

# 双曲幾何学を用いた Markoff 予想へのアプローチについて

菅 真央

平成 29 年 2 月 1 日

# 目次

<b>1</b>	<b>双曲平面の基本性質</b>	<b>4</b>
1.1	双曲距離と測地線の定義	4
1.2	双曲三角形の性質	6
1.3	ホロサイクルと Busemann コサイクル	9
<b>2</b>	<b>等長変換とフックス群</b>	<b>9</b>
2.1	等長変換の分類	9
2.2	極限集合の分類と諸性質	11
2.3	$PSL(2, \mathbb{Z})$ の極限集合と有理数の関係	12
<b>3</b>	<b>連分数展開と双曲幾何学の関係</b>	<b>14</b>
3.1	連分数展開の定義	14
3.2	連分数展開の幾何学的解釈	14
<b>4</b>	<b><math>c = p^n, c = 2p^n</math> の場合の Markoff 予想</b>	<b>20</b>
4.1	Markoff 数と Markoff 予想	20
4.2	定理 4.3( $c = p^n$ の場合) の証明の準備	21
4.3	定理 4.3( $c = p^n$ の場合) の証明の概要	22
4.4	定理 4.3 ( $c = p^n$ ) と定理 4.4( $c = 2p^n$ ) の証明	26
<b>5</b>	<b>Markoff 樹</b>	<b>28</b>
5.1	Markoff 樹に関する言葉の定義	28
5.2	Markoff 樹の基本的性質	29
<b>6</b>	<b>W-構成, V-構成</b>	<b>31</b>
6.1	切断列と一点穴あきトーラス上の単純閉曲線の関係	31
6.2	記号と定義	34
6.3	Farey 列と連分数展開の関係	35
6.4	W-構成	38
6.5	V-構成	40
<b>7</b>	<b>W-構成による Markoff 行列の作り方</b>	<b>44</b>
7.1	主結果 (定理 7.2) の証明の準備	45
7.2	主結果 (定理 7.2) の証明	48
7.3	W-構成により生成した Markoff 行列とその共役な元	49
7.4	Markoff 行列であるかの判定における現状の問題点	51

# 序

Markoff 方程式と呼ばれる  $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$  をみたす正の整数解  $(a, b, c)$  (ただし  $a \leq b \leq c$  とする) を Markoff の三つ組といい、「Markoff の三つ組  $(a, b, c)$  (ただし  $a \leq b \leq c$  とする) は、 $c$  により一意に定まる。」という主張を Markoff 予想 (G. Frobenius, 1913) という。この主張の完全な証明はまだ与えられておらず、場合を限定して証明が与えられている。既に証明が与えられている場合の一つに  $c = p^n$  ( $p$ : 素数,  $n$ : 整数) があり、整数論の観点から証明したものだけでなく、双曲幾何学的観点から証明したものも存在する。本論文では M.L.Lang, S.P.Tan が与えた双曲幾何学と合同式を用いた手法による証明 [1] を 4 章で取り上げている。Markoff 樹を考えることにより、 $(1, 1, 1)$  から Markoff 方程式の解は生成されることが知られており、これにより生成された Markoff 数と一点穴あきトーラス上の単純閉曲線が対応することを用いて示したものである。この Markoff 数と一点穴あきトーラス上の単純閉曲線の対応を構成するうえで重要な役割を果たしているのが Markoff 行列である。本論文では [1] を参考に  $c = 2p^n$  の場合は示すことができたが、 $c = 5p^n, 13p^n$  の証明には至らなかった。その原因の一つとして Markoff 行列を具体的に扱うことが難しい点が挙げられる。今後  $c = 5p^n, 13p^n, \dots$  の場合を考えるにあたり、どんな Markoff 数に対しても Markoff 行列の具体例が作れること (これは任意の有理数に対応する Markoff 行列の具体例を作ることにも値する)、そしてある行列が Markoff 行列であるかを代数的情報から判定できることは非常に有用であると考え。そこで本論文では、既によく知られている W-構成 (W-scheme [2]) という、行列を列挙する方法により、Markoff 行列を全て列挙できること、そして Markoff 行列であるか否かを判定するにあたり問題となっていることについて主結果として 7 章で述べる。尚、この主結果は新しい数学的結果ではないものの、数学的に意義のある考察結果と具体的計算であると考え。

本論文の全体像を以下に述べる。まず、1 章では双曲距離を定義し、ユークリッド平面における二点間の最短距離が双曲平面上では最短であるとは限らないことや、直線や三角形の双曲平面上での基本的性質についてみていく。2 章では、等長変換の分類やフックス群の極限集合の分類を行った後、 $PSL(2, \mathbb{Z})$  の極限集合と有理数、無理数の関係を述べることを目標とする。3 章では、2 章でみた関係から、さらに有理数、無理数の連分数展開を双曲幾何学的に解釈する手法を述べることを目標とする。この手法を使えば、有理数または無理数と  $i$  を結ぶ測地線と Farey グラフとの交点を考えることで、連分数展開を導くことができる。これら 1, 2, 3 章はいずれも [4] を参考にした。4 章では既に述べた通り、[1] を参考に  $c = p^n, 2p^n$  の場合の Markoff 予想を証明することを目標とする。5 章では、4 章で登場する Markoff 樹の基本的性質について [5] を参考に述べる。6 章では、7 章で必要となる W-構成を定義し、W-構成と密接に関係する V-構成も定義したあと、例を用いて具体的な計算方法を紹介する。この章では [2], [6] を参考にした。最後に、7 章では主結果を述べる。

# 1 双曲平面の基本性質

この章では、双曲平面の基本的な性質のうち、後の話題に関係するものを簡単に紹介する。特に、双曲距離を定義し、ユークリッド平面における二点間の最短距離が双曲長さでは最短距離にならないことや、ユークリッド平面における直線は双曲平面上では直線であるとは限らないことを確認していく。尚、この章で紹介するものは、いずれも [4] を参考にした。

## 1.1 双曲距離と測地線の定義

$$G := \left\{ h(z) := \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

と定め、 $\mathbb{H}$  を上半平面と呼ぶ。このとき、上半平面上の任意の点  $z \in \mathbb{H}$  に対し、その接平面  $T_z\mathbb{H}$  上で定義された内積

$$g_z(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{1}{\text{Im } z^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad (\text{ただし } \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ はユークリッド内積とする。})$$

により、 $G$  は等長写像として  $\mathbb{H}$  に作用する。尚、この  $G$  は円又は  $\mathbb{C}$  上のユークリッド直線の族を保ち、また、 $G$  は  $\mathbb{H}$  上の等角写像でもある。このとき一般的な定義として以下がある。

**定義 1.1.** 区分的滑らかな曲線  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $c(t) = x(t) + i y(t)$  の双曲長さ (hyperbolic length) を

$$\text{length}(c) := \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt$$

と定める。また、領域  $=B$  の双曲面積 (hyperbolic area) を

$$A(B) := \iint_B \frac{dx dy}{y^2}$$

と定める。

上の定義からも明らかな通り、ユークリッド平面において二点間のユークリッド線分が最短距離であっても、上半平面上の双曲長さでは最短距離になるとは限らないことが分かる。そこで、ユークリッド平面において直線と呼ばれるものを上半平面上でも定義していく。

**命題 1.2.** 任意の  $z, z'$  に対し、 $\text{length}(C) = \inf_{c \in S} \text{length}(c)$  を満たすような区分的滑らかな曲線  $C$  がただ一つ存在する。ただし、 $z, z'$  を端点とする区分的滑らかなパラメーター付けされた曲線の集合を  $S$  とした。

(i)  $\text{Re } z = \text{Re } z'$  の場合：

上の  $C$  は  $z$  と  $z'$  を結ぶ虚軸と平行な線分である。

(ii) その他の場合：

$z$  と  $z'$  を通り、かつ中心を実軸上に持つ半円を考える。このとき、上の  $C$  はその半円上の  $z$  と  $z'$  を端点とする円弧である。

**証明** 証明の概略を記す。まず  $z = is, z' = is'$  ( $s, s' \in \mathbb{R}, s, s' > 0$ ) の場合について区分的滑らかな曲線の定義に従って示す。その後、実部が等しい二点を任意にとり、実軸に沿った平行移動を考えると、最初の場合に帰着でき (i) は示せる。(ii) は  $G$  の  $\mathbb{H}$  における推移性と、 $i$  周りにおける回転を表す等長変換を用いることで上半平面上の任意の二点を虚軸上に移すことができる。後は  $G$  の円円対応を用いると、実軸に垂直な半直線と実軸に中心を持つ半円の族を  $G$  は保つことから (ii) は示せる。□

**定義 1.3.**  $\mathbb{H}$  において、実軸に平行な半直線と、実軸上に中心を持つ半円のことを測地線 (geodesic) という。

上記の測地線の定義より、ユークリッド平面における「平行」な直線は、 $\mathbb{H}$  上では必ずしも平行だとは限らないと分かる。以後、任意の  $z, z' \in \mathbb{H}$  に対し、 $z$  と  $z'$  を通る測地線で、この二点を端点とする円弧又は線分のことを双曲的線分 (hyperbolic segment) といい、 $[z, z']_h$  と表記することにする。よって双曲的線分は  $z$  と  $z'$  を端点とする最も短い区分的滑らかな幾何曲線であると分かる。

次に  $z$  と  $z'$  間の双曲距離を定義する。 $d(z, z') = \inf_{c \in S} \text{length}(c)$  で定義された関数  $d: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  は距離関数であるので、以下を定めることができる。

**定義 1.4.** 任意の  $z, z' \in \mathbb{H}$  に対し、 $z, z'$  の双曲距離  $d(z, z')$  は距離関数  $d: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  により、

$$d(z, z') = \inf_{c \in S} \text{length}(c)$$

と定める。

双曲距離の定め方から、 $\forall z, z' \in \mathbb{H}, \forall g \in G$  に対し、

$$d(g(z), g(z')) = d(z, z')$$

が成り立つ。これは任意の  $g \in G$  に対し、 $g$  は等距離写像であるので  $\text{length}(g(c)) = \text{length}(c)$  ( $c: z$  と  $z'$  を結ぶ任意の曲線) が成り立つことから従う。

**例 1.5.**  $z = it, z' = it'$  ( $t, t' > 0$ ) のとき  $d(z, z')$  は以下のように計算できる。(図 1)

$$\begin{aligned} d(z, z') &= d(it, it') \\ &= \inf_{c \in S} \text{length}(c) \\ &= \text{length}(z \text{ と } z' \text{ を結ぶユークリッド線分}) \\ &= |\log t - \log t'| \\ &= \left| \log \frac{t}{t'} \right| \end{aligned}$$

さらに、 $d(it, it') = \left| \log \frac{t}{t'} \right| \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$  又は  $t \rightarrow 0$ ) となる。

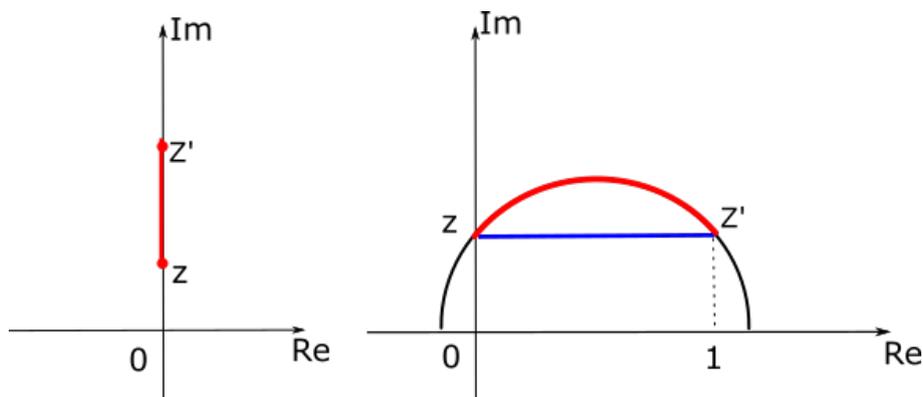


図 1: 双曲距離の例

例 1.6.  $z = it, z' = it + 1$  のとき  $d(z, z')$  は以下のように評価できる. (図 1)

$$\begin{aligned}
 d(z, z') &= d(it, it + 1) \\
 &= \inf_{c \in S} \text{length}(c) \\
 &= \text{length}(z \text{ と } z' \text{ を端点とする円弧}) \\
 &\leq \text{length}(z \text{ と } z' \text{ を端点とする線分}) \\
 &= \frac{1}{t}
 \end{aligned}$$

さらに,  $d(it, it + 1) \leq \frac{1}{t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  となる.

定義 1.7. 集合  $A \subset \mathbb{H}$  の無限遠境界 (boundary at infinity) とは

$$A(\infty) := \bar{A} \cap \mathbb{H}(\infty)$$

で定義される集合  $A(\infty)$  のことである. ただし,  $\bar{A}$  は  $A$  の  $\hat{\mathbb{C}}$  における閉包を表すこととする.

上のように定義すると, 測地線の無限遠境界とはその測地線の端点と呼ばれる 2 つの要素を含む集合である. また, その 2 つの端点が決まると, 測地線は一意に定まると分かる. 具体的には, 2 つの端点が  $\infty, z_0 \in \mathbb{H}(\infty)$  の場合,  $\infty$  を通ることから測地線は半直線だと分かり,  $z_0$  を通り実軸に垂直な半直線は 1 本しか引けない. 同様に, 2 つの端点が  $z_0, z_1 \in \mathbb{H}(\infty)$  の場合,  $z_0, z_1$  を通り実軸と垂直に交わる半円は, その半円の中心も実軸上に存在し, よってユークリッド線分  $z_0 z_1$  は直径となり, 半円は一意に定まることが分かる.

$\forall x^-, x^+ \in \mathbb{H}(\infty), x^- \neq x^+$  をとる. このとき, 端点を  $x^-, x^+$  とし,  $x^-$  から  $x^+$  へ向きづけられた測地線を  $(x^- x^+)$  と表記することにする. また,  $z \in \mathbb{H}$  のとき,  $z$  を始点とし端点  $x^+$  へ向かう測地線を  $[z, x^+)$  と表記することにする. 同様に,  $x^+$  を始点とし端点  $z$  へ向かう測地線を  $(x^+, z]$  と表記することにする (図 2 参照).

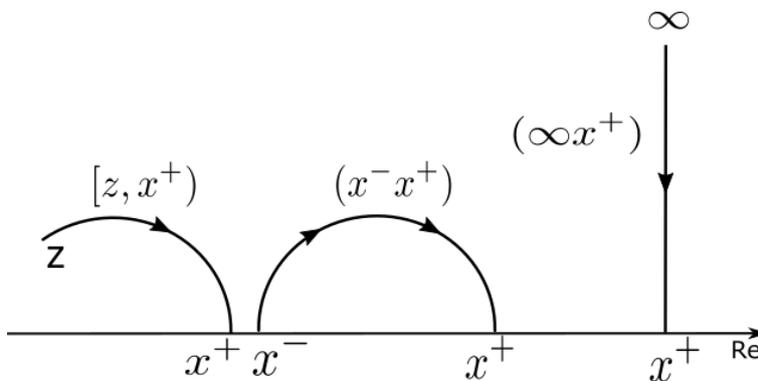


図 2: 測地線の向き

## 1.2 双曲三角形の性質

前節では双曲距離を定義して, ユークリッド距離との違いを確認した. この節では, 双曲平面上の三角形もユークリッド平面における三角形とは異なる性質を持つことを確認していく.

$\mathbb{H}$  上の測地線は  $\mathbb{H}$  を 2 つの連結成分に分割する. これらの成分のことをそれぞれ半平面 (half-plane) と呼ぶ. 双曲面積が 0 でない 3 つの閉半平面の共通部分を双曲三角形 (hyperbolic triangles) と定義する.

命題 1.8.  $T$  を双曲三角形とすると、 $T$  の無限遠境界  $T(\infty)$  は高々3つの点を含む。さらに、 $F(T) := T - \overset{\circ}{T}$  ( $\overset{\circ}{T}$  :  $T$  の内部を表すとする) とするとき、次が成り立つ :

(i)  $T(\infty) = \{x_1, x_2, x_3\}$  のとき

$$F(T) = (x_1x_2) \cup (x_2x_3) \cup (x_3x_1), \quad A(T) = \pi$$

(ii)  $T(\infty) = \{x_1, x_2\}$  のとき

$$\exists z \in \mathbb{H} \text{ s.t. } F(T) = (x_1, z] \cup [z, x_2) \cup (x_2x_1), \quad A(T) = \pi - \alpha$$

(iii)  $T(\infty) = \{x_1\}$  のとき

$$\exists z_1, z_2 \in \mathbb{H} \text{ s.t. } F(T) = (x_1, z_1] \cup [z_1, z_2]_h \cup [z_2, x_1), \quad A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

(iv)  $T(\infty) = \emptyset$  のとき

$$\exists z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H} \text{ s.t. } F(T) = [z_1, z_2]_h \cup [z_2, z_3]_h \cup [z_3, z_1]_h, \quad A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

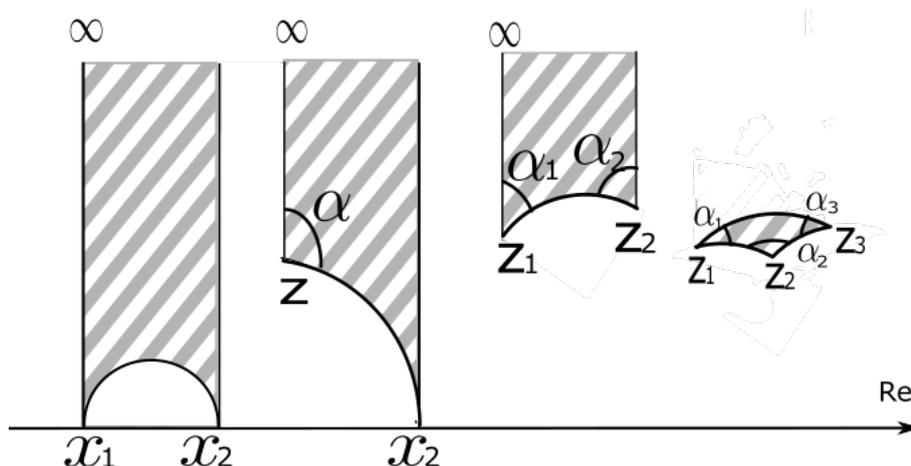


図 3: 双曲三角形の分類

証明 双曲三角形と測地線の定義より、 $T(\infty)$  が高々3点からなるのは明らか。(i)~(iv) の場合についてそれぞれ示す。

(iv)  $T(\infty) = \emptyset$  のとき :

まず、図のように  $\mathbb{H}$  のように各辺々のなす角の大きさ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  となるように  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$  をとると、双曲三角形  $\Delta_{z_1z_2z_3}$  ができ、 $F(\Delta_{z_1z_2z_3}) = [z_1, z_2]_h \cup [z_2, z_3]_h \cup [z_3, z_1]_h$  となる。このとき、

$$A(\Delta_{z_1z_2z_3}) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

であることを示す。まず、 $[z_1, z_3]_h$  の上部にある領域、すなわち  $(\infty z_1], [z_1, z_3]_h, [z_3, \infty)$  に囲まれた領域を  $E_{z_1z_3}$  とし、 $A(E_{z_1z_3})$  を求める。 $G$  の元を用いて拡大縮小、平行移動することにより、 $z_1$  と  $z_3$  は単位円周上にあると考えることができる。これは、 $G$  の元は等角写像かつ面積を保つことから従う。

このように、単位円周上にあるとした  $z_1, z_3$  の極形式をそれぞれ  $e^{i(\pi-\theta_1)}, e^{i\phi_3}$  とする。このとき

$$\begin{aligned}
A(E_{z_1 z_3}) &= \iint_{E_{z_1 z_3}} \frac{1}{y^2} dx dy \\
&= \int_{\cos(\pi-\theta_1)}^{\cos \phi_3} \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx \\
&= \int_{\cos(\pi-\theta_1)}^{\cos \phi_3} \left[ -\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx \\
&= \int_{\cos(\pi-\theta_1)}^{\cos \phi_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{\pi-\theta_1}^{\phi_3} \frac{-\sin t}{\sin t} dt \quad (\text{ただし } x = \cos t \text{ とおいた}) \\
&= -\phi_3 + (\pi - \theta_1)
\end{aligned}$$

また、 $z_1, z_3$  の偏角はそれぞれ  $(\pi - \theta_1), \phi_3$  であり、かつ  $z_1, z_3$  における内角の大きさはそれぞれ  $\theta_1, \phi_3$  であるので、上の計算と同様にして

$$A(E_{z_1 z_2}) = -\phi_2 + \pi - (\theta_1 + \alpha_1)$$

$$A(E_{z_2 z_3}) = -(\phi_3 + \alpha_3) + \pi - \theta_2$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
A(\Delta z_1 z_2 z_3) &= A(E_{z_1 z_2}) + A(E_{z_2 z_3}) + A(E_{z_1 z_3}) \\
&= -\phi_2 + \pi - \theta_1 - \alpha_1 - \phi_3 - \alpha_3 + \pi - \theta_2 + \phi_3 - \pi + \theta_1 \\
&= -\phi_2 + \pi - \alpha_1 - \alpha_3 - \theta_2 \\
&= \pi - (\alpha_1 + \alpha_3 + \theta_2 + \phi_2) \\
&= \pi - (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2)
\end{aligned}$$

よって (iv) の場合は示せた。

(iii)  $T(\infty) = \{x_1\}$  のとき

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  をとり、双曲三角形  $\Delta x_1 z_1 z_2$  の  $z_1, z_2$  における内角の大きさをそれぞれ  $\alpha_1, \alpha_2$  とする。このとき  $x_1 = \infty$  の場合と  $x_1 \in \mathbb{R}$  の場合の2通りが考えられる。

まず  $x_1 = \infty$  のとき、(iv) の証明より

$$A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

が成り立つ。次に、 $x_1 \in \mathbb{R}$  のとき、 $x_1$  における双曲三角形の内角は0であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
A(T) &= \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + 0) \\
&= \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)
\end{aligned}$$

よって (iii) の場合も示せた。

(ii)  $T(\infty) = \{x_1, x_2\}$  のとき

$\forall z \in \mathbb{H}$  をとり、 $z$  における双曲三角形の内角を  $\alpha_1$  とする。 $x_1 = \infty, x_2 \in \mathbb{R}$  のとき、 $x_2$  における双曲三角形の内角の大きさは0であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
A(T) &= \pi - (\alpha_1 + 0) \\
&= \pi - \alpha_1
\end{aligned}$$

同様に、 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  のとき、 $x_1, x_2$  における双曲三角形の内角の大きさは0であることに注意すると、 $A(T) = \pi - (\alpha_1 + 0 + 0) = \pi - \alpha_1$  となる。よって、(ii) の場合も示せた。

(i)  $T(\infty) = \{x_1, x_2, x_3\}$  のとき

まず  $x_1 = \infty, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  の場合を考えると,  $x_2, x_3$  における双曲三角形の内角の大きさは 0 であることに注意すると,  $A(T) = \pi - (0+0) = \pi$  となる. 次に  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  の場合を考えると,  $x_1, x_2, x_3$  における双曲三角形の内角の大きさは 0 であることに注意すると,  $A(T) = \pi - (0+0+0) = \pi$  となる. よって, (i) の場合も示せた.

□

命題 1.8 より, ユークリッド平面では  $\mathbb{R}^2$  上コンパクトな三角形の面積が有限であるのに対し, 双曲平面においては双曲三角形はコンパクトな三角形でなくても面積が有限になることが分かる. 特に,  $\mathbb{H}$  上コンパクトな双曲三角形  $T$  の内角の大きさをそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とすると,  $A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$  となり,  $A(T) > 0$  より

$$0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi$$

と分かる. よって,  $\mathbb{H}$  上コンパクトな双曲三角形の内角の和は 180 度未満であるといえる.

