指数関数の力学系とその構造不安定性

名古屋大学多元数理科学研究科
博士前期課程 2 年　永谷 秀斗

2016 年 2 月

目 次

序文

本論文は筆者が名古屋大学大学院多元数理科学研究科前期課程において学習した複素力学系，特に主題として指数関数の力学系とその構造不安定性に関しての内容をまとめたサーベイ論文である．

まずは複素力学系と指数関数の力学系に関する背景を述べる．複素力学系は複素関数の反復合成によって生成される離散力学系の一分野である．力学系において重要な概念である初期値鋭敏性（系の初期値のわずかな変動による系全体の振る舞いの予測のつかないような変動）がごく単純な解析的な関数において見られるという点において興味深い考察対象であり，広く研究されている．この分野は 1920 年代頃から Fatou（ファトウ）や Julia（ジュリア）等によって発展してきたが，その当時から多項式，有理関数といった解析的な関数が考察対象として研究されてきた．関数の反復合成によって複素数が安定な振る舞いを見せるような集合をファトゥ集合と呼び，逆に安定的でないような振る舞い（カオス的な振る舞いと表現できる）を見せる集合をジュリア集合と呼び，力学系を 2 つの集合に分離して考え，それぞれの集合の構造や性質を調べることが主な課題であった．超越整関数についても当時からある程度研究が進んでおり，有理関数の力学系において成立する重要な性質の多くが超越整関数においても成立するということが示されていた．中でも指数関数 $E(z) = e^z$ は超越整関数の代表的な存在であり，そのジュリア集合が複素平面全体と一致するということは 1920 年代に Fatou によって予想されていた．しかしながらその事実が Misiurewicz [4] によって初めて証明されたのは 1981 年のことであった．この論文では 1980 年代に示された指数関数の力学系に関してのいくつかの結果を解説する．

次に指数関数の構造不安定性という問題について言及する．力学系における構造安定性とは関数の族とそのパラメータにおいて定義される概念である．関数の族がパラメータに依存して定まっている場合にそのパラメータを連続的に変化させるということを考える．そのパラメータの連続的な変化に伴って力学系の振る舞いが連続的な変化を見せる場合に構造安定であるという．指数関数においては関数の族 $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ を考え，パラメータ λ を変化させることで構造安定性について考えることができる．1985 年に Devaney [2] は指数関数が構造不安定となることを示した．その証明は $\lambda = 1$ のときはジュリア集合は複素平面全体であるということを利用し，パラメータ $\lambda = 1$ を微小に変化させた場合にジュリア集合が複素平面とは異なったものとなることを示すことで，構造安定にならないことを示すという内容である．

この論文の全体の構成についても簡単に述べておく．この論文は大きく分けて 2 つの章に分かれており，2 つ目の章で主題となる指数関数について扱っている．1 章はそのための準備としての複素力学系の基本的な定義と性質および，多項式の力学系について扱っている．より詳しく述べると，1 章のはじめに関数の反復合成によって定義される周期点と，それによって定義されるジュリア集合とファトゥ集合について扱う．その後ジュリア集合の性質で指数関数の力学系を考える際に利用できるものを準備する．また 1 章の最後ではよく知られている 2 次多項式の力学系の例を，後の章の指数関数の力学系との比較対象として用意する．2 章ではまず指数関数 e^z

のジュリア集合について証明を与える．その後指数関数の力学系における周期点の挙動についてを扱い，最後に指数関数の力学系の構造不安定性について扱う．

この論文においては指数関数の力学系に直接かかわる内容のうち，複素解析学においてよく知られている定理以外のほとんどの命題に証明を与えている．特に 2 章で扱う内容については原論文である [2] ,[3] の証明の細部をできる限り補うことで理解の助けとなるよう心掛けたつもりである．

最後にこの修士論文を執筆するにあたってお世話になった方々に感謝の意を表したい．川平友規先生には，1 年次のアドバイザーとしてだけでなく，他大学に移られた後もお忙しい中手厚くご指導をしていただく時間を作っていただきました．糸健太郎先生には 2 年次のアドバイザーとして大変お世話になりました．また，李正勲先輩，藤野弘基先輩，一階智弘先輩にはセミナー等で度々アドバイスをいただきました．また，衛藤優介君とは少人数クラスにおいてともに学習し，お世話になりました．以上の方々に深く感謝を申し上げます．

1 複素力学系とジュリア集合

複素力学系とは，一般的に複素解析関数の反復合成による複素数の複素平面上での振る舞いを調べる分野である．本章では周期点や正規性から定義されるジュリア集合の構造と諸性質について [1] に沿ってまとめることとする．

1.1 周期点と正規族

関数 F の反復合成を考える際に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して F の n 回合成すなわち，

$$\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{n\text{ 個}}$$

を， F^n と表記する．関数の反復合成に関して重要となるのが，以下の周期点及び不動点の概念である．

定義 1.1 $D \subset \mathbb{C}$ を領域とし， $F : D \to D$ を解析的な関数とする． $z_0 = F^n(z_0)$ が成り立つような $z_0 \in \mathbb{C}$ を F の周期 n の**周期点**といい，特に $z_0 = F(z_0)$ のとき，z_0 を F の**不動点**という．周期点は以下のように分類される．

- $|(F^n)'(z_0)| > 1$ のとき，z_0 は**反発的周期点**，
- $|(F^n)'(z_0)| = 1$ のとき，z_0 は**中立的周期点**，
- $|(F^n)'(z_0)| < 1$ のとき，z_0 は**吸引的周期点** とよばれる．

それぞれ周期点は以下のような位相的な性質を持つ．周期点の位相的な振る舞いについての詳しい議論や証明は [5] を参照のこと．

命題 1.2 z_0 を F の周期 n の周期点とする．

- z_0 が F の吸引的周期点ならば， z_0 に対してある近傍 U が存在し，任意の $z \in U$ に対して点列 $\left\{F^k(z)\right\}_{k=1}^{\infty}$ は z_0 に集積する．
- z_0 が F の反発的周期点ならば， z_0 に対してある近傍 U が存在し，任意の $z \in U \setminus \{z_0\}$ に対してある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $F^k(z) \notin U$ を満たす．

一方で，中立的周期点の周囲の点における反復合成による挙動は扱いが難しい．吸引的周期点の周囲と反発的周期点の周囲での複素数は反復合成によって明確に異なった軌道を見せる．この軌道の違いに注目することによって力学系の構造を調べることができる．

不動点に関して以下の重要な定理が知られている．

定理 1.3 (Brouwer の不動点定理 [7, p.172]) 単位開円板を $\mathbb{D}$ とし $F : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ を連続写像とする． このとき， $\overline{\mathbb{D}}$ 内に不動点が存在する．

