Thurstonのはり合わせ定理の解析的証明

タイヒミュラー空間の解析的理論を適用することにより、Thurstonが提示した主張のいくつかに厳密な証明を与える試みは、既に

1. 閉面の mapping classes の分類（Bers [2]）
2. ある種の rational maps の特徴付け（Douady - Hubberd [3]）

において成功しているが、ここでは、（実三次元双曲的多様体のはり合わせ問題に関する）「Thurstonの基本定理」の、解析的手法による証明を McMullen [8] に従って解説する。

ここで上記の Thurston の基本定理を荒く述べておく。実三次元多様体 M は、incompressible な境界 ∂M をもち、かつ幾何学的に有限な双曲的多様体の構造がはいるとする。orientation-reversing な involution $\tau : \partial M \to \partial M$ により境界をはり合わせてできる多様体を M/τ で表わすとき、

__定理__　M/τ に双曲的多様体の構造がはいるのは、M/τ が atoroidal であるとき、かつそのときに限る。

なお、用語の定義は後述する。また、上定理が Thurston の理論ではたす役割等については、たとえば、J. Morgan [9]、小島定吉 [4] を見よ

§1. 問題の正確な設定

双曲的多様体は、クライン群により表現される。そこで、後者を考える。

Γ : クライン群（双曲的 3-space $\mathbb{H}^3$ の isometries の離散部分群）

とすると、Γ の作用は $\mathbb{H}^3$ の「境界」$S_\infty = \hat{\mathbb{C}}\ (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ まで拡張でき、$\hat{\mathbb{C}}$ は Γ の不連続領域 $\Omega = \Omega(\Gamma)$ と limit set $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ に分割できる。以下

Γ : torsion-free, orientation-preserving

と仮定する。このとき、

$$N = N(\Gamma) = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega)/\Gamma$$

は境界付きの実三次元多様体で、内部には双曲構造が、境界には複素構造がはいる。向きは $\mathbb{H}^3$ の自然な向きからはいる。この N を Γ の<u>クライン多様体</u>と呼ぶ。

以下では常に

$$\begin{cases} N : \text{幾何学的有限} \\ \partial N : \text{incompressible, quasifuchsian} \end{cases}$$

も仮定する。ここで

Γ : <u>幾何学的有限</u>

$\Leftrightarrow$ 有限辺の基本多面体をもつ

$\Leftrightarrow$ N の内部の convex core の単位近傍が有限体積

∂N : <u>incompressible</u>

$\Leftrightarrow$ ${}^{\forall}X$: ∂N の連結成分に対し

$\pi_1(X) \hookrightarrow \pi_1(N)$: injective

∂N : <u>quasi fuchsian</u>

$\Leftrightarrow$ ${}^{\forall}X$: ∂N の連結成分に対し部分群 $\pi_1(X) \hookrightarrow \Gamma = \pi_1(N)$ が quasi-fuchsian.

<u>注意</u> Γ : 幾何学的有限

$\Rightarrow$ Γ : 有限生成

$\Rightarrow$ ∂N の成分は有限個

(Ahlfors の有限性定理)

さて、このような N は、Γ の放物型元に対応する部分で、コンパクト性が破れる。そこで、このような部分を「parabolic locus」として特記しておけば、N の quasi-isometry による同値類を位相的 data により記述できる。このような位相的モデルを、<u>paired manifold</u> という。すなわち、

$(M, \underline{P})$: <u>paired manifold</u>

$\Leftrightarrow$ M : 境界付きのコンパクト 3-manifold

$\underline{P} \subset \partial M$ (parabolic locus)

: incompressible な annuli と tori の和集合で

(i) ∂M の $^\forall$ torus 成分は $\underline{P}$ に属し、

(ii) $^\forall C$: M 内の cylinder で ∂C は $\underline{P}$ 内の essential curves

は rel. boundary の homotopy で $\underline{P}$ 内に連続変形できる。

今、

$$\partial_0 M = \partial M - \mathrm{Int}\, \underline{P}$$

とおき、

$$\tau : \partial_0 M \to \partial_0 M$$

を orientation-reversing な固定点をもたない $\partial_0 M$ の involution とする。このような τ を <u>gluing data</u> と呼ぶ。このとき、

<u>問題</u>　(必しも連結でない) paired manifold $(M, \underline{P})$ と、gluing data τ が与えられたとする。

このとき、$\partial_0 M$ を τ ではりつけてできる 3-manifold $(M-P)/\tau$ には、いつ (complete な) 双曲構造がはいるか？

この問題がタイヒミュラー空間論と、ポアンカレ級数の精密な評価を用いて (多少の例外の場合を除き) 解けることを見よう。

§2. タイヒミュラー空間論での問題設定

前記の問題を、タイヒミュラー空間論の問題に書き直そう。ただし、この部分は本論ではないので直観的な説明にとどめる。たとえば J. Morgan の解説 [9] 等も参照せよ。

与えられた paired manifold (M, P) と、gluing data τ に対し、適当な幾何学的有限な双曲的 3-manifold N で τ によるはり合わせが、双曲構造を保ちつつ行えるものを見つければよい。

なお、

$$\partial N : \text{incompressible} \Leftrightarrow \partial_0 M : \text{incompressible}$$

である。更にこのとき、「APT」なし、i.e.

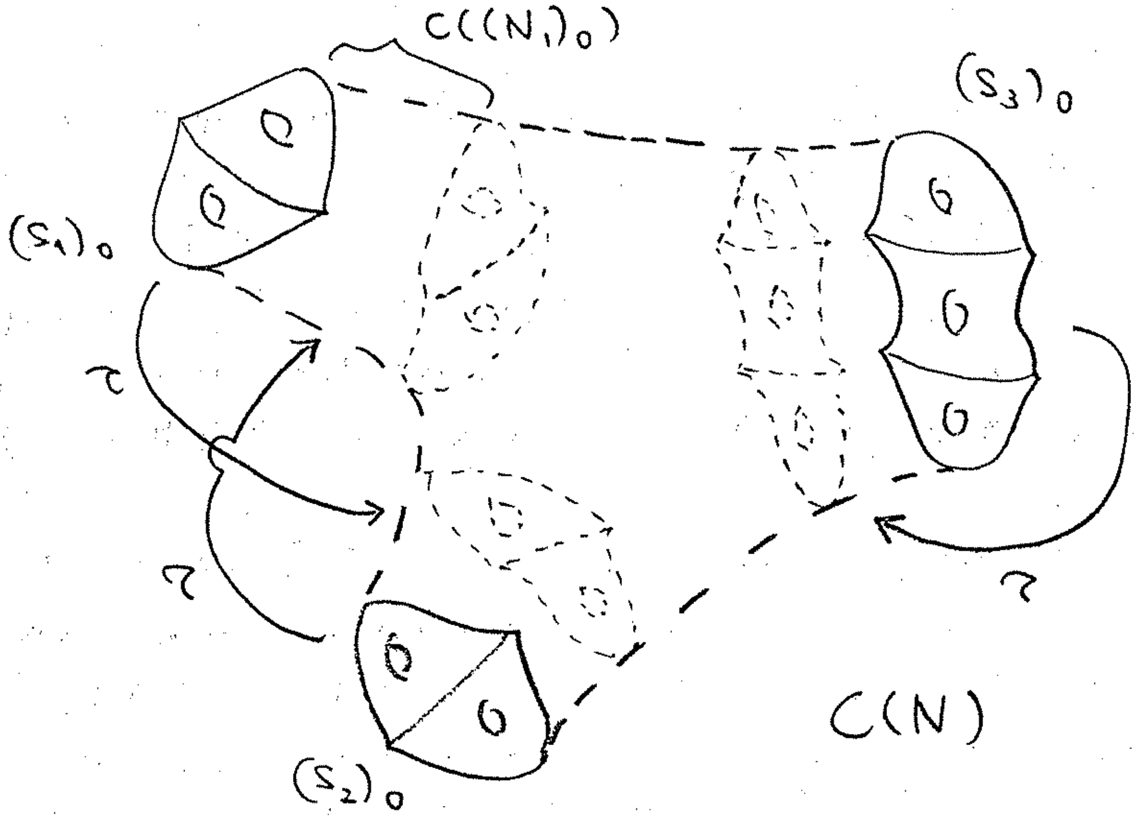
M 内で P 上の loop に homotopic な任意の ∂M 上の $\forall$ loop は、∂M 内で既に P 上の loop に homotopic

という仮定をつければ N が quasifuchsian となる。
(N : 幾何学的有限より、Maskit の定理を用いる)

$N = N(\tau)$ は complete なので、境界 ∂N が「目に見える」ものとして、N の内部の convex core $C(N)$ を考える。このとき、N と $C(N)$ は同相で、$C(N)$ の境界の各成分は、いわゆる pleated surface となる。これらを、双曲構造を保って τ によりはり合わせるには ($C(N)$ が凸だから) 「のりしろ」が必要になる。そのような「のりしろ」としては、$C(N)$ の境界の各成分 S_0 に対し、S_0 に対応するもう一つの pleated surface S_1 で区切られる、S_0 の近傍が考えられる。