### 1.3 ホロサイクルと Busemann コサイクル

この節では, 次章以降頻繁に出てくるホロサイクルと Busemann コサイクルを定義する.

水平な直線や (接点を除く) 実軸に接する円はホロサイクル (horocycle) と呼ばれ, その無限遠境界は中心 (center) と呼ばれる.  $\{r(t)\}_{t \geq 0}$  を端点を  $x \in \mathbb{H}(\infty)$  とし, 弧長によりパラメーター付けされた測地線とする. このとき, 任意の  $z, z' \in \mathbb{H}$  に対し,

$$f(t) := d(z, r(t)) - d(z', r(t))$$

は  $t \rightarrow \infty$  のとき収束する. この極限は中心を  $x$  とし,  $z, z'$  において計算される **Busemann コサイクル** (Busemann cocycle) と呼び,  $B_x(z, z')$  と記す. こうして定めた Busemann コサイクルは, 測地線の始点  $r(0)$  に依らない. また, 定め方より, 関数  $B_x(z, \cdot)$  は中心を  $x$  とするホロサイクルに沿って一定である. 以後, 任意の  $t > 0$  に対し,  $\{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) = \log t\}$  で定義された  $x$  を中心とするホロサイクルを  $H_t(x)$  と記す. また,  $\{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) \geq \log t\}$  で定義された  $x$  を中心とするホロディスク (horodisk) を  $H_t^+(x)$  と記す.

## 2 等長変換とフックス群

この章では等長変換, 極限集合の分類を定義し, 最終的に  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の極限集合と有理数, 無理数の関係をみることを目標とする.

### 2.1 等長変換の分類

$G$  の部分群として次を定義する.

$$K := \left\{ r(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A := \{h(z) = az \mid a > 0\}$$

$$N := \{t(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}$$

このとき,  $\forall g \in G$  に対し, 「 $g \in A \Leftrightarrow g$  は  $0, \infty$  を固定する」が成立する. また,  $\forall g' \in G, g' \neq id$  に対し, 「 $g' \in N \Leftrightarrow \mathbb{H}$  において  $g'$  は  $\infty$  のみを固定する」が成立する.

**命題 2.1.** 群  $G$  は正の等長変換群である.

**証明**  $\mathbb{H}$  の正の等長変換群は  $\mathbb{H}$  上の正則自己同型変換であり, さらに  $\mathbb{H}$  上の正則自己同型写像はメビウス変換であることから従う.  $\square$

$\mathbb{H}$  における等長変換を分類するために, まずは  $g \in G$  の  $\bar{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  における固定点を調べる.  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in G$  を任意にとる. ただし,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1, g \neq id$  を満たすとする.  $c \neq 0$  のとき,  $\frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$  を変形することにより

$$g(z_0) = z_0 \ (z_0 \in \bar{\mathbb{H}}) \Leftrightarrow z_0 = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

であると分かる. さらに  $c = 0$  のとき,  $g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  となることから,  $g \in A$  又は  $g \in N$  となる. ここで,  $c = 0$  の場合の固定点について考えるために

$$|tr(g)| := |a + d|$$

と定義すると, 以下の性質が成り立つ:

$g \in G \setminus \{id\}$  とするとき,  $|tr(g)|$  は次のように分類できる.

- (i)  $|tr(g)| > 2 \Rightarrow g$  は  $\bar{\mathbb{H}}$  において  $\mathbb{H}(\infty)$  上の 2 点を固定し, また  $A$  の元と  $G$  において共役である.
  - (ii)  $|tr(g)| < 2 \Rightarrow g$  は  $\bar{\mathbb{H}}$  において  $\mathbb{H}$  上の 1 点のみを固定し, また  $K$  の元と  $G$  において共役である.
  - (iii)  $|tr(g)| = 2 \Rightarrow g$  は  $\bar{\mathbb{H}}$  において  $\mathbb{H}(\infty)$  上の 1 点のみを固定し, また  $N$  の元と  $G$  において共役である.
- 上記の性質を用いて,  $g \in G \setminus \{id\}$  を  $|tr(g)|$  により次の 3 つに分類し, それぞれの性質を述べる.

- (i)  $|tr(g)| > 2$  のとき (双曲型等長変換 (hyperbolic isometry) とよぶ):

このような双曲型等長変換  $g$  は  $\mathbb{H}(\infty)$  上の 2 つの固定点を端点とする測地線を保つ. これは, この測地線と実軸がなす角を  $g$  は保ち, さらに  $G$  の元は円円対応であることから従う. この 2 つの固定点を端点とするような測地線を  $g$  の変換軸 (axis of translation), あるいは  $g$  の軸 (axis) と呼ぶ. 各双曲型変換はそれぞれの軸に作用する. この軸上に任意の点  $z \in \mathbb{H}$  をとり, 数列  $\{g^n(z)\}_{n \geq 1}, \{g^{-n}(z)\}_{n \geq 1}$  を考えると,  $\{g^n(z)\}_{n \geq 1}, \{g^{-n}(z)\}_{n \geq 1}$  はそれぞれ  $g$  の固定点に収束する. このとき,  $\{g^n(z)\}_{n \geq 1}$  の極限は吸引的不動点 (attractive fix point) となり,  $\{g^{-n}(z)\}_{n \geq 1}$  の極限は反発的不動点 (repulsive fix point) となる. この吸引的不動点を  $g^+$ , 反発的不動点を  $g^-$  と表記することにする.

- (ii)  $|tr(g)| < 2$  のとき (楕円型等長変換 (elliptic isometry) とよぶ):

このような楕円型変換  $g$  は  $\mathbb{H}$  上の 1 点  $z_0 := \frac{a-d \pm \sqrt{4-(a+d)^2}i}{2c}$  のみを固定するので,  $z_0$  を通る任意の測地線の  $g$  による像は  $z_0$  を通る測地線となる. これは  $g(z_0) = z_0$  かつ  $g$  が円円対応であることから従う. さらに,  $z_0$  を通るようなある測地線  $l$  と  $g$  による像  $g(l)$  のなす角は, 元の測地線  $l$  に依らない. これは  $g$  が等角写像でありかつ等距離写像であることから従う.

- (iii)  $|tr(g)| = 2$  のとき (放物型等長変換 (parabolic isometry) とよぶ):

このような放物型変換  $g$  は  $t(z) = z + b \in N$  と共役であるので, 固定点  $\frac{a-d}{2c} \in \mathbb{R}$  を中心とする各ホロサイクルを  $g$  は保つ. このとき,  $g$  はこの各ホロサイクルに作用する.

$G$  の離散的部分群のことをフックス群 (Fuchsian group) といい,  $\Gamma$  と表記することにする. 次の (i), (ii), (iii) を満たすような  $\mathbb{H}$  の部分集合  $F$  が存在するとき, フックス群  $\Gamma$  は  $\mathbb{H}$  を敷き詰める (tessellate) という.

- (i)  $F$  は  $\mathbb{H}$  の空でない閉連結部分集合である.

- (ii)  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F = \mathbb{H}$

(iii)  $\forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$  に対し,  $\mathring{F} \cap \gamma \mathring{F} = \emptyset$

上の条件を満たす領域  $F$  を  $\Gamma$  の基本領域 (fundamental domain) といい, このような領域を得る方法の一つとして次のものがある. まず  $\Gamma - \{id\}$  の各元の不動点とならないような  $z_0 \in \mathbb{H}$  を選び,  $z_0$  を含む半平面を

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) \leq d(z, \gamma(z_0))\}$$

とおく. ここで  $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$  は双曲線分  $[z_0, \gamma(z_0)]_h$  の垂直二等分線  $M_{z_0}(\gamma)$  により分離される. 上で示したことより,

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \mathbb{H} - \mathring{D}_{z_0}(\gamma)$$

が成り立つ. 線分  $[z_0, \gamma(z_0)]_h$  の垂直二等分線は測地線であるから, 集合  $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$  は凸集合である. よって全ての  $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$  の共通部分もまた凸集合である. この共通部分を

$$D_{z_0}(\Gamma) := \bigcap_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq id} \mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$$

と定義する. この集合  $D_{z_0}(\Gamma)$  を  $z_0$  を中心とする  $\Gamma$  のディリクレ領域 (Dirichlet domain) という. このように定義すると, ディリクレ領域は  $\Gamma$  の凸基本領域であるといえる.

**例 2.2.**  $t(z) = z + 1$  のとき,  $M_i(t) = \{1/2 + iy \mid y > 0, y \in \mathbb{R}\}$  であるから,  $\mathbb{H}_i(t) = \{x + iy \in \mathbb{H} \mid x \leq 1/2, y > 0\}$  となる.

**定義 2.3.** フックス群  $\Gamma$  のディリクレ領域  $D_z(\Gamma)$  の面積が有限であるとき,  $\Gamma$  を格子 (lattice) とよぶ. さらに, このディリクレ領域がコンパクトであるとき, 格子  $\Gamma$  は一様である (uniform) という.

## 2.2 極限集合の分類と諸性質

**定義 2.4.**  $\Gamma$  の極限集合 (limit set)  $L(\Gamma)$  を

$$L(\Gamma) := \overline{\Gamma z} \cap \mathbb{H}(\infty)$$

で定義される  $\mathbb{H}(\infty)$  の閉部分集合と定義する. 尚, この  $L(\Gamma)$  は空集合でもよいとする.

このように定めると, 極限集合  $L(\Gamma)$  は  $z$  の取り方に依らず,  $\Gamma$ -不変量である. また,  $\gamma \in \Gamma$  が楕円型等長変換でないとき,  $L(\Gamma)$  は  $\gamma$  の固定点を含む. これは,  $\gamma$  が双曲型等長変換であるとき,  $\gamma$  は  $\mathbb{H}(\infty)$  上の2点のみを固定し,  $\forall z \in \mathbb{H}$  に対し  $\{\gamma^n(z)\}_{n \geq 1}, \{\gamma^{-n}(z)\}_{n \geq 1}$  は  $\gamma$  の固定点に収束したことから従う. 同様に,  $\gamma$  が放物型等長変換であるとき,  $\gamma$  は  $\mathbb{H}(\infty)$  上の1点のみを固定し,  $\forall z \in \mathbb{H}$  に対し,  $\{\gamma^n(z)\}_{n \geq 1}$  はその固定点に収束したことから従う.

次に,  $L(\Gamma)$  の点を  $z$  の軌道  $\Gamma z$  における数列の近づき方により分類する.

**定義 2.5.** 極限集合  $L(\Gamma)$  を次の3つに分類し, それぞれ定める.

- (i)  $x \in L(\Gamma)$  が球接的極限点 (horocyclic limit point) であるとは,  $\forall z \in \mathbb{H}$  に対し  $\Gamma z$  が  $x$  を中心とするすべてのホロディスクと交わることをいう. このような球接的極限点の集合を  $L_h(\Gamma)$  と表記することにする.
- (ii)  $x \in L(\Gamma)$  が非接的極限点 (conical limit point) であるとは,  $z \in \mathbb{H}$  に対し 「 $\gamma_n(z) \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$  かつ  $d(\gamma_n(z), [z, x]) \leq \epsilon$ 」 を満たすような  $\epsilon > 0, \{\gamma_n\}_{n \geq 0} \subset \Gamma$  が存在することをいう. このような非接的極限点の集合を  $L_c(\Gamma)$  と表記することにする.
- (iii)  $x \in L(\Gamma)$  が放物的極限点 (parabolic limit point) であるとは,  $\gamma(x) = x$  を満たすような放物型変換  $\gamma \neq id, \gamma \in \Gamma$  が存在することをいう. このような放物的極限点の集合を  $L_p(\Gamma)$  と表記することにする.

**定義 2.6.** 非初等的フックス群  $\Gamma$  に関して、次の集合を定める：

$$\tilde{\Omega} := \{z \in \mathbb{H} \mid \exists x, y \in L(\Gamma) \text{ s.t. } z \in (xy)\}$$

このとき双曲線分の意味において、 $\tilde{\Omega}$  の凸包を  $\Gamma$  の **Nielsen 領域** (Nielsen region) といい、 $N(\Gamma)$  と記す。

Nielsen 領域と極限集合を関連付ける命題として次を示す。

**命題 2.7.**  $N(\Gamma) = \mathbb{H} \Leftrightarrow L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$  が成り立つ。

**証明** ( $\Leftarrow$ ) は Nielsen 領域の定義から明らかなので、( $\Rightarrow$ ) について対偶「 $L(\Gamma) \neq \mathbb{H}(\infty) \Rightarrow N(\Gamma) \neq \mathbb{H}$ 」を示す。まず  $L(\Gamma) \neq \mathbb{H}(\infty)$  であるとする。このとき、 $L(\Gamma) \subsetneq \mathbb{H}(\infty)$  なので、 $I \neq \emptyset$ かつ  $I \cap L(\Gamma) = \emptyset$  を満たすような開区間  $I \subset \mathbb{R}$  が取れる。このような開区間を 1 つ取り、 $I = (x_1, x_2)$  (ただし  $x_1 < x_2$  とする) と表せたとする。このとき測地線  $(x_1x_2)$  を境界とする閉半平面に集合  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  は含まれる。これは測地線  $(x_1x_2)$  と一点で接する  $(x_1x_2)$  とは異なる測地線が取れないことから従う。よって、この半平面は凸集合であるので、 $\Gamma$  の Nielsen 領域もこの半平面の部分集合となる。ゆえに  $N(\Gamma) \subsetneq \mathbb{H}$  となり  $N(\Gamma) \neq \mathbb{H}$ 。□

**定義 2.8.** フックス群  $\Gamma$  が初等的であるか、あるいは集合  $N(\Gamma) \cap D_z(\Gamma)$  の面積が有限であるようなディリクレ領域  $D_z(\Gamma)$  が存在するかのどちらかが成り立つとき、 $\Gamma$  は幾何学的有限 (geometrically finite) であるという。また、フックス群  $\Gamma$  が非初等的であるとき、集合  $N(\Gamma) \cap D_z(\Gamma)$  がコンパクトとなるような  $D_z(\Gamma)$  が存在するとき、 $\Gamma$  を凸コンパクト (convex-cocompact) という。

**例 2.9.** 格子は幾何学的有限である。これは格子の定義より  $\text{Area}(D_\Gamma) < \infty$  であるので、 $\text{Area}(N(\Gamma) \cap D_z(\Gamma)) < \infty$  であることから従う。

以下に、極限集合に関する既によく知られている諸定理を述べる。いずれも証明は [4]1.4 章を参照。

**定理 2.10.**  $\Gamma$ : 非初等的フックス群とする。このとき、次の (i),(ii) は同値である。

- (i)  $D_z(\Gamma) \cap N(\Gamma)$  の面積は有限である。
- (ii) ディリクレ領域  $D_z(\Gamma)$  は高々有限個の辺を持つ。

**命題 2.11.**  $\Gamma$  をフックス群、 $z \in \mathbb{H}$  とする。このとき以下が成り立つ：

$$x \in D_z(\Gamma)(\infty) \Leftrightarrow \sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = 0$$

**命題 2.12.**  $\Gamma$ : 格子  $\Rightarrow L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$  が成り立つ。このとき、 $L_p(\Gamma)$  は空集合か、高々有限個の  $\Gamma$ -軌道の和集合である。

**定理 2.13.**  $\Gamma$ : フックス群とする。このとき次の (i),(ii),(iii) は同値である。

- (i)  $\Gamma$  は幾何学的有限である。
- (ii)  $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma)$
- (iii)  $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$

**系 2.14.**  $\Gamma$ : フックス群とするとき次がそれぞれ成り立つ。

- (1)  $\Gamma$ : 凸コンパクト  $\Leftrightarrow L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$
- (2)  $\Gamma$ : 格子  $\Leftrightarrow \mathbb{H}(\infty) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$

## 2.3 $PSL(2, \mathbb{Z})$ の極限集合と有理数の関係

この節では、前節で紹介した諸定理を  $PSL(2, \mathbb{Z})$  に用いることで、有理数との関係をみることを目的とする。まず、 $PSL(2, \mathbb{Z})$  に関するいくつかの事実を確認する。

$$PSL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ h(z) := \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

はフックス群で,  $2i$  を中心とするディリクレ領域  $D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z}))$  は

$$D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z})) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, -1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2\}$$

である. よって定義から  $PSL(2, \mathbb{Z})$  は一様でない格子である. また,

$$\Delta := D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z})) \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\} \cap T_1(D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z}))) \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の基本領域である. ただし,  $T_1(z) := z + 1$  とする.

**定理 2.15.** 次の (i)(ii) がそれぞれ成り立つ.

(i)  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の放物的等長変換は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  において  $T_1$  のべき乗と共役である.

(ii)  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

**証明** (i) を示す.  $\forall p \in PSL(2, \mathbb{Z})$  を放物的等長変換とし, 固定点を  $x_0$  とする. このとき命題 2.11 より

$$\{\gamma(x_0) \mid \gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})\} \cap D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z}))(\infty) \neq \emptyset$$

が成り立つ. いま  $D_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z}))(\infty) = \infty$  であるので,  $\gamma(x_0) = \infty$  を満たすような  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が取れる.  $\infty$  は  $T_1(z) := z + 1$  の固定点で,  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の  $\infty$  の固定化群は  $T_1$  により生成された:

$$\{\gamma' \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma'(\infty) = \infty\} = \langle T_1 \rangle$$

ここで,

$$\gamma p \gamma^{-1}(\infty) = \gamma p(x_0) = \gamma(x_0) = \infty$$

より  $\gamma p \gamma^{-1} \in \{\gamma' \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma'(\infty) = \infty\}$  となり,  $\gamma p \gamma^{-1} = T_1^l$  を満たすような  $l \in \mathbb{Z}$  が取れる.

(ii) を示す.  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を示す. (i) の議論より, 任意の放物的極限点は  $\gamma(\infty)$  ( $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ) の形で表される.  $\gamma(\infty) \neq \infty$  の場合,  $\gamma$  は  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $c \neq 0$  と書いて,  $\gamma(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$  が成り立つ.  $\gamma(\infty) = \infty$  と合わせると,  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  は示せた.  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \supset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を示す. 任意の  $p/q \in \mathbb{Q}$  に対し,  $p$  と  $q$  は互いに素であるとする. また,  $pq' - qp' = 1$  を満たす  $p', q' \in \mathbb{Z}$  をとり,

$$g(z) := \frac{pz + p'}{qz + q'}$$

と定める. このとき  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ,  $g(\infty) = p/q$  が成り立つ. よって

$$gT_1g^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = gT_1(\infty) = g(\infty) = \frac{p}{q}$$

となり,  $p/q \in L_p(PSL(2, \mathbb{Z}))$  である.  $\infty \in L_p(PSL(2, \mathbb{Z}))$  と合わせると  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \supset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  は示せた. □

命題 2.12, 系 2.14 から

$$L(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{H}(\infty)$$

$$L(PSL(2, \mathbb{Z})) = L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \cup L_c(PSL(2, \mathbb{Z}))$$

なので,

$$\mathbb{H}(\infty) = L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) \cup L_c(PSL(2, \mathbb{Z}))$$

が成り立つ.  $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R}$  かつ, 定理 2.15 から  $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  なので,  $L_c(PSL(2, \mathbb{Z}))$  は無理数と一致することが分かる.

### 3 連分数展開と双曲幾何学の関係

前節で

$$L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \quad L_c(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

を示したので、この章では連分数展開と双曲幾何学の関係について [4] を参考に紹介する。

#### 3.1 連分数展開の定義

まず、連分数展開の表し方について定める。

$$\begin{aligned} x &: \text{無理数}, \quad E(x) : x \text{ の整数部分} \\ x_0 &:= x, \quad n_0 := E(x_0) \\ x_i &:= \frac{1}{x_{i-1} - n_{i-1}}, \quad n_i := E(x_i) \quad (\forall i \geq 1) \end{aligned}$$

とする。また、有理数  $[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k]$  を

$$[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}}}$$

と定める。このとき有理数列  $\{[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k]\}_{k \geq 1}$  は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ([n_0; n_1, n_2, \dots, n_k]) = x$$

を満たす。

#### 3.2 連分数展開の幾何学的解釈

この節では Farey 線, Farey グラフを定義し、これらが連分数展開の各項と幾何学的にどう関係するのかについてみていく。

$r = \frac{z-1}{z} \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\Delta := \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |z| \geq 1, |z-1| \geq 1\}$  とすると、 $\Delta$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の基本領域であった。また、 $T : \infty, 1, 0$  を頂点とする双曲三角形とすると、 $T = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta$  であった (図 4)。 $\Delta$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の基本領域なので、

$$\bigcup_{\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})} \gamma T = \mathbb{H}, \quad \gamma \dot{T} \cap \dot{T} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \in \{id, r, r^2\}$$

が成り立つ。このような  $T$  による  $\mathbb{H}$  のファイル張りを **Farey タイル張り** (Farey tiling) という。

$L$  を  $0$  と  $\infty$  を端点とする実軸に垂直な測地線とすると、 $PSL(2, \mathbb{Z})$  による  $L$  の像を **Farey 線** (Farey lines) という。ここで  $T_1(z) := z+1$ ,  $T_{-1}(z) := \frac{z}{z+1}$  とすると、 $T_1((0 \infty)) = (1 \infty)$ ,  $T_{-1}((0 \infty)) = (0 1)$  となる。よって  $T$  と  $\gamma T$  ( $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ) の各辺は Farey 線である。Farey 線により作られる図 5 のようなグラフを **Farey グラフ** (Farey graph) という (図 5)。

Farey 線の重要な性質として以下がある：

$L$  を  $0, \infty$  を結ぶ測地線、 $L^+$  を  $L$  の  $0$  から  $\infty$  へ向きをつけたものとする。このとき、向きづけられた任意の Farey 線  $(x y)$  に対し、 $(x y) = \gamma(L^+)$  を満たすような  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が一意に定まる。

証明  $g(L^+) = (x y)$  を満たすような  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が一意に定まることを示す.  $h \neq g$ ,  $h(L^+) = (x y)$  を満たす  $h \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が存在したと仮定して, 矛盾を導く.  $\gamma := h^{-1}g$  とおくと,  $\gamma \neq id$  かつ

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= h^{-1}g(0) = h^{-1}(x) = 0 \\ \gamma(\infty) &= h^{-1}g(\infty) = h^{-1}(y) = \infty\end{aligned}$$

が成り立つ.  $g, h \in PSL(2, \mathbb{Z})$  より  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  であるが, これは  $PSL(2, \mathbb{Z})$  が  $id$  以外に  $0, \infty$  の両方を保つような変換を持たないことに反する. よって, このような  $h \in PSL(2, \mathbb{Z})$  は存在せず,  $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$  は一意に定まることが示せた.  $\square$

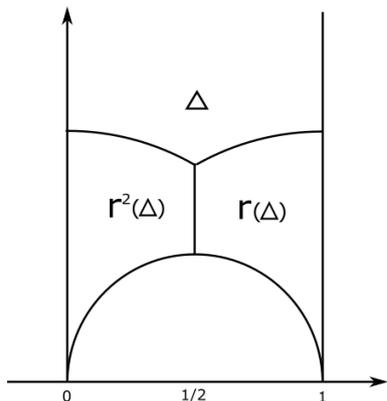


図 4: 領域  $\Delta$

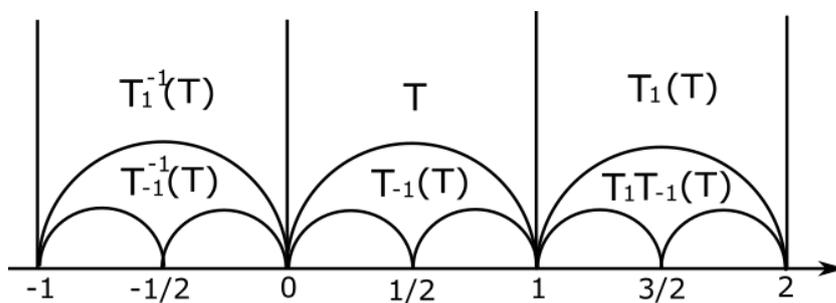


図 5: Farey グラフ

定義 3.1.

$$L_i^+ = \gamma T_\epsilon^i L^+ \quad (1 \leq \forall i \leq n)$$

を満たすような  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\epsilon \in \{\pm 1\}$  が存在するとき, 向きづけられた  $n$  個の Farey 線  $L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+$  の集合を連続である (consecutive) という.