周期点とその周囲の点の挙動を調べる際に，以下の概念を利用することでより簡単な力学系として考えることができる場合がある．

定義 1.4 $D, D' \subset \mathbb{C}$ を領域とし， $F : D \to D, G : D' \to D'$ を解析的な関数とする．$H \circ F = G \circ H$ を満たすような上への同相写像 $H : D \to D'$ が存在するとき， F と G は**位相共役**であるといい， H を**位相共役写像**という．（力学系において単に共役であるという場合，位相共役であることを示す場合がある．）つまり，以下の関係式が成立する．

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{F} & D \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ D' & \xrightarrow{G} & D' \end{array}$$

位相共役写像は周期点を周期点に写す．さらに位相共役写像が解析的ならば位相共役な関数は不動点における微分係数の値を保つ．このことを用いて複素力学系において有用な事実を導くことができる．まず以下の事実を準備する．

定理 1.5 (Schwarz の補題 [1, p.264]) F を $\mathbb{D}$ 上解析的な関数とし，$|F(z)| < 1$ かつ，$F(0) = 0$ を満たすとする．このとき， $|F(z)| \leq |z|$ であり， $|F'(0)| \leq 1$ となる．等合成立は $F(z) = e^{i\theta}(z)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ のときにのみ成り立つ．

Schwarz の補題と位相共役写像の考え方を用いて以下が成り立つことが示せる．

命題 1.6 U を $\mathbb{C}$ とは異なる単連結な開集合とし， $G : U \to U$ を解析的な関数であるとする． G が U 内に不動点 z_0 を持つとき，次のいずれかが成り立つ．

- z_0 は G の吸引不動点となる．
- z_0 は G の中立的不動点であり， G は回転に共役となる．

証明． U は単連結であるから，Riemann の写像定理 [8, p.247] により上への解析的同相写像 $H : \mathbb{D} \to U$ が存在して $H(z_0) = 0$ を満たす．このとき，$F(z) = H^{-1} \circ G \circ H(z)$ と定めると，$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は $F(0) = 0$ かつ $|F(z)| < 1$ を満たす．よって定理 1.5 の条件を満たすので等号が成立しないとき， $|F'(0)| < 1$ となる． $G'(z_0) = F'(0)$ であるから， G は吸引不動点を持つ． 等号が成立する場合 $F(z) = e^{i\theta}z$ と表せるから $|G'(z_0)| = 1$ であり，回転と共役となる． ■

周期点を定義したことにより，次に以下の概念が定義できる．

定義 1.7 解析的な関数 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の反発的周期点全体の閉包を F の**ジュリア集合**といい， $J(F)$ と表す．ジュリア集合の補集合を**ファトゥ集合**という．

ここでのジュリア集合およびファトゥ集合の定義は Devaney [1] で用いられているものであるがこの定義とは別の方法で定義される場合がある．そのことについては後述することとする．ジュリア集合上では複素数のカオス的な振る舞いが見られ，逆にファトゥ集合上では比較的おとなしく振舞うという性質があるが，そのことについてすぐに確認することは難しい．この時点では計算だけで確認できるジュリア集合の例のみを扱うこととする．

例 1.8 $a, b \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ とし，1 次多項式 $P(z) = az + b$ を考える．このとき，$J(P)$ は以下のように分類される．

- $|a| \leq 1$ ならば，$J(P) = \emptyset$
- $|a| > 1$ ならば，$J(P) = \left\{ \frac{b}{1-a} \right\}$

証明． 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，

$$P^k(z) = a^k z + \sum_{j=0}^{k-1} a^j b = a^k z + \frac{(a^k - 1)b}{a - 1}$$

であることを利用する．（ただし右の等式は $a \neq 1$ のときのみ成立する．）このことから，$|(P^k)'(z)| = |a^k| = |a|^k$ となるため，$|a| \leq 1$ ならば，すべての $z \in \mathbb{C}$ で $|P'(z)| \leq 1$ を満たす．よって反発的周期点が存在しないため $J(P) = \emptyset$ となる．$|a| > 1$ とする．このとき，$P^k(z) = z$ を解くと，$z = \frac{b}{1-a}$ を得る．これが唯一の反発的不動点となり，$J(P) = \left\{ \frac{b}{1-a} \right\}$ を得る． ■

1 次多項式のジュリア集合については簡単な計算によって完全に記述できるということが確認できた．しかしながら，この例ではジュリア集合が高々1 点の集合であるため，ジュリア集合上でのカオス的な振る舞いを確認することができず，興味深い例とはいえない．従って，多項式の力学系を考える際には 2 次以上のものを考えることとするのが一般的である．しかしながら，2 次多項式のジュリア集合を完全に記述することは全く容易ではない．ここでは最も簡単に記述できる例のみを確認し，他の例に関してはジュリア集合に関する性質を揃えてから確認することとする．

例 1.9 $P(z) = z^2$ とする．このとき，$J(P)$ は単位円となる．

証明． $n \in \mathbb{N}$ で $P^n(z) = z^{2^n} = z$ を解くと解は 0 と 1 の累乗根となる．$(P^n)'(z) = 2^n(z^{2^n - 1})$ であるから，0 は吸引的不動点であり，1 の累乗根は反発的周期点となる．n は任意に大きくとれるため，反発的不動点は単位円周上に稠密に存在する．よって $J(P)$ は単位円となる． ■

この例においてジュリア集合上の任意の点の近傍をとることを考える．するとその近傍は反復によってほとんど全平面にいきわたることが確かめられる．この事実は一般の多項式のジュリア集合においても成り立つことが示せる．

定義 1.10 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を開集合 U 上で定義された複素解析関数の族とする．$\{F_n\}$ の任意の部分列が，次の条件のうちどちらかを満たすような部分列をもつとき，族 $\{F_n\}$ は U 上の**正規族**であるという．

- ある関数に U 上広義一様収束する．
- ∞ に U 上広義一様収束する．

族 $\{F_n\}$ が z_0 の任意の近傍で正規族にならないとき，$\{F_n\}$ は z_0 で**正規でない**という．

関数 F の反復を関数の族として考えると，族 $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で点 z_0 が正規であるかどうかという情報は複素力学系において重要なものとなる．なぜなら，正規であるということはすなわち，その周囲の複素数は反復によってある一定の振る舞いを見せることを意味し，正規でないということはその点の周囲での複素数の反復による振る舞いが一定でないことを意味するからである．このことはファトゥ集合上とジュリア集合上での複素数の振る舞いの違いに近いものであると考えることができる．以下の命題はそのことを示すものの一つである．

命題 1.11 領域 $D\subset\mathbb{C}$ とし， $F:D\to D$ を解析的な関数，$z_0\in D$ を F の反発周期点とする．このとき，F の反復の族は z_0 で正規でない．

