいは幾何学的に収束するとき，

$$\lim_n \ \delta(\Gamma_n) = \delta(\Gamma) = 2$$

$$\lim_n \ \lambda_0(M_n) = \lambda_0(M) = 0$$

が成り立つ．

証明　定理 4.15 から $\delta(\Gamma) = 2$ だから，幾何学的収束の場合には上定理から直ちに主張を得る．代数的収束の場合には幾何学的極限 Γ' は Γ を含むから

$$\liminf_n \ \delta(\Gamma_n) \geq \delta(\Gamma') = \delta(\Gamma) = 2$$

となり，やはり主張を得る．■

系 4.38 (強収束定理) $d = 2$ として，Γ_n が Γ に強収束し，M は素直とする．このとき

$$\lim_n \ \lambda_0(M_n) = \lambda_0(M)$$

で，さらに $\mathrm{H.dim}(\Lambda) \geq 1$ なら

$$\lim_n \ \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

である．

証明　M が幾何学的有限のときは，系 4.36 から λ_0 については主張を得る．さらに

$$1 \leq \mathrm{H.dim}(\Lambda) \leq \liminf_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n)$$

だから，$\mathrm{H.dim}(\Lambda_n)$ は $\lambda_0(M_n)$ で決まり，次元の収束性も分かる．

そうでないときは系 4.37 から主張を得る．■

注意 4.q 幾何学的有限な Γ に対しては，定理 4.34, 4.35 から $\mathrm{H.dim}(\Lambda) > 1$ ならさらに μ_n が μ に弱収束することも分かる．

一方，$\mathrm{H.dim}(\Lambda) = 1$ となるのは，Λ が全不連結であるか，円であるときに限ることが知られている (Bishop-Jones [3])．

最後に $d = 2$ の場合にはさらに次の条件が得られる．これは定理 3.2(a) に対応する．

定理 4.39 (非接条件) $d = 2$ として，Γ_n が幾何学的有限な Γ に代数的に収束し，すべての偶発的放物元が非接的に収束するならば，力学系的にも収束する．

証明　id に各点収束する同型の列 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ を取り．カスプ部分群 $L \subset \Gamma$ を固定する．もし $L_n = \chi_n(L)$ が放物群なら，定理 4.30 から L_n は L に強収束する．L が偶発的放物元で生成されれば，仮定と定理 4.32 からやはり L_n は L に強収束する．従って定理 4.21 から Γ_n は Γ に強収束する．

さらに定理 4.30，4.32 から μ_n の弱極限 ν がカスプ点でアトムを持たないことが（定理 4.34 の証明と同様に）示せるから，主張を得る．■

系 4.40 $d=2$ として，Γ_n が有限生成フックス群 Γ に代数的に収束すれば，

$$\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda_n) = \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

が成り立つ．

証明　有限生成フックス群は常に幾何学的有限で，任意の偶発的放物元は非接的に収束するから，定理 4.39 から主張を得る．■

注意 4.r 一般には，強収束だけでは極限集合の次元は収束しない（以下の例を見よ）．
また Marden 予想が正しいとしたときの議論が，松崎氏の論説 [19] にある．

4.3.3　不連続な例

以下 $\delta(\Gamma)$ が不連続な例を構成するが，幾何学的有限なものしか考えないので，同時に極限集合の Hausdorff 次元が不連続な例でもある．３章５節と比較せよ．

例 4.41 $\delta(\Gamma)$ は幾何学的収束の位相で連続でない．
実際，cocompact な Γ_0 をとれば，有限被覆を取ってゆくことにより，指数有限な部分群 Γ_n の列で，自明群 Γ に幾何学的収束するものが取れる．$\delta(\Gamma) = 0$ で $\delta(\Gamma_n) = d$ である．
なお全射がないから，Γ_n は Γ に強収束し得ない．