上のように定義するとき, 以下が成り立つ.

$L_i^+ := (x_i y_i)$  とおき,  $L_1^+, L_2^+, \dots, L_n^+$  が連続であるとする. このとき,

$$\begin{aligned}\epsilon = 1 &\Rightarrow y_i = \gamma(\infty) \quad (1 \leq \forall i \leq n) \\ \epsilon = -1 &\Rightarrow x_i = \gamma(0) \quad (1 \leq \forall i \leq n)\end{aligned}$$

これらは,  $T_1(\infty) = \infty$  より  $T_1^i(\infty) = \infty$  が成り立つこと,  $T_{-1}(0) = 0$  より  $T_{-1}^i(0) = 0$  が成り立つことから明らかである. 以下に連続な Farey 線の例を挙げる.

例 3.2. 連続な Farey 線の例として以下の (1), (2), (3) を考える. 以下の計算から,  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  はそれぞれ以下の図 6 のようになる.

(1)  $\epsilon = 1$ ,  $\gamma = id$  の場合 :

$$0 \xrightarrow{T_1} 1 \xrightarrow{T_1} 2 \xrightarrow{T_1} 3, \quad \infty \xrightarrow{T_1} \infty \xrightarrow{T_1} \infty \xrightarrow{T_1} \infty$$

(2)  $\epsilon = -1$ ,  $\gamma = id$  の場合 :

$$0 \xrightarrow{T_{-1}} 0 \xrightarrow{T_{-1}} 0 \xrightarrow{T_{-1}} 0, \quad \infty \xrightarrow{T_{-1}} 1 \xrightarrow{T_{-1}} \frac{1}{2} \xrightarrow{T_{-1}} \frac{1}{3}$$

(3)  $\epsilon = 1, \gamma = T_{-1}$  の場合 :

$$(0 \infty) \xrightarrow{T_1} (1 \infty) \xrightarrow{T_{-1}} (1/2 \ 1)$$

$$(0 \infty) \xrightarrow{T_1} (2 \infty) \xrightarrow{T_{-1}} (2/3 \ 1)$$

$$(0 \infty) \xrightarrow{T_1} (3 \infty) \xrightarrow{T_{-1}} (3/4 \ 1)$$

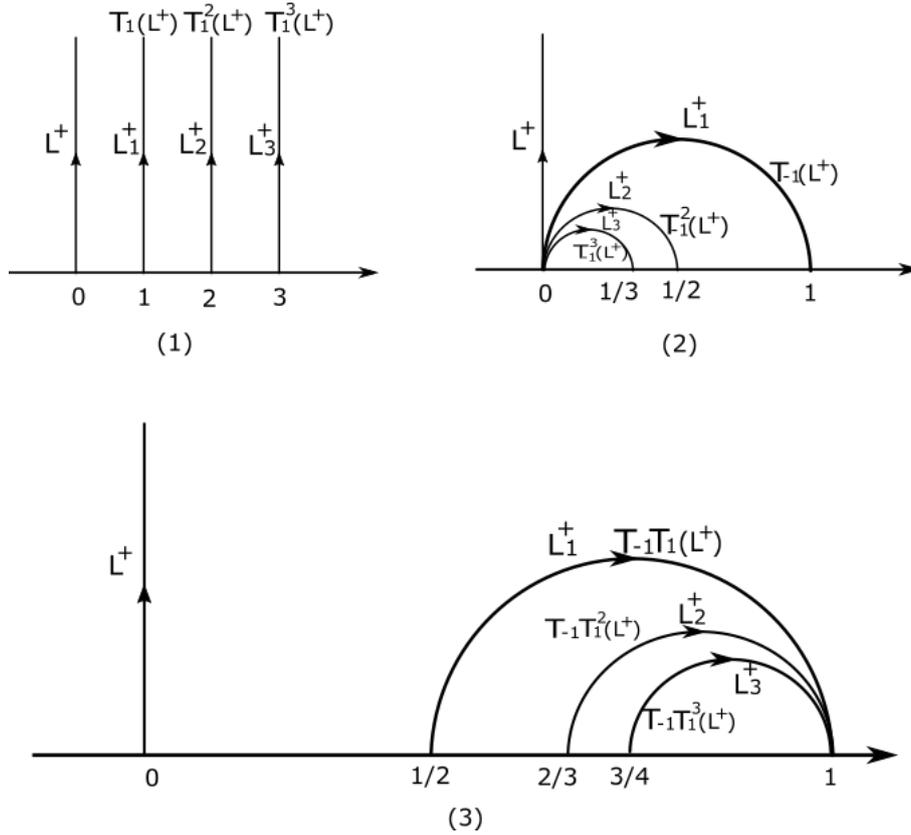


図 6: 連続した Farey 線の例

次に,  $x \in \mathbb{H}(\infty)$  とするとき,  $x$  が有理数か無理数であるかは, 測地線  $[i, x)$  と何本の Farey 線が交わったかにより定まることをみていく.

**命題 3.3.**  $x \in \mathbb{H}(\infty)$  とする. このとき, 以下が成り立つ :

測地線  $[i, x)$  は有限個の Farey 線と交わる  $\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

**証明** ( $\Leftarrow$ ) を示す. まず,  $x \in \mathbb{Q} \cup \infty$  とする.  $x = \infty$  の場合は明らかなので,  $x := p/q \in \mathbb{Q}$  の場合を考える. このとき,  $pq' - p'q = 1$  を満たすような  $p', q' \in \mathbb{Z}$  を 1 つずつ取り,

$$\gamma(z) := \frac{pz + p'}{qz + q'}$$

とおくと,  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  で  $\gamma(\infty) = p/q = x$  となる. すると,  $\gamma^{-1}(x) = \infty$  であるので,  $\gamma^{-1}([i, x))$  は  $\gamma^{-1}(i)$  を通る実軸に垂直な測地線となる. よって, 実軸に沿った平行移動を考えると,

$$T_1^n \gamma^{-1}(z) \in T$$

を満たすような  $n \in \mathbb{Z}, z \in [i, x]$  がそれぞれ取れる. ここで領域  $E$  を  $1/2 + \sqrt{3}i/2, -1/2 + \sqrt{3}i/2, \infty$  を測地線で結ぶことで得られる双曲三角形とすると, 領域  $E$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  のディリクレ領域なので局所有限である. よって,  $\Delta$  も局所有限であるので,  $T_1^n \gamma^{-1}([i, z]_h)$  が交わる  $PSL(2, \mathbb{Z})$  による  $T$  の像は有限個だと分かる.  $[z, x] \subset T$  と合わせると,  $T_1^n \gamma^{-1}([i, x])$  は有限個の Farey 線と交わると分かる. よって,  $[i, x]$  も有限個の Farey 線と交わる.

( $\Rightarrow$ ) を示す.  $[i, x]$  が有限個の Farey 線と交わるとする. このとき,  $[z, x] \subset \gamma(T)$  を満たすような  $z \in [i, x], \gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が取れる. すると,  $[\gamma(z), \gamma(x)] \subset T$  となり,  $\gamma^{-1}(x) \in \{0, 1, \infty\}$  となる. よって  $x \in \{\gamma(0), \gamma(1), \gamma(\infty)\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  である.  $\square$

次は, 特に  $x$  が正の無理数の場合についてみていく.

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  とする. また,  $r: [0, +\infty) \rightarrow [i, x]$  を  $[i, x]$  の弧長パラメーターとする. このとき, 命題 3.3 より,  $[i, x]$  は無限個の Farey 線と交わるので, 測地線  $[i, x]$  に沿って  $\{r(t)\}_{t>0}$  の  $t \in (0, \infty)$  の値を大きくしていくと, Farey 線と無限回交わる. このとき  $t \in (0, \infty)$  を大きくするのに従って交わった順で, Farey 線を  $L_1, L_2, \dots$  と定めることにより, Farey 線の無限列  $\{L_n\}_{n \geq 1}$  を定める. この各  $n$  に対し, Farey 線  $L_n$  に向きを付けたものを  $L_n^+ := (x_n, y_n)$  とする. また,  $[i, x]$  と  $L_n$  の交点を  $r(t_n)$  と表し,  $[r(t_n), x_n]$  から  $[r(t_n), y_n]$  への向きづけられた角度を  $\theta_n$  と表すことにする. このとき,  $\theta_n = \pi$  とすると  $x \in \mathbb{Q}$  となり,  $x$  の取り方に反することに注意すると,  $0 < \theta_n < \pi$  が成り立つ. 以上のように定めると,

- $L_n^+$ : 実軸に垂直な測地線  $\Rightarrow y_n = \infty$
- $L_n^+$ : 実軸に中心を持つような半円の形をした測地線  $\Rightarrow x_n < y_n$

となる. Farey 線の性質より,  $\gamma_n(L^+) = L_n^+$  を満たすような  $\gamma_n \in PSL(2, \mathbb{Z})$  が取れる. このような  $\gamma_n \in PSL(2, \mathbb{Z})$  をとると,  $L_n^+ \cap [i, x] = r(t_n)$  なので,

$$L^+ \cap \gamma_n^{-1}([i, x]) = \gamma_n^{-1}(r(t_n))$$

また  $\theta_n \in (0, \pi)$  より

$$([\gamma_n^{-1}(r(t_n)), \gamma_n^{-1}(x)] \text{ から } [\gamma_n^{-1}(r(t_n)), \infty) \text{ へのなす角}) \in (0, \pi)$$

が成り立つ. よって  $\gamma_n^{-1}([i, x])$  は  $T_{-1}(L^+) = (0, 1)$  か  $T_1(L^+) = (1, \infty)$  のどちらかと交わり,  $T_{-1}(L^+) = (0, 1)$  と交わる場合  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+) = T_{-1}(L^+)$  が成り立ち,  $T_1(L^+) = (1, \infty)$  と交わる場合は  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+) = T_1(L^+)$  が成り立つ. よっていずれの場合も  $\gamma_{n+1} = \gamma T_{\epsilon_n}$  ( $\epsilon_n = \pm 1$ ) が成り立つ. このとき以下のように

$$\begin{aligned} n_0 &:= \max\{n \geq 1 \mid \forall k \in [1, n], \epsilon_k = 1\} \text{ (if } \epsilon_1 = 1) \\ n_0 &:= 0 \text{ (if } \epsilon_1 = -1) \\ n_p &:= \max\{n \geq 1 \mid \forall k \in (\sum_{k=0}^{p-1} n_k, \sum_{k=0}^{p-1} n_k + n], \epsilon_k = (-1)^p\} \text{ (if } p \geq 1) \end{aligned}$$

定める. このように定めると, 任意の  $k \geq 1$  に対し,  $L_{\sum_{i=0}^{k-1} n_i+1}^+, L_{\sum_{i=0}^{k-1} n_i+2}^+, \dots, L_{\sum_{i=0}^{k-1} n_i+n_k}^+$  は連続な Farey 線となることが分かる.

**例 3.4.** 図 7 の場合,  $n_0, n_1, n_2, L_1^+, \dots, L_4^+$  は以下のように定めることができる.

$i$  を通るような測地線と交わる Farey 線を順に  $L_1^+, \dots, L_4^+$  とする. このとき,  $L_1^+$  は実軸上に中心を持つ半円の形をした測地線なので,

$$L_1^+ = T_{-1}(L^+)$$

となり,  $n_0 = 0$ . 次に,  $L_1^+$  から  $L_2^+$  への変換を考えると, 1 を固定しているので,

$$L_2^+ = T_{-1}T_1(L^+)$$

が成り立ち,  $n_1 = 1$ . 同様に  $L_2^+$  から  $L_3^+$  への変換を考えると, 1 を固定しているので,

$$L_3^+ = T_{-1}T_1^2(L^+)$$

が成り立ち,  $L_3^+$  から  $L_4^+$  への変換を考えると,  $2/3$  を固定しているので,

$$L_4^+ = T_{-1}T_1^2T_{-1}(L^+)$$

が成り立つ. よって  $n_2 = 2$ . このように測地線と交わる Farey 線  $L_k^+$  が  $L_{k+1}^+$  に移るときに, 右または左のどちらの点を固定しているかにより,  $L^+$  と  $L_{k+1}^+$  の間の変換が分かる.

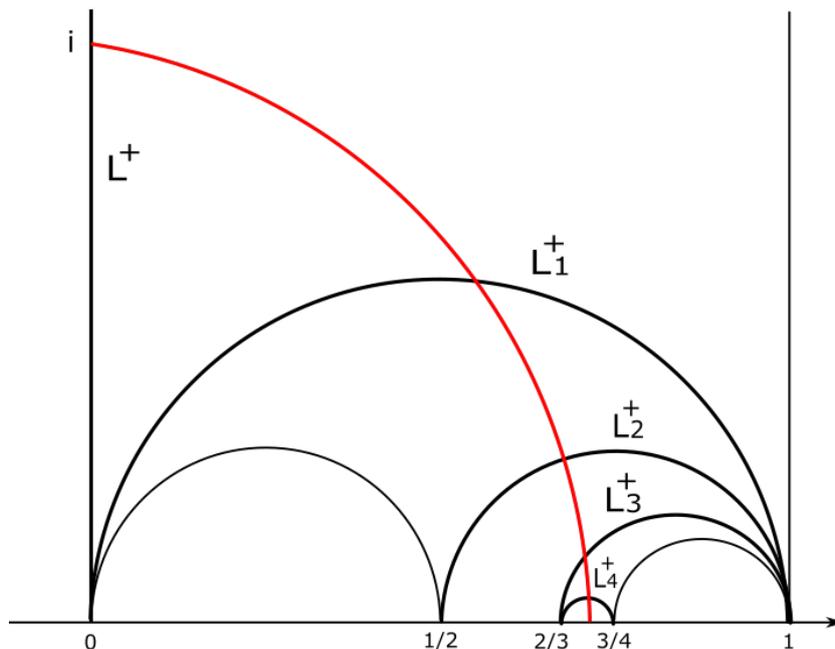


図 7:  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  の例

上の例からも分かるように,  $n_k$  の定め方から, 任意の  $k \geq 1$  に対し,

$$\gamma_{n_k} = T_1^{n_0} T_{-1}^{n_1} T_1^{n_2} \cdots T_{(-1)^k}^{n_k}$$

となる. また, 区間  $[\gamma_{n_k}(0), \gamma_{n_k}(\infty)]$  は  $\mathbb{R}$  上, 階層化している. このことから次の補題が成り立つ.

**補題 3.5.**  $k \geq 2$  とする. このとき以下が成り立つ.

- ・  $k$ : 偶数  $\Rightarrow \gamma_{n_k}(0) = [n_0; n_1, \dots, n_k], \gamma_{n_k}(\infty) = [n_0; n_1, \dots, n_{k-1}]$
- ・  $k$ : 奇数  $\Rightarrow \gamma_{n_k}(0) = [n_0; n_1, \dots, n_{k-1}], \gamma_{n_k}(\infty) = [n_0; n_1, \dots, n_k]$

**証明** まず任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し,

$$T_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{-1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$T_1^n(z) = z + n, T_{-1}^n(z) = \frac{z}{nz + 1} = \frac{1}{n + \frac{1}{z}}.$$

(i)  $k$ : 偶数のとき:

上の計算結果より,

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{T_1^{n_k}} n_k \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-1}}} \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}} \xrightarrow{T_1^{n_{k-2}}} n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}} \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-3}}} \frac{1}{n_{k-3} + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}} \\ \infty &\xrightarrow{T_1^{n_k}} \infty \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-1}}} \frac{1}{n_{k-1}} \xrightarrow{T_1^{n_{k-2}}} n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1}} \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-3}}} \frac{1}{n_{k-3} + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1}}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。これ繰り返すと,  $\gamma_{n_k}(0) = [n_0; n_1, \dots, n_k]$ ,  $\gamma_{n_k}(\infty) = [n_0; n_1, \dots, n_{k-1}]$  が得られる。

(ii)  $k$ : 奇数のとき:

上の計算結果より,

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{T_{-1}^{n_k}} 0 \xrightarrow{T_1^{n_{k-1}}} n_{k-1} \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-2}}} \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1}}} \xrightarrow{T_1^{n_{k-3}}} n_{k-3} + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1}}} \\ \infty &\xrightarrow{T_{-1}^{n_k}} \frac{1}{n_k} \xrightarrow{T_1^{n_{k-1}}} n_{k-1} + \frac{1}{n_k} \xrightarrow{T_{-1}^{n_{k-2}}} \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}} \xrightarrow{T_1^{n_{k-3}}} n_{k-3} + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。これ繰り返すと,  $\gamma_{n_k}(0) = [n_0; n_1, \dots, n_{k-1}]$ ,  $\gamma_{n_k}(\infty) = [n_0; n_1, \dots, n_k]$  が得られる。

□

**命題 3.6.** 有理数列  $\{[n_0; n_1, \dots, n_k]\}_{k \geq 1}$  は  $x$  に収束する。さらに, このような有理数列は一意的に定まる。

**証明** まず収束することを示す。任意の  $k \geq 1$  に対し  $\gamma_{n_k}$  の定め方より,

$$x \in [\gamma_{n_k}(0), \gamma_{n_k}(\infty)] \subset \mathbb{R}$$

が成り立ち, また各  $k \geq 1$  に対し, 区間  $[\gamma_{n_k}(0), \gamma_{n_k}(\infty)]$  は階層化しているので,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma_{n_k}(0) - \gamma_{n_k}(\infty)| = 0$  を示せばよい。ここで簡単のため  $\gamma_{n_k} = g_k$  と表記することにする。  $|g_{k_p}(0) - g_{k_p}(\infty)| > d$  を満たすような  $d > 0$ , 列  $\{g_{k_p}\}_{p \geq 1}$  が存在したと仮定し, 矛盾を導く。補題 3.5 より, 任意の  $k \geq 1$  に対し,

$$g_k(0), g_k(\infty) \in [n_0, n_0 + 1]$$

であるので,  $n_0 + \frac{d}{2}i, n_0 + 1 + \frac{d}{2}i$  を端点とするようなユークリッド線分を  $I$  とすると,  $g_{k_p}(L)$  と  $I$  は交点を持つ。すなわち,  $I \cap g_{k_p} \neq \emptyset$  を満たす  $p \geq 1$  は無数に存在する。また  $L$  は  $T$  の線分の一部であるので, よって  $\gamma(\Delta)$  とコンパクト集合  $I$  が交わるような  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$  は無限個存在する。しかしながら, これは  $\Delta$  が局所有限であることに反する。よって  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma_{n_k}(0) - \gamma_{n_k}(\infty)| = 0$  である。

次に一意性を示す。  $\lim_{k' \rightarrow \infty} [n'_0; n'_1, \dots, n'_k] = x$  ( $n'_0 \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \forall k \geq 1, n_k \in \mathbb{N}$ ) を満たす列  $\{n'_k\}_{k \geq 1}$  が存在するとする。このとき,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T_1^{n'_0} T_{-1}^{n'_1} \cdots T_1^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} T_1^{n_0} T_{-1}^{n_1} \cdots T_1^{n_{2p}}(0)$$

が成り立つ。補題 3.5 より,

$$T_1^{n'_0} T_{-1}^{n'_1} \cdots T_1^{n'_{2p}}(0) \in (n'_0, n'_0 + 1)$$

$$T_1^{n_0} T_{-1}^{n_1} \cdots T_1^{n_{2p}}(0) \in (n_0, n_0 + 1)$$

であるので  $n'_0 = n_0$  である。  $n'_0 = n_0$  より,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T_{-1}^{n'_1} \cdots T_1^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} T_{-1}^{n_1} \cdots T_1^{n_{2p}}(0)$$

が成り立ち、先ほどと同様のことを

$$\left\{ \frac{1}{[0; n'_1, \dots, n'_{2p}]} \right\}_{p \geq 1} = \{[n'_1; n'_2, \dots, n'_{2p}]\}_{p \geq 1}$$

$$\left\{ \frac{1}{[0; n_1, \dots, n_{2p}]} \right\}_{p \geq 1} = \{[n_1; n_2, \dots, n_{2p}]\}_{p \geq 1}$$

に対して行くと、 $n'_1 = n_1$  である。これを繰り返すと  $n_k = n'_k (\forall k \geq 1)$  となり、一意性も示せた。□

このように、正の無理数  $x$  と  $i$  を通る測地線と交わる Farey 線から  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  を構成し、連分数展開との関係のみてきた。最後にこれを負の無理数に拡張して、この章を終える。

$S^+ := \{(n_i)_{i \geq 0} \mid n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \forall i \geq 1, n_i \in \mathbb{N}\}$  とすると、上で構成した  $x$  と  $[n_0; n_1, n_2, \dots]$  の関係は以下の写像として表せる：

$$F: \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+ \rightarrow S^+, x \mapsto (n_i)_{i \geq 0}$$

このとき、上の構成の仕方からも明らかなおおり、 $F$  は全単射である。この写像を負の無理数に拡張する。負の無理数を  $y < 0$  とし、 $y$  の整数部分  $E(y)$  を  $m_0$  と記すこととする。ただし、 $y$  の整数部分というのは、 $y$  以下の最も大きい整数を選ぶこととする。また  $(m_i)_{i \geq 1} := F(y - m_0)$  と定める。このようにして

$$\mathbb{R}^- - \mathbb{Q}^- \rightarrow S^+, y \mapsto (m_i)_{i \geq 0}$$

と拡張でき、負の無理数に対しても上記と同様の性質が成り立つ。

## 4 $c = p^n, c = 2p^n$ の場合の Markoff 予想

「Markoff の三つ組  $(a, b, c)$  (ただし  $a \leq b \leq c$  とする) は、 $c$  により一意に定まる。」という主張を Markoff 予想 (G. Frobenius, 1913) という。この主張の完全な証明はまだ与えられておらず、場合を限定して証明が与えられている。既に証明が与えられている場合の一つに  $c = p^n$  ( $p$ : 素数,  $n$ : 整数) がある。 $c = p^n$  の場合は整数論の観点から証明したものもあるが、本論文では M.L.Lang, S.P.Tan が与えた双曲幾何学と合同式を用いた手法による証明 [1] を取り上げる。Markoff 樹を考えることにより、 $(1, 1, 1)$  から Markoff 方程式の解は生成されることが知られており、これにより生成された Markoff 数と一点穴あきトーラス上の単純閉曲線が対応することを用いて示したものである。M.L.Lang, S.P.Tan が  $c = p^n$  の場合に与えた証明をもとに  $c = 2p^n$  の証明を与えることをこの章の目標とする。

### 4.1 Markoff 数と Markoff 予想

この節では Markoff 数と Markoff 予想の定義をし、その具体例を挙げる。尚、ここでの定義は [1] を参考にした。

**定義 4.1.** Markoff 方程式と呼ばれる  $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$  をみたす正の整数解  $(a, b, c)$  (ただし  $a \leq b \leq c$  とする) を **Markoff の三つ組** (Markoff triples) といい、各  $a, b, c$  をそれぞれ **Markoff 数** (Markoff numbers) という。

**例 4.2.** (Markoff の三つ組)

Markoff の三つ組の例として、図 8 の三つ組が挙げられる。

また以下の各数  $1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, \dots$  は Markoff 数である。

上のように Markoff の三つ組を定義したとき、「Markoff の三つ組  $(a, b, c)$  (ただし  $a \leq b \leq c$  とする) は、 $c$  により一意に定まる」という主張を **Markoff 予想** (G. Frobenius, 1913) という。次の 2 つの場合が成り立つことを [1] の手法を用いてこの章では示していく。

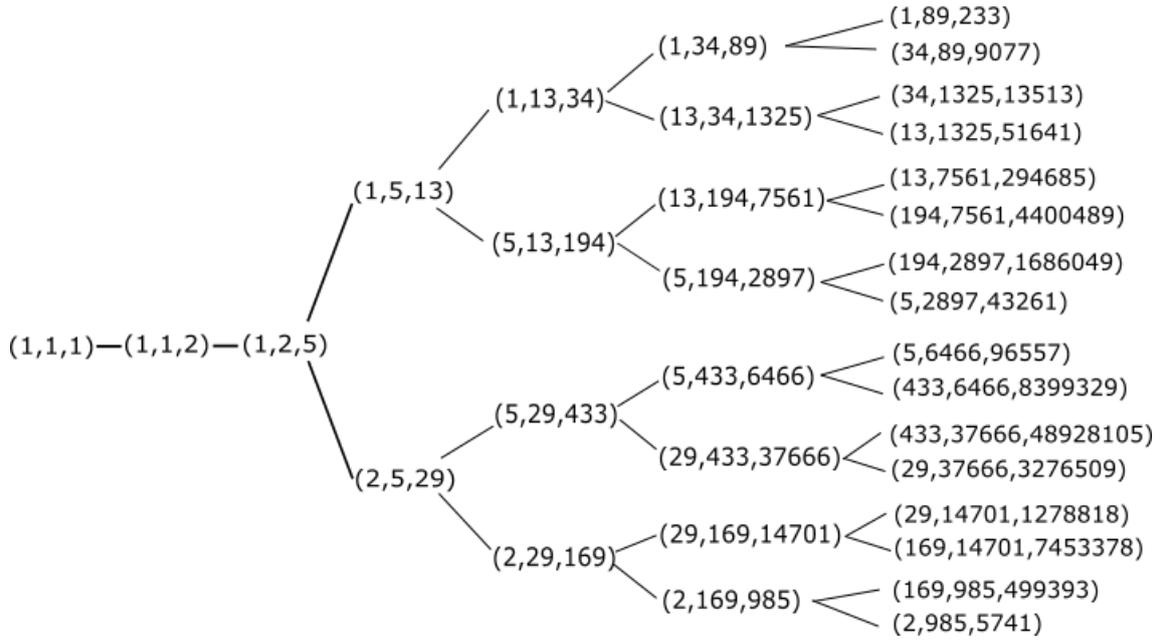


図 8: Markoff の三つ組の例

定理 4.3.  $c = p^n$  ( $p$ : 素数,  $n \in \mathbb{Z}$ ) のとき, Markoff 予想は成り立つ.