証明． まず，z_0 を不動点として考える．任意の n で $F^n(z_0)=z_0$ となるため，$F^n(z)$ は ∞ に収束することはない．よって z_0 の近傍で正規であることを仮定すると，$\{F^n\}$ の部分列がある関数 G に広義一様収束するような部分列を持つことになる．その部分列を $\{F^{n_i}\}$ とすると，$|(F^{n_i})'(z_0)|\to|G'(z_0)|$ となる．しかし，$|(F^{n_i})'(z_0)|\to\infty$ となることから矛盾．

z_0 が不動点でないような周期点の場合は，ある $k>1$ が存在して $F^k(z_0)=z_0$ となるので F^{kn} の部分列を考えることで同様の証明を得られる． ■

この命題は以下のような系を持つ．

系 1.12 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を解析的な関数とする．F の反復の族 $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $J(F)$ の任意の点で正規族にならない．

証明． $z\in J(F)$ を任意にとり，その近傍を U とする．このとき， U 内に反発的周期点が存在する．命題 1.11 より， $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は z_0 で正規でない．よって， z 近傍 U をどのようにとっても正規でない点を含むため， $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は U 上正規族にならない．つまり， $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は z で正規でないこととが示された． ■

点 $z_0\in J(P)$ に対してその近傍 U の反復を考えたい．そのために次の定理を準備する必要がある．

定理 1.13 (Montel の定理) $\{F_n\}$ を領域 U 上で定義された解析関数の族とする．ある $a,b\in\mathbb{C}(a\neq b)$ が存在して，任意の n と任意の $z\in U$ に対して $F_n(z)\neq a$ かつ $F_n(z)\neq b$ となるとき， $\{F_n\}$ は U 上正規族となる．

この定理により，力学系において重要な以下のような系を考えることができる．

系 1.14 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を解析的な関数とする． $z_0\in J(F)$ で U を z_0 の近傍とする．このとき，以下のいずれかを満たす．

- $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F^n(U)=\emptyset$
- $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F^n(U)=\{a\}\ (a\in\mathbb{C})$

証明． $\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U)$ が 2 点以上を除外する，すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して相異なる $a, b \in \mathbb{C}$ が存在し， 任意の $z \in U$ に対して $F^n(z) \neq a$ かつ， $F^n(z) \neq b$ を満たすと仮定する．このとき，定理 1.13 より， $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規族となる．しかし，系 1.12 より，$\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $z_0 \in J(F)$ で正規族にならないため矛盾する． ■

$z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U)$ のような点を**除外点**と呼ぶ．この系によって，ジュリア集合上の任意の点の近傍の F の反復による像は $\mathbb{C}$ 内で除外点を高々1 個持ち得るということが分かる．実際に除外点が存在する例を挙げると，多項式 $P(z) = z^2$ のジュリア集合は単位円であり，単位円上の点の近傍として U を 0 を含まないようにとると，次を満たす．

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

多項式については除外点を持つようなものを列挙することができる．すなわち，次の定理を満たす．

定理 1.15 P を 2 次以上の多項式とする．任意の $z_0 \in J(P)$ と z_0 の近傍で a を含まないようなもの U が以下を満たすとする．

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$

このとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ と自然数 k に対し， $P(z) = a + \lambda(z-a)^k$ となる．

証明． $P(b) = a$ であるとすると， a が除外点であることから b も除外点となる．しかし，除外点はただ一つに限るため， $a = b$ となる．よって a は不動点であり，a はそれ自身のただ一つの逆像となる．よってある k が存在して次のようにできる．

$$\frac{P(z) - a}{(z-a)^k} = G(z)$$

ここで G は $G(z) \neq 0$ であるような多項式である．代数学の基本定理より， $G(z)$ は定数となる． ■

除外点を持つような次数 2 以上の多項式については以下のように共役写像を作ることができる．

命題 1.16 P を a が除外点であるような次数 $k \geq 2$ の多項式とする．このとき， P は写像 $z \mapsto z^k$ と位相共役となる．

証明． 直前の定理から， $P(z) = a + \lambda(z-a)^k$ となる． $Q(z) = z^k$ と定め， μ を λ の任意の $k-1$ 乗根として $H(z) = \mu(z-a)$ と定めると， $Q \circ H = H \circ P$ を示すことができる．

除外点を持つような多項式は $z \to z^k$ に位相共役であるということからジュリア集合は円と同相であることが分かる．つまり，除外点を持つような多項式の挙動はある程度理解されると考えてよいため，今後の考察対象として多項式を考える際には除外点を持たないような多項式としてよい．

1.2 ジュリア集合の諸性質

ジュリア集合のもつ様々な性質をここでまとめることとする．ここで示している内容は多項式のジュリア集合について成り立つものを取り上げているが，その内容はもっと一般の関数（有理関数，あるいは整関数）で成り立つものが多い．それぞれの証明の際に多項式の性質に頼っている部分とそうでない部分を明確にし，より一般の場合での証明方法についても多少言及しつつ進めることとする．まずは，2 次以上の多項式のジュリア集合が空集合でないことを示したい．そのための準備として次が成り立つことを示す．

補題 1.17 $R(z)$ を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ で相異なる零点を持つような，次数 $n \geq 2$ の多項式とする．このとき次が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R'(\xi_j)} = 0$$

証明． $n = 2$ の場合を示す．$R(z)$ は 2 次多項式なので $R(z) = az^2 + bz + c$ と表し，ξ_1, ξ_2 を相異なる $R(z)$ の根とする．このとき，

$$\frac{1}{R'(\xi_1)} + \frac{1}{R'(\xi_2)} = \frac{2(a\xi_1 + a\xi_2 + b)}{(2a\xi_1 + b)(2a\xi_2 + b)}$$

となる．解と係数の関係より，分子は 0 となる．次に $n > 2$ とする．$Q(z)$ を $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ を根に持つような多項式とし， $R(z) = Q(z)(z - \xi_n)$ とする． 部分分数分解により，

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{Q'(\xi_j)(z - \xi_j)}$$

となる．よって

$$\frac{1}{Q(\xi_n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{Q'(\xi_j)(\xi_n - \xi_j)}$$

を得る．ここで $R'(\xi_n) = Q(\xi_n), R'(\xi_j) = (\xi_j - \xi_n)Q'(\xi_j)$ $(j < n)$ であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R'(\xi_j)} &= \frac{1}{Q(\xi_n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(\xi_j - \xi_n)Q'(\xi_j)} \\ &= \frac{1}{Q(\xi_n)} - \frac{1}{Q(\xi_n)} = 0 \end{aligned}$$