例 4.42 Λ が連続的に変化しても，δ は不連続であり得る．
実際，種数 2 で穴 (hole) を一つ持つ開リーマン面 M_n の列を取り，M_n 上の分離曲線 ℓ_n を固定する．面積無限の $M_n - \ell_n$ の成分を X_n とし他方を Y_n とする．そこで ℓ_n の長さを 0 に pinching するとき $\lambda_0(M_n)$ は 0 に収束する．(実際，$\phi_n \in C_0^\infty(Y_n)$ で，ℓ_n の小さい近傍で $|\nabla\phi_n| = 1$ かつ Y_n の大半で $|\phi_n| = 1$ となるものを考えればよい．) 従って $\mathrm{H.dim}(\Lambda_n) \to 1$ である．(μ_n はカスプ点上のアトムに弱収束する．)
一方，枠 ω_n を X_n 内に選び，さらに (M_n, ω_n) が (M, ω) に収束するとしてよいが，このとき命題 4.26 より (M_n, ω_n) に対応するフックス群の極限集合 Λ_n は (M, ω) に対応するフックス群の極限集合 Λ に収束する．一方

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_n) \to 1 > \mathrm{H.dim}(\Lambda)$$

である．

次に，強収束の位相でも δ が不連続となる例を与える．まず，

$$\Gamma_t = \langle \gamma_t(z) = e^{2\pi i t} z + 1 \rangle$$

とおく．ただし $t = 0$ か $t \in \mathbb{H}$ とする．
M_t はトーラス体に同相であるが，定理 4.27 の証明から次の事実が分かる．

命題 4.43 (Jørgensen) Γ_t が Γ_0 に強収束するのは，t が 0 に円接的に収束することと同値である．

さらに，t がある horocycle に沿って 0 に収束するときは，部分列で，rank 2 の放物群 $\Gamma' \supset \Gamma_0$ に幾何学的に収束するものが存在する．

証明 トーラス $X_t = \Omega(\Gamma_t)/\Gamma_t$ が両側無限円環 (シリンダー) に幾何学的に収束することと強収束が同値であるから前半を得る．

後半は X_t がモデュライ空間 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 内のコンパクト集合から出ないから，$\mathbb{H}/\Gamma'$ もトーラスで，Γ' は rank 2 でなければならない．■

例 4.44 $R > 4$ として

$$G_0 = \langle z \mapsto \frac{z}{Rz+1}, z \mapsto z+1 \rangle$$

とおく．このとき，$\delta(G_0) < 1$ で，$R \to \infty$ のとき連続に 1/2 に収束することが分かるので，任意の $\epsilon \in (0, 1/2)$ に対し $\delta(G_0) = 1/2 + \epsilon$ を満たす $R > 4$ が存在する ([23] あるいは [31] を参照せよ).

さて，

$$G_t = \langle z \mapsto \frac{z}{Rz+1}, z \mapsto e^{2\pi i t} z + 1 \rangle$$

とすると，定理 4.27 から G_t が G_0 に強収束するのは，t が 0 に円接的に収束することと同値である．従って，次の命題と定理 4.34 より，$t_n \in \mathbb{H}$ なる点列で，G_t は G_0 に強収束するが,

$$\lim_n \delta(G_{t_n}) = 1 > \delta(G_0)$$

が成り立つものが存在することが分かる（次の注意も見よ）.

命題 4.45 任意の十分小さい $t = 0$ での horocycle は $\delta(G_t) > 1$ となる点 t を含む．

証明 与えられた horocycle 上の点 G_{t_n} が G' に幾何学的に収束するとすれば，定理 4.35 から

$$\delta(G') \le \liminf_n \delta(G_{t_n}),$$

であるが，系 4.8 より $\delta(G') > 1$ である．■

注意 4.s 1 から $1/2 + \epsilon$ へのジャンプは本質的に最良である．実際，G_0 が幾何学的有限で，G_n が G_0 に強収束するとき，$\lim_n \delta(G_n) > 1$ ならば定理 4.34 より $\lim_n \delta(G_{t_n}) = \delta(G_0)$ である．また，$\delta(G_0) \le 1/2$ なら系 4.8 より G_0 は convex cocompact だから，定理 4.33 よりやはり連続性を得る．

4.3.4 擬フックス群の場合

連結で向き付けられたコンパクトな面 S をとり， $\chi(S) < 0$ とする．S のタイヒミュラー空間を $\mathrm{Teich}(S)$ とする．

$\pi_1(S)$ の $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ への忠実な離散表現の共役類全体に代数的収束の位相を入れたものを $AH(S)$ で表す.