定理 4.4.  $c = 2p^n$  ( $p$ : 素数,  $n \in \mathbb{Z}$ ) のとき, Markoff 予想は成り立つ.

## 4.2 定理 4.3 ( $c = p^n$ の場合) の証明の準備

定理 4.5 (H. Cohn [3]).

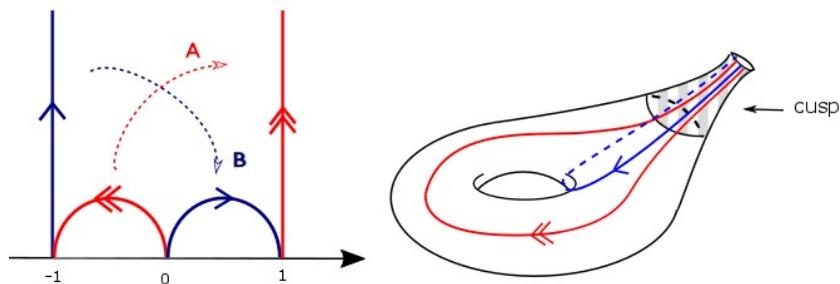
$$(a, b, c) \mapsto (b, c, 3bc - a)$$

$$(a, b, c) \mapsto (a, c, 3ac - b)$$

$$(a, b, c) \mapsto (a, b, 3ab - c)$$

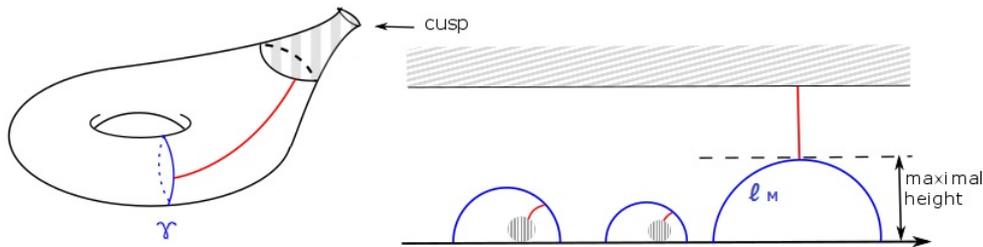
から成る二分木を考えることにより, Markoff の三つ組  $(a, b, c)$  は  $(1, 1, 1)$  から生成される.

$\mathbb{H}^2$  を双曲計量をもつ上半平面,  $\mathbb{T}$  を一点穴あきトーラスとする. また  $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, G := \langle A, B \rangle \triangleleft SL(2, \mathbb{Z}) =: \Gamma$  とする. このとき,  $\mathbb{T} = \mathbb{H}^2/G, G = [\Gamma, \Gamma]$  である.



**定義 4.6.** 行列  $M \in G$  が任意の  $N \in G$  に対し  $M = N^n \Rightarrow n = \pm 1$  をみたすとき, 原始的 (primitive) であるという. さらに, 原始的な行列  $M$  が次の 2つをみたすとき, 行列  $M$  は **Markoff 行列** (Markoff matrix) であるという.

- 一点穴あきトーラス  $\mathbb{T}$  上,  $M$  は単純閉曲線  $\gamma$  と対応する.
- $M$  の軸は  $l_M$  は  $\gamma$  の持ち上げと  $\mathbb{H}^2$  上, 最大の高さで対応する.



上の定義の (ii) は幾何学的には, 被覆空間  $\mathbb{H}^2$  における軸  $l_M$  からカuspへの最短測地線が  $\mathbb{H}^2$  上実軸と垂直な方法にのびる測地線である状況を表している.

上の定義から,  $M$  : Markoff 行列  $\Rightarrow M^{-1}$  : Markoff 行列 が成り立つことが分かる.

$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とすると,

$$[A, B^{-1}] = AB^{-1}A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -T_6$$

が成り立つ. よってカuspは幅 6 である. このことを用いて次の命題を示す.

### 4.3 定理 4.3 ( $c = p^n$ の場合) の証明の概要

まず定理 4.3 を示すために必要な命題, 補題を [1] に基づいて述べる.

**命題 4.7.** 次の (i)(ii)(iii) がそれぞれ成り立つ.

(i)  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : Markoff 行列である  $\Rightarrow |c|$  : Markoff 数かつ  $a + d = 3c$ .

(ii) 逆に, 任意の Markoff 数  $c$  に対し,

$\text{tr} M = 3c$  かつ  $M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}$  をみたす Markoff 行列  $M$  が存在する.

(iii) Markoff 行列  $M, N$  に対し,  $M, N$  は  $\mathbb{T}$  上で同じ単純閉曲線に対応する.

$\Leftrightarrow M^\pm = T^{3n} N T^{-3n}, n \in \mathbb{Z}$ . (ただし,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする.)

**証明** (i)  $M$  を Markoff 行列とする. このとき Markoff 行列の定義の 1つ目の条件より  $M$  は固定点に  $\infty$  を持たないので,  $c \neq 0$  と分かる. 必要ならば  $c > 0$  仮定し,  $M$  の反発的固定点が吸引的固定点の左に位置するようにしておく.

一点穴あきトーラス  $\mathbb{T}$  上に  $M$  に対応する測地線  $\gamma$  を取る. さらに任意のカusp領域を固定し, このカス

プ領域と測地線  $\gamma$  と垂直に交わる最短測地線を 2 本とる.  $\gamma$  に沿って切ると, カスプを境界の一つにもつような三点穴あき球面ができ, この三点穴あき球面の残りの境界を  $\gamma^+, \gamma^-$  とする. このとき, 最初にとつた 2 本の最短測地線に加え, さらに  $\gamma^+$  と  $\gamma^-$  に垂直に交わるような測地線をとる. この 3 本の測地線に沿って三点穴あき球面を切ると, 合同な形をした 2 つの双曲六角形ができ, これは基本領域である. この基本領域の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げをとる. ただし, カスプは  $\infty$  へ,  $\gamma^+$  は  $l_M$  へ移すような持ち上げを考える. すると,  $\gamma^-$  は  $T^3MT^{-3}$  の固定軸  $l_{T^3MT^{-3}}$  に移ることが分かる. さらに, カスプ領域と測地線  $\gamma$  を結ぶ 2 本の最短測地線を持ち上げをとると,  $\infty$  と  $l_M, l_{T^3MT^{-3}}$  をそれぞれ結ぶ実軸に垂直な測地線 (2 本の間は幅 3) になると分かる (図 9 参照). もう一つの基本領域はこの双曲六角形を右に (左に) 3 だけずらしたものとみなすことができる. 向き付きのこの 3 つの境界要素の積は  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  において自明であるので,  $(T^{-6})(T^3MT^{-3})M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} T^3MT^{-3}M &= T^6 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を代入すると

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3(d-a-3c) \\ c & d-3c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

さらに (2,1) 成分を計算すると,  $ac + cd - 3c^2 = 0$  となる. いま  $c \neq 0$  なので,  $a + d - 3c = 0$  となり,  $a + d = 3c$  となることが示せた.

(ii)

$$\begin{aligned} (\mathrm{tr}A)^2 + (\mathrm{tr}B)^2 + (\mathrm{tr}AB)^2 - \mathrm{tr}A \mathrm{tr}B \mathrm{tr}AB &= 2 + \mathrm{tr}[A, B] = 0 \\ \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AB^{-1}) &= \mathrm{tr}A \mathrm{tr}B \end{aligned}$$

が成り立つことから,

$$(a, b, c) \mapsto (b, c, bc - a), (a, b, c) \mapsto (a, c, ac - b), (a, b, c) \mapsto (a, b, ab - c)$$

から成る無限二分木を考えることにより  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線のトレースは (3, 3, 3) から生成される. 行列のトレースは共役不変であるので, 単純閉曲線  $\gamma$  の Markoff 行列のトレースは  $3c$  となる. よって (i) より, Markoff 行列の (2,1) 成分は  $\pm c$  となる.

(iii)  $\infty$  に対応するカスプは幅 6 であるので, (i) のように  $\mathbb{T}$  の基本領域による  $\mathbb{H}^2$  の張り合わせを考えればよい. 各単純閉曲線はカスプからの最短測地線を常に 2 本持ち,  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げをとると, その幅は幅 3 である. (図 9 参照) よって,  $l_N = l_{T^{3n}T^3MT^{-3}T^{3n}}$  が成り立ち,  $M^{\pm 1} = T^{3n}NT^{-3n} (n \in \mathbb{Z})$   $\square$

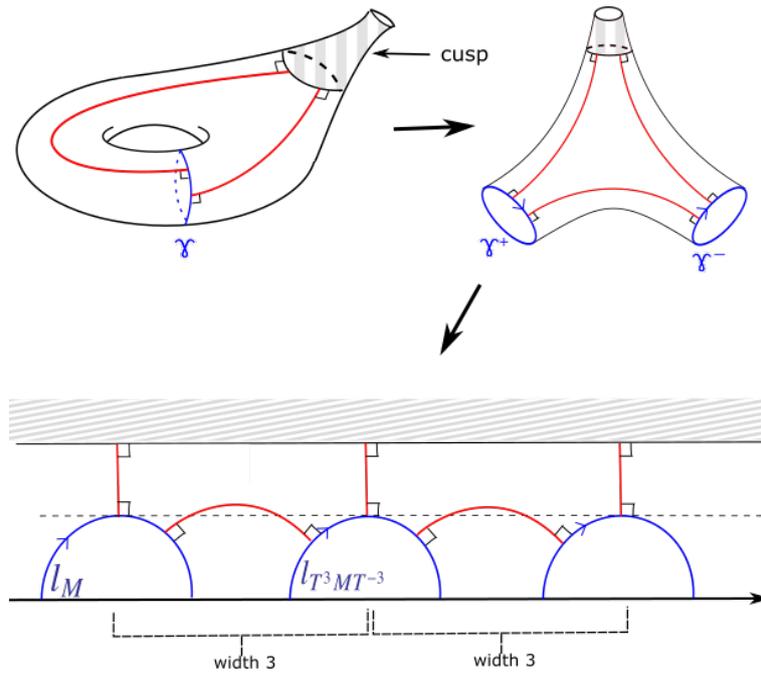
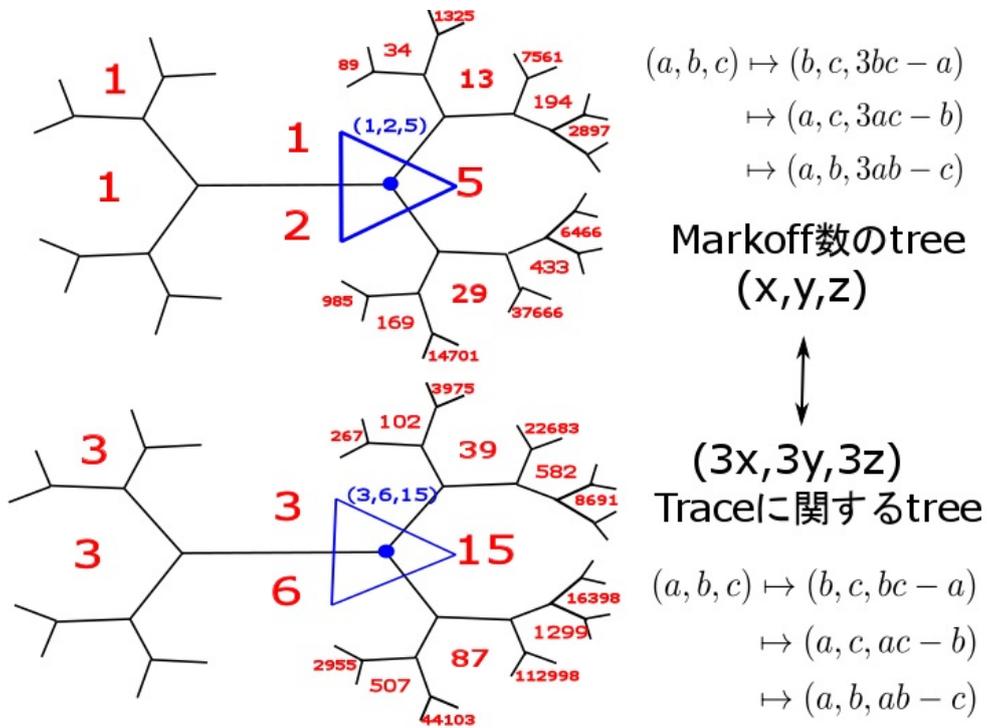


図 9: 命題 4.7(i),(iii) の証明

定理 2.1 と命題 3.1(ii) の証明から、次の対応が成り立つことが分かる。また、次の章でも述べるが、このような二分木を Markoff 樹という。( [5] 参照)



命題 4.8.  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ( $c > 0$ ): Markoff行列とする.

このとき、 $c \neq 4n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) かつ  $c$  の任意の奇数素数因子は  $4m + 1$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) 型である.

証明  $M$  は Markoff 行列であるので  $3c = a + d$ . これを代入すると,  $1 = ad - bc = (3c - d)d - bc = 3cd - d^2 - bc$  より  $d^2 \equiv -1 \pmod{c}$ . よって  $X^2 \equiv -1 \pmod{c}$  が解けるような  $c$  の条件を考えると,  $c$  は  $4m + 1$  型になることが分かる.  $\square$

定義 4.9.  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : Markoff 行列とする.

各  $k \in \mathbb{Z}$  に対し

$$M_k := \begin{pmatrix} 1 & k/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k & b+k(d-a-k)/c \\ c & d-k \end{pmatrix}$$

と定める. このとき,  $d - a - k \in c\mathbb{Z} \Rightarrow M_k \in SL(2, \mathbb{Z})$  である.

命題 4.10.  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : Markoff 行列,  $k \in \mathbb{Z}$  とする. このとき,  $\text{GCD}(c, k, d - a - k) = 1$  又は  $2$  である. 特に,  $M_k \in SL(2, \mathbb{Z})$  ならば,  $k$  か  $d - a - k$  のどちらか一方と互いに素であるような  $c$  の約数  $p^m$  ( $p$ : 奇数素数) が存在する.

証明  $\text{GCD}(c, k, d - a - k) \neq 1$  とする. このとき  $x$  を  $c, k, d - a - k$  の公約数とし,  $x = 2$  であることを示す. 仮定より,  $k \equiv 0 \pmod{x}$ ,  $d - a - k \equiv 0 \pmod{x}$  であるから,  $d - a \equiv 0 \pmod{x}$ .

また,  $M$  は Markoff 行列であることと  $c \equiv 0 \pmod{x}$  より,  $a + d = 3c \equiv 0 \pmod{x}$ . よって  $2a = (a + d) + (a - d) \equiv 0 \pmod{x}$ . 以上より,  $c$  と  $2a$  はともに  $x$  を約数にもつ. 一方,  $ad - bc = 1$  より  $\text{GCD}(a, c) = 1$  であるので  $x = 2$  となる.  $\square$

定義 4.11. Markoff 行列  $M, N$  に対し,

$$M \sim N \Leftrightarrow N^\pm = T^n M T^{-n} \text{ 又は } N^\pm = T^n M' T^{-n}, n \in \mathbb{Z}$$

と定める. (ただし  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. さらに  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  としたとき  $M' = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$  とする.)

補題 4.12.  $M, N$  : Markoff 行列とする. このとき  $\text{tr}M = \text{tr}N = 3p^n$  ( $p$ : 素数)  $\Rightarrow M \sim N$ .

証明  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  とする. このとき  $\text{tr}M = \text{tr}N = 3p^n$  より  $3|c| = a + d = a' + d' = 3|c'|$  であるので, 必要ならば  $M^{-1}, N^{-1}$  を考えることにより  $c = c' > 0$  とする. さらに  $a + d = a' + d'$  より任意の  $k \in \mathbb{Z}$  を用いて  $a' = a + k, d' = d - k$  と表すことにする.

このとき,  $\frac{az+b}{cz+d} = z$  を計算すると,  $M$  の固定点は  $\frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$  と分かり,  $M$  の軸の高さは  $\frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$  となる. 同様に  $N$  の固定点は  $\frac{(a'-d') \pm \sqrt{(a'+d')^2 - 4}}{2c}$ , 軸の高さは  $\frac{\sqrt{(a'+d')^2 - 4}}{2c}$  となる. いま  $a + d = a' + d'$  だったので  $M, N$  の軸の高さは等しく, さらに  $(a' - d') - (a - d) = (a' - a) + (d - d') = 2k$  であるので,  $M$  の軸を  $\frac{k}{c}$  だけ平行移動すると  $N$  の軸と重なることが分かる. よって  $M, N$  は  $\infty$  を固定する放物的等長変換によって共役で

$$N = M_k = T_{k/c} M T_{-k/c} = \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix}$$

が成立.  $N \in SL(2, \mathbb{Z})$  より, (1, 2) 成分に注目すると

$$\begin{aligned} k(d - a - k) &= c \times (\text{Const.}) \\ &= p^n \times (\text{Const.}) \end{aligned}$$

となることが分かる. ここで命題 4.8 より  $c \neq 4n (n \in \mathbb{N})$  かつ  $c$  の任意の奇数素数因子は  $4m+1$  型 ( $m \in \mathbb{Z}$ ) なので  $p$  は奇数素数となる. また命題 4.10 より,  $c = p^n$  は  $k$  または  $d - a - k$  を割り切る.

- $k = cn', n' \in \mathbb{Z}$  のとき :

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+cn' & b + n'(d-a-k) \\ c & d-cn' \end{pmatrix} \\ &= T^{n'} M T^{-n'} \end{aligned}$$

よって  $M \sim N$  となる.

- $d - a - k = cn', n' \in \mathbb{Z}$  のとき :

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(d-a-cn') & b + \frac{kc n'}{c} \\ c & d-(d-a-cn') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d+(-cn') & b + \frac{(-cn')(a-d+cn')}{c} \\ c & a-(-cn') \end{pmatrix} \\ &= T^{-n'} M' T^{n'} \end{aligned}$$

よって, この場合も  $M \sim N$  となる.

□

#### 4.4 定理 4.3 ( $c = p^n$ ) と定理 4.4 ( $c = 2p^n$ ) の証明

まず定理 4.3 ( $c = p^n$  の場合) を示す.

**証明** Markoff の三つ組  $(a, b, c), (a', b', c')$  ( $a \leq b \leq c, a' \leq b' \leq c'$  とする) に対し,  $c = c' = p^n$  のときに  $a = a', b = b'$  が成り立つことを示す.

命題 4.7 より各 Markoff の三つ組に対応するトレースに関する三つ組  $(3a, 3b, 3c), (3a', 3b', 3c')$  が取れる. ここでトレースの値  $3c, 3c'$  に対応する Markoff 行列を  $M, M'$  とすると, いま  $3c = 3c' = 3p^n (tr M = 3c, tr M' = 3c')$  であるので, 補題 4.12 より  $M \sim M'$  となる. トレーズに関する Markoff 樹を考えると,  $3c (= 3c')$  の周りの頂点のうち各三つ組の 3 つの数の中で最も  $3c (= 3c')$  が大きくなるような頂点は一意に定まる. よって  $3a = 3a', 3b = 3b'$  となり,  $a = a', b = b'$  となることが示せた. □

定理 4.3 は  $c = p^n$  の場合に関する主張であった. 参考文献 [1] で  $c = 2p^n$  の場合も同様にして示せると述べられているので, 以下では定理 4.3 ( $c = p^n$  の場合) の証明を参考に定理 4.4 ( $c = 2p^n$  の場合) を示していく.

**証明**  $c = p^n$  の場合を示すために用いた命題 4.7, 4.8, 4.10 は  $c = p^n$  であることを使っていないので,  $c = 2p^n$  の場合にも成り立つことに注意すると, 以下の補題 4.13 を示せばよいと分かる.