■

定理 1.18 $P(z)$ を多項式としたとき以下のどちらかが成り立つ．

- $P(z)$ は　$P'(z) = 1$ となるような不動点 q をもつ．
- $|P'(z)| > 1$ となるような不動点 q をもつ．

証明. $R(z)=P(z)-z$ とおくと，$R(z)$ の零点は P の不動点となる．まず，R が重根をもつならば，$R(\xi)=0, R'(\xi)=0$ を満たすような ξ が存在する．このとき，$P(\xi)=\xi, P'(\xi)=1$ を満たす．次に，R がすべて異なるような根を持つと仮定する．このとき，直前の補題より，以下を得る．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(\xi_j)-1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R'(\xi_j)}=0.$$

すべての i で $|P'(\xi_j)|\leq 1$ かつ $P'(\xi_j)\neq 1$ と仮定すると，$P'(\xi_j)-1$ は円 $|z+1|\leq 1$ の中にあり，0 でない．ゆえに，$1/(P'(\xi_j)-1)$ は左半平面に含まれる．しかし，

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P'(\xi_j)-1}=0$$

より，矛盾が導かれる． ■

この定理によって多項式 P が反発的不動点か中立的不動点をもつことが示された．反発的不動点が存在する場合はジュリア集合が空でないことは直ちにわかる．中立的不動点が存在する場合には以下が成り立つことが成り立つことが知られている．詳しくは [1, sec3.7] を参照のこと．

命題 1.19 [1, p.306] $P(z)$ を中立的不動点 z_0 を持つような多項式とする．このとき，z_0 の任意の近傍 U に対してある反発的周期点 $w\in U$ が存在する．

以上の事実により次が成り立つことが示される．

命題 1.20 P を次数 2 以上である多項式とすると，$J(P)\neq\emptyset$ である．

次の命題で同じ多項式の反復によってジュリア集合は変化しないことが分かる．

命題 1.21 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $J(P)=J(P^n)$.

証明. P と P^n のそれぞれの反発周期点の集合は等しいことはただちに分かる．よってそれぞれの集合の閉包としてジュリア集合を考えても等しいことが分かる． ■

次の定理は前節で定義したジュリア集合と正規でない点の集合についての重要な結果である．

定理 1.22 $J(P)=\{z \mid \{P^n\}$ は z で正規でない $\}$.

証明. すでに示した系 1.12 により，$\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $J(P)$ の任意の点で正規でない．よって，$\{P^n\}$ が正規でないような点の任意の近傍において反発周期点の存在を示せばよい．$p\in\mathbb{C}$ を $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で正規でないような点とし，その近傍 W を任意にとったとき，W 内に P の反発的周期点が存在することを示す．多項式のジュリア集合は空でないため，ある $z_0\in J(P)$ をとることができる．命題 1.21 より z_0 を不動点としてよい．z_0 は臨界点ではないため z_0 のある近傍 U_0 が存在して逆写像が U_0 上で定義できる．z_0 は P^{-1} の吸引不動点とみることができるため，$P^{-1}(U_0)\subset U_0$ とな

ると仮定してよい．任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $U_j = P^{-j}(U_0)$ と定めておく． $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は p で正規でないため，ある $z_1 \in W$ とある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $P^n(z_1) = z_0$ を満たす． z_0 も $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の正規でない点なので z_0 の近傍 U_0 内にある z_2 とある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $P^m(z_2) = z_1$ を満たす．よって $P^{m+n}(z_2) = z_0$ を満たす．この z_2 は $(P^{m+n})'(z_2) \neq 0$ となるように構成できる．(もし $(P^{m+n})'(z_2) = 0$ である場合は z_0 の近傍 U_0 を z_2 を含まないように取り直して議論すればよい．近傍の取り方は任意であるため，このようにして取り直した z_2 が $(P^{m+n})'(z_2) \neq 0$ を満たすまで同様の操作を繰り返すことができる.) よって z_2 の近傍 V を $V \subset U_0$ となるようにとると $P^{m+n}(V)$ は z_0 を含み， $P^m(V)$ は W と交わる． $P^m(V) \subset W$ となるように V を小さくとったものを V' とおけば，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して P^{m+n} が V' を U_k に微分同相に写すようにできる．このとき P^{m+n+k} は V' から U_0 への上への微分同相写像となる．よって $P^{-(m+n+k)}$ は U_0 を U_0 内に写す写像となるため，定理 1.3 より不動点が存在する．命題 1.6 より不動点は吸引的不動点となるため， P^{m+n+k} は反発的不動点を z_0 の近傍内に持つ．この点の P による軌道は W 内を通るため，W 内に反発的周期点が存在する． ■

ここまではジュリア集合の定義として反発周期点の閉包と設定していたが，上の定理にもある通り，同値な定義として正規でない点の集合を考えることができる．この結果によってジュリア集合の構造やその中での振る舞いについて数多くの事実を導くことができる．そのうちの 1 つとして次のようなものがある．

命題 1.23 $J(P)$ は孤立点を持たないような集合となる．

この命題は上の定理より， $\{P^n\}$ が正規でないような任意の点が反発周期点の集積点となることが分かることから従う．

さらに，定理 1.22 より次の重要な事実がわかる．

命題 1.24 $J(P)$ は P により**完全不変**である． すなわち，$P(J(P)) = J(P) = P^{-1}(J(P))$ を満たす．

証明. z_0 を P の反発的周期点とすると， $P(z_0)$ は P の反発的周期点となるため， $J(P) = P(J(P))$ である．従って， P の逆写像とその反復による不変性を確かめればよい． $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 z_0 で正規でないとすると， 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P^{-n}(z_0)$ は $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の正規でない点となることがわかる．よって，$z_0 \in J(P)$ ならば，$P^{-1}(z_0) \subset J(P)$ となる．よって $P^{-1}(J(P)) \subset J(P)$ であるから，$P^{-1}(J(P)) = J(P)$ となる． ■

完全不変性は力学系を考察する上で重要な概念となる．なぜなら，P により完全不変な集合 C_1 とその補集合 C_2 は P による順像と逆像がともに不変であるため，力学系を C_1 と C_2 に完全に分離して考えることができるからである．このことによってわかる重要な事実として以下のようなものがある．

命題 1.25 $z_0 \in J(P)$ とするとき，次が成り立つ．

$$J(P) = \overline{\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(z_0)\right)}.$$

証明． 任意の $z \in J(P)$ とその近傍を U とする．このとき，系 1.14 より，ある $z_1 \in U$ と $n \in \mathbb{N}$ が存在して $P^n(z_1) = z_0$ を満たす．よって $z_1 \in P^{-1}(z_0)$ となる．z_0 は $J(P)$ 上の点だから $z_1 \in J(P)$ となる． よって任意の $z \in J(P)$ と任意の近傍 U に対してある $z_1 \in U \cap J(P)$ とある $n \in \mathbb{N}$ が存在し， $z_1 \in P^{-n}(z_0)$ となる．つまり，任意の $z \in J(P)$ は P よる z_0 の逆像であるかその集積点である． ■