すなわち、S_0 に対応する $\Omega(\Gamma)$ の連結成分 Δ_0 は仮定より単連結で、Δ_0 を不変にする Γ の部分群 $\mathrm{stab}(\Delta_0)$ は quasifuchsian となる。従って、$\Gamma_0 = \mathrm{stab}(\Delta_0)$, $N_0 = N(\Gamma_0)$ とすれば、N_0 は $S_0 \times [0,1]$ と同相で、$C(N_0)$ の境界は S_0 ともう一つの pleated surface S_1 からなる。

各 $C(N_0)$ が $C(N)$ 内に埋め込まれている場合に、gluing data により、$C(N)$ の境界 $\{(S_i)_0\}$ が、上述の $\{(S_i)_1\}$ と同一視できれば、$(M-P)/\tau$ の双曲的モデルを得ることができる。



それでは、このような N をどのようにして見つければよいか。そのためにはまず、(M,P) のモデルの集合を記述しなければならない。ここにタイヒミュラー空間が用いられる。

まず、(M, P) のモデルの集合を $GF(M, P)$ とする。すなわち、

$GF(M, P) = \{ (N, [\varphi]) :$

　　N : 幾何学的有限なクライン多様体

　　φ : marking $(M, \partial M - P) \to (N, \partial N)$

　　　(i.e. orientation-preserving な同相写像)

　　$[\varphi]$: φ の homotopy 類

　　更に、$\varphi_*(\pi_1(P))$ は $\pi_1(N)$ の放物型の共役類全体と一致するものとする $\}$

<u>注意</u> $N_1, N_2 \in GF(M, P)$
$\Rightarrow N_1, N_2$ は quasi-isometric

($\because$ $f : N_1 \to N_2$ homeo をとり、$f|_{\partial N_1}$ を q.c に直す。次に f の lift を $\hat{\mathbb{C}}$ の q.c に拡張し (Marden の同型定理)、Douady-Earle 拡張を行えば、実解析的 quasi-isometry : $N_1 \to N_2$ が得られる。)

さて、$N \in GF(M, P)$ の境界 ∂N は $\partial_0 M$ による marking がはいるから、自然に写像

$$b : GF(M, P) \to \mathrm{Teich}(\partial_0 M)$$

を得る。ここで $\partial_0 M$ は閉面から有限個の点をぬいたものの和集合とみなし、$\mathrm{Teich}(\partial_0 M)$ はその Teichmüller 空間である。

注意 写像 b は bijective である。

（${}^{\forall}\Lambda(\Gamma)$ の面積 0 から、$\Omega(\Gamma)$ 上等角な quasi-iso は iso. になり単射を得る。全射は q.c. map の存在定理より。）

従って、上述の N に対応する $\mathrm{Teich}(\partial_0 M)$ の点をさがすことになる。

上述のような、${}^{\forall}N \in GF(M, P)$ に対し、$C(N)$ の各境界成分 S_0 を S_1 に対応させる写像は、自然に、

$$\sigma : \mathrm{Teich}(\partial_0 M)\ (\cong GF(M, P)) \to \mathrm{Teich}(\overline{\partial_0 M})$$

を induce する。ここで、$\overline{\partial_0 M}$ は $\partial_0 M$ の向きを変えたもの（mirror image）である。これを、skinning map という。

更に、gluing data τ も自然に、isometry

$$\tau : \mathrm{Teich}(\overline{\partial_0 M}) \to \mathrm{Teich}(\partial_0 M)$$

を induce するから、正則自己写像 $\tau\circ\sigma$ を得る。前述のはり合わせがうまくゆくには N が、$\tau\circ\sigma$ の固定点であればよいことがわかるから、はり合わせ問題は、

$\tau\circ\sigma$ の固定点を求めよ

という、解析的問題へと書き換えられた。この問題もまた gluing problem と呼ぶ。

§3. 主定理

まず、Γ が quasifuchsian i.e. M が面上の区間バンドルのときは、前§でのべた方法では求める V は見つけることができない

この場合のはり合わせ問題は、いわゆる doubly degenerate groups という、Ω(Γ) が空になる群により解かれるが、これはまた別の理論なので省略する。たとえば Sullivan [10] を参照せよ。

以下、M：面上の区間バンドルでないとし、更に、1/τ：連結と仮定する。
さて、τ∘σ の固定点が存在するためには、たとえば τ∘σ が（Teichmüller metric に関して）真に縮少写像であればよい。τ は isometry だから、skinning map σ の微分 dσ の Teichmüller ノルムを調べることが証明の主題となる。

注意 1. Royden の定理により、$\|d\sigma\| \leqq 1$ は常に成り立つ
2. 上記の特別の場合には σ は isometry である。

ここで McMullen の主定理を述べるために用語を二つ定義する。まず、

(M, P) : acylindrical

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}$ cylinder $C : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \to (M, \partial_0 M)$

s.t. $C(S^1 \times \partial I)$ は $\partial_0 M$ 上の essential loop は、∂M 内に連続変形できる。

(M, P) : <u>atroidal</u>

$\Leftrightarrow$ $^\forall$ torus $T : S^1 \times S^1 \to M$

s.t. incompressible

は P 内に連続変形できる。

<u>主定理</u>

1. M : acylindrical $\Rightarrow$ $^\forall N \in GF(M, P)$ で

$$\|d\sigma\| < {}^\exists c(\partial_0 M) < 1$$

特に、gluing problem は解をもつ

2. 一般には、moduli 空間上の連続函数 c があって、$^\forall N \in GF(M, P)$ で

$$\|d(\tau\circ\sigma)^k\| < c([\partial N]) < 1$$

ただし、k は定数

更にこのことから、次の主張を得る。

(a) $\tau\circ\sigma$: 固定点をもつ、または

b) N/τ 内に non-trivial torus が存在するような N が存在する。

以上から、

はり合わせ問題が解をもつ

$\Leftrightarrow$ $(M/\tau, P/\tau)$: atoroidal

がわかる。

以下、主定理の証明を述べる。

§4　ダブルを作る問題の場合

主定理の証明にはいるまえに、一つのケース・スタディとして、ダブルを作る問題を特別な 3-manifold の場合に考える。（主定理の証明は次節から始まる。）

双曲的 3-manifold N のダブルがやはり双曲構造をもつためには、N の convex core $C(N)$ の境界が totally geodesic であればよい。すなわち、対応するクライン群 Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ の各成分が円板であればよい。このような Γ の存在を、

$$(M, \underline{P}) : \text{acylindrical} \ , \text{かつ} \ \underline{P} : \text{空}$$

という特別な場合に証明しよう。すなわち、

<u>定理</u>　N_0 : 幾何学的有限, acylindrical な双曲的 3-manifold で cusps をもたない

$\Rightarrow {}^{\exists}N$: N_0 と quasi-isometric s.t.

$\partial(C(N))$: totally geodesic

<u>注意</u>　Maskit [6] の定理1と比較せよ。

ここでは、gluing data でではなく、リーマン面 S をその mirror image に移す reflection

$$\rho : \mathrm{Teich}(\overline{\partial_0 M}) \to \mathrm{Teich}(\partial_0 M)$$

を考える（仮定より $\partial M = \partial_0 M$: compact である）

さて、定理の証明のため、$N_0 \in GF(M, \phi)$ を固定する。$N_k = (\rho\circ\sigma)^k(N_0)$ とおく ($\forall k \in \mathbb{Z}^+$) と、$\sigma$：非拡大写像、$\rho$：isometry より

$$d_T(\partial N_k, \partial N_{k+1}) \leqq d_T(\partial N_0, \partial N_1)$$

である。ただし、d_T は Teichmüller 距離とする。

$\rho\circ\sigma$ の定義より、これは、$\forall N_k = N(\Gamma_k)$ に対し $\Omega(\Gamma_k)$ の任意の連結成分 Δ から $\hat{\mathbb{C}} - \overline{\Delta}$ への $\exists K$-qc 写像が存在することを意味する。ただし、K は k にも Δ にも依らないようにとれる。