S の鏡像を $\overline{S}$ とすると，各対

$$(X, Y) \in \mathrm{Teich}(S) \times \mathrm{Teich}(\overline{S})$$

にたいし，擬フックス群 $\Gamma(X, Y)$ が得られ，$AH(S)$ の元が定まる．これら全体を $QF(S)$ とする。

命題 4.46 函数 $\mathrm{H.dim}\Lambda(X, Y)$ は $\mathrm{Teich}(S) \times \mathrm{Teich}(\overline{S})$ 上一様 Lipschitz である．

証明 $t = \max\{d(X_1, X_2), d(Y_1, Y_2)\}$ とすると， $K = e^{2t}$-擬等角共役が $\Gamma(X_1, Y_1)$ と $\Gamma(X_2, Y_2)$ との間に存在する．K-擬等角写像は $1/K$-Hölder だから一般論より主張を得る（ Lipschitz 定数は 4 にとれる）．■

$$B_Y = \{\Gamma(X, Y) \mid X \in \mathrm{Teich}(S)\} \subset QF(S)$$

を Bers slice という．また

$$Q(X, Y) = \mathbb{H}^3/\Gamma(X, Y)$$

とおく．写像類群 $\mathrm{Mod}(S)$ の各元 ϕ は B_Y の自己同型 $\Gamma(X, Y) \mapsto \Gamma(\phi(X), Y)$ を定めるが，B_Y は $AH(S)$ 内で相対コンパクトだから，$\Gamma(\phi^n(X), Y)$ の挙動を問題にできる．

定理 4.47 (Kerckhoff-Thurston [18]) $\tau \in \mathrm{Mod}(S)$ が許容された S 上の分割曲線族 $\mathcal{P} = \{C_1, \cdots, C_r\}$ に関する Dehn ツイストの積

$$\tau = \tau_{C_1}^{p_1} \cdots \tau_{C_r}^{p_r} \qquad (p_j \neq 0)$$

の場合には，$M_n = Q(\tau^n(X), Y)$ は代数的極限 M_A と (適当な枠に関する) 幾何学的極限 M_G を持ち，M_G は

$$\mathrm{Int}(S \times [0, 1] - \cup_{\mathcal{P}} C_j \times \{1/2\})$$

に同相な幾何学的有限な双曲多様体 $M_{\mathcal{P}}(X, Y)$ である（$\mathcal{P}$ がカスプに対応する）．また，M_A は $\pi_1(Y)$ に対応する M_G の被覆多様体である．

定理 4.48 任意の $\mathcal{P} \neq \emptyset$ と上記のような τ に対し，

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_A) < \mathrm{H.dim}(\Lambda_G) = \lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda(\tau^n(X), Y)) < 2$$

が成り立つ．

証明　幾何学的極限 M_G と代数的極限 M_A が存在し，M_G は幾何学的有限だから，補題 4.24 から M_n は M_G に強収束する．従って定理 4.34 と 系 4.12 から

$$\mathrm{H.dim}(\Lambda_G) = \lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda(\tau^n(X), Y)) < 2$$

を得る．

M_A も幾何学的有限だから，もし $\mathrm{H.dim}(\Lambda_G) = \mathrm{H.dim}(\Lambda_A)$ なら，定理 4.11 から $\mu_G = \mu_A$ となる．しかし，$\Lambda_G \neq \Lambda_A$ より矛盾である．■

系 4.49 任意の写像類 ϕ に対し，適当な $j > 0$ をえらべば

$$\delta(X, Y) = \lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda(\phi^{nj}(X, Y))$$

が任意の (X, Y) に対し存在する．

さらに，ϕ^j が互いに無関係な Dehn ツイストの積で $\delta(X, Y) < 2$ であるか，あるいは ϕ^j は S の部分面上の擬アノゾフ写像で $\delta(X, Y) = 2$ が成り立つ．

証明　Dehn ツイストの積か S の部分面上の擬アノゾフ写像かのどちらかであることは Thurston の分類から分かる．前者なら上述で，後者なら（Brock [6] から）$Q(\phi^{nj}(X, Y))$ は幾何学的無限で素直な M_G に幾何学的に収束することがわかり，系 4.37 から主張を得る．■