この命題はジュリア集合をプロットする際に便利なものとなる．具体的には，関数の反発的不動点を 1 つみつけ，その関数の反復による逆像を計算することでジュリア集合を得るわけである．

また，次の命題も成り立つことが示せる．この命題に関しては多項式以外では成り立つとは限らない．その反例については 2 章で確認することにする．

命題 1.26 $J(P)$ は内点を持たない．

証明． $J(P)$ が開集合を含むとすると， $J(P)$ はただ一つの除外点を除くすべての点を取り得る．しかし， ∞ の吸引域は反発周期点全体の閉包に含まれることはないため，ジュリア集合に含まれない．よって， $J(P)$ は開集合を含むことはないため，内点を持たない． ■

1.3 2 次多項式のジュリア集合とマンデルブロー集合

以下では具体例として 2 次多項式のジュリア集合を考える．ここでは後の章で主題となる指数関数の力学系との比較対象として 2 次多項式の力学系を考えるため，証明については行わない．詳細は，[1, sec3.2] 及び， [1, sec3.6] を参照して欲しい．2 次多項式 $P(z) = a(z-p)^2 + q$ $(a \neq 0)$ は共役写像 $H(z) = \frac{z}{a} + p$ をとることにより，$Q(z) = z^2 + a(q-p)$ と共役になる．つまり， $c = a(q-p)$ とおけば単純な形である $Q_c(z) = z^2 + c$ として考えることができる．すなわち， Q_c のパラメータ c を変化させることですべての 2 次多項式のジュリア集合を調べることができる．

$Q_c(z) = z^2 + c$ として複素数 c を変化させる場合を考える．この単純に見える関数において単に c を変化させただけでジュリア集合は全く異なったものとなる．先に述べた通り， $c = 0$ のときはジュリア集合は単位円となる．この単位円は 0 の吸引域と ∞ の吸引域の境界となっている．同様なことが c が十分 0 に近い場合でも成り立つ．具体的には次の命題が成り立つ．

命題 1.27 [1, p289] $|c| < 1/4$ とする．このとき， Q_c のジュリア集合は単純閉曲線となる．

この命題において c が虚数である場合を考える．その場合，ジュリア集合は単純閉曲線で滑らかな孤を含まないようなものとなる．

次に $|c|$ が十分に大きい場合について述べる．この場合のジュリア集合については次の命題が成り立つことが知られている．

命題 1.28 [1, p270] c を $|c|$ が十分に大きい複素数とする．このとき，$J(Q_c)$ は Q_c によって不変な**カントール集合**となる．すなわち，任意の連結成分が 1 点集合であるような閉集合かつ完全集合となる．

さらに他の c に関しても異なるジュリア集合を見つけることができる．

例 1.29 $P(z) = z^2 - 1$ とする． $P(0) = -1, P(-1) = 0$ であり， $P'(0) = 0$ となるため， $0, -1$ は吸引周期軌道上の点となる．また， $(1 \pm \sqrt{5})/2$ に 2 つの反発不動点を持つ．不動点 $(1 - \sqrt{5})/2$ は 0 と -1 の 2 つの吸引域を分けるような点となっている．2 つの吸引域を囲むように単純閉曲線が 2 つ存在することが示せるが，この場合のジュリア集合はこれだけではない．実は 1 の周りにも -1 を囲むような単純閉曲線と同様なものが存在することが示せる．それぞれの閉曲線は異なる逆像の対を持つため，ジュリア集合は無限個の異なる単純閉曲線の構造を含んでいるということになる．つまりファトゥ集合は無限個の連結成分を持つことになる．

実は 2 次多項式のファトゥ集合の連結成分について以下のことがいえる．

命題 1.30 [1, p293] P を 2 次多項式とするとき， P のファトゥ集合の連結成分の個数は 1 個，2 個，無限個のいずれかとなる．

いくつかのジュリア集合の図を見てみよう．以下の図中の塗りつぶされた部分とその外側との境界部分がそれぞれのジュリア集合を示している．

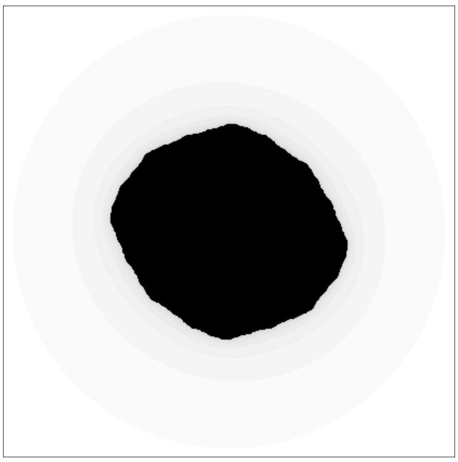

図 1: $c = -1/10 + i/10$ の場合

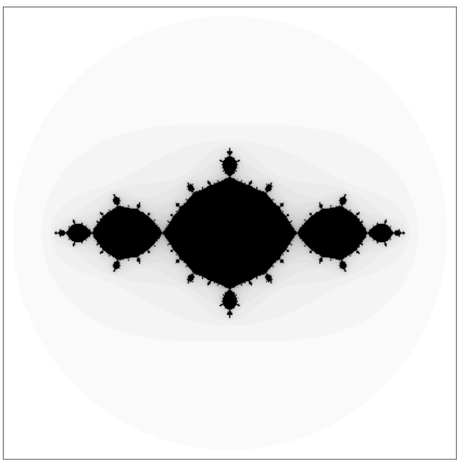

図 2: $c = -1$ の場合

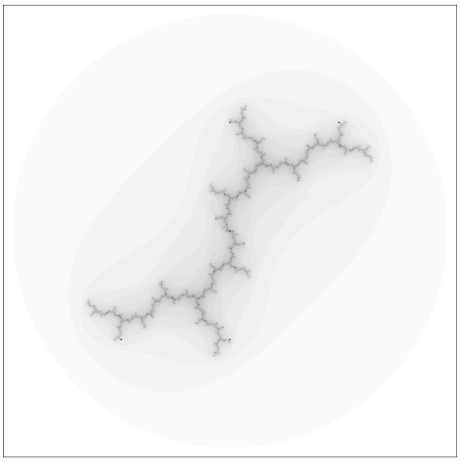

図 3: $c = -i$ の場合

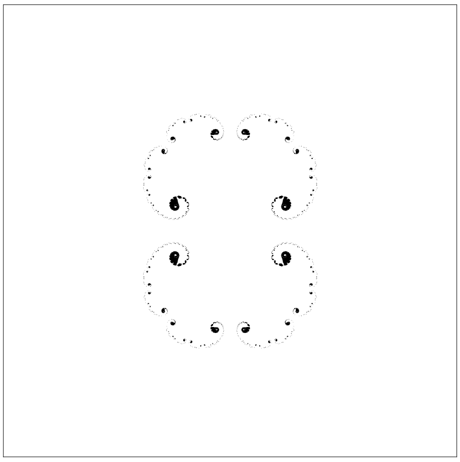

図 4: $c = 3$ の場合

以上のように Q_c のパラメータ c を変化させることでそのジュリア集合を分類してきたが，その分類についてもう少し詳細にみることにする．まず，以下を定義する．

定義 1.31 Q_c において，その反復による点の軌道の絶対値が ∞ 発散しないような点全体の集合を Q_c の**充填ジュリア集合**といい， K_c とあらわす．すなわち，