L_0 を N_0 と N_1 を結ぶ (Teich $(\partial_0 M)$ 内の) smooth path とするとき、連続性から、同上の主張が

$$L = \bigcup_k (\rho\circ\sigma)^k(L_0)$$

の任意の点で成り立つ。すなわち、適当に K をとれば、$\forall N = N(\Gamma) \in L$, $\forall\Delta : \Omega(\Gamma)$ の連結成分、に対し

$$\Delta : K\text{-quasidisk}$$

である。

これを用いて、

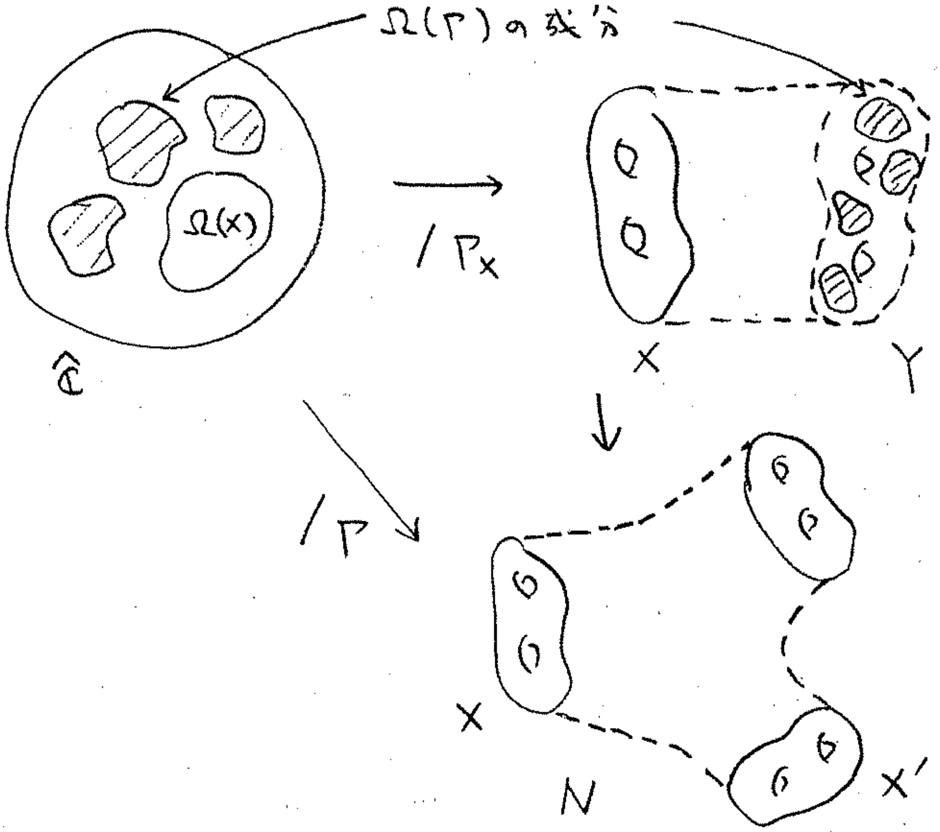
$$\forall N \in L \text{ で } \|d\sigma\| < c < 1$$

なる定数 c の存在を示そう。このとき、L は長さ有限で、N_k が $\rho\circ\sigma$ の固定点に収束することは明らか。

そこで $\|d\sigma\|$ を評価するため、∂N 上の $\forall$Beltrami 微分 μ に対し、$d\sigma(\mu)$ とは何かを考えよう。

まず μ を $\Omega(\Gamma)$ 上に lift し、$\Lambda(\Gamma)$ 上では $\hat{\mu} = 0$ とおいて $\hat{\mathbb{C}}$ 上の Beltrami 微分 $\hat{\mu}$ を定義する (ただし、$N = N(\Gamma)$)。∂N の任意の連結成分 X に対し対応する $\Omega(\Gamma)$ の成分 $\Omega(X)$ を固定する。$\hat{\mu}$ は Γ 不変より、Stab $\Omega(X) = \Gamma_X$ でも不変で、$\Omega(\Gamma_X)$ のもう一つの成分 $\Omega(Y)$ を Γ_X で割ったものが、$\sigma(\partial N)$

のXに対応する成分Yとなる。従って $\hat{\mu}|_{\Omega(Y)}$ を Yに射影したものが、$d\sigma(\mu)$ のYへの制限である。



ここで $\Omega(\Gamma)$ の任意の二つの成分 Ω_1, Ω_2 に対し、$\mathrm{stab}\,\Omega_1 \cap \mathrm{stab}\,\Omega_2 = \{id\}$ となる。(∵ そうでなければ $P = \phi$ より共通元に双曲型元が存在するが、このとき acylindrical でなくなる) 特に $\Omega_1 = \Omega(X)$ にとれば、$\Omega(\Gamma)$ の他の成分はYに injective に射影されることがわかる。これが上図での斜線の spots である

各 spot U 上 (stabilizer に対応して) 等角自己同型群 G で U/G が ∂N の成分の一つ X' となるものが存在している。上述の構成より $d\sigma(\mu)|_U$ は $\mu|_{X'}$ の U への lift であり 特に G 不変である。更に、spots 全体の補集合はY上面積 0 であった。

以上の準備の下に、skinning map の微分の N でのノルム、

$$\|d\sigma\| = \sup_{\substack{\|\phi\|_1 = 1 \\ \|\mu\|_\infty = 1}} \langle \phi, d\sigma(\mu) \rangle_{\sigma(\partial N)}$$

を評価しよう。

ただし、ϕ は $\sigma(\partial N)$ 上の可積分な正則二次微分（これを $\phi \in Q(\sigma(\partial N))$ で表わす）、μ は ∂N 上の Beltrami 微分（これを $\mu \in M(\partial N)$ で表わす）で、

$$\langle \phi, \mu \rangle_X = \mathrm{Re} \int_X \phi\mu$$

とおく。

戦略は、spots が一様に円板に近いことを示し、次に、$d\sigma(\mu)$ が各 spots 上無限群で不変であることから、inefficiency $\|d\sigma\| < c < 1$ を出す。

まず、D：あるリーマン面 X 上の位相的円板とする。

D : K-quasidisk (on X)

$\Leftrightarrow$ X の普遍被覆 $\mathbb{H}^2 \to X$ に関する D の lift が通常の K-quasidisk.

注意　上述の各 spot U は Y 上 K^3-quasidisk.

証）U に対応する $\Omega(Y)$ 内の $\Omega(P)$ の成分を Ω_U とすると、$\Omega(Y)$, Ω_U は K-quasidisks であった。特に、Riemann's map $\Omega(Y) \to \mathbb{H}^2$ は K^2-q.c : $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に拡張できるから主張を得る。 //

次に　距離が指定された面上の位相的円板 D に対し，

D : K'-bounded turning

$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \partial D$ に対し

$\operatorname{diam} J / \operatorname{dist}(x, y) \leqq K'$

ただし，J は $\partial D - \{x, y\}$ の直径の小さい方の成分とする．

注意（[5] II §8 定理8.7）

$D \subset \hat{\mathbb{C}}$: quasidisk

$\Leftrightarrow$ D が球面距離で bounded turning

双曲距離の場合　上注意のような結果はなり立たないが，今考えているのは，Y 上の quasidisks だから，それらの双曲的面積は一様に有界である。このときは，次が示せる。

命題1　K-quasidisk $D \subset \mathbb{H}^2$ の双曲的面積が A 以下ならば，$^{\exists}C(K, A)$: K, A にのみ依存 s.t. D の双曲的直径 $\leqq C(K, A)$，かつ，D は双曲距離に関して，$C(K, A)$-bounded turning.

証）isometry で変換して，D の最遠点対が，

$x = Ti$，$y = i/T$ $(T > 0)$ としてよい

i.e. 双曲的 $\operatorname{diam} D = d(x, y)$

ただし，d は双曲的距離とする。

Dの双曲的面積 $\leqq A$ より $\exists\, r(A)$ 以下の
$r\,(\geqq 1)$ で $\{|z|=r\} \cap D$ の成分の一つ I
に対し

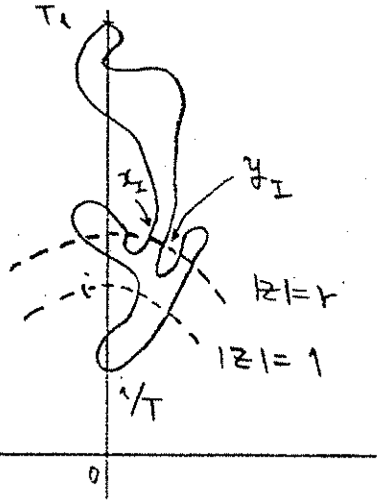
　　I の双曲的長さ $\leqq 1$, かつ
　　I の端点 x_I, y_I に対する上述の J が
　　x を含む

となるものが存在する

　従って上注意(の証明)
より $\exists\, \tilde{C}(K, A)$ s.t.

$$T \leqq \tilde{C}(K, A)$$

i.e.
　Dの双曲的直径は
　有界 $\leqq {}^{\exists} C(K, A)$
となる。



　そこで isometry で D を i 中心, 双曲的半径 $\frac{1}{2}C(K,A)$ の円板内に移せば, その上では球面距離と $d(\ ,\ )$ は比較可能だから, bounded turning に関する主張も得られる。　//

以上で, Y 上の各 spot は, 双曲的に一様に円板に近いことがわかった。これを用いて, 次を示そう。

命題2　U : Y 上の spot (: K^3- quasidisk)
　$X' = U/G$: ∂N の成分 (G : 同前)
　$\lambda = d\sigma(\mu)|_U$ (: G-不変, $\|\lambda\|_\infty = 1$)
　$\phi \in Q(Y)$ $(\neq 0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\langle \phi, \mu \rangle_U}{\|\phi|_U\|_1} < {}^{\exists}c < 1$$