**補題 4.13.**  $M, N$  : Markoff 行列とする. このとき  $tr M = tr N = 3 \cdot 2p^n (p : \text{素数}) \Rightarrow M \sim N$ .

証明  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  とすると, 補題 4.12 と同様にして  $M, N$  の軸の高さは等しく, さらに  $M$  の軸を  $\frac{k}{c}$  だけ平行移動すると  $N$  の軸と重なることが分かる. よって  $M, N$  は  $\infty$  を固定する放物的等長変換によって共役で

$$N = M_k = T_{k/c} M T_{-k/c} = \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix}$$

が成立.  $N \in SL(2, \mathbb{Z})$  より,  $(1, 2)$  成分に注目すると

$$\begin{aligned} k(d-a-k) &= c \times (\text{Const.}) \\ &= 2p^n \times (\text{Const.}) \end{aligned}$$

ここで, 行列  $M$  は Markoff 行列なので

$$\begin{aligned} d-a-k &= (d+a) - 2a - k \\ &= 3c - 2a - k \\ &= 2 \cdot 3p^n - 2a - k \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$d-a-k : \text{偶数} \Leftrightarrow k : \text{偶数}$$

と分かる. さらに命題 4.10 より  $\text{GCD}(c, k, d-a-k) = 1$  又は  $2$  であるから,

- $d-a-k \in 2\mathbb{Z}, k \in 2p^n\mathbb{Z}$  (i.e.  $d-a-k \in 2\mathbb{Z}, k \in c\mathbb{Z}$ )
- $d-a-k \in 2p^n\mathbb{Z}, k \in 2\mathbb{Z}$  (i.e.  $d-a-k \in c\mathbb{Z}, k \in 2\mathbb{Z}$ )

の 2 つの場合を考えればよいと分かる. いずれの場合も以下のように, 補題 4.12 の場合分け後の計算と全く同様にして  $M \sim N$  であると分かる.

- $d-a-k \in 2\mathbb{Z}, k \in 2p^n\mathbb{Z}$  (i.e.  $k = cn', n' \in \mathbb{Z}$ ) のとき :

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+cn' & b + n'(d-a-k) \\ c & d-cn' \end{pmatrix} \\ &= T^{n'} M T^{-n'} \end{aligned}$$

よって  $M \sim N$  となる.

- $d-a-k \in 2p^n\mathbb{Z}, k \in 2\mathbb{Z}$  (i.e.  $d-a-k = cn', n' \in \mathbb{Z}$ ) のとき :

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} a+k & b + \frac{k(d-a-k)}{c} \\ c & d-k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(d-a-cn') & b + \frac{kc n'}{c} \\ c & d-(d-a-cn') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d+(-cn') & b + \frac{(-cn')(a-d+cn')}{c} \\ c & a-(-cn') \end{pmatrix} \\ &= T^{-n'} M' T^{n'} \end{aligned}$$

よって、この場合も  $M \sim N$  となる。 □

補題 4.13 が示せたので、定理 4.3 と全く同様にして定理 4.4 は示せる。 □

## 5 Markoff 樹

前章では Markoff 数に関する Markoff 樹とそのトレースに対応する Markoff 樹との関係を用いて  $c = p^n, 2p^n$  の場合に関する Markoff 予想を示した。本章では、その Markoff 樹の基本的性質について [5] を参考に述べる。Markoff 樹の枝が全て 1 つの頂点に向かう向きであるような頂点は一点しかないことを示すことを目標とする。

### 5.1 Markoff 樹に関する言葉の定義

各頂点から 3 本の辺が出ている単純な木のことを二分木 (binary tree) といい、 $\Sigma$  で記すことにする。また  $\Sigma$  の頂点集合、辺集合をそれぞれ  $V(\Sigma), E(\Sigma)$  と記すことにする。さらに、 $\Sigma$  の補集合の連結成分の閉包を補領域 (complementary region) といい、 $\Omega$  で記すことにする。一点穴あきトーラス  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線のアイソトピー類の集合を  $\mathcal{C}$  とする。このとき、理想三角形による双曲平面への張り合わせに対する双対をとると  $\Sigma$  になる。このようにして、 $\Omega$  の元は無遠上への円の有理点と全単射に対応する。よって  $\Omega$  と  $\mathcal{C}$  の間に自然な全単射が存在する。 $\Gamma := \pi_1(\mathbb{T})$  の自由基底  $\{a, b\}$  を選ぶと、 $X, Y, Z, W \in \Omega$  に対応する単純閉曲線は  $a, b, ab, ab^{-1} \in \mathcal{C}$  で表される。

写像  $\rho: \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$  を  $\rho[a_0, b_0]$  を放物型等長変換に対応させる離散的忠実な表現であるとする。また、写像  $\phi$  を  $\phi: \Omega \rightarrow (0, \infty), X \mapsto |tr(\rho(g))|$  (ただし  $g: X$  に対応する単純閉曲線とする) とし、**Markoff 写像** (Markoff map) と呼ぶ。いま  $\rho(g)$  は双曲型等長変換なので  $\phi(X) = |tr(\rho(g))| > 2$  となる。

次に辺と頂点に関する関係式を定義する。 $v \in V(\Sigma)$  に対し、 $\{v\} = X \cap Y \cap Z$  ならば

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad (\text{ただし } x := \phi(X), y := \phi(Y), z := \phi(Z) \text{ とする。})$$

が成り立つ。この式  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$  を頂点に関する関係式 (vertex relation) という。三つ組  $(x, y, z)$  が頂点に関する関係式を満たすとき、この三つ組  $(x, y, z)$  を **Markoff の三つ組** (Markoff triple) という。尚、前章では Markoff 方程式  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$  を満たす三つ組  $(x, y, z)$  を Markoff の三つ組といったが、この章ではトレースに関する Markoff 方程式を考えているので  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$  を満たす三つ組  $(x, y, z)$  を Markoff の三つ組と言っても差し支えない。 $e \in E(\Sigma)$  に対し、 $X, Y, Z, W \in \Omega$  が  $e$  を共有するとき、

$$xy = z + w \quad (\text{ただし } x := \phi(X), y := \phi(Y), z := \phi(Z) \text{ とする。})$$

が成り立つ。この式  $xy = z + w$  を辺に関する関係式 (edge relation) という (図 10 参照)。



図 10: 頂点、辺に関する関係式

$e \in E(\Sigma)$  に向きを定義する. 図のように  $X, Y, Z, W \in \Omega$ ,  $e \in E(\Sigma)$  を定めたとき,  $z > w$  ならば  $Z$  から  $W$  の方向に正の向きを定めることとする. このとき  $e$  と記す (図 11 参照).

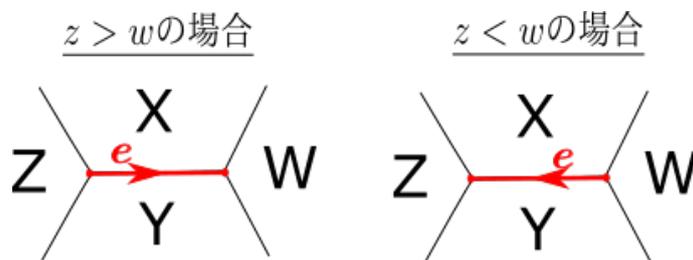


図 11: 辺の向き

## 5.2 Markoff 樹の基本的性質

**補題 5.1.**  $\Sigma$  の任意の頂点  $a$  に対し,  $a$  を離れる辺は高々1本である.

**証明**  $X, Y, Z \in \Omega, a \in V(\Sigma), \{a\} = X \cap Y \cap Z$  であるとする. このとき,  $X$  と  $Z$  の共通部分の辺,  $Y$  と  $Z$  の共通部分の辺の向きを頂点  $a$  から伸びる方向に仮定し, 矛盾を導く. 仮定より,  $X$  と  $Z$  の共通部分の辺の向きに注目すると,  $xz \leq 2y$  が成り立つ, 同様に,  $Y$  と  $Z$  の共通部分の辺の向きに注目すると,  $yz \leq 2x$  が成り立つ, よって,  $z^2 \leq \frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y} = 4$  となる. しかしこれは,  $\phi: \Omega \rightarrow (0, \infty)$  が Markoff 写像であること  $z > 2$  に反する. よって  $a$  を離れる辺は高々1本である. □

**補題 5.2.** 任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対し,  $e_i$  を  $e_{i-1}$  から  $e_{i+1}$  の方向に向きを定義したとき, 異なる辺から成る無限列  $e_1, e_2, e_3, \dots$  は  $\Sigma$  上存在しない.

**証明** 2つの段階に分けて考える.

- Case 1: ある領域  $X \in \Omega$  の周りに巻き付いた辺のみ考えるとき  $X, Y, Z, W \in \Omega$  を  $X, Y, Z$  が隣接するように,  $X, Y, W$  が隣接するようにとる. また,  $X$  と  $Y$  の共通部分となっている辺を  $e$  とする. このとき,  $|z| \leq |w|$  ならば  $e$  の向きは  $W$  から  $Z$  へ向かう方向に定まり,

$$|z| \leq |w| \Leftrightarrow 2|z| \leq |xy| \leq 2|w|$$

が成り立った. これを用いると,

$$|x \cdot y_{n+1}| \leq 2|y_n| \Leftrightarrow |x| \leq 2 \cdot \left| \frac{y_n}{y_{n+1}} \right|$$

が成立. ここで  $|y_n| \leq |y_{n+1}|$  と仮定すると,  $\left| \frac{y_n}{y_{n+1}} \right| \leq 1$  が成り立つので, 上の式より

$$|x| \leq 2 \cdot \left| \frac{y_n}{y_{n+1}} \right| \leq 2$$

となり, これは  $2 \leq |x|$  に反する. よって任意の  $n$  に対し,  $|y_n| \geq |y_{n+1}|$  が成り立つ. ゆえに,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $X$  の周りに巻き付いている場合,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は単調減少列かつ  $2 \leq |y_n|$  より, 無限列  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は取れない.

- Case2 : 一般の辺を考えると

補題 5.3. ([7], Lemma 3.3)

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  を無限列とする. ただし  $e_{n+1}$  の向きは  $e_{n+2}$  から  $e_n$  の方向に向かうように定義する. さらに,  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  からなる折れ線を  $\beta$  とする.

このとき,  $|\phi(X)| \leq 2$  かつ  $X \cap \beta \neq \emptyset$  を満たす  $X$  が少なくとも 1 つ取れる.

証明  $\beta$  と少なくとも 1 辺は共有する領域を  $X_i^j (j \in \{1, 2, 3\}, i \in \mathbb{N})$  とする. ただし添え字  $j$  の定め方は,  $\Sigma$  上の領域を隣接するものは異なる色で塗り分けたとき同じ色の領域を同じ番号とするように定める. (実際, このように隣接する領域の色を異なるように塗り分けたとき, 少なくとも 3 色あれば塗り分けることができる.) また, 添え字  $i$  の定め方は, 各  $j$  に対して  $\beta$  の向きに沿って  $1, 2, 3, \dots$  と定める. このとき, 任意の  $i \in \mathbb{N}$ , 任意の  $j \in \{1, 2, 3\}$  に対し,  $|x_i^j| \geq 2$  であると仮定し, 矛盾を導く. ここで, 簡単のため記号を定義する.  $X, Y, Z, W \in \Omega$  に対し,  $X, Y, Z$  が隣接するように,  $X, Y, W$  が隣接するようにとる. また,  $X$  と  $Y$  の共通部分となっている辺を  $e_n$  とする. ただし, いまは  $Z$  から  $W$  の方向に向きを定義するものとする. このとき,  $e_n, X, Y, Z, W$  の位置関係を  $e_n \leftrightarrow (X, Y; Z, W)$  という記号で表すこととする.

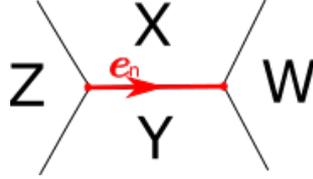


図 12:  $e_n, X, Y, Z, W$  の位置関係を表す記号

$e_n \leftrightarrow (X, Y; Z, W)$  とすると, 一般性を失わず  $X \cap Z \subseteq \beta$  とできる. このとき,

- $|z| \leq |w| \leq |z| + \eta$  ( $\eta$ : 十分小とする) より,  $|xy| \leq |z + w| \leq |z| + |w| \leq 2|z| + \eta$
- $|xz| \leq 2|y|$

が成り立つので,

$$4 \leq |x|^2 \leq \frac{2|y|}{|z|} \cdot \frac{2|z| + \eta}{|y|} = 4 + \frac{2\eta}{|z|} \leq 4 + \eta$$

よって,  $|x| \simeq 2 (n \rightarrow \infty)$  とできる. 先程と同様にして,

- $|x| \leq |x'| \leq |x| + \eta$  ( $\eta$ : 十分小とする) より,  $|y'w| \leq |x + x'| \leq |x| + |x'| \leq 2|x| + \eta$
- $|xw| \leq 2|y'|$

が成り立つので,  $4 \leq |w| \leq 4 + \eta$  となり, ゆえに  $|w| \simeq 2$ .  $2 \leq |z| \leq |w|$  より  $|z| \simeq 2$ . さらに,  $4 \leq |xy| \leq |z| + |w| \simeq 4$  より  $|y| \simeq 2$ .  $X, Y, Z$  はすべて異なる色の領域であるので, 以後任意の  $x_i^j$  に対し,  $|x_i^j| \simeq 2$  の場合を考える. 辺の関係式より,

- $\frac{z}{xy} + \frac{w}{xy} = 1$  から  $\frac{z}{xy} \simeq \frac{1}{2}$
- $\frac{y}{xz} + \frac{y'}{xz} = 1$  から  $\frac{y}{xz} \simeq \frac{1}{2}$

が成り立つので,  $\frac{1}{x^2} \simeq \frac{1}{4}$  となり, ゆえに  $x \simeq \pm 2$ . よって十分大きな  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $X$  は  $e_n, e_{n+1}$  を境界にもつ. よって,  $x \simeq \pm 2, y \simeq \pm 2$ . さらに  $|z| \simeq |w| \simeq 2$  より,  $z \simeq w \simeq \pm 2$ . これは頂点に関する関係式  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$  に反する. よって, 矛盾が導けたので, 背理法により示せた.  $\square$

$\square$

定理 5.4.  $\forall e \in \mathbb{E}(\Sigma)$  が頂点  $a$  に向かう向きであるような頂点  $a \in V(\Sigma)$  はただ一点だけ存在する.

証明 補題 5.1, 5.2 よりある頂点  $a$  に対し, 3 本とも枝が離れていく向き, 2 本の枝が離れていく向きであることはあり得ないので, 3 本とも  $a$  に向かうような枝を持つ頂点  $a \in V(\Sigma)$  が取れる. このような頂点が 2 点  $a_1, a_2 \in V(\Sigma)$  とれたとすると,  $a_1, a_2$  を結ぶ辺  $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{E}(\Sigma)$  が取れる. この辺を結んでできる折れ線は単純なので, 向きを付けると必ずどこか途中で向きが変わらなければならない. しかしながら, これは一つの頂点から離れる向きの枝が 2 本以上存在する頂点がないことに反する. よって, このような頂点は一意的に定まる.  $\square$

前章で考えたトレースに関する Markoff 樹の場合, このすべての辺が向かうような向きである頂点は  $(3, 3, 3)$  である. この定理により, 一点穴あきトーラス上の単純閉曲線に対応する Markoff 行列のトレースを与えたとき, そのトレースの値を三つ組にもつような頂点と  $(3, 3, 3)$  を結ぶ Markoff 樹上の最短な道は一意に定まる.

## 6 W-構成, V-構成

この章では有理数に対応する切断列と  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線との関係や, 連分数展開との関係を見る. 特に, どの有理数に対応する切断列であるかや, 単純閉曲線に対応しているか調べる方法を具体例を用いて説明する. そのあと, Farey グラフを用いることにより, 有理数に対応する切断列を帰納的に作る方法を紹介する. その中でも, 特に広く知られている, W-構成と V-構成についてみていく. W-構成と V-構成の関係を見た後, それぞれの具体的な計算方法, W-構成と V-構成により得られる諸定理を紹介することをこの章の目標とする. 尚, これらは [2],[6] を参考にした.

### 6.1 切断列と一点穴あきトーラス上の単純閉曲線の関係

$\mathbb{C}$  上の任意の点  $m + ni$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) の格子を  $\mathcal{L}$  とする. また,  $a: z \mapsto z + 1, b: z \mapsto z + i$  により生成される群を  $\mathcal{T}$  とする. このとき,  $a, b$  による張り合わせを考えると,  $\mathbb{C}/\mathcal{T}$  はトーラスと同相であると分かる. また,  $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{L})/\mathcal{T}$  は一点穴あきトーラスと同相であると分かる. 以後, 一点穴あきトーラスを  $\mathbb{T}$  と表記することにする. この関係を用いて,  $\mathbb{C}$  上の有理数に対応するスロープと  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線との関係を本節で紹介する. まず C.Series [6] を参考に, 切断列の定義を述べ, そのあと連分数展開との関係について例を用いながら紹介する.

トーラスに対応する基本領域として, 4 点  $\{0, 1, 1 + i, i\}$  から成る領域  $D$  を選ぶ. このとき, 垂直方向の左の辺ラベルを  $A$ , 右の辺のラベルを  $\bar{A}$ , 水平方向の下の辺のラベルを  $B$ , 上の辺のラベルを  $\bar{B}$  とする. この領域  $D$  と同様にラベル付けしたものを平面  $\mathbb{C}$  に敷き詰める. 尚, このように張り合わせてできた格子に注目すると,  $A$  と  $\bar{A}$  は同じ辺を介して隣り合っており, 同様に  $B$  と  $\bar{B}$  も同じ辺を介して隣り合っている. このとき, この格子上に向き付きの任意のスロープ  $L$  をとり,  $L$  と格子が交わるときのラベルを並べる. 先に述べたように, 同じ辺を介してラベルが隣り合っているため, スロープの向きに沿って領域  $D$  を通過したときに, 最初に領域  $D$  内で通過するラベルを並べることにする. (この各領域におけるスロープの一部をストランドと呼ぶ.) ただし,  $L$  が頂点で交わった場合, 交わらないように直線全体を平行移動するか, 交わった点を  $AB, BA$  のどちらかのラベルを付ける. また, 途中で再び元のラベルを繰り返す場合, 繰り返す手前で止める. こうしてできた文字列を  $L$  の切断列 (cutting sequence) と呼ぶ.

再び元のラベルを繰り返すようなスロープ  $L$  の切断列を考えたとき,  $\lambda := (\text{スロープ } L \text{ の傾き})$  とすると,  $\lambda = \frac{(A \text{ の個数})}{(B \text{ の個数})}$  が成り立つ. このとき  $\lambda > 1$  ならば, 次の 2 つが成り立つことが簡単な考察から分かる.

- $A$  が孤立に表れた場合,  $A$  と  $A$  の間には  $B$  が少なくとも 1 つは存在する.



証明 まず最初に,  $B' = A^2B$  とおくと,  $AB'^4AB'^4AB'^5AB'^4AB'^4AB'^5$  となる. 次に,  $A' = AB'^4$  とおくと,  $A'^4B'A'^3B'$  となる. 最後に,  $B'' = A'^3B'$  とすると,  $A'B''B''$  となり, 以上より最初の語は特性的語で  $[0, 2, 4, 3, 2] = \frac{30}{67}$  に対応する.  $\square$

先ほど定義したストランドを分類し,  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線との関係についてみていく. まず, 領域  $D$  の横断の仕方ですトランドを以下の 3 つに分類する:

- 垂直的ストランド (vertical strand):  
ストランドが  $B$  と  $\bar{B}$  を結ぶとき. (向きは  $B$  から  $\bar{B}$  に向かう向きでも, その反対の向きでもよい.)
- 水平的ストランド (horizontal strand):  
ストランドが  $A$  と  $\bar{A}$  を結ぶとき. (向きは  $A$  から  $\bar{A}$  に向かう向きでも, その反対の向きでもよい.)
- コーナーストランド (corner strand):  
ストランドが  $A$  と  $B$ ,  $A$  と  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  と  $B$ ,  $\bar{A}$  と  $\bar{B}$  を結ぶとき. (向きはどちら向きでもよい.)

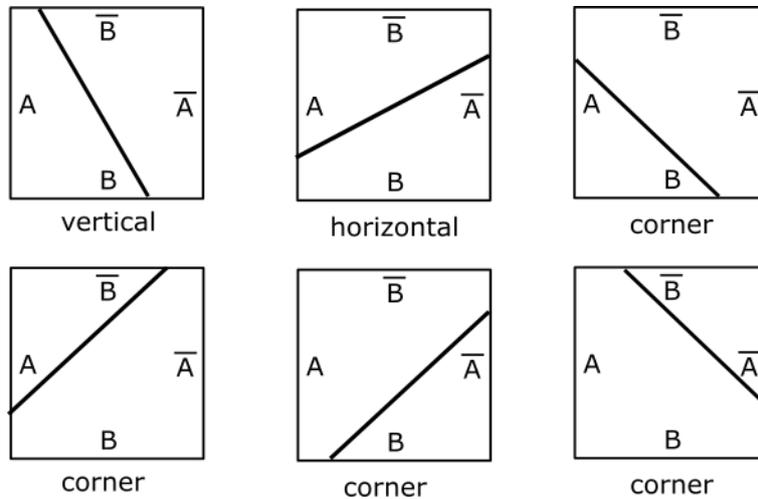


図 14: ストランドの分類

このようにストランドを分類すると,  $L_{p/q}$  が  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線に対応するとき, 垂直的ストランドと水平的ストランドは同時に起きないことが分かる. これは  $L_{p/q}$  が単純閉曲線に対応する場合, スロープ  $L_{p/q}$  は折れ線ではなく傾き一定の直線になることから明らかである. また, 同様に  $L_{p/q}$  が  $\mathbb{T}$  上の単純閉曲線に対応するとき, コーナーストランドは 4 種類のうち 1 種類または 3 種類だけが起こることはあり得ない. さらに, 4 種類すべて起こった場合, そのスロープは  $\mathbb{T}$  上, 自明な曲線である.

切断列のラベルの個数とストランドの関係は以下である:

	垂直的ストランド	水平的ストランド	コーナーストランド
$p/q \geq 1$ のとき	$p - q$ 個	0 個	$2q$ 個
$0 \leq p/q < 1$ のとき	0 個	$q - p$ 個	$2p$ 個

ただし, スロープ  $L_{p/q}$  の  $A$  の個数を  $q$ ,  $B$  の個数を  $p$  とした. また,  $p/q < 0$  の場合は  $A$  を  $\bar{A}$  に,  $B$  を  $\bar{B}$  に置き換えればよい.

例 6.4.  $ABABB$  は単純閉曲線に対応する (図 15). 起点を取りかえた  $ABBAB$  も単純閉曲線に対応する. これは直線を平行移動すれば確認できる. また,  $D$  上のストランドの傾きは一定で水平的ストランドはないことも確認できる.

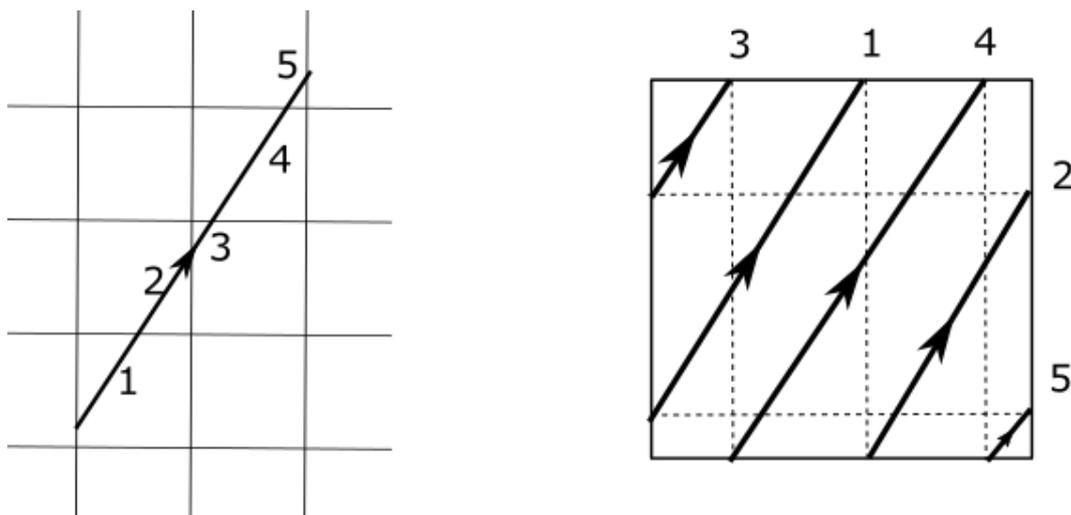


図 15: 単純閉曲線に対応する例

例 6.5.  $AAABB$  は単純閉曲線に対応しない (図 16) .