$$K_c = \{z \mid \text{ある } M \in \mathbb{R} \text{ が存在して任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } |Q_c^n(z)| \leq M\}$$

となる．

ジュリア集合の点の軌道は ∞ に行くことはないため， $J(Q_c)$ の点は K_c に含まれる． K_c は完全不変な集合となる． さらに，K_c の内部の点及び，外部の点はそれぞれ正規であるような点であるが収束先が異なるため， K_c の境界の点は正規でないような点となる．多項式のジュリア集合は内点を持たないため，K_c の内点は $J(Q_c)$ に含まれない．よって $J(Q_c) = \partial K_c$ となる．

また，以下の 2 つが成り立つことに注意しつつ，マンデルブロー集合を定義する．充填ジュリア集合及び，マンデルブロー集合についての詳細は [1, sec3.8] を参照のこと．

命題 1.32 [1, p.313] ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|Q_c^n(0)| \leq M$ とし，$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |Q_c^n(z)| \to \infty \ (n \to \infty)\}$ とする．このとき，$\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ を満たすような上への解析的同相写像

$$\phi_c : U_1 \to \{z \mid |z| > 1\}$$

が存在し， $J(Q_c)$ は U_1 の境界となる．

系 1.33 ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|Q_c^n(0)| \leq M$ ならば， K_c は連結である．

定義 1.34 以下を満たすような集合 $\mathcal{M}$ を**マンデルブロー集合**という．

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid |Q_c^n(0)| \nrightarrow \infty \ (n \to \infty)\}$$

$|Q_c^n(0)| \nrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$ となるとき，$J(Q_c) = K_c$ は無限個の連結成分を持つ．よって K_c が連結でないならば $|Q_c^n(0)|$ の値は有限となる．このことと，系 1.33 より，マンデルブロー集合について次が成り立つ．

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c\text{は連結}\}$$

マンデルブロー集合は連結集合であることが知られている．他にもマンデルブロー集合は様々な性質や独特な構造を持ち，力学系における重要な考察対象とされている．ここでマンデルブロー集合について取り上げたのは，後に取り扱う力学系の構造安定性についての理解を助けるための例といえるからである．