ただし、c は K と、Y, X' の位相的型にのみ依存する。

証）今、同上の仮定をみたす組の列 $\{(U_n, G_n, \lambda_n, Y_n, \phi_n)\}$ が存在して

$$\langle \phi_n, \lambda_n \rangle_{U_n} \to \|\phi_n|U_n\|_1$$

となったとする。

このとき、極限を考えて矛盾を出そう。

まず U_n 内にはいる最大（双曲的）半径 r_n の disk $B(x_n, r_n) = B_n$ をとる。命題1より、双曲的 diam $(U_n) \leq {}^{\exists}K' \cdot r_n$ にとどまる。そこで双曲的metric を正数倍し（曲率をかえて）$\forall r_n = 1$ と正規化する。このmetric付きの Y_n を $\tilde{Y}_n$ とすると、$(\tilde{Y}_n, x_n)$ の部分列をとれば、幾何学的極限 $(\tilde{Y}_\infty, x_\infty)$ が存在する（[7] Prop. A.2.2, cf. 須川氏のノート）

必要なら、更に部分列をとり、ϕ_n をスカラー倍して考えることにより

$$\begin{cases} U_n \to {}^{\exists}U_\infty, & G_n \to {}^{\exists}G_\infty \\ \phi_n \to {}^{\exists}\phi_\infty : U_\infty \text{上正則}, \neq 0 \end{cases}$$

としてよい。

U_∞ は半径1の円板を含むから退化せず更に命題1の証明から、有界であることがわかる。

さて $X'_n = U_n/G_n$ の単射半径は一様に有界だから、各 x_n の X'_n 上への射影 $\tilde{x}_n$ は、双曲的長さが一様に有界な non-trivial loop (on X'_n) 上にある。

従って、U_∞ / G_∞ 上でもそうであることがわかり、G_∞ は無限巡回群を含まなければならない。

最後に、再び部分列をとり
$$\lambda_n \to {}^\exists\lambda_\infty \quad (\text{弱収束})$$
$$\|\lambda_\infty\|_\infty \leqq 1$$
としてよい。$\phi_n \to \phi_\infty$ は U_∞ を含む領域上一様だから、$\|\phi_n | U_n\|_1 \to \|\phi_\infty | U_\infty\|_1$ かつ
$$\langle \phi_n, \lambda_n \rangle_{U_n} \longrightarrow \langle \phi_\infty, \lambda_\infty \rangle_{U_\infty}$$
となる。

仮定より、左辺 $= \|\phi_\infty | U_\infty\|_1$ だから、$\lambda_\infty = \overline{\phi_\infty} / |\phi_\infty|$ でなければならない。一方、μ_∞ は G_∞-不変であったから、$\|\phi_\infty | U_\infty\|_1 < +\infty$ とはならず、矛盾を得た。 //

§4 定理の証明（続き）

${}^\forall\phi \in Q(Y)$, $\|\phi\|_1 = 1$ と、${}^\forall\mu \in M(X)$, $\|\mu\|_\infty = 1$ に対し
$$\langle \phi, d\sigma(\mu) \rangle_Y$$
$$= \sum_{U:\text{spot}} \langle \phi|_U, d\sigma(\mu)|_U \rangle_U$$
だったが、命題2より ${}^\exists c < 1$ s.t
$$\text{左辺} \leqq c \cdot \sum_U \|\phi|_U\|_1$$
$$\leqq c\, \|\phi\|_1$$
従って、$Y \in \sigma(\partial N)$ について加えて、sup をとれば主張を得る。

§5. 主定理の証明 I
（一般の場合の予備的考察）

前節でのべたような「spots」の形状は，一般の場合にはやや複雑になる。それを明確にするため，

$N \in GF(M, P)$; ただし，M は連結とする

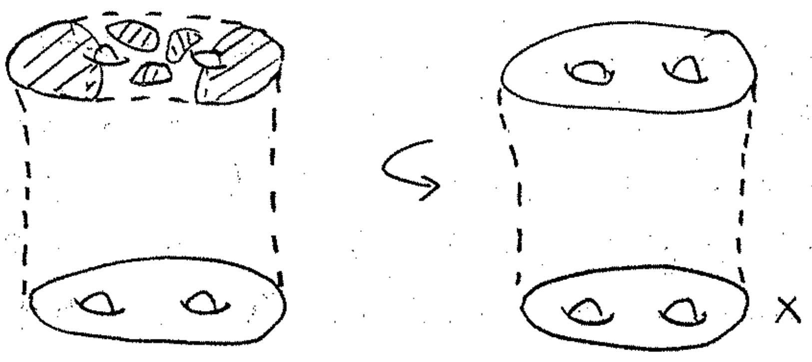
$N = N(\Gamma)$, $\Omega = \Omega(\Gamma)$

X : ∂N の成分

$\Omega(X)$: X に対応する Ω の成分

$\Gamma_X = \mathrm{Stab}\,\Omega(X) < \Gamma$ として，

$$CX = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma_X$$
$$QX = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma_X))/\Gamma_X$$ とする



CX　　　　QX

特に $CX = QX$ となるのは，Γ が Γ_X の高々2位の拡張になる場合，i.e. M が面上の区間バンドルになる場合だから，今は除外されている。

更に，

$$CN = \sum_X CX \quad (\text{disjoint 和})$$
$$QN = \sum_X QX \quad (\quad " \quad)$$

とおく。ここで X は ∂N の成分を動く。このとき，

$$\partial \Omega N = \partial N \cup \delta(\partial N)$$

は明らか。また、

$$\partial c N = \partial N \cup BN$$

と書くと、

$$BN = \bigcup_{x} (\Omega - \Omega(x))/\Gamma_x$$

注意　M: acylindrical とする。更に P: 空 なら、前節に述べたように BN = {spots} となる。一般には BN は punctured disks (i.e. {0<|z|<1} に等角同値なもの) を含む。

注意　一般に、BN の各成分は δ(∂N) 上の incompressible な subsurface である

M: acylindrical でなければ、BN は多様な成分を許す。実際、任意の compressing cylinder は、BN 上の puncture を囲むものではない (non-peripheral) essential loop を定める。逆にこのような BN 上の loop が compressing cylinder の存在を表わす。

命題1　BN の成分で位相的円板でないものは有限個である。

証) まず Euler 標数 < 0 なる BN の成分は明らかに有限個

punctured disks 及び annuli の数はそれぞれ、∂N の punctures の数及び、∂N 上の互いに disjoint な simple loops の数でおさえられる。 //

注意. （M が面上の区間バンドルでなければ）
BN の成分で ∂N のある成分と一致するものはない。

以上の考察を用いて，skinning map を調べよう。

$$\forall N_1, N_2 \in \mathrm{Teich}(\partial N) \simeq \mathrm{Teich}(\partial_0 M)$$

に対し，

$$f : \partial N_1 \to \partial N_2, \text{ Teichmüller map.}$$
$$(\text{s.t. marking を保つ})$$

とし，これを，$BN_1 \to BN_2$ に lift して，連続にのばした q.c. map を

$$g : \sigma(\partial N_1) \to \sigma(\partial N_2)$$

とする。f と g の maximal dilatations は等しいが，g は Teichmüller map ではあり得ず，

$$d_T(\sigma(N_1), \sigma(N_2)) < d_T(N_1, N_2)$$

を得る。ただし，d_T は Teichmüller 距離である。
McMullen [7] の結果を用いれば，より正確に次の結果を得る。(cf. 大竹氏のノート)

定理 §3 の主定理の仮定の下で $\forall N \in GF(M, P)$ で

$$\| d\sigma \| < {}^{\exists} c([\partial N]) < 1$$

が成り立つ。ただし，$c([\partial N])$ は moduli 空間上での $[\partial N]$ の連続函数である。

証) $d\sigma : M(\partial N) \to M(\sigma(\partial N))$ の dual

$$d\sigma^* : Q(\sigma(\partial N)) \to Q(\partial N)$$
$$\text{i.e. } \langle \phi, d\sigma(\mu) \rangle = \langle d\sigma^*(\phi), \mu \rangle$$

を考えると，前§の $d\sigma(\mu)$ の構成法より，

$\forall \phi \in \Theta(\sigma(\partial N))$ と $\forall X'$: ∂N の成分に対し、$\mathcal{U}_{X'} = \{ U : BN \subset \sigma(\partial N)$ の成分で X' を cover するもの$\}$ とおくとき、

$$d\sigma^*(\phi)\big|_{X'} = \sum_{U \in \mathcal{U}_{X'}} \Theta_{U/X'}(\phi|_U)$$

となることが容易にわかる。

一方、$U \to X'$ は、普遍被覆か、あるいは上述の最後の注意より $\pi_1(X')$ の真部分群に対応する cover だから、nonamenable となる（後者については McMullen [7] §4 最後の Example を見よ）。従って、$\forall U \in \mathcal{U}_{X'}$ に対し

$$\| \Theta_{U/X'} \| < {}^{\exists} c([X']) < 1$$

となることが、McMullen [7] Theorem 10.3 よりわかる。ただし、$c([X'])$ は moduli 空間上連続である。

更に、普遍被覆でない $U \to X'$ は命題1より有限個であるから、$\forall U \in \mathcal{U}_{X'}$ に対し

$$\| \Theta_{U/X'} \| < {}^{\exists} c([\partial N]) < 1$$

を得る。

$$\| d\sigma^* \| \leqq \sup \| \Theta_{U/X'} \|$$

（ただし、U は BN の成分すべてを動く）

かつ、
$$\| d\sigma \| = \| d\sigma^* \|$$

より、主張を得る。 //

注意. M が連結でない場合（ただし、M/τ は連結とする）、適当な $\tau \circ \sigma$ の itaration を考えれば同上の主張が成り立つ。