$A, A, A, B, B, (A, A, A, B, B, \dots)$  を通るような直線を考えると, 必ず 1 本の直線ではすべて通過することができず, 少なくとも交点を持つ 2 本の直線が必要なので, これは単純閉曲線でない.

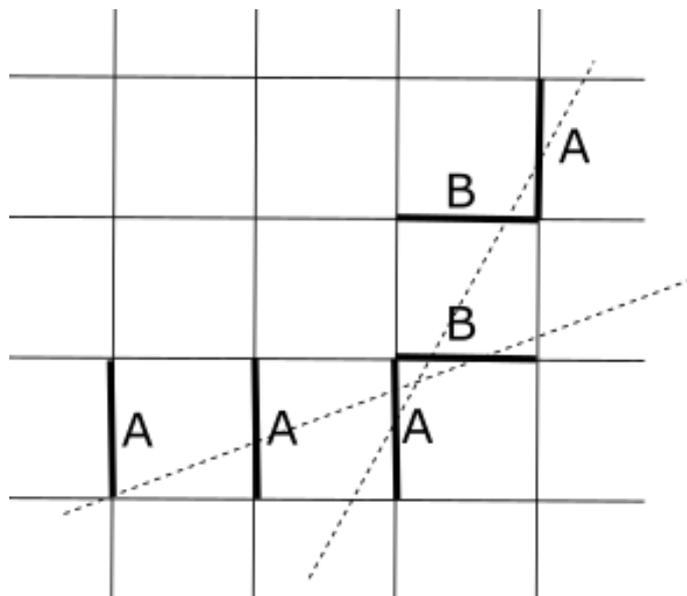


図 16: 単純閉曲線に対応しない例

## 6.2 記号と定義

定義 6.6.  $V \neq W$  かつ  $W$  と  $V$  は  $G$  を生成するような  $V := V(A, B) \in G$  が存在するとき, 語  $W := W(A, B) \in G$  は原始的 (primitive) であるという. さらにこのとき,  $V$  を  $W$  に関して原始的であるという. この非順序対  $W, V$  を原始的な組み合わせ (a pair of primitive associate) という.

上のように定義すると,  $W, V$  が原始的な組み合わせであるならば,  $WV, WV^{-1}$  はそれぞれ原始的で, さらに  $W, WV^{\pm 1}$  と  $V, WV^{\pm 1}$  はそれぞれ原始的な組み合わせとなる. これらは,  $V = W^{-1}(WV)$ ,  $W = (WV^{-1})V$  であることから明らかである.

**定義 6.7.** 語  $W := W(A, B) \in G$  が前から読んでも後ろから読んでも同じ場合,  $W$  は回文的 (palindrome) であるという.

**例 6.8.** (回文的語の例)

語  $ABBA, BBABABABB$  は回文的語である. 尚,  $ABBA$  の起点を取り替えて作った語  $BBAA$  は回文的語ではない.

語  $W(A, B) \in G$  は  $A^{n_1}B^{m_1}A^{n_2}B^{m_2}A^{n_3}\cdots A^{n_r}B^{m_r}$  ( $n_1, n_2, \dots, n_r, m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ ) で表される. 語  $X_1X_2\cdots X_{n-1}X_n \in G$  において, 任意の  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対し  $X_i \neq X_{i+1}^{-1}$  が成り立つとき,  $X_1X_2\cdots X_{n-1}X_n$  は自由既約 (freely reduced) であるという. さらに, 語  $X_1X_2\cdots X_{n-1}X_n \in G$  が自由既約でありかつ  $X_1 \neq X_n^{-1}$  を満たすとき,  $X_1X_2\cdots X_{n-1}X_n$  は巡回既約 (cyclically reduced) であるという. 語  $X_rX_{r+1}\cdots X_nX_1X_2\cdots X_{r-1}$  ( $1 \leq r \leq n$ ) を  $X_1X_2\cdots X_n$  の巡回置換 (cyclic permutation) という. このように定義したとき,  $X_1X_2\cdots X_n$  が自由既約であるならば,  $X_rX_{r+1}\cdots X_nX_1X_2\cdots X_{r-1}$  もまた巡回既約でかつ  $X_1X_2\cdots X_n$  と共役である. これは,

$$(X_1X_2\cdots X_{r-1})(X_r\cdots X_nX_1\cdots X_{r-1})(X_1X_2\cdots X_{r-1})^{-1} = X_1X_2\cdots X_n$$

が成り立つことから明らかである.

以下,  $W := W(A, B)$  が原始的であると仮定し,  $W$  の指数部分の特徴づけをしていく.

**定義 6.9.**  $p/q \in \mathbb{Q}, p/q \geq 1$  とする. このとき, 集合  $\{W_{p/q}\}$  を以下で定義する.

$$\{W_{p/q}\} := \{B^{n_0}AB^{n_1}AB^{n_2}\cdots AB^{n_q}\}$$

ただし,  $n_0 \geq 0, n_i > 0, i = 1, \dots, q, p = \sum_{i=1}^q n_i$  であるとする.

$p/q \leq 1$  の場合は, 上の定義 6.9 における  $A$  を  $A^{-1}$  に置き換えることにより拡張できる. また, 同様にして,  $|p/q| < 1$  の場合は, 定義 6.9 の  $A$  と  $B$  を入れ替えることにより定義できる. ただしこのとき, 定義 6.9 の  $p = \sum_{i=1}^q n_i$  は  $q = \sum_{i=1}^p n_i$  となる.

### 6.3 Farey 列と連分数展開の関係

本節では Farey 列という言葉进行を定義し, 既に述べた Farey グラフと連分数展開の関係を新しい言葉を用いて改めて整理する. 尚, この Farey 列は  $W, V$ -構成両方の構成に関係する重要な列である. まず最初に,  $W$ -構成で必要となる演算子を定義する.

**定義 6.10.**  $p/q, r/s \in \mathbb{Q}^+$  とする. このとき, Farey 和を以下で定義する.

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s}$$

また,  $|ps - qr| = 1$  であるとき,  $p/q, r/s$  を Farey 近傍 (Farey neighbors) という.

上のように定めると,  $1/0$  の Farey 近傍は  $n/1$  である. これは

$$|1 \cdot s - 0 \cdot r| = 1 \Rightarrow r/s = n/1 (n \in \mathbb{Z})$$

から明らかである。また、 $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$  に対し、 $p/q < r/s$  であるとき

$$\frac{p}{q} < \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} < \frac{r}{s}$$

が成り立つ。さらに、 $(p/q, r/s)$  が互いに Farey 近傍の組み合わせであるとき

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right), \left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}, \frac{r}{s}\right)$$

もまたそれぞれ互いに Farey 近傍の組み合わせとなる。

Farey グラフを考えることにより、**Farey 水準** (Farey level) を定義する。

**定義 6.11.** Farey グラフ上において、虚軸上の点  $i$  と  $p/q$  を通るような測地線を考え、この測地線が横切る双曲三角形の数を  $p/q$  の Farey 水準と定義し、 $Lev(p/q)$  と記す。

**例 6.12.** (Farey 水準の例)

図 17 のように、虚軸上の点  $i$  と  $2/1$  を通るような測地線を考えて、この測地線は双曲三角形  $(0, 1, \infty), (1, 2, \infty)$  を横切る。よって  $Lev(2/1) = 2$  である。また、 $3/2$  を通る測地線は、双曲三角形  $(0, 1, \infty), (1, 2, \infty), (1, 2, 3/2)$  を横切るのので、 $Lev(3/2) = 3$  である。 $2/3$  を通る測地線は、双曲三角形  $(0, 1, \infty), (0, 1, 1/2), (1/2, 1, 2/3)$  を横切るのので、 $Lev(2/3) = 3$  である。

同様に、 $Lev(1/0) = 0, Lev(0/1) = 0, Lev(1/1) = 1, Lev(n/1) = n$  であることも確認できる。また  $p/q < 0$  の場合も同様に  $Lev(-1/2) = 2, Lev(-3/2) = 3$  であると分かる。

特に  $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}, x = (p/q) \oplus (r/s)$  (ただし  $p/q, r/s \in \hat{\mathbb{Q}}, |ps - qr| = 1$  とする) に対し、 $Lev(p/q), Lev(r/s) \leq m$  ならば  $Lev(x) = m + 1$  となる。

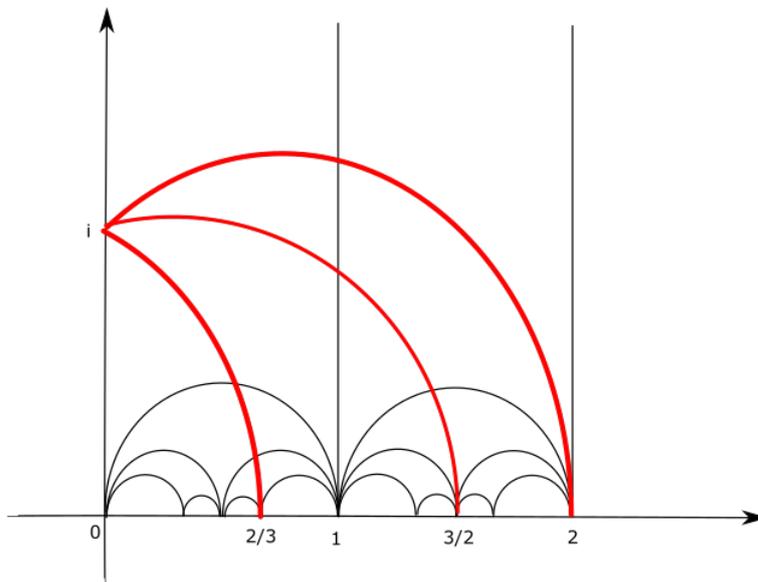


図 17: Farey 水準の例

上のように Farey 水準を定義したとき、 $Lev(2/1) = 2, Lev(2/3) = 3$  のように、 $p/q < r/s$  だが  $Lev(p/q) > Lev(r/s)$  となることがある。そこで、 $p/q < r/s$  の大小関係は大きい (resp. 小さい) といい、 $Lev(p/q) > Lev(r/s)$  の大小関係は高い (resp. 低い) ということにする。

**定義 6.13.** 定義 6.11 と同様に、虚軸上の点  $i$  と  $p/q$  を通るような測地線を考え、この測地線が横切る双曲三角形を考える。この測地線が横切る順に双曲三角形の列を作ったとき、新たな双曲三角形を作るたび

に追加する点をそれぞれ考えることにより有理数点列が作れる。この帰納的に作った点列を **Farey 列** と定義する。

**例 6.14.** (Farey 列の例)

図 18 のように、虚軸上の点  $i$  と  $5/3$  を通るような測地線を考えると、この測地線は双曲三角形  $(0, \infty, 1), (\infty, 1, 2), (1, 2, 3/2), (2, 3/2, 5/3)$  を横切る。よって有理数点列  $1, 2, 3/2$  ができ、 $5/3$  の Farey 列は  $1, 2, 3/2$  となる。同様に、 $8/5$  の Farey 列は  $1, 2, 3/2, 5/3$  となる。

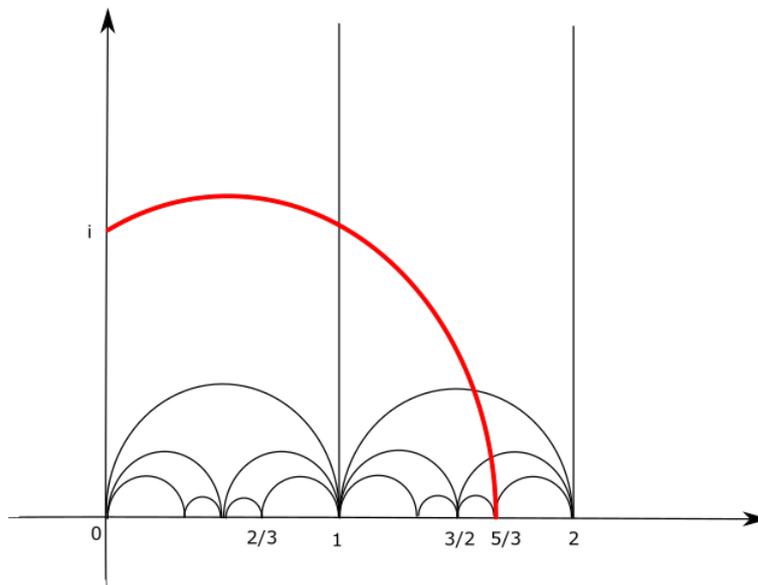


図 18: Farey 列の例

**定義 6.15.**  $p/q$  の最小近傍, 最大近傍を  $p/q$  の親 (parents) という。

**例 6.16.**  $5/3$  の最小近傍は  $3/2$ , 最大近傍は  $2/1$  であるので、 $5/3$  の親は  $3/2, 2/1$  である。

Farey 列は連分数展開と関連することがよく知られている。 $p/q$  が以下のように連分数展開できたとする。ただし、 $[1, 3] = [1, 2, 1]$  のような場合を防ぐため、連分数展開の最後の項が 1 以外である場合を考えることにする。

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_k] \quad (\text{ただし } a_j > 0, j = 1, \dots, k \text{ とする})$$

このとき、この連分数展開と  $Lev(p/q)$  の関係を見ると、

$$Lev(p/q) = \sum_{j=0}^k a_j$$

が成り立つ。これは既にみたように、連分数展開の各数は有理数と  $i$  を結んだ測地線が交差する Farey グラフの基点を取りかえるまでの交差した数と等しかったことから従う。

## 6.4 W-構成

この節では、有理数  $p/q$  の原始的語と Farey 列の関連を見ていく。この節では  $p/q \in \mathbb{Q}^+$  を考えるが、必要があれば定義 6.9 を用いて拡張できる。

**定理 6.17. (W-構成) (The W-iteration scheme)**

$G := \langle A, B \rangle$  における原始的語は Farey 列を用いて帰納的に次のように列挙できる：

$$M_{n/1} := B^n A, n \in \mathbb{Z}$$

とする。また、任意の  $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$  に対し、親を  $m/n, r/s$  とする。ただし、

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

とする。このとき、

$$M_{\frac{p}{q}} = M_{\frac{m}{n} \oplus \frac{r}{s}} = M_{\frac{r}{s}} \cdot M_{\frac{m}{n}}$$

と定める。また、 $W_{p/q}, W_{r/s}$  が原始的な組み合わせであることと、 $p/q, r/s$  が Farey 近傍であること（すなわち  $|ps - rq| = 1$  であること）は同値である。

**証明**  $m/n, r/s$  を Farey 近傍とする。このとき  $\mathbb{C}$  上でベクトル  $m+ni, r+si$  を考えると、 $(m+r) + (n+s)i$  は  $m+ni, r+si$  が張る平行四辺形の原点以外の頂点を通らないので、この領域は格子になっていると分かる。よって同様に考えると  $(m+r) + (n+s)i, m+ni, (m+r) + (n+s)i, r+si$  はそれぞれ格子を生成することが分かる。すなわちこれは生成元を取りかえることに対応する。 $(m+r) + (n+s)i$  はベクトル  $m+ni, r+si$  の和だったので、対応する原始的語は  $m+ni, r+si$  の対応する原始的語の積になる。 $W_{p/q}, W_{r/s}$  が原始的な組み合わせであることと、 $p/q, r/s$  が Farey 近傍であること同値性は、のちに示す系 6.26 の中で示すので、ここでは省略する。□

原始的な元の積も原始的であるので、上の定理 6.17 で得られる  $W_{p/q}$  もまた原始的である。 $W_{m/n} \cdot W_{r/s}$  と  $W_{r/s} \cdot W_{m/n}$  は  $G$  上、共役である。これは、 $W_{m/n} \cdot W_{r/s} = W_{m/n} (W_{r/s} \cdot W_{m/n}) W_{m/n}^{-1}$  であることから明らかである。このように  $W_{m/n} \cdot W_{r/s}$  と  $W_{r/s} \cdot W_{m/n}$  は  $G$  において共役であるので、 $W_{p/q}$  をかぶりなく羅列するために、定理 6.17 は必ず大きいラベルを持つものを左からかけるように定めておく。（後の章では  $W_{0/1} := B, W_{1/0} := A, W_{\frac{p}{q}} = W_{\frac{m}{n} \oplus \frac{r}{s}} = W_{\frac{r}{s}} \cdot W_{\frac{m}{n}}$  において計算しているが、共役を考えると問題ない。）尚、定理 6.17 のような方法で原始的語を生成する方法を **W-構成** と呼ぶ。

**例 6.18.** 定理 6.17 の方法で、 $8/5$  に対応する原始的語を求める。例 6.14 より、 $8/5$  の Farey 列は  $1, 2, 3/2, 5/3$  だった。よって

$$\begin{aligned} W_{\frac{1}{0}} &= B \\ W_{\frac{1}{1}} &= W_{\frac{1}{0}} W_{\frac{0}{1}} = BA \\ W_{\frac{2}{1}} &= W_{\frac{1}{0}} W_{\frac{1}{1}} = B \cdot BA = BBA \\ W_{\frac{3}{2}} &= W_{\frac{2}{1}} W_{\frac{1}{1}} = BBA \cdot BA = BBABA \\ W_{\frac{5}{3}} &= W_{\frac{2}{1}} W_{\frac{3}{2}} = BBA \cdot BBABA = BBABBABA \\ W_{\frac{8}{5}} &= W_{\frac{5}{3}} W_{\frac{3}{2}} = BBABBABA \cdot BBABA = BBABBABABBABA \end{aligned}$$

より、 $8/5$  に対応する原始的語は  $BBABBABABBABA$  である。

次の定理は原始的語のとの指数部分を連分数展開の係数で表したものである。その準備として、まず次の補題を示す。

補題 6.19.  $p/q = [a_0, a_1, \dots, a_k]$  とする. このとき,

$$\frac{p_j}{q_j} := [a_0, a_1, \dots, a_j] \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

と定めると, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, q_0 = 1 \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1 \\ p_j &= a_j p_{j-1} + p_{j-2}, q_j = a_j q_{j-1} + q_{j-2} \quad (j = 2, 3, \dots, k) \end{aligned}$$

証明 数学的帰納法により示す.

- $j = 0$  のとき:  $\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = a_0$  より成り立つ.
- $j = 1$  のとき:  $\frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$  より成り立つ.
- $j \leq k$  のとき成り立つと仮定し,  $j = k + 1$  の場合にも成り立つことを示す:  
 $j \leq k$  のとき成り立つとすると,

$$A_k := \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k p_{k-1} + p_{k-2} & a_{k-1} p_{k-2} + p_{k-3} \\ a_k q_{k-1} + q_{k-2} & a_{k-1} q_{k-2} + q_{k-3} \end{pmatrix}$$

が成立.  $j = k + 1$  のとき

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{k+1} p_k + p_{k-1} & p_k \\ a_{k+1} q_k + q_{k-1} & q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} p_k + p_{k-1} & a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ a_{k+1} q_k + q_{k-1} & a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって  $j = k + 1$  のときも成り立つ.

□

定理 6.20.  $p/q = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$  とする. このとき, 原始的語  $W_{p/q}$  は  $\frac{p_j}{q_j} := [a_0, a_1, \dots, a_j] (j = 0, 1, \dots, k)$  により, 次のように帰納的に列挙できる:

$$W_{\frac{p_0}{q_0}} := A, \quad W_{\frac{p_1}{q_1}} := B, \quad W_{\frac{p_2}{q_2}} := AB$$

とおくと,  $j = 1, \dots, k$  に対し,

- $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} > \frac{p}{q}$  の場合:

$$W_{\frac{p_j}{q_j}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} (W_{\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}})^{a_j}$$

- $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} < \frac{p}{q}$  の場合:

$$W_{\frac{p_j}{q_j}} = (W_{\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}})^{a_j} W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}}$$

証明 まず補題 6.19 より,

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}$$

だった. これと定理 6.17 を用いて示す.

- $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} > \frac{p}{q}$  の場合:  $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} > \frac{p}{q} > \frac{p+1}{q+1}$  に注意すると

$$W_{\frac{p_j}{q_j}} = W_{\frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} \oplus \frac{a_j p_{j-1}}{a_j q_{j-1}}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} W_{\frac{a_j p_{j-1}}{a_j q_{j-1}}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} W_{(\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}})^{\oplus a_j}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} (W_{\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}})^{a_j}$$

- $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} < \frac{p}{q}$  の場合 :  $\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} < \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q+1}$  に注意すると

$$W_{\frac{p_j}{q_j}} = W_{\frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}} = W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}} \oplus \frac{a_j p_{j-1}}{a_j q_{j-1}}} = W_{\frac{a_j p_{j-1}}{a_j q_{j-1}}} W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} = W_{\left(\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}\right)^{\oplus a_j}} W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}} = \left(W_{\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}}\right)^{a_j} W_{\frac{p_{j-2}}{q_{j-2}}}$$

□

例 6.21. 定理 6.20 の方法で,  $8/5$  に対応する原始的語を求める. まず  $8/5$  を連分数展開すると

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [1, 1, 1, 2]$$

となるなので,

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= [1] = 1 = \frac{1}{1} \\ \frac{p_1}{q_1} &= [1, 1] = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \\ \frac{p_2}{q_2} &= [1, 1, 1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \\ \frac{p_3}{q_3} &= [1, 1, 1, 2] = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

と分かる. これをもとに原始的語を計算する.

$$\begin{aligned} W_{\frac{p_0}{q_0}} &= W_{\frac{1}{1}} = AB \\ W_{\frac{p_1}{q_1}} &= W_{\frac{1}{1}}(W_{\frac{1}{1}})^1 = BAB \\ W_{\frac{p_2}{q_2}} &= (W_{\frac{p_1}{q_1}})^1 W_{\frac{p_0}{q_0}} = BAB \cdot AB = BABAB \\ W_{\frac{p_3}{q_3}} &= W_{\frac{p_1}{q_1}}(W_{\frac{p_2}{q_2}})^2 = BAB \cdot (BABAB)^2 = BABBABABBABAB \end{aligned}$$

よって,  $8/5$  に対応する原始的語は  $BABBABABBABAB$  である. これは例 6.18 で作った原始的語  $BBABBABABBABA$  の巡回置換になっている.

## 6.5 V-構成

前節では,  $W_{0/1}, w_{1/0}$  を最初に定め, それをもとに Farey グラフに沿って 1 つずつ隣の原始的語を求め, 最終的に求めたかった有理数に対応する原始的語を求める W-構成を紹介した. この節では, W-構成のように隣の原始的語を 1 歩ずつ求めるのではなく, ある規則に従って飛び飛びに必要な原始的語を求め, 最終的に求めたかった有理数に対応する原始的語を求める V-構成という手法を紹介する. この違いにより, 求めたい有理数の Farey 水準が大きいくほど (つまり, 連分数展開の項が多いほど), W-構成より V-構成の方が比較的簡単に原始的語を求められることが分かる. これは後ほど, 具体例の中で改めて言及することにする. 尚, 上記の「ある規則に従って」というのは, 連分数展開の各項と原始的語の指数部分とを関係づけるものとなっている.