次に pinching を考える．

定理 4.50 $\mathrm{Teich}(S)$ 内で $X_n \to \infty$ とし，任意の単純閉測地線 C に対し

$$\ell_C(X_n) \to L(C) \in [0, \infty]$$

とする．

さらに $L(C) = 0$ となる C 全体からなる分割曲線系を $\mathcal{P}$ とし，$\mathcal{P}$ の元と共通点を持たない任意の C に対して $L(C) < \infty$ とする．

このとき幾何学的有限な M_A で

1. $Q(X_n, Y)$ が M_A に強収束し，

2. $\mathcal{P}$ が M_A の偶発的放物元の集合に対応し

3. すべての偶発的放物元が円接的に収束し，

4. $\lim_n \mathrm{H.dim}(\Lambda(X_n, Y)) = \mathrm{H.dim}(\Lambda_A)$

が成り立つ．

証明　仮定より，X_n はモデュライ空間の (Deligne-Mumford の) コンパクト化のなかである点 Z に収束するとしてよい．Z は $\mathcal{P}$ の各成分に対応するノードを持つ．さらに，代数的極限 $M_A \in AH(S)$ も存在するとしてよいが，これは ∂M_A が $Z \cup Y$ となる唯一の幾何学的有限な双曲多様体である．

各 $C \in \mathcal{P}$ に対応する各放物元は円接的に収束するから $Q(X_n, Y)$ は M_A に強収束する（定理 4.27）．極限集合は連結で特に $\mathrm{H.dim}(\Lambda_A) \geq 1$ だから，系 4.38 より (4) も分かる．■

例 4.51 上記の X_n の例を構成するため，S の極大分割曲線系 $\mathcal{P}$ を固定すると $\mathrm{Teich}(S)$ は

$$X \mapsto (\ell_C(X), \tau_C(X))$$

により $\mathbb{R}_+^{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$ と同一視される．いわゆる Fenchel-Neilsen 座標である．

このとき X_n をあらわす $(L_n(C), T_n(C)); C \in \mathcal{P}$ が $(L(C), T(C))$ に収束し，かつ $L(C) = 0$ となる C が存在するとき，X_n は定理の条件を満たす．M_A の境界は Y と，X から退化したノードをもつ面 Z からなる．

最後に $X_0 \in \mathrm{Teich}(S)$ を固定し，X_0 上の長さ L の単純閉測地線 C に沿う tL だけの FN ツイストを施したものを X_t で表す．

このとき C に沿う Dehn ツイストを τ として $X_{t+1} = \tau(X_t)$ である．従って幾何学的極限

$$M_G(t) = \lim_n Q(X_{t+n}, Y) = M_{\mathcal{P}}(X_t, Y)$$

は $M_G(t+1) = M_G(t)$ を満たす．ただし $\mathcal{P} = \{C\}$ である．この状況下で，

定理 4.52 $M_G(t)$ の極限集合の Hausdorff 次元 $\delta(t)$ は連続で

$$\lim_{t\to\infty} |\mathrm{H.dim}(\Lambda(X_t, Y)) - \delta(t)| = 0$$

を満たす．

証明　$X_{t+1} = \tau(X_t)$ となるタイヒミュラー空間の自己等距離写像 τ が存在するから，命題 4.46 より $f(t) = \mathrm{H.dim}(\Lambda(X_t, Y))$ も一様連続である．従って $\delta(t) = \lim_n f(t+n)$ は一様収束して連続である．■

注意 4.t $Q(X_t, Y)$ は M_A に代数的に収束する．もし，$\delta(t)$ が非定数なら，FN-horocycle に沿って M_A に至るとき，極限集合の次元は振動することになる（Douady-Sentenac-Zinsmeister [12] の結果と比較せよ）．

関連図書

[1] L. Ahlfors. *Lecture on Quasiconformal Mappings.* Van Nostrand, 1966.

[2] J. Anderson and R. Canary, Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits sets of Kleinian groups II. *J. Lond. Math. Soc., Ser. II*, **61**(2000), no.2, 489-505.

[3] C.J. Bishop and P.W. Jones, Hausdorff dimension and Kleinian groups, *Acta Math* **179** (1997), 1-39.

[4] O. Bodart and M. Zinsmeister. Quelque résultats sur la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia des polynômes quadratiques. *Fund. Math.* **151**(1996), pages 121-137.

[5] B.H. Bowditch, Geometric finiteness for hyperbolic groups, *J. Funct. Anal.* **113** (1993), pages 245-317.