従って、§3 の主定理の主張2の前半はこれで証明されたことになる。

最後に、$d\sigma^*$ が isometry に近くなるような ϕ に対し、その mass $|\phi|$ がどこに集中するかも、McMullen [7] には述べられている。それを再記しておく。

まず、$U \to X'$ を上述のような、$\pi_1(X')$ の真部分群 Γ' に対応する cover とする。Γ' に対し、X' の proper subsurface T が対応する。

一方、$^\forall \varepsilon > 0$：十分小に対し、X' 上の単射半径 $< \varepsilon$ なる点全体の集合 X'_{thin} は、cusps の近傍と、短い geodesic の annular 近傍からなる。そこで

$X'_{lift} = X'_{thin} \cup T'$

(T' : $X' - X'_{thin}$ の T に対応する成分)

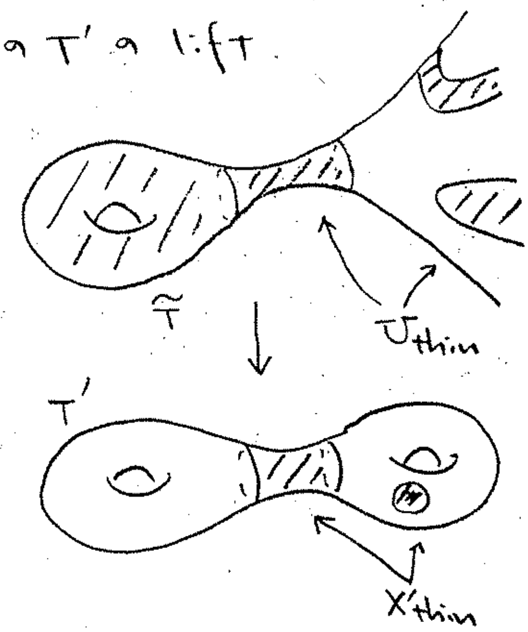
$\tilde{T}$: T' に同相な、唯一の T' の lift

U_{thin} : X'_{thin} の逆像

$U_{am} = U_{thin} \cup \tilde{T}$

$BN_{thin} = \bigcup_U U_{thin}$

$BN_{am} = \bigcup_U U_{am}$



とおくと、McMullen [7] §11 の結果より、以下を得る。

命題2

$\phi \in Q(\sigma(\partial N))$, $\|\phi\|_1 = 1$, $\|d\sigma^*(\phi)\|_1$ が 1 に近い

$\Rightarrow$ $|\phi|$ の mass の大半は BN_{am} 上にある

命題3 更に、M : acylindrical ($\Rightarrow BN_{am} = BN_{thin}$)

$\Rightarrow$ $|\phi|$ の mass の大半は BN_{thin} 上にある

これらの主張の正確な意味は次節にのべる。

§6 主定理の証明 II
(acylindrical な場合)

前節命題2は正確には、$N_n \in GF(M, \underline{P})$

$\phi_n \in Q(\sigma(\partial N_n))$, $\|\phi_n\|_1 = 1$ に対して

$$\| d\sigma^*(\phi_n) \|_1 \to 1$$

$$\Rightarrow (*) \iint_{(BN_n)_{am}} |\phi_n| \to 1$$

ということである。

今、M : acylindrical と仮定すると、BN の各成分は位相的に円板か punctured disks のみからなり、$BN_{am} = BN_{thin}$ だから、上の(*)は、

$$\iint_{(BN_n)_{thin}} |\phi_n| \to 1$$

である(命題3)

更に、∂N_{thin} は cusps と、短い geodesics に対応する annuli に分けられた。後者を $\partial N_{geod} = \partial N_{geod}(\varepsilon)$ で表わす。そこで、

$x \in \sigma(\partial N)$: ∂N_{geod} 上にある

$\iff$ $x \in {}^{\exists}U$: BN の成分 s.t.

U が ∂N の ${}^{\exists}$成分 X' を cover するとき

x は X'_{geod} 上にある

とする。このとき、次を得る。

定理 ${}^{\exists}\varepsilon$: 十分小, 以下の条件をみたす。

${}^{\forall}x$: $\partial N_{geod}(\varepsilon)$ 上にある, に対し、

${}^{\exists}B \subset \sigma(\partial N)$: x 中心の双曲的円板で、

$$\frac{\langle \phi, d\sigma(\mu) \rangle_B}{\| \phi|_B \|_1} \leqq {}^{\exists}c(\partial_0 M) < 1$$

ただし、$\mu \in M(\partial N)$, $\phi \in Q(\sigma(\partial N))$ で $\|\mu\|_\infty = \|\phi\|_1 = 1$ とする。

定理の証明はあとにまわし、まず §3 の主定理の 1, i.e.

M : acylindrical

$\Rightarrow \|d\sigma\| < {}^\exists c(\partial_0 M) < 1$

を先に示そう。

まず、$E \subset BN$: ∂N geod (ε) の逆像とする。ただし、ε は上定理内のものとする。E を、上定理で得られた円板の族 $\{B_\lambda\}$ でおおう。明らかに B_λ の双曲的半径は有界である。従って、

${}^\exists\{B_j\}$: 互いに disjoint な部分族 $(\subset \{B_\lambda\})$ s.t.

$$(\#) \qquad \sum_j \iint_{B_j} |\phi| \geq {}^\exists c(\partial_0 M) \iint_E |\phi|$$

が示せる。

証）まず B_1 をその半径が他の ${}^\forall B_\lambda$ の半径のたとえば $\frac{1}{2}$ 以上のものとする。以下、$\{B_1, \cdots, B_j\}$ が決ったとして、

$$\mathcal{B}_j = \{B_\lambda : \bigcup_j B_j \text{ と disjoint}\}$$

とおく。$B_{j+1} \in \mathcal{B}_j$ を、その半径が他の ${}^\forall B_\lambda \in \mathcal{B}_j$ の半径の $\frac{1}{2}$ 以上のものとする。

このようにして帰納的に定めた $\{B_j\}$ に対し、半径を各々、たとえば 10 倍にしたものを $\{B_j'\}$ とすれば $\bigcup_j B_j' \supset E$ となる。従って、主張は次の補題よりわかる。 //

<u>補題 1</u>　X : (g, n) 型のリーマン面、$\phi \in Q(X)$

$B(x, r)$: 半径 r の x 中心の双曲的単葉円板

$s > r$ とすると、

$$\iint_{B(x,s)}|\phi| \Big/ \iint_{B(x,r)}|\phi| < {}^{\exists}c(g,n,\frac{s}{r})$$

証）そうでないとすると、${}^{\exists}X_n$: (g,n)型, ${}^{\exists}x_n \in X_n$, ${}^{\exists}\phi_n \in Q(X_n)$, ${}^{\exists}r_n > 0$ s.t.

$$\iint_{B(x_n,s_n)}|\phi_n| \Big/ \iint_{B(x_n,r_n)}|\phi_n| \to +\infty$$

ただし、s_n/r_n : 一定にとる。

metric を正数倍して、$r_n \to r_\infty > 0$ とし、

McMullen [7] A.2.2 を用いれば、

$$X_n \to {}^{\exists}X_\infty, \quad x_n \to {}^{\exists}x_\infty \in X_\infty$$

ϕ_n もスカラー倍して、必要なら部分列をとれば

$$\phi_n \to {}^{\exists}\phi \in Q(X_\infty), \neq 0$$

としてよいが、収束は広義一様だから、

$$\iint_{B(x_\infty,s_\infty)}|\phi| \Big/ \iint_{B(x_\infty,r_\infty)}|\phi| = +\infty$$

となり矛盾。 //

上述より、∂N_{geod} の逆像 E 上では、次のことが言える。

<u>系1</u>　$\phi \in Q(\sigma(\partial N))$, $\mu \in M(\partial N)$, $\|\phi\|_1 = \|\mu\|_\infty = 1$

$m = \int_E |\phi|$ とすると、

$$\langle \phi, d\sigma(\mu) \rangle_{\sigma(\partial N)} \leq 1 - {}^{\exists}\delta(\partial_0 M)\cdot m$$

ただし、$\delta(\partial_0 M) > 0$.