V-構成を以下のように構成していく:

$p/q > 1$  に対し,  $p/q = [a_0, \dots, a_k]$  であるとする. このとき,  $V_{-1} := B, V_0 := w_{p_0/q_0} = AB^{a_0}$  とすると, 定理 6.20 でみたように  $j = 1, 2, \dots, k$  に対し

$$V_j := V_{j-2}[V_{j-1}]^{a_j}$$

とおける.  $p/q \leq 1$  の場合についても  $A, B$  を  $\bar{A}, \bar{B}$  に置き換える, または  $A$  と  $B$  を入れ替えることにより拡張できたので, 一般性を失わずに定義できる. このようにして定義した  $V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \dots$  を列挙すると以下のようなになる:

$$\begin{aligned} V_{-1} &= B \\ V_0 &= AB^{a_0} \\ V_1 &= B(AB^{a_0})^{a_1} \\ V_2 &= AB^{a_0}(B(AB^{a_0})^{a_1})^{a_2} \\ V_3 &= B(AB^{a_0})^{a_1}(AB^{a_0}(B(AB^{a_0})^{a_1})^{a_2})^{a_3} \end{aligned}$$

ここで ( $V_j$ における  $A$  の個数) =  $t_j$  とすると,

$$\begin{aligned} t_{-1} &= 0, & t_0 &= 1, & t_1 &= a_1 \\ t_2 &= t_0 + t_1 a_2, & t_3 &= t_1 + t_2 a_3 \end{aligned}$$

となり,  $2 \leq \forall j \leq k$  に対し

$$t_{j+2} = t_{j-1} + t_j a_{j+1}$$

が成り立つ. よって  $[a_0, a_1, \dots, a_j] = p_j/q_j$  とすると

$$t_0 = 1 = q_0, \quad t_1 = a_1 = q_1, \quad t = a_{j+2} = t_{j-1} + t_j a_{j+1} = q_{j+1}$$

となることが分かる. また上で列挙した  $V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \dots$  から,  $V_{2m}$  のときは  $A$  で始まり  $B$  で終わる語になり,  $V_{2m+1}$  のときは  $B$  で始まり  $B$  で終わる語になることが分かる. さらに  $V_{j+1}$  は  $V_j, V_{j-1}$  をもとに作るので,  $V_0$  までさかのぼって考えると,  $V_{j+1}$  に出てくる  $B$  は  $a_0$  個か  $a_0 + 1$  個連続して表れることが分かる. この  $B^{a_0+1}$  は  $V_{2m}V_{2m+1}$  のように  $B$  で始まるものを後ろからかけたときに,  $B$  の指数を簡約することで生じるものである. これに注意すると, 以下の定理が成り立つ

**定理 6.22.**  $p/q > 1$ , 語  $V_j$  を以下のように展開できるとする.

$$V_j = B^{n_0(j)} AB^{n_1(j)} \dots AB^{n_{t_j}(j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k)$$

このとき,  $V_k \in \{W_{p/q}\}$  は原始的で, さらに指数は以下のように  $p/q := [a_0, a_1, \dots, a_k]$  の連分数展開によって関係づけられる:

- $j = 0$  のとき:  $t_0 = 1 = q_0, n_0(0) = 0, n_1(0) = a_0$
- $j = 1$  のとき:  $t_1 = a_1 = q_1, n_0(1) = 1, n_i(1) = a_0 (i = 1, 2, \dots, t_1)$
- $j = 2$  のとき:  $t_2 = a_2 a_1 + 1 = q_2, n_0(2) = 0, n_{t_2}(2) = a_0, n_i(2) = a_0 + 1 (i = 1, 2, \dots, t_2 - 1, i \equiv 1 \pmod{t_1}), n_i(2) = a_0 (i: \text{その他})$
- $j > 2, \dots, k$  かつ  $j$ : 偶数のとき:
  - $n_0(j) = 0$
  - $t_j = q_j$
  - $i = 1, 2, \dots, t_{j-2} - 1 \Rightarrow n_i(j) = n_i(j-2)$
  - $i = t_{j-2}, t_{j-2} + 1, \dots, t_j \Rightarrow n_i(j) = a_0 + 1 (i \equiv t_{j-2} \pmod{t_{j-1}} \text{のとき}), n_i(j) = n_{i-t_{j-2}-mt_{j-1}}(j-1) (i: \text{その他のとき}, m = 0, 1, 2, \dots, a_j - 1 \text{ とする})$
- $j > 2, \dots, k$  かつ  $j$ : 奇数のとき:

- $n_0(j) = 1$
- $t_j = q_j$
- $i = 1, 2, \dots, t_{j-2} \Rightarrow n_i(j) = n_i(j-2)$
- $i = t_{j-2} + 1 + mt_{j-1}, \dots, t_{j-2} + (m+1)t_{j-1}$  (ただし  $m = 0, 1, 2, \dots, a_j - 1$  とする)  
 $\Rightarrow n_i(j) = n_{i-t_{j-2}-mt_{j-1}}(j-1)$

さらに巡回置換を除いて、上の状況を満たす  $\{W_{p/q}\}$  の元は原始的である。

上のようにして原始的語を列挙する方法を **V-構成** という。V-構成の特徴は、連分数展開の各項を用いて、原始的語の指数部分を決定できるという点である。つまり、W-構成のように、Farey 列のすべての項の原始的語を求める必要はない。尚、V-構成で作った原始的語は W-構成で作った原始的語と巡回置換で一致する。以下に V-構成の具体的な計算方法を述べる。

**例 6.23.**  $8/5$  の連分数展開は  $[1, 1, 1, 2]$  だったので、 $8/5$  に対応する原始的語を求めるには  $V_3$  を求めればよいと分かる。まず  $t_0, t_1, t_2, t_3$  を決定する。

$$\begin{aligned} [1] &= 1 \text{ より } t_0 = 1 \\ [1, 1] &= 2/1 \text{ より } t_1 = 1 \\ [1, 1, 1] &= 3/2 \text{ より } t_2 = 2 \\ [1, 1, 1, 2] &= 8/5 \text{ より } t_3 = 5 \end{aligned}$$

次に  $n_0(3), n_1(3), \dots, n_5(3)$  を決定する。

$$\begin{aligned} n_0(3) &= 1 \\ n_1(3) &= n_1(1) = a_0 = 1 \\ n_2(3) &= n_{2-1-0.2}(2) = n_1(2) = a_0 + 1 = 2 \\ n_3(3) &= n_{3-1-0.2}(2) = n_2(2) = a_0 = 1 \\ n_4(3) &= n_{4-1-1.2}(2) = n_1(2) = a_0 + 1 = 2 \\ n_5(3) &= n_{5-1-1.2}(2) = n_2(2) = a_0 = 1 \end{aligned}$$

よって  $8/5$  に対応する原始的語は  $BABAB^2ABAB^2AB$  である。

定理 6.22 から次の系が成り立つ。

**系 6.24.**  $W_{p/q} \in \{W_{p/q}\}$  が原始的であるとき、 $W_{p/q}$  の指数部分は  $n_j = \lfloor p/q \rfloor$  または  $n_j = \lfloor p/q \rfloor + 1$  ( $0 < j \leq p$ ) を満たす。ただし、 $W_{p/q} = B^{n_0}AB^{n_1}AB^{n_2} \dots AB^{n_q}$  とする。

**証明** 上で述べたように、 $\forall j \leq k, V_j$  に出てくる B は  $a_0$  個か  $a_0 + 1$  個連続して表れることが定理 6.22 から分かる。□

**系 6.25.** 原始的語  $W_{p/q} \in \{W_{p/q}\}$  は巡回置換と逆元を除いて一意に定まる。

**証明** 連分数展開は一意に定まることから従う。□

**系 6.26.** 2つの原始的語  $W_{p/q}, W_{r/s}$  が原始的な組み合わせであることと  $|ps - qr| = 1$  であることは同値である。

**証明** 以下の2つを示すことにより証明する。

(1)  $|ps - qr| = 1 \Leftrightarrow p + qi, r + si$  は格子を生成する。

(2)  $p + qi, r + si$  は格子を生成する  $\Leftrightarrow W_{p/q}, W_{r/s}$  は原始的な組み合わせである.

まず (1)( $\Rightarrow$ ) を示す.  $|ps - qr| = 1$  のとき  $p$  と  $q$  は互いに素,  $r$  と  $s$  は互いに素,  $p/q \neq r/s$  であるので,  $\mathbb{C}$  上でベクトル  $p + qi, r + si$  を考えると, これらは異なるベクトルで,  $(p+r) + (q+s)i$  は  $p + qi, r + si$  で張られる領域の頂点を通らない. よって  $p + qi, r + si$  で張られる領域は格子である. (1)( $\Leftarrow$ ) も同様にベクトル  $p + qi, r + si$  を考えると, これらは異なるベクトルで, さらに格子を生成しているので,  $p$  と  $q$  は互いに素,  $r$  と  $s$  は互いに素である.

次に (2)( $\Rightarrow$ ) を示す.  $A := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  とすると,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$  であるので,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= A \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \left\langle A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \left\langle A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

(2)( $\Leftarrow$ ) は上の式変形と上の系の原始的語は一意に定まることから従う. □

上で  $W$ -構成と  $V$ -構成は巡回置換で一致すると述べたが, この巡回置換という操作をとることにより, 回文的語を作ることができる場合がある. 最後にそれに関する定理を述べる.

**定理 6.27.**  $G := \langle A, B \rangle$  を二元生成自由群とする. このとき, 任意の原始的な元  $W \in G$  は  $A, B$  による回文的元であるか, あるいは 2 つの回文的元の積と共役である. 特に,  $W$  の長さが  $p + q$  のとき, 巡回置換を除いて,

- $W$  : 回文的  $\Leftrightarrow p + q$  : 奇数
- $W$  : 2 つの回文的元の積  $\Leftrightarrow p + q$  : 偶数

**証明**  $0 < p/q < 1$  の場合について示す. 積  $pq$  が偶数であるとする (即ち  $p$  : 偶数  $\Leftrightarrow q$  : 奇数). このとき  $W_{p/q}$  の巡回置換で回文的になっているものが一意に定まることを示したい.

$p/q$  のスロープを考えると,  $p < q$  より垂直的ストランド: 0 本, 水平的ストランド:  $q - p$  本, コーナーストランド:  $2p$  本存在すると分かる. また,  $pq$  が偶数であることより,  $q - p$  は奇数であるので, 水平的ストランドの中から中央ストランドが取れる. この中央ストランドの右の点を始点とし, 同一視できる左側の点に進む方向に向きを定め, 始点まで一周するように語を並べたものを  $W$  とする. 同様に中央ストランドの左の点を始点とし, 同一視できる右側の点に進む方向に向きを定め, 始点まで一周するように語を並べたものを  $V$  とする. このとき  $V$  は  $W$  と反対方向に回っているので,  $W$  の  $A$  を  $\bar{A}$  に,  $B$  を  $\bar{B}$  に書き換えたものが  $V$  となる. また,  $W, V$  の定め方より  $W = V^{-1}$  である. よって, このとき  $W$  は回文的でなければならぬとわかる. よって  $p + q$  : 奇数の場合は示せた.  $p + q$  が偶数の場合, この語の Farey 近傍を  $p_1/q_1, p_2/q_2$  とすると,  $p_1 + p_2 = p, q_1 + q_2 = q$  が成り立つ. このとき

- $p, q$  : 偶数のとき.  $p$  と  $q$  は互いに素なのであり得ない.
- $p, q$  : 奇数のとき.  $p_1$  と  $q_1, p_2$  と  $q_2$  がそれぞれ互いに素であることを注意すると  $p_1$  : 奇数,  $q_1$  : 偶数,  $p_2$  : 偶数,  $q_2$  : 奇数 または  $p_1$  : 偶数,  $q_1$  : 奇数,  $p_2$  : 奇数,  $q_2$  : 偶数 となる. このとき, どちらの場合も  $p_1 + q_1, p_2 + q_2$  はともに奇数になるので, 前半の結果から  $W_{p/q}$  は回文的元の積になる.

□



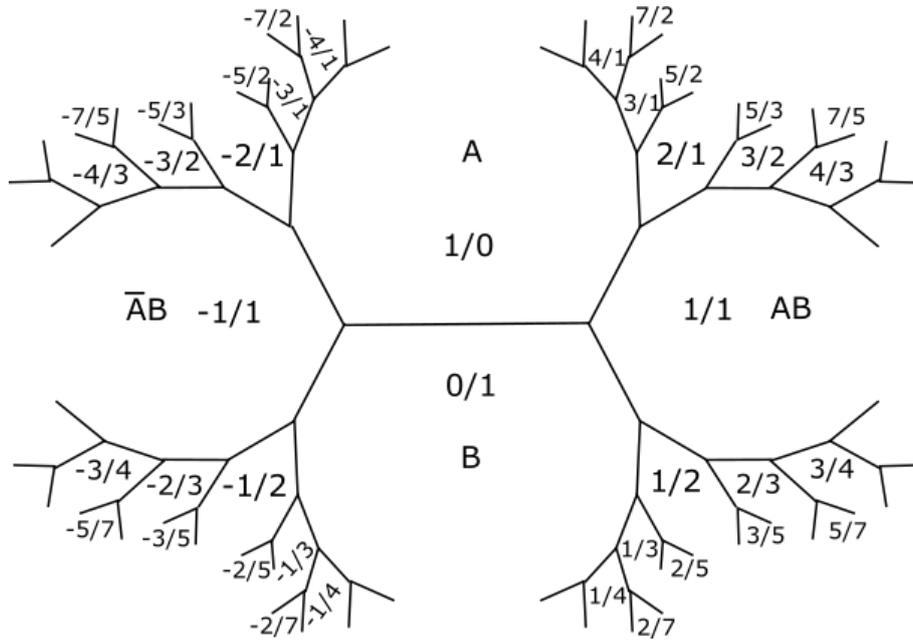


図 20: Farey 列

上のようにして原始的な行列  $M_{p/q}$  を作るとき, 次の定理が本論文の主結果である.

**定理 7.2.** 任意の  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対し,  $M_{p/q}$  は  $p/q$  に対応する一点穴あきトーラス上の曲線の Markoff 行列である.

### 7.1 主結果 (定理 7.2) の証明の準備

主結果を示すのに必要となる行列を次のようにおく.

$$E := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおくと, } ES = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\bar{T}.$$

さらに, 計算すると

$$\begin{aligned} \bar{T}AT &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B \\ \bar{T}BT &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \bar{A}B \\ EA\bar{E} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \bar{A} \\ EB\bar{E} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \bar{B} \\ SAS &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \bar{B} \\ SB\bar{S} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A\bar{B} \end{aligned}$$

となる。次に、任意の  $p/q \in \mathbb{Q}$  に対し、

$$\sigma(p/q) = \frac{p}{q} = \frac{-q}{p+q}$$

とおくと、

$$\sigma^2(p/q) = \sigma(\sigma(p/q)) = \sigma\left(\frac{-q}{p+q}\right) = \frac{-(p+q)}{p}$$

となる。このとき、以下の補題が成り立つ。

**補題 7.3.** 任意の  $p/q > 0$  に対し、

$$\begin{aligned}\bar{T}M_{p/q}T &= M_{\sigma(p/q)} \\ \bar{T}^2M_{p/q}T^2 &= M_{\sigma^2(p/q)}\end{aligned}$$

が成り立つ。

**証明**  $n \geq 1$  に対し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\bar{T}M_{n/1}T &= \bar{T}A^nBT = (\bar{T}AT)^n(\bar{T}BT) = B^n\bar{A}B \\ \bar{T}^2M_{n/1}T^2 &= \bar{T}(\bar{T}M_{n/1}T)T = \bar{T}(B^n\bar{A}B)T = (\bar{T}BT)^n(\bar{T}\bar{A}T)(\bar{T}BT) = (\bar{A}B)^{n-1}\bar{A}\bar{A}B \\ \bar{T}M_{1/n}T &= \bar{T}AB^nT = (\bar{T}AT)(\bar{T}BT)^n = B(\bar{A}B)^n \\ \bar{T}^2M_{1/n}T^2 &= \bar{T}(\bar{T}M_{1/n}T)T = \bar{T}(B(\bar{A}B)^n)T = (\bar{T}BT)(\bar{T}\bar{A}BT) = \bar{A}B(\bar{B}\bar{A}B)^n = \bar{A}^{n+1}B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{\sigma(n/1)} &= M_{-1/(n+1)} = M_{0/1}M_{-1/n} = BM_{-1/n} = B^2M_{-1/(n-1)} = B^nM_{-1/1} = B^n\bar{A}B \\ M_{\sigma^2(n/1)} &= M_{-(n+1)/n} = M_{-1/1}M_{-n/(n-1)} = \bar{A}BM_{-n/(n-1)} = (\bar{A}B)^{(n-1)}M_{-2/1} = (\bar{A}B)^{n-1}\bar{A}\bar{A}B \\ M_{\sigma(1/n)} &= M_{-n/(n+1)} = M_{-(n-1)/n}M_{-1/1} = M_{-(n-1)/n}\bar{A}B = M_{0/1}(\bar{A}B)^n = B(\bar{A}B)^n \\ M_{\sigma^2(1/n)} &= M_{-(n+1)/1} = M_{-1/0}M_{-n/1} = \bar{A}M_{-n/1} = \bar{A}^{n+1}M_{0/1} = \bar{A}^{n+1}B\end{aligned}$$

例 7.1 で確かめたように、 $M_{-1/1} = \bar{A}B, M_{-2/1} = \bar{A}\bar{A}B, M_{0/1} = B$  であるので、 $p/q = n/1, 1/n$  のとき成り立つことが分かった。次は一般の場合に対して Farey 水準に関する帰納法を用いて示す。任意の  $p/q > 0, r/s > 0$  に対し、 $Lev(p/q), Lev(r/s) = 1$  の場合は上の計算より成り立つことがわかる。 $Lev(p/q), Lev(r/s) \leq m (m \in \mathbb{Z}, m \geq 1)$  に対し、

$$\begin{aligned}\bar{T}M_{p/q}T &= M_{\sigma(p/q)} \quad , \quad \bar{T}M_{r/s}T = M_{\sigma(r/s)} \\ \bar{T}^2M_{p/q}T^2 &= M_{\sigma^2(p/q)} \quad , \quad \bar{T}^2M_{r/s}T^2 = M_{\sigma^2(r/s)}\end{aligned}$$

が成り立つとして、 $Lev\left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right) = m+1$  の場合を示す。 $\sigma, \oplus$  の定義より、

$$\begin{aligned}\sigma\left(\frac{p}{q}\right) \oplus \sigma\left(\frac{r}{s}\right) &= \left(\frac{-q}{p+q}\right) \oplus \left(\frac{-s}{q+s}\right) \\ &= \frac{-q + (-s)}{(p+q) + (q+s)} \\ &= \frac{-(q+s)}{(p+r) + (q+s)} \\ &= \sigma\left(\frac{p+r}{q+s}\right) \\ &= \sigma\left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2\left(\frac{p}{q}\right) \oplus \sigma^2\left(\frac{r}{s}\right) &= \left(\frac{-(p+q)}{p}\right) \oplus \left(\frac{-(r+s)}{r}\right) \\
&= \frac{-(p+q) - (r+s)}{p+r} \\
&= \frac{-(p+r+q+s)}{p+r} \\
&= \sigma^2\left(\frac{p+r}{q+s}\right) \\
&= \sigma^2\left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
M_{\sigma\left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right)} &= M_{\sigma\left(\frac{p}{q}\right) \oplus \sigma\left(\frac{r}{s}\right)} = M_{\sigma\left(\frac{p}{q}\right)} M_{\sigma\left(\frac{r}{s}\right)} = \bar{T} M_{\frac{p}{q}} T \bar{T} M_{\frac{r}{s}} T \\
&= \bar{T} M_{\frac{p}{q}} M_{\frac{r}{s}} T = \bar{T} M_{\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}} T
\end{aligned}$$

となる。よって,  $Lev\left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right) = m+1$  の場合についても成り立つことが分かった。  
以上から, 数学的帰納法により補題は示せた。

□

**系 7.4.** 任意の  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対し,  $tr(M_{p/q})$  と行列  $M_{p/q}$  の  $(2,1)$  成分は, ともに正の整数である。

**証明** 補題 7.3 より, 任意の  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対し, 行列  $M_{p/q}$  の全ての成分は正の整数であることから従う。 □

定理 7.2 の証明をする前に, 証明に必要な計算結果を紹介する。  $SL(2, \mathbb{C})$  の任意の行列  $X, Y$  をそれぞれ

$$X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とし,

$$f(X, Y) := -c^2(1+w^2) - z^2(1+d^2) + 3c^2zw + 2cdwz - 3cdz^2$$

とおく。さらに, 行列  $X \in SL(2, \mathbb{C})$  の  $(2,1)$  成分を  $c(X)$  と表記することにする。  
このとき,  $c(X)c(Y) \neq 0$ ,  $tr(X) = 3c(X)$ ,  $tr(Y) = 3c(Y)$  とすると,

$$\begin{aligned}
tr(XY) - 3c(XY) &= \frac{f(X, Y)}{c(X)c(Y)} \\
f(XY, Y) &= 3c(Y)f(X, Y) \\
f(X, XY) &= 3c(X)f(X, Y)
\end{aligned} \tag{7.1}$$

が成り立つ。

さらに  $tr(X) = 3c(X)$ ,  $tr(Y) = 3c(Y)$ ,  $X, Y \in SL(2, \mathbb{C})$  より,  $a+d = 3c$ ,  $x+w = 3z$ ,  $ad - bc = 1$ ,  $xw - yz = 1$  が成り立つので, 行列  $X, Y$  は以下の形に書き換えることができる:

$$X = \begin{pmatrix} 3c-d & ((3c-d)d-1)/c \\ c & d \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 3z-w & ((3z-w)w-1)/z \\ z & w \end{pmatrix}$$

## 7.2 主結果 (定理 7.2) の証明

命題 4.7[1] で任意の Markoff 行列  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対し,  $|c|$  は Markoff 数であり, かつ  $a + d = 3|c|$  を満たすことを確かめた. このとき, Markoff 行列  $M$  の軸の高さは

$$\frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2|c|} = \frac{3\sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}}{2|\text{tr}(M)|}$$

となることも補題 4.12 の証明で確かめた. ここで, 行列のトレースは共役不変であることから,  $M_{p/q}$  と共役な行列  $M$  の軸の高さが  $\frac{3\sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}}{2|\text{tr}(M)|}$  と等しいとき,  $M$  は  $M_{p/q}$  と共役な Markoff 行列であると分かる. よって, 系 7.4 より,  $\text{tr}(M_{p/q})$  と行列  $M_{p/q}$  の (2,1) 成分はともに正の整数であるので, 定理 7.2 を示すには,  $M_{p/q}$  が

$$\text{tr}(M_{p/q}) = 3c(M_{p/q}) \quad (7.2)$$

を満たすことを示せばよい. ここで簡単のため,  $t(p/q) := \text{tr}(M_{p/q})$ ,  $c(p/q) := c(M_{p/q}) =$  (行列  $M_{p/q}$  の (2,1) 成分) と表記することにする. このとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-c+b-d \\ c & c+d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

に注意すると, 補題 7.3 より  $\bar{T}M_{p/q}T = M_{\sigma(p/q)}$ ,  $\bar{T}^2M_{p/q}T^2 = M_{\sigma^2(p/q)}$  だったので,

$$\begin{aligned} t(p/q) &= t(\sigma(p/q)) = t(\sigma^2(p/q)) \\ c(p/q) &= c(\sigma(p/q)) = c(\sigma^2(p/q)) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. よって,  $p/q \geq 0$  について示せば十分である. Farey 水準に関する数学的帰納法を用いて式 (7.2) が成り立つことを示す.