[6] J. Brock, Iteration of mapping classes and limits of hyperbolic 3-manifolds, *thesis* (1997).

[7] R.D. Canary, Y. Minsky and E. Taylor, Spectral theory, Hausdorff dimension and the topology of hyperbolic 3-manifolds. *J. Geom. Anal.* **9** (1999), no. 1, 17–40.

[8] L. Carleson and T. Gamelin. *Complex Dynamics* . Springer-Verlag, 1993.

[9] M. Denker and M. Urbański. Geometric measures for parabolic rational maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12**(1992), pages 53-66.

[10] M. Denker and M. Urbański. On Sullivan's conformal measures for rational maps of the Riemann sphere. *Nonlinearity* **4**(1991), pages 365-384.

[11] A. Douady. Does a Julia set depend continuously on the polynomial? In R.Devaney, editor, *Complex Analytic Dynamics.* AMS. Proc. Symp. Appl. Math. 49, 1994.

[12] A. Douady, P. Sentenac, and M. Zinsmeister. Implosion parabolique et dimension de Hausdorff. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **325** (1997), no. 7, 765–772.

[13] M. Feigenbaum. Universal behavior in nonlinear systems. In P.Cvitanović, editor, *Universaliry in Chaos.* pages 49-84. Adam Hilger Ltd, 1984.

[14] T. Jørgensen and A. Marden, Algebraic and geometric convergence of kleinian groups. *Math. Scand.*, **66** (1990), 47-72.

[15] 川平友規，Julia 集合にまつわる種々の連続性,「複素力学系の研究一現状と展望一」数研講究録 1087(1999), 67-92.

[16] T. Kawahira, Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps. *Erg. Th. & Dyn. Sys.*, **23**(2003), 1125 – 1152.

[17] T. Kawahira, Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps II. *To appear in "Dynamics on the Riemann Sphere" (A Bodil Branner Festschrift), 2005.*

[18] S. Kerckhoff and W. Thurston, Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space, *Invent. Math.*, **100** (1990), 25-47.

[19] 松崎克彦, クライン群の力学系一極限集合のハウスドルフ次元一 , 数学，第 **51** 巻 第 2 号 (1999), 142-160.

[20] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinain Groups*, Oxford Univ. Press, 1998.

[21] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Strongly convergence of Kleinian groups. *J. Differential Geom.* **51** (1999), no. 3, 471–515.

[22] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps. *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), no. 4, 535–593.

[23] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of dimension. *Amer. J. Math.* **120** (1998), 691-721.

[24] C. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization.* Annals of Math Studies 135, Princeton University Press, 1994.

[25] C. McMullen. *Renormalization and 3-Manifolds which Fibre over the Circle.* Annals of Math Studies 142, Princeton University Press, 1996.

[26] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable: Introductry lectures.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999.

[27] S.J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math*, **136**(1976), pages 241-273.

[28] F. Przytycki and M. Urbański. *Fractals in the plane — the ergdic theory methods.* Cambridge University Press, *in preparation.*

[29] F. Przytycki. Conical limit set and Poincaré expornent for iteration of rational functions. *MPIPrepint*, 1996.

[30] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. of Math.* **147** (1998), no. 2, 225–267.

[31] 須川敏幸，ハウスドルフ次元計算のアルゴリズム，「ハウスドルフ次元ー計算へのアプローチ」研究集会報告集 (1997), 167-178.

[32] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete groups of hyperbolic motions, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979),pages 419-450.

[33] D. Sullivan. Conformal dynamical systems. In *Geometric Dynamics*, Lecture Notes in Math 1007,pages 725-752. Springer-Verlag, 1983.

[34] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures new and old and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.*, **153** (1984),pages 259-277.

[35] D. Sullivan, Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987),pages 327-351.

[36] 谷口雅彦，クライン群の強収束性と力学系的収束,「複素力学系の研究ー現状と展望ー」数研講究録 1087(1999), 57-66.

[37] E. Taylor, Geometric finiteness and the convergence of Kleinian groups, *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), pages 497-533.

[38] 上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介，複素力学系序説, 培風館，1995.

[39] M. Urbański. Rational functions with no recurrent critical points. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14**(1994), pages 391-414.