証）上述の $(\#)$ をみたすような $\{B_j\}$ をとると、各 B_j は定理の主張をみたすから、$\|d\sigma\| \leq 1$ と $(\#)$ より容易に主張を得る　//

さて、主定理の1が成り立たないとすると、(※)が成立するような N_n, ϕ_n がとれることになる。

今たとえば $(\partial N_n)_{geod}$ の逆像 E_n 上の $|\phi_n|$ の mass が $\geq \frac{1}{2}$ ならば上系1より、$\|d\sigma\| < {}^{\exists}c(\partial_0 M)$ となるから $(\partial N_n)_{thin}$ の残りの部分、i.e. ∂N_n の cusps に対応する $(\partial N_n)_{thin}$ の部分 $(\partial N_n)_{cusp}$ の逆像 F_n 上での $|\phi_n|$ の mass $\geq \frac{1}{2}$ としてよい。

しかし、このときは、次の補題より、

$$\iint_{(\partial N_n)_{cusp}} |d\sigma^*(\phi_n)|$$

が、一様に小さくなることがわかるから、やはり $\|d\sigma\| < {}^{\exists}c(\partial_0 M)$ でなければならず矛盾を得る。

<u>補題2</u>　X : (g, n) 型のリーマン面，$\phi \in Q(X)$
$\|\phi\| = 1$

$$\Rightarrow \iint_{X_{cusp}(\varepsilon)} |\phi| < {}^{\exists}\delta(g, n, \varepsilon)$$

更に、$\delta \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$

i.e. X_{cusp} 上の $|\phi|$ の mass は一様に少ない (cf. 谷川氏のノート

証) X の puncture p に対し、p 上に二位の分岐点のみをもつ、高々四葉の regular cover $\widetilde{X}$ が作れる。

$\widetilde{X}$ 上への ϕ の lift $\widetilde{\phi}$ は、p 上の点まで正則にのび、$\widetilde{X}$ の型は X の型にのみ依存するから、補題1 (と、metric の比較) より、主張が示せる。 //

定理の証明）

まず，$^\forall Y = \sigma(X)$: $\sigma(\partial N)$ の成分，に対し，対応する quasifuchs 群を $\Gamma_X \subset \Gamma$ とする

i.e. $\Omega(\Gamma_X) = \Omega_X \cup \Omega_Y$, $\Omega_X / \Gamma_X = X$,

$\Omega_Y / \Gamma_X = Y$

$x \in \Omega_Y$: $\partial N_{geod}(\varepsilon)$ 上にある $\Rightarrow$

$\gamma = \gamma_x \in \Gamma$: Ω 上の Poinaré 計量に関する x での移動距離 $< \varepsilon$ なる（双曲型）元

とする。

さて，$\varepsilon_n \to 0$ としても $^\exists N_n \in GF(M, P)$,

$^\exists x_n$: $(\partial N_n)_{geod}(\varepsilon_n)$ 上にある s.t

$^\forall B_n \subset \sigma(\partial N_n)$: x_n 中心の双曲的円板上

$^\exists \varphi_n \in Q(\sigma(\partial N_n))$, $^\exists \mu_n \in M(\partial N_n)$

$\|\varphi_n\|_1 = 1$, $\|\mu_n\|_\infty = 1$

$$\frac{\langle \varphi_n, d\sigma(\mu_n) \rangle_{B_n}}{\|\varphi_n|B_n\|_1} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

であると仮定して，矛盾を示そう。

そこで，α_n, ω_n : $\gamma_n = \gamma_{x_n}$ の固定点とし，$Y_n = \sigma(X_n)$ を x_n に対応する $\sigma(\partial N_n)$ の成分（i.e, $x_n \in \Omega_{Y_n}$），$\Lambda_n = \Lambda(\Gamma_{X_n})$ とする。

今，$\alpha_n = 0$, $\infty \in \Lambda_n$, $\mathbb{H}^3$ の中心での γ_n の移動距離 $= \varepsilon_0$: 一定と正規化する。このとき，$\{\gamma_n\}$ の任意の部分列は集積点（in Möb）をもつが，γ_n は ∂N_n のある成分上で移動距離 $L_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ であるから，次の補題より，γ_n の任意の集積点は放物型の元であることがわかる。

補題3 $N = N(\Gamma)$: quasifuchsian , $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$

$\gamma \in \Gamma$: 双曲型で multiplier λ

$\mathcal{L} = \log \lambda$ とおき、

$L_\pm$: $\Omega^\pm / \Gamma$ 上での移動距離 とすると、

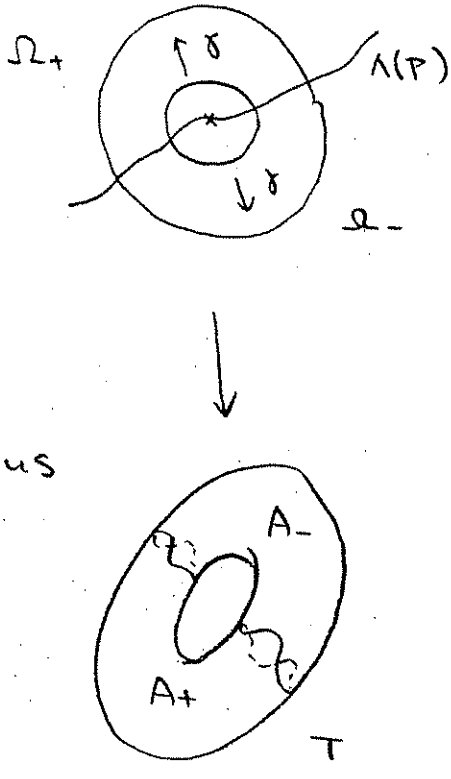
$$\frac{2 \operatorname{Re} \mathcal{L}}{|\mathcal{L}|^2} \geqq \frac{1}{L_+} + \frac{1}{L_-}$$

(ただし、γ の固定点を $0, \infty$ ($\Rightarrow \gamma(z) = \lambda z$) とし、$\Lambda(\Gamma) \ni 1$ としたとき、c_λ を λ を $\Omega(\Gamma)$ 内で 1 まで結ぶ曲線として

$$\log \lambda = \int_{-c_\lambda} \frac{dz}{z}$$

とする)

証) $T = (\hat{\mathbb{C}} - \{\gamma の固定点\}) / \langle \gamma \rangle$ とおくと、明らかに T は torus $\mathbb{C} / 2\pi i \mathbb{Z} \oplus \mathcal{L}\mathbb{Z}$ と等角同値で



$\Omega^\pm / \langle \gamma \rangle = A_\pm$ は、T 内の homotopic な annuli で、そのmodulus は、$\pi / L_\pm$ である。
(たとえば Bers [1] Theorem 3 の証明を見よ.
一方、T 内にはいる、$A_\pm$ と homotopic な annulus の最大 modulus は、上述より、

$$\frac{2\pi \operatorname{Re} \mathcal{L}}{|\mathcal{L}|^2}$$

であることがわかるから、moduli の劣加法性より主張を得る。 //

注意 補題3より、γ_n の multiplier を λ_n とするとき、

$$|\log \lambda_n| \leqq 2L_n \to 0$$

がわかるから、$\lambda_n \to 1$ i.e. γ_n の集積点は放物型となる。

次に M: acylindrical だから、$\gamma_n \notin \Gamma_{X_n}$ である。
($\because \gamma_n \in \Gamma_{X_n}$ ならば、α_n のおちる ∂N_n の成分と X_n が compressing cylinder でつなげる。)
これを用いて $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\partial_0 M)$ を十分小さくすれば、次の主張が成立することを示そう。

補題4 上述の正規化の下で、ε_n: 十分小

$$\Rightarrow \quad \Delta = \{|z|<1\} \subset \Omega_{Y_n} \text{ かつ、}$$
$$\Delta \to Y_n \text{ :単射}$$

証) まず、Margulis の lemma より、$\exists\, \eta$: 十分小に対し、γ_n の軸の η 近傍 U_n に対し、

$$U_n \cap g(U_n) = \phi \qquad {}^\forall g \in \Gamma_n - \langle \gamma_n \rangle$$

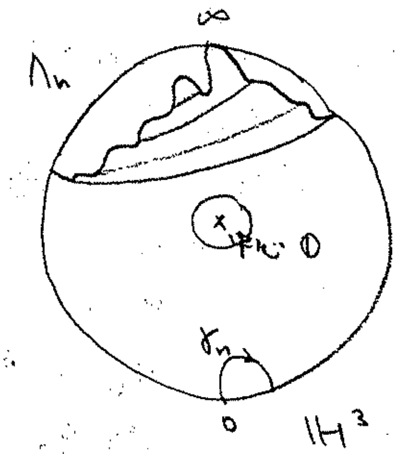
となる。(${}^\forall n$)

従って ε_0 を η に比して十分小さくすれば、$\mathbb{H}^3$ の中心 0 での $\Gamma_n - \langle \gamma_n \rangle$ の元による移動距離は一様にかつ任意に大きくできる。

一方、$\mathbb{H}^3/\Gamma_{X_n}$ の convex core の境界 ∂_n は pleated surface で双曲構造がはいる。従って、∂_n の $\mathbb{H}^3$ への lift $\tilde{\partial}_n$ の各点では、$\partial_0 M$ にのみ依存する量より小さい移動距離をもつ Γ_{X_n} の元が必ず存在する。

以上より、Λ_n の $\mathbb{H}^3$ での convex hull が $\mathbb{H}^3$

の中心の一様な近傍 V を
通らないようにできる。
特に、∞ と各 $z \in \Lambda_n$ とを
通ぶ geodesics を考える
ことにより ε_0 と V に
のみ依存する R が存在して、
$\{|z|<R\} \subset \Omega_{\Upsilon_n}$
とできる。