(i)  $0 \leq \text{Lev}(p/q) \leq 1$  のときに (7.2) が成り立つことを示す.  $0 \leq \text{Lev}(p/q) \leq 1$  を満たす  $p/q \geq 0$  は  $p/q = 0/1, 1/0, 1/1$  である.  $M_{0/1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $M_{1/0} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $M_{1/1} = AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  であることから  $\text{tr}(M_{p/q}) = 3c(M_{p/q})$  は成り立つ.

(ii)  $0 \leq \text{Lev}(p/q) \leq m$  を満たす全ての  $p/q \geq 0$  に対し, (7.2) が成り立つとし,  $m+1$  の場合にも成り立つことを示す. まず,  $\text{Lev}(x) = m+1$  を満たす  $x \in \mathbb{Q}$  をとる. このとき,  $x = p/q \oplus r/s$  かつ  $\text{Lev}(p/q) \leq m$ ,  $\text{Lev}(r/s) \leq m$  を満たすような  $p/q, r/s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  が取れる.  $p, q, r, s > 0, p/q < r/s$  であると仮定しても構わない. さらに  $x' = (p-r)/(q-s)$  とおくと, 次の二つの場合が考えられる (図 21 参照).

- (1)  $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s} < x'$ . よって  $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} \oplus x'$
- (2)  $x' < \frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ . よって  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \oplus x'$

尚,  $x' = \infty$  の場合は (1) に含まれるものとする. また Farey 水準の定義から, いずれの場合も  $\text{Lev}(x') \leq m$  であると分かる.

- (1)  $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} \oplus x' (\frac{p}{q} < x')$  のとき:  
このとき  $M_{r/s} = M_{x'}M_{p/q}$  なので, (7.1) を用いると

$$\begin{aligned} t(x) - 3c(x) &= \frac{f(M_{r/s}, M_{p/q})}{c(r/s) \cdot c(p/q)} = \frac{f(M_{x'}M_{p/q}, M_{p/q})}{c(r/s) \cdot c(p/q)} = \frac{3c(p/q)}{c(r/s) \cdot c(p/q)} f(M_{x'}, M_{p/q}) \\ &= \frac{3c(x')c(p/q)}{c(r/s)} (t(r/s) - 3c(r/s)) = 0 \end{aligned}$$

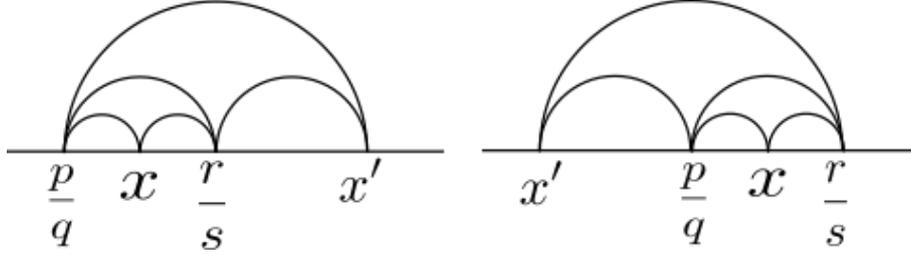


図 21:  $p/q, r/s, x, x'$  の位置関係

(2)  $\frac{p}{q} = x' \oplus \frac{r}{s}$  ( $x' < \frac{r}{s}$ ) のとき :

このとき  $M_{p/q} = M_{r/s}M_{x'}$  なので, (7.1) を用いると

$$\begin{aligned} t(x) - 3c(x) &= \frac{f(M_{r/s}, M_{p/q})}{c(r/s) \cdot c(p/q)} = \frac{f(M_{r/s}, M_{r/s}M_{x'})}{c(r/s) \cdot c(p/q)} = \frac{3c(r/s)}{c(r/s) \cdot c(p/q)} f(M_{r/s}, M_{x'}) \\ &= \frac{3c(r/s)c(x')}{c(p/q)} (t(p/q) - 3c(p/q)) = 0 \end{aligned}$$

よって, どちらの場合も  $t(x) - 3c(x) = 0$  となり,  $Lev(x) = m + 1$  のときも (7.2) は成り立つ.

(i),(ii) より, Farey 水準に関する数学的帰納法により, 定理 7.2 は示せた.

□

### 7.3 W-構成により生成した Markoff 行列とその共役な元

前節では W-構成を用いて Markoff 行列を列挙できることを確かめた. この手法により, 全ての Markoff 行列を列挙できることが定理 7.2 の系として従う.

**系 7.5.** 各  $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$  に対し, 一点穴あきトーラス上  $p/q$  に対応する曲線の任意の Markoff 行列は以下の形で書ける.

$$\pm T^{3n} M_{p/q}^{\pm 1} \bar{T}^{3n}, n \in \mathbb{Z}$$

**証明**  $\pm T^{3n} M_{p/q}^{\pm 1} \bar{T}^{3n}, n \in \mathbb{Z}$  の形をした行列が  $p/q$  の Markoff 行列であることは命題 4.7 でも述べた.  $|tr(M_{p/q})| \geq 3$  であるから,  $M_{p/q}$  の 2 つの固定点の間のユークリッド距離は

$$\frac{3\sqrt{tr(M_{p/q})^2 - 4}}{|tr(M_{p/q})|} \geq \sqrt{5}$$

を満たす. よって,  $M_{p/q}$  の共役類の軸はそれぞれ交わらず,  $T^3 \in G$ ,  $3\sqrt{5} > 6$  であることから,  $p/q$  の Markoff 行列は  $\pm T^{3n} M_{p/q}^{\pm 1} \bar{T}^{3n}, n \in \mathbb{Z}$  で全てである. □

先に計算した通り,  $\bar{T}AT = B, \bar{T}BT = \bar{A}B$  より

$$\bar{T}^3 AT^3 = \bar{T}^2 BT^2 = \bar{T} \bar{A}BT = \bar{B} \bar{A}B$$

$$\bar{T}^3 BT^3 = \bar{T}^2 \bar{A}BT^2 = \bar{T} \bar{B} \bar{A}BT = \bar{B} \bar{A} \bar{B} \bar{A}B$$

であるので, 上の系により, 任意の Markoff 行列は  $\{A, \bar{A}, B, \bar{B}\}$  を用いて表せるといえる. 最後に本節では,  $\pm T^{3n} M_{p/q}^{\pm 1} \bar{T}^{3n}, n \in \mathbb{Z}$  と  $M_{p/q}$  の関係を Markoff 樹を用いて視覚的に確かめる.

例 7.6. Markoff 数 5 に対応する一点穴あきトーラス上の  $p/q$ -曲線の Markoff 行列は

$$\begin{array}{lll} M_{2/1} = AAB & M_{1/2} = ABB & M_{-1/3} = B^2\bar{A}B \\ M_{-2/3} = B\bar{A}B\bar{A}B & M_{-3/2} = \bar{A}B\bar{A}^2B & M_{-3/1} = \bar{A}^3B \end{array}$$

だった (図 23,24). ここで  $E := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  とおいたとき,  $SA\bar{S} = \bar{B}$ ,  $SB\bar{S} = A\bar{B}$ ,  $EA\bar{E} = \bar{A}$ ,  $EB\bar{E} = \bar{B}$  だったので, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} ES(M_{2/1})\bar{S}\bar{E} &= E(SAAB\bar{S})\bar{E} = E(\bar{B}^2\bar{A}\bar{B})\bar{E} = B^2\bar{A}B = M_{-1/3} \\ ES(M_{-1/3})\bar{S}\bar{E} &= E(SBB\bar{A}B\bar{S})\bar{E} = E(A\bar{B}A\bar{B}B\bar{A}\bar{B})\bar{E} = E(A\bar{B}A\bar{A}\bar{B})\bar{E} = \bar{A}B\bar{A}^2B = M_{-3/2} \\ ES(M_{-3/2})\bar{S}\bar{E} &= E(S\bar{A}B\bar{A}^2B\bar{S})\bar{E} = E(BA\bar{B}BB\bar{A}\bar{B})\bar{E} = E(BABA\bar{B})\bar{E} = \bar{B}\bar{A}\bar{B}\bar{A}B = M'_{2/1} \sim M_{2/1} \end{aligned}$$

また  $M_{1/2}$  は  $M_{2/1}$  の  $A, B$  を入れ替え反対から読んだものなので, 同様にすると

$$\begin{aligned} ES(M_{1/2})\bar{S}\bar{E} &= M_{-2/3} \\ ES(M_{-2/3})\bar{S}\bar{E} &= M_{-3/1} \\ ES(M_{-3/2})\bar{S}\bar{E} &= M'_{1/2} \sim M_{1/2} \\ \bar{T}^6 M_{1/2} \bar{T}^6 &= (ES)^6 (M_{1/2}) (\bar{S}\bar{E})^6 = (ES)^3 (M_{-3/2}) (\bar{S}\bar{E})^3 \sim M_{-3/2} \sim M_{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ. このようにして, Markoff 行列の共役類と Markoff 樹を関係づけることができる (図 24,23,24).

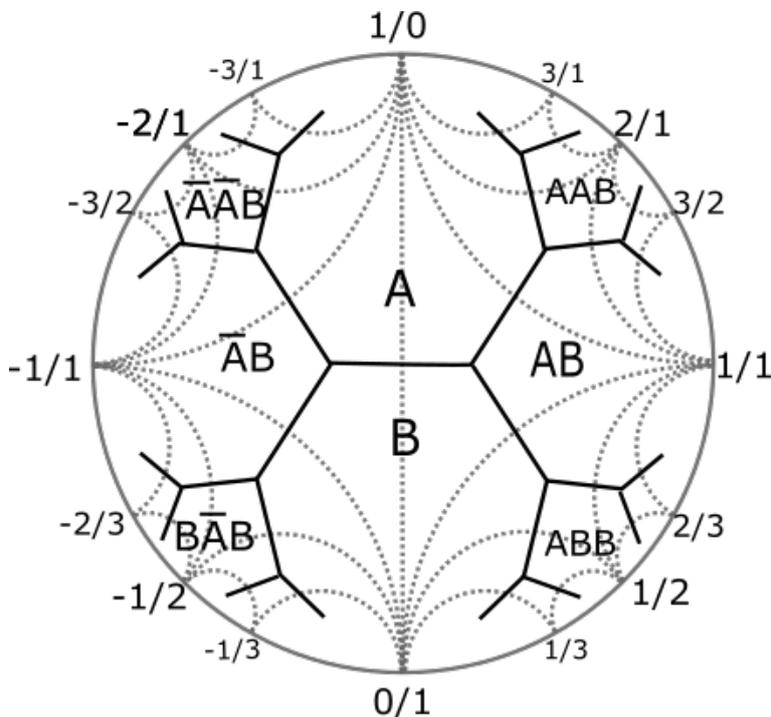


図 22: Farey グラフ (点線) とその双対グラフ (実線)

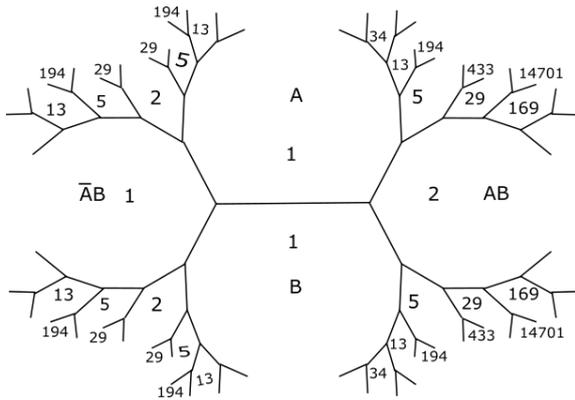


図 23: Markoff 数に関する Markoff 樹

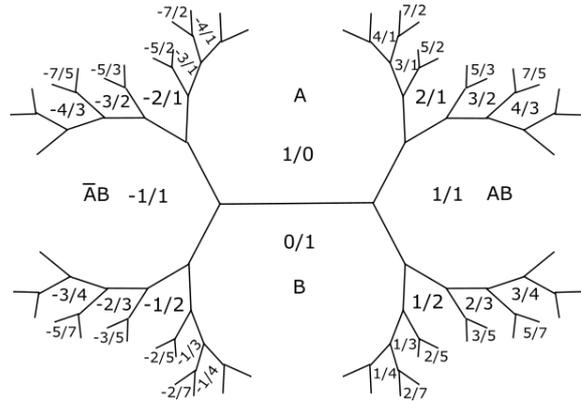


図 24:  $p/q$  - 曲線の対応

#### 7.4 Markoff 行列であるかの判定における現状の問題点

前節では Markoff 行列の具体的な作り方を述べた. Markoff 行列の作り方からも分かる通り,  $tr(M_{p/q}) = 3|c(M_{p/q})|$  という条件は,  $M_{p/q}$  が Markoff 行列であるための必要条件であるが, 十分条件ではない. そのため, 帰納的かつ網羅的に Markoff 行列を作ることができても, ある行列の成分をみただけで Markoff 行列であるかを判定するのは, 行列の成分が大きくなればなるほど難しくなる. この節では, 行列の成分を見ただけで Markoff 行列か否かを判定するうえで, 現状問題となっていることを具体例を紹介しながら述べる.

行列  $X \in SL(2, \mathbb{Z})$  が Markoff 行列であるためには

- (1)  $X \in \langle A, B \rangle$
- (2)  $X$  は原始的である
- (3)  $X$  は一点穴あきトーラス上の単純閉曲線に対応する
- (4)  $X$  は  $tr(X) = 3|c(X)|$  を満たす

の全てを満たさなければならない. (2) は一般に知られていることとして次の補題がある.

**補題 7.7.**  $Y := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $b_n$  を  $Y^n$  の (1, 2) 成分,  $c_n$  を  $Y^n$  の (2, 1) 成分 とする. このとき  $Y$  が原始的でないならば,  $b_n/b = c_n/c$  かつ  $b_n/b, c_n/c$  は  $a + d (= tr Y)$  で割り切れる.

この補題を用いることにより, (2) は行列の成分を見るだけで判定できる. また (4) も明らかに成分のみで判定できる. しかしながら, (1)(3) は現状では成分を見るだけでは判定できず, 実際に  $X$  を  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  で書き表し, その語が特性的語であるかを確かめることにより判定しなければならない. この実際に  $X$  を  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  で書き表すことは容易ではなく, さらに語が長くなるほど特性的語であるかを確かめることも容易ではない. そのため現状では, ある行列が Markoff 行列であるのか判定することができる例の方が少ないとも言える.

以下に  $tr(M_{p/q}) = 3|c(M_{p/q})|$  を満たすものの, Markoff 行列でない例を挙げる.

**例 7.8.**

$$X = \begin{pmatrix} 1168 & 2119 \\ 985 & 1787 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

は  $SL(2, \mathbb{Z})$  上原始的であり,  $X \in \langle A, B \rangle$ ,  $1168 + 1787 = 3 \times 985$  を満たすものの, Markoff 行列でない. ただし, 985 は Markoff 数である.

**証明** 上の4つの条件のうち(3)のみ成り立たないことをみていく. まず(2)は上の補題から, 1168, 1787は985とそれぞれ互いに素なので原始的であると分かる. (4)も明らかに  $1168 + 1787 = 2955 = 3 \times 985$  であるので成り立つ. 次に(1)を確かめる. 準備として,  $Y := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, E := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とすると,  $T^n Y = \begin{pmatrix} a+nc & * \\ c & * \end{pmatrix}, EY = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$  となる. このとき,  $|a| > |c|$  ならば  $|a+nc| < |c|$  を満たす最小の  $n$  をとり  $Y$  の左から  $ET^n$  を施す. これを(2,1)成分が0になるまで繰り返すことにより,  $Y$  を  $E, T$  で表すことができる.  $X$  に対して行くと,  $X = TET^5ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2$  となる. これを以下の補題で  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  に書き換える.

**補題 7.9.**  $X = TET^5ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2$  は  $A, B, \bar{A}, \bar{B}$  を用いて表すことができる.

**証明**  $E^4 = (ET)^3 = id$  より  $ET = TETE$ ,  $A = -TET\bar{E}, B = -ET\bar{E}T$  より  $AB = -TET^2ET$  であるので, 以下のように変形する.

$$\begin{aligned}
X &= TET^5ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= -TET^2(ET\bar{E})\bar{T}^3ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= -(TET^2ET)\bar{T}ET^3ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{T}E\bar{T}^3ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{T}E\bar{T}^2ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{T}(E\bar{T})\bar{T}^2ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{T}(TETE)\bar{T}^2ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= ABETE\bar{T}^2ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB(ETE\bar{T})\bar{T}ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{T}ET^2ETETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{T}ET(EE)TETETETET^2ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{A}(\bar{T}ETE)ETE\bar{T}ETETET^2ET^5ET^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}(ETE\bar{T})(ETE\bar{T})(ETE\bar{T})\bar{T}ET^5ET^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{T}ET^5ET^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{T}ET(EE)T^4ET^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3(\bar{T}ETE)ET(ETTE)T^3ET^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}(ETE\bar{T})TET^3ET^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}TET^3ET^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}(E\bar{T}E\bar{T})T^3ET^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}E\bar{T}ETTE^2 \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}(E\bar{T}ET)(TE)T^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}B(E\bar{T}E\bar{T})T^2 \\
&= -AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}BETET \\
&= AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}B^2
\end{aligned}$$

よって行列  $X$  は  $A, B, \bar{A}, \bar{B}$  を用いて  $X = AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}B^2$  と表すことができた. □

よって, (1) $X \in \langle A, B \rangle$  も示せた. 最後に (3) が成り立たないことを調べる.  $X = AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}B^2$  の  $A$  に注目すると,  $A$  は一度しか出てこないことが分かる. 一方,  $\bar{A}$  は  $\bar{A}, \bar{A}^3, \bar{A}$  と複数回出てくる. よって,  $X = AB\bar{A}\bar{B}\bar{A}^3\bar{B}\bar{A}B^2$  を短くするような置換は  $BBA = A', BA = A', AB = A'$  のいずれかとなる. しかしながら, いずれの置換も  $A, \bar{A}$  をすべて置き換えることはできず, 特性的語の定義に反する. よって  $X$  は特性的列ではない. ゆえに (3) は満たさないことが分かった.

以上より,  $X$  は Markoff 行列でない. □

最後に, 例 7.8 で紹介したような Markoff 行列の候補となる具体的な行列の作り方を述べる. 例 7.8 で用いた  $c = 985$  の場合を例に説明する. まず,  $c = 985$  の場合の Markoff 行列の候補となる行列を  $\begin{pmatrix} a & b \\ 985 & d \end{pmatrix}$

とし,  $a, b, d$  を定めていく.  $\begin{pmatrix} a & b \\ 985 & d \end{pmatrix}$  が Markoff 行列であるとする,

$$a + d = 3 \times 985 \tag{7.3}$$

$$ad - bc = 1 \tag{7.4}$$

が成り立つ. (7.3)(7.4) より

$$a \equiv -d \pmod{985}$$

$$ad \equiv 1 \pmod{985}$$

と変形できる. よって,

$$a^2 \equiv -1 \pmod{985}$$

の解を求めることで,  $a$  を定めることができる. 今回は,  $a^2 = 985x - 1$  の解の一つである  $(a, x) = (1168, 1385)$  から,  $a = 1168$  と定めることにする. (7.3) より

$$d = 3c - a = 2955 - 1168 = 1787.$$

(7.4) より

$$b = (ad - 1)/c = (1168 \times 1787 - 1)/985 = 2119$$

と定まる. 以上から Markoff 行列の候補として  $\begin{pmatrix} 1168 & 2119 \\ 985 & 1787 \end{pmatrix}$  ができた. 上の例でも見た通り, これは Markoff 行列ではない. 一方で,  $a^2 = 985x - 1$  の解の一つとして  $(a, x) = (1393, 1970)$  を選んだ場合,  $a = 1168, b = 2209, 1562$  と定まり, この行列は  $4/5$  に対応する Markoff 行列となる.  $c = 985$  以外の Markoff 数に対しても全く同様に Markoff 行列の候補となる行列は作れる. ただし, Markoff 行列であることの方が珍しく, かつ各成分の値が大きくなれば判定は難しい. しかしながら, Lang, Tan の主張した補題 4.12 の証明を  $c = 5p^n$  の場合に認め, 応用することにより, Markoff 行列であるか否かを比較的簡単に調べることができる. 具体的には,  $c = 5p^n$  の場合,  $985 = 5 \times 197$  であるので,  $c, d - a - k, k$  がそれぞれ互いに素という条件だけでは  $k \in \mathbb{Z}$  について以下の 4 通りが考えられる.

$$(1) d - a - k \in \mathbb{Z}, k \in 985\mathbb{Z}$$

$$(2) d - a - k \in 985\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) d - a - k \in 197\mathbb{Z}, k \in 5\mathbb{Z}$$

$$(4) d - a - k \in 5\mathbb{Z}, k \in 197\mathbb{Z}$$

例えば (3) から  $k = -225$  を選んだ場合, 補題 4.12 から

$$\begin{pmatrix} 1 & -225/985 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1393 & 2209 \\ 985 & 1562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -225/985 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1168 & 2119 \\ 985 & 1787 \end{pmatrix} = X$$

となる. ここで, W-構成により  $M_{4/5} = \begin{pmatrix} 1393 & 2209 \\ 985 & 1562 \end{pmatrix}$  で, Markoff 行列だった. よって  $X, M_{4/5}$  は  $SL(2, \mathbb{Z})$  において共役ではあるが,  $\langle A, B \rangle$  においては共役ではないので  $X$  は Markoff 行列ではないと考えられる.

## 結

本研究では,  $c = p^n$  の場合の Markoff 予想の証明をもとに,  $c = 2p^n$  の場合を示し,  $c = 5p^n$  の場合を示すことを試みた. 今回は  $c = 5p^n$  を証明するには至らなかったが, 最終章で記したように, 行列が一点穴あきトーラス上の単純閉曲線に対応する場合の代数的情報が得られれば, より多くの具体例を成分の値の大きさに関わらず構成できるため,  $c = 5p^n$  の場合の証明の手助けになると思われる.

本論文で紹介した  $c = p^n$  の場合の Markoff 予想の証明は, 代数的情報を幾何的信息に言い換えて証明しているため, 本論文で紹介した Markoff 行列に関する考察が今後の双曲幾何学の発展に役立てば幸いである.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり, 指導教官の宮地秀樹先生には, 学部 4 年生から修士 2 年生まで 3 年間熱心なご指導を賜りました. ここに深く感謝の意を表します. また, セミナーの中で多くのご指摘やアドバイスをいただきました研究室の先輩, 後輩の皆様に感謝致します.

## 参考文献

- [1] M. L. Lang, S. P. Tan, “A simple proof of the Markoff conjecture for prime powers,” *Geom Dedicata.*, 129(1), 15-22 (2007)
- [2] J. Gilman, L. Keen, “Cutting sequences and Palindromes,” *Geometry of Riemann surfaces*, London Math. Sci. Lecture Note Ser., 368, 194-216 (2010)
- [3] H. Cohn, “Approach to Markoff’s minimal forms through modular functions,” *Ann. Math.*, (2) 61, 1-12 (1955)
- [4] Françoise Dal’Bo, “Geodesic and Horocyclic Trajectories,” *Universitext*, Springer-Verlag London (2011)
- [5] B. Bowditch, “A proof of McShane’s identity via Markoff triples,” *Bull. London Math. Soc.*, 28(1), 73-78 (1996)
- [6] C. Series, “The geometry of Markoff numbers,” *Math Intelligencer* 7, 3, 20-29 (1985)
- [7] B. Bowditch, “Markoff triples and quasifuchsian groups,” *Proc. London Math. Soc.*, (3) 77, 697-736 (1998)