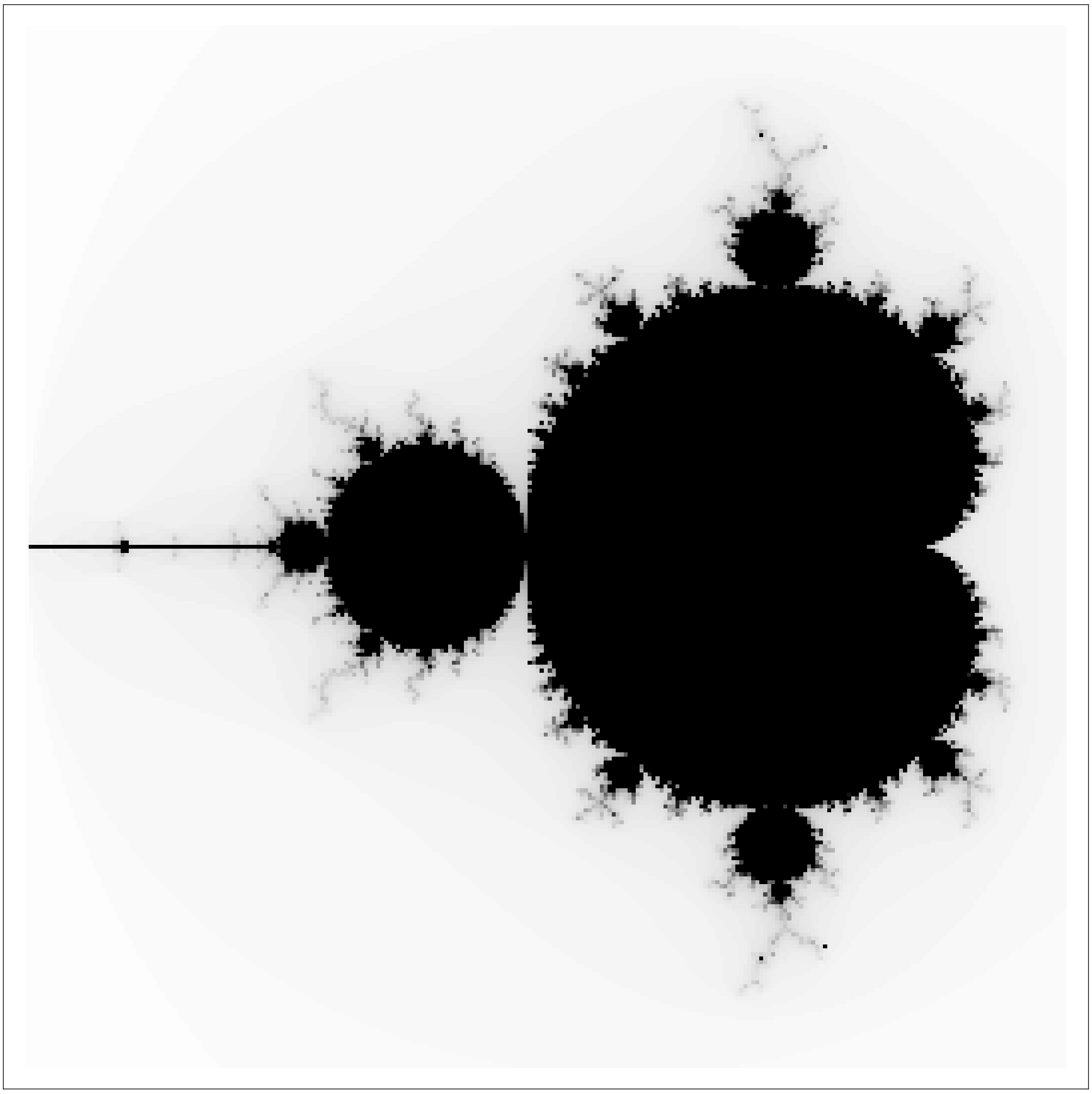

図 5: マンデルブロー集合

2　指数関数の力学系

この章では指数関数の力学系について述べる．指数関数は整関数であるため，1 章で用意した内容の一部はそのまま適用できない場合があるが，大半の命題についてはそのまま適用できる．超越整関数の力学系の性質や他の例については [6] 等で触れられている．ジュリア集合の定義は反発的周期点全体の閉包としていたが，定理 1.22 より，多項式の場合では同値な定義として正規でない点全体として考えることができた．この事実は整関数でも成り立つことが知られており，指数関数においても成り立つ．この事実の証明の議論において依存した多項式の性質はジュリア集合が空でないことだけであった．指数関数 e^z については具体的に反発不動点を見つけることができるのでジュリア集合が空でないことは確認できる．これについては後に確認することとして，しばらくはジュリア集合は正規でない点全体の集合として扱うこととする．

2.1　指数関数のジュリア集合

ここでは指数関数 $E(z) = e^z$ の力学系について述べる．まずは指数関数 $E(z)$ のジュリア集合 $E(z)$ が複素平面全体であることを示したい．すなわち，以下の定理がこの節での目標となる．

定理 2.1 $J(E) = \mathbb{C}$

前述の通り，多項式のジュリア集合は内点を持たない集合であったが，指数関数のジュリア集合ではその例には当てはまらないことがわかる．指数関数のジュリア集合に関する以下の事実は，Misiurewicz[4] によって証明された内容である．このことを証明するためにはいくつかの手順を踏むことになる．まずは次の命題を示す．

命題 2.2 任意の実数は $J(E)$ に含まれる．

証明． $S = \{z \mid |\mathrm{Im}(z)| \le \pi/3\}$ と定める． $z = x + iy \in S$ とすると， $|\mathrm{Re}(e^z)| = |e^x \mathrm{cos} y| \ge e^x/2 > x$ を満たす．よって任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $E^j(z) \in S$ ならば，$\mathrm{Re}(E^j(z)) \to \infty \ (j \to \infty)$ となる．$z \in S, \mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) \neq 0$ ならば次が成り立つ．

$$|e^x \mathrm{sin} y| > e^x \left(\frac{2}{\pi}|y|\right) > |y|$$

このことから，$z \in S, \mathrm{Re}(z) > 1, z \notin \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$ ならば，

$$|\mathrm{Im}(E^{j+1}(z))| > \frac{2e}{\pi}|\mathrm{Im}(E^j(z))|$$

を満たす．よってある $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在し， $E^{j_0}(z) \notin S$ となる．つまり，実数直線上にないような S 内の点は反復によって S の外に出ていくことになる．

ここで， $x \in \mathbb{R}$ とその近傍 U を任意にとる． このとき，$E^j(x) \to \infty$ を満たしている．また，ある $k \in N$ が存在して

$$E^k(U) \cap \partial S \cap \{z \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\} \neq \emptyset$$

となる．$T = \{z \mid \mathrm{Im}(z) = \pi/3\}$ とすると， $E(T) = \{z \mid \arg z = \pi/3\}$ となるので， $E^{k+1}(U) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = \pi\} \neq \emptyset$ かつ，$E^{k+1}(U) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ を満たす．よって $E^{k+2}(U) \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset$ となるので， $E^{k+3}(U) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ となる．つまり， U の一部分は単位円板内部に写されることになる．よって任意の $M \in \mathbb{R}$ に対してある $z_1, z_2 \in U$ と十分に大きな自然数 l が存在し， $E^l(z_1) \in \mathbb{D}, |E^l(z_2)| > M$ を満たす．これは $\{E^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が U 上で正規でないことを示す．ゆえに $x \in J(E)$ が示された． ■

以上から $\mathbb{R}$ の E の反復による逆像全体が複素平面上で稠密であることを示せば，ジュリア集合が閉集合であることから $J(E) = \mathbb{C}$ を示すことができる．そのためにいくつかの補題を準備しなければならない．まず，以下の 2 つを準備する．

補題 2.3 任意の $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対して $|\mathrm{Im}(E^n(z)| \leq |(E^n)'(z)|$ を満たす．

証明． $z \in \mathbb{R}$ ならば， $\mathrm{Im}(E^n(z)) = 0$ であるから成立する．以下， $z = x + iy$ とすると，

$$|\mathrm{Im}(E(z))| = e^x|\sin y| \leq e^x|y| = |E'(z)||\mathrm{Im}(z)|.$$

$z \notin \mathbb{R}$ すなわち $y \neq 0$ とすると，

$$\frac{|\mathrm{Im}(E(z))|}{|\mathrm{Im}(z)|} \leq |E'(z)|.$$

このことから，

$$\frac{|\mathrm{Im}(E^n(z))|}{|\mathrm{Im}(E(z))|} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\mathrm{Im}(E(E^i(z)))|}{|\mathrm{Im}(E^i(z))|} \leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))|.$$

$|\mathrm{Im}(E(z))| \leq |E(z)| = |E'(z)|$ より，

$$|\mathrm{Im}(E^n(z))| \leq \prod |E'(E^i(z))| = |(E^n)'(z)|.$$

■

補題 2.4 B を半径 δ の円板， F を任意の $z \in B$ で $|F'(z)| > \mu$ を満たす解析的同相写像とする．このとき， $F(B)$ は半径 $\mu\delta$ の円板を含む．

証明． z_0 を B の中心とし， $F(z_0) = w_0$ とする．F は B 上同相な正則写像であるから， $F^{-1} : F(B) \to B$ も正則である．よって任意の $w \in F(B)$ において $|(F^{-1})'(w)| < 1/\mu$ を満たす． w_1 を $F(B)$ の境界上の点で $|w_1 - w_0|$ が最小となるような点とすると，$F^{-1}(w_1) = z_1$ は B の境界上の点となる．よって C を $F(B)$ 内に含まれる w_0 と w_1 を結ぶ線分とすれば

$$\delta = |z_1 - z_0| = \left|\int_C (F^{-1})'(w)dw\right| \leq \frac{1}{\mu}|w_1 - w_0|$$

となる．よって $|w_1 - w_0| \geq \mu\delta$ だから，$F(B)$ は半径 $\mu\delta$ の円板を含む． ■

S 内の実数でない点は E の反復により外に出ていくことは既に示した．しかし次のことから，S の外の点のほとんどは反復によって S 内に戻ってくるということが分かる．

補題 2.5 U を連結な開集合とする． $S \cap E^n(U) = \emptyset$ を満たすような $n \in \mathbb{N}$ は高々有限個である．