ここで更に ε_0 を十分小さくすれば、R は
いくらでも大きくできることもわかる。

必要なら、更に ε_0 を小さくすれば、Ω_{Υ_n} 上
の Poincaré 計量に関する Δ の半径 δ をいくらで
も小さくできる。

従って、0 が $(\Upsilon_n)_{thick}(\delta)$ におちれば、後半は
明らか。0 が $(\Upsilon_n)_{thin}(\delta)$ におちれば、対応する
Γ_n の元 $\alpha_n \in \Gamma_n - \langle \gamma_n \rangle$ より、α_n の 0 での移動距
離は十分大きい。よってこの場合も後半を得る。//

補題5　$\varepsilon_n \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$

証）$\Lambda(\Gamma_n)$ は連結かつ、$0, \infty$ を含むから、双曲距
離は球面距離で下から一様に評価できる。
従って、$x_n \to \gamma_n(x_n)$ の球面距離も $\to 0$ とな
る。γ_n の集積点は常に放物型で 0 を固定
点にもっていたから、$x_n \to 0$ がわかる //

以上の準備の下に、$B_n \subset \Omega_{\Upsilon_n}$ を x_n 中心で Δ に
はいる最大の（Ω_{Υ_n} の Poincaré 計量に関する）双曲的
円板とする。上で示したことは、$B_n \to \Upsilon_n$ が単葉で

かつ、0の一定の近傍を$^\forall B_n$が含むということである。そこで$\varepsilon_n \to 0$として、その極限を考えよう。必要なら部分列をとり、適当なスカラー倍をほどこすことにより、前と同様に

$$B_n \to {}^\exists B \quad , \quad \gamma_n \to {}^\exists \gamma : \text{放物型}$$
$$\phi_n \to {}^\exists \phi \neq 0$$
$$d\sigma(\mu_n) \to {}^\exists \mu \quad (\text{weak})$$

としてよい。更に仮定より、

$$<\phi, \mu>_B = \|\phi|_B\|$$

となるが、このとき、二次微分として、ϕはγで不変でなければならない。しかし、そのときは、

$$\iint_B |\phi| = +\infty$$

であることがわかり、矛盾を得る。（§4．命題2の証明を参照せよ。）

以上で定理の証明が得られた

注意．上定理の証明中、「M : acylindrical」という仮定は$\gamma_n \notin \Gamma_{x_n}$を出すのに用いただけである。従って一般の場合にも、次の定理が成り立つ

一般定理　$^\exists \varepsilon$: 十分小，以下の条件をみたす

$^\forall x \in \partial N_{geod}(\varepsilon)$上にある，に対し，

i) N_{thin}の$^\exists$annular成分が，xでBNに同相にliftできる，または

ii) 上定理の主張が成り立つ

証）$\gamma_n \in \Gamma_{x_n}$ならi)が成り立つ　//

§7 主定理の証明(残り)

まず、M/τに双曲構造がはいれば、任意のM/τ内のincompressible torusはrank 2のcuspにhomotopicであることはよく知られている。従って、M/τがatoroidalでなければ双曲構造ははいり得ない。

一方、M: acylindrical $\Rightarrow \|d\sigma\| < {}^\exists c < 1$ (§6) よりこの場合は$\tau\circ\sigma$は固定点をもち、はり合わせ問題は常に解をもつ。

M: acylindricalとは限らない場合には、まず

$$GF(M,P,L) = \{ N \in GF(M,P) ;\ d_T(\partial N, \partial(\tau\circ\sigma(N))) \leqq L \}$$

とおく。§5の定理よりLを十分大きくとれば$GF(M,P,L) \neq \phi$である。明らかに

$$\tau\circ\sigma(GF(M,P,L)) \subset GF(M,P,L)$$

だが更に、${}^\forall N \in GF(M,P,L)$に対し、$N$と$\tau\circ\sigma(N)$とを結ぶTeichmüller geodesic $G_N \subset GF(M,P,L)$である。

証) $N \in GF(M,P,L)$を固定し、${}^\forall \tilde{N} \in G_N$に対し$\tilde{N}_1 = \tau\circ\sigma(\tilde{N})$とおくと、

$$d_T(\partial\tilde{N}, \partial\tilde{N}_1) \leqq d_T(\partial\tilde{N}, \partial N_1) + d_T(\partial N_1, \partial\tilde{N}_1)$$
$$\leqq d_T(\partial\tilde{N}, \partial N_1) + d_T(\partial N, \partial\tilde{N}) \leqq L$$

i.e. $\tilde{N} \in GF(M,P,L)$ //

従って、L:十分大に固定するとき、

(c) ${}^\exists k, {}^\exists c$ s.t. $\|d(\tau\circ\sigma)^k\| < c < 1$

が$GF(M,P,L)$上で成り立てば、前と同じ議論で$\tau\circ\sigma$が$GF(M,P,L)$内に固定点をもつことが示せ、はり合わせ問題が解をもつ。

以上より、条件(C)が $\overset{\forall}{}GF(M, P, L)$ 上で成り立たない場合には、M/τ 内に incompressible torus が存在することを示せば、主定理のすべての主張の証明が得られたことになる。

そこで条件(C)を否定して、

$\forall K, \forall \delta > 0$ に対し

$$\exists \{N_k\}_{k=0}^{K} \subset GF(M, P, L)$$

$$\exists \phi_k \in Q(\partial N_k) \quad (\forall k) \quad \text{s.t.}$$

$$N_{k+1} = \tau \circ \sigma(N_k)$$

$$\phi_k = d(\tau\circ\sigma)^*(\phi_{k+1})$$

$$1+\delta \geq \|\phi_k\| \geq 1$$

とする。

一方、

c : $\partial_0 M$ の成分の個数

S : ∂N_k 上の disjoint な単純閉 geodesics の個数の上界

S' : BN_k 上の disjoint な単純閉 geodesics の個数の上界

とおく。S, S' は (M, P) にのみ依存する。

これらを用いて、

$$K = C + S$$

とおく。

さて、前節最後で述べたように、条件(C)が成り立たないと、∂N 上の短い $^{\exists}$loop が BN へ同相に lift できることになるが、その際の ε を固定しよう。まず、

ε_0 : 双曲的長さ $\leq \varepsilon_0$ なる geodesics が互いに disjoint な単純閉曲線族となるような、十分小さい絶対定数

として，$\varepsilon>0$ は $\log\varepsilon+KL<\log(\varepsilon_0)$ をみたし，かつ，前節の一般定理が成り立つものに固定する。このとき，次の主張が成り立つ。

$\forall\partial N_{k}$ 上の長さ $\leq\varepsilon$ の閉 geodesic の定める $\partial_0 M$ 上の loops の homotopy 類は高々 S 個

証）$d_T(\partial N_{k},\partial N_0)\leqq KL$ より，∂N_{k} 上長さ $\leqq\varepsilon$ の geodesic は ∂N_0 上長さ $\leqq\varepsilon^{KL}\leqq\varepsilon_0$ の geodesic に対応する。よって，ε_0 の選び方より。 //

更に，一般に，双曲的面 X に対し

α：長さ $\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic

があれば，

$X(\alpha)$ ： $X_{thin}(\varepsilon)$ の α を含む成分

とおく。このとき，$\exists\eta=\eta(\partial_0 M)>0$ s.t.

X：$\exists\partial N_{k}$ の成分，長さ $\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic α をもつ

$$\Rightarrow \iint_{X(\alpha)}|\varphi_{k}|\Big/\iint_X|\varphi_{k}|\geqq\eta$$

をみたす。

証）$\exists N_n\in GF(M,P)$，$\exists\alpha_n$：∂N_n 上の長さ $\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic，$\exists\varphi_n\in Q(\partial N_n)$，$\|\varphi_n\|_1=1$ s.t.

$$\iint_{(\partial N_n)(\alpha_n)}|\varphi_n|\to 0\quad(n\to\infty)$$

とする。$\forall\alpha_n$ は $\partial_0 M$ 上の高々 S 個の loops の一つに対応し，また，§6，補題2より，$|\varphi_n|$ の mass は $(\partial N_n)_{cusp}(\varepsilon)$ 上へはにげてゆかない。そこで x_n を $(\partial N_n)_{thick}(\varepsilon)$ 内にとり，必要なら部分列をとって

$$(\partial N_n)\to\exists X,\quad x_n\to\exists x\in X$$
$$\varphi_n\to\varphi$$

とするとき、$\phi \neq 0$ がわかる。

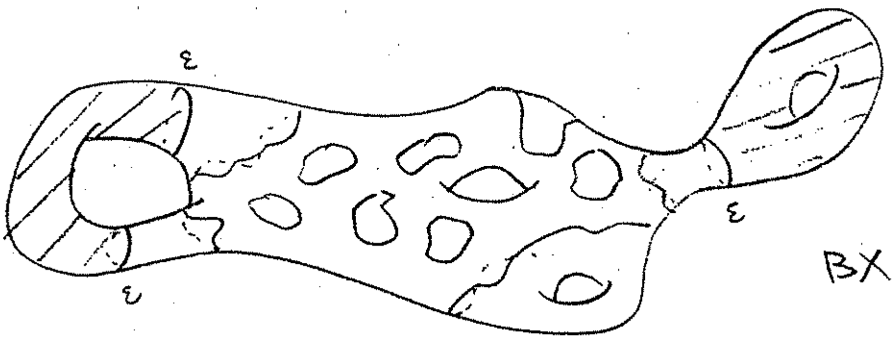
一方、$(\partial N_n)(\alpha_n)$ の limit に対応する $X_{thin}(\varepsilon)$ の成分 D に対し、$\int_D |\phi| = 0$ とならなければならず矛盾。 //

このような η を固定して、

$$m = \frac{\eta}{C(2S')^K}$$

とおく。

なお、$S' > 0$ であることは、§6最後の一般定理よりわかる。より精密には $\mathcal{L}(BN, \varepsilon)$ を、$(\partial N)_{geod}(\varepsilon)$ 及び $(\partial N) - (\partial N_{geod}(\varepsilon))$ の成分の BN への同相な lifts 全体とするとき（下図の斜線部）、



補題1 δ を十分小さくとれば、$\forall k$ に対し、

$$\iint_{\mathcal{L}(BN_k, \varepsilon)} |d\tau^*(\phi_{k+1})| \geq \|d\tau^*(\phi_{k+1})\|_1 - m$$

証）$\phi = d\tau^*(\phi_{k+1})$ とすると、$\|\phi\|_1 = \|\phi_{k+1}\| \leq 1+\delta$, $\|d\sigma^*(\phi)\|_1 = \|\phi_{k+1}\| \geq 1$ である。

まず、$\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ を十分小さくとり、δ を十分小にすれば、§6補題2と、その前にある議論より、

$$\iint_{(BN_k)_{cusp}} |\phi_k| < \frac{m}{2} \quad (\forall k)$$

としてよい。

一方、同じ $\tilde{\varepsilon}$ に対し、δ を更に小さくすれば、

$$\iint_{(BN_k)am} |\phi_k| \geqq \|\phi_k\|_1 - \frac{m}{2} \quad (\forall k)$$

とできる。従って $^\forall k$ に対し、

$$\iint_{\mathcal{L}(BN_k,\varepsilon)} |\phi_k| \geqq \iint_{\mathcal{L}(BN_k,\tilde{\varepsilon})} \geqq \|\phi_k\|_1 - m$$

を得る。//

そこでこのような δ を固定する。以上の $K, \varepsilon, \eta, m, \delta$ に対し、次の主張が成り立つ。

補題2 $\quad {}^\exists k \leqq C$

$^\exists \alpha_k$: ∂N_k 上の長さ $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic, s.t.

$$\iint_{\partial N_k(\alpha_k)} |\phi_k| \geqq \frac{\eta}{C}$$

証) $k = C$ に対しては、∂N_C の成分で $|\phi_C|$ の mass が最大のものを考える。$\|d(\tau\circ\sigma)^*\| \leqq 1$ と、M/τ が連結かつ面上の区間バンドルでないことより、$(\tau\circ\sigma)$ の適当な itaration をとれば、

$^\exists k \leqq C$, $^\exists X$: ∂N_k の成分, s.t.

$\iint_X |\phi_k| \geqq 1/C$、かつ X を含む N_k の成分は面上の区間バンドルではない。

$1/C > m$ より、補題1から、$\mathcal{L}(BN_k, \varepsilon)$ の成分で X に含まれるものがある。BN_k は X の部分集合だから、Poincare 計量の単調性から、X 上に長さ $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic が存在する。後半は η の定義より。//

補題3　α_k：∂N_k 上の長さ $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic

$$\mu = \iint_{\partial N_k(\alpha_k)} |\phi_k| > m \quad \text{とする}$$

$$\mu' = (\mu - m)/S' > 0$$

とおくと、α_k は BN_k 上の同じ長さの geodesic β_k に lift され、

$$\iint_{BN_k(\beta_k)} |d\tau^*(\phi_{k+1})| \geqq \mu'$$

証）補題1より $|d\tau^*(\phi_{k+1})|$ の mass は、高々 m を除いて、$\mathcal{L}(BN_k, \varepsilon)$ 上にあり、これらは高々 S' 個の成分からなる。

$\phi_k = d\sigma^*(d\tau^*(\phi_{k+1}))$ より、$|\phi_k|$ の $\partial N_k(\alpha_k)$ 上の mass は高々 m を除いて、これら高々 S' 個の成分から来るから、その成分の一つで主張を満たすものが存在する。　//

そこで、まず補題2の $k = k_0 \leqq c$ を固定し、

α_{k_0}：長さ $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の geodesic で

$$\iint_{\partial N_{k_0}(\alpha_{k_0})} |\phi_{k_0}| \geqq \frac{\eta}{c}$$

とする。簡単のために、$\{k_0, k_0+1, \cdots, k_0+|S|\}$ で k を動かすことにして、$k_0 = 0$ とする。このとき、帰納的に、$k = 0, 1, \cdots, |S|-1$ に対して、次の条件をみたす単純閉曲線の族 $\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}$ が構成できる。

(i) α_k：∂N_k 上の geodesic で長さ $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$

(ii) $\displaystyle\iint_{\partial N_k(\alpha_k)} |\phi_k| \geqq \frac{\eta}{c(2S')^k} \quad (> m)$

(iii) β_k：α_k の BN_k への同相な lift

(iv) γ_k : ∂N_k 上の loop で QN_k 内で β_k に homotopic

(v) $\tau(\gamma_k) = \alpha_{k+1}$

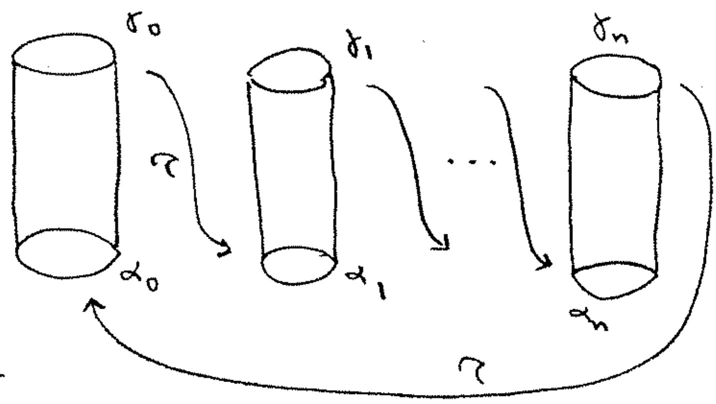
実際、α_0 は (i), (ii) を満たすようにとった。α_k が (i), (ii) を満たすようにとれれば、補題3より、(iii) をみたす β_k が存在する。従って (iv), (v) をみたす γ_k, α_{k+1} が定義できる。かかる α_{k+1} が (i), (ii) をみたすことを示せばよい。

まず補題3と m のとり方より、

$$\iint_{BN_k(\beta_k)} |d\tau^*(\phi_{k+1})| \geq \frac{\eta}{c(2S')^{k+1}}$$

で、$BN_k \hookrightarrow \partial\sigma(N_k)$ より、$\sigma(N_k)$ 上では β_k に homotopic かつ長さ $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ なる geodesic β'_k が存在し、更に β'_k に対応する $\partial\sigma(N_k)$ の ε-thin part は $BN_k(\beta_k)$ を含む。τ は isometry だから、$\alpha_{k+1} = \tau(\gamma_k)$ が (i), (ii) をみたすことがわかる。

最後に $S+1$ 個の geodesics $\{\alpha_k\}_{k=0}^{S}$ は高々 S 個の homotopy 類を定めるから、その内の二つは一致する。たとえば、α_0 と α_n $(n \leq S)$ が一致するとすれば、M上で各 α_j と γ_j を結ぶ homotopy を考えれば cylinder の族 $\{C_j\}$ を得るが、それらは τ によりつながって、M/τ 内の non-peripheral (parabolic locus 内に変形できない) torus を作る。従って、M/τ は atroidal ではない



参考文献

[1] L. Bers: On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups I, Ann. Math. 91 (1970), 570-600.

[2] ________: An extremal problem for quasiconformal maps and a theorem by Thurston, Acta Math. 141 (1978), 73-98.

[3] A. Douady and J. Hubbard: A proof of Thurston's topological characterization of rational maps, to appear.

[4] 小島定吉：Thurstonの'怪物定理'について，数学 34-4 (1982), 301-316.

[5] O. Lehto and K.J. Virtanen: Quasiconformal mappings in the plane, Springer 1973.

[6] B. Maskit: On the classification of Kleinian groups; I Koebe groups, Acta Math 135 (1975), 249-270.

[7] C. McMullen: Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Inven. Math. 97 (1989), 95-127.

[8] ____________: Iteration on Teichmüller space, ibid. 99 (1990), 425-454.

[9] J. Morgan: On Thurston's uniformization theorem for three dimensional manifolds, in 'The Smith Conjecture' 37-125 (, Academic Press, 1984).

[10] D. Sullivan, Travaux de Thurston sur les groupes quasi-quchsian, Lecture Notes in Math. 842 (1981), n^{o}554.