証明． $E^n(U) \cap S = \emptyset$ を満たすような自然数 n が無限個存在すると仮定する．まず，ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して E^j が U を同相に写さないと仮定すると E^j は単射でなくなるため，$z_1 \neq z_2$ となるような $z_1, z_2 \in U$ が存在して $E^j(z_1) = E^j(z_2)$ を満たす．このとき， ある $l \in \mathbb{Z}$ が存在して $E^{j-1}(z_1) = E^{j-1}(z_2) + 2l\pi$ を満たす．このとき E^j は連続写像であることと U の連結性から，ある $l' \in \mathbb{Z}$ とある $z_3 \in U$ が存在して $E^{j-1}(z_3) = 2l'\pi$ を満たすため， $E^j(z_3) \in \mathbb{R}$ となる．従って任意の $m \in N$ に対して $E^{j+m}(U) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ となることから $E^n(U) \cap S = \emptyset$ となるような n は有限個しか存在しないことを意味する．しかしこれは最初の仮定に矛盾する．よって以下，任意の n に対して E^n は同相写像であると考える．任意の j に対して $E^{n_j}(U) \cap S = \emptyset$ を満たすような点列 n_j を考える．

$$|(E^{n_j})'(z)| = \prod_{i=0}^{n_j-1} |E'(E^k(z))|$$

であることと， $|\mathrm{Im}(E^k(z))| \geq \pi/3$ を満たす $k < n_j$ が j 個存在することから，$|(E^{n_j})'(z)| > (\pi/3)^{n_j}$ となる．よって E^{n_j} が U 上同相であることと補題 2.4 より，U 内に半径 δ の円板を含めば， $E^{n_j}(U)$ 内に半径 $(\pi/3)^j\delta$ の円板を含む．j は任意であることから，十分に大きい j をとれば $E^{n_j}(U)$ は S と交わるが，これは最初の仮定に矛盾する． ■

補題 2.6 V を連結な開集合とし， $H = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 4\}$ とする． $E^k(V) \subset H$ を満たすような $k \in N$ が無限個存在するならば， $E^n(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

証明． このような n が存在しない，すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $E^n(V) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ となると仮定する．このとき，

$$W = \{z \mid |\mathrm{Im}(z)| \leq 2\pi \text{かつ} |\mathrm{Im}(E(z)| \leq 2\pi\}$$

と定めると，任意の n に対して $E^n(V) \cap \partial W = \emptyset$ となる．（W の境界と交わるとすると， $E^n(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ となる n が存在するため仮定に矛盾．）連結開集合 $A \in \mathbb{C}$ が $A \cap W = \emptyset$ を満たすならばならば， $A \cap S = \emptyset$ または， $E(A) \cap S = \emptyset$ を満たすことに注意する．補題 2.5 より， $E^k(V) \subset H$ を満たす k で W と交わらないものは有限個に限る． $E^k(V)$ は ∂W と交わらないことから，有限個の k を除いてすべての k で $E^k(V) \subset W$ を満たす．ここで， H 内における S の境界すなわち，集合 $T = \{z \in \partial S \mid \mathrm{Re}(z) > 4\}$ を考える． $z \in T$ であれば，

$$|\mathrm{Im}(E(z))| \geq e^4 \sin\frac{\pi}{3} > 2\pi$$

となるため， $T \cap W = \emptyset$ となる．よって $W \cap H$ に含まれる集合は S の境界と交わらない． $S \cap H$ 無限個の k で $E^k(V) \subset W \cap H$ であることと，任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対してある $j \in \mathbb{N}$ が存在して $E^j(z) \notin S$ となることから，無限個の k に対して $E^k(V) \cap S = \emptyset$ となるがこれは補題 2.5 に矛盾する． ■

以上のことから，本節の目標である定理 2.1 の証明が可能となる．

証明．(定理 2.1) 前に述べたように， $\mathbb{C}$ の任意の開集合が $\mathbb{R}$ の E による反復のある逆像に交わることを示せば十分となる．そこで，U を $\mathbb{C}$ の任意の連結開集合とし， すべての $n \in \mathbb{N}$ で $E^n(U) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ と仮定する．このとき，定理 1.13 より，$\{E^n\}$ は U 上の正規族である．

D を 0 を中心とする半径 e^4 の閉円板とする．このとき， $E(H)$ は D の補集合となっている．よって補題 2.6 より， $E^n(U) \cap D \neq \emptyset$ を満たす自然数 n が無限に存在する．ここで， E^n は U 上の正規族なのでその部分列の極限関数 F が存在し， $F(U) \cap D \neq \emptyset$ を満たす． $z_0 \in F(U) \cap D$ で $z_0 \notin \mathbb{R}$ をみたすものを一つとる．このとき，命題 2.2 で示した通り， $E^k(z_0) \notin S$ をみたすような自然数 k が存在する．このことを使うと，ある $w \in U$ と E^n の部分列 E^{n_j} で任意の自然数 j に対して $E^{n_j}(w) \notin S$ を満たすものが存在することが分かる．つまり，w のある開近傍 V が存在してすべての j で $E^{n_j}(V) \cap S = \emptyset$ を満たす． しかし，補題 2.5 より，$E^n(V) \cap S = \emptyset$ を満たすような n は高々有限個であることに矛盾する．よって仮定が否定され，定理が示される． ■

2.2　指数関数 e^z の反復合成による点の挙動

指数関数の力学系に関してジュリア集合が複素平面全体であることは既に示した通りであるが，ここではその反復合成による挙動をより明確にすることを目標としたい．ここでの議論は文献 [3] で示された内容を再構成したものが中心となっているが，一部の議論で [6] を参考にした．指数関数 $E(z) = \exp(z)$ は $2\pi i$ を周期に持つような関数であることから，以下のように $R(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ を定めることで複素平面を分けることを考えたい．

- $k \geq 1$ のとき　$R(k) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2(k-1)\pi < \mathrm{Im} z < 2k\pi\}$
- $k \leq -1$ のとき　$R(k) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2k\pi < \mathrm{Im} z < 2(k+1)\pi\}$

さらに $R(0) = \mathbb{R}$ とし， $R(0^+) = \mathbb{R}_{>0}$，$R(0^-) = \mathbb{R}_{<0}$ と定める．さらに，以下で記号力学系を導入する．集合 A を $A = (\mathbb{Z} \cup \{0^+\} \cup \{0^-\}) \setminus \{0\}$ と定める．任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $s = s_0 s_1 s_2 \cdots$ $(s_j \in A)$ を各 j に対して s_j が以下によって定まる記号列とする．

- $\mathrm{Im}(E^j(z)) \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき， $E^j(z) \in R(k)$ ならば，$s_j = k$
- $\mathrm{Im}(E^j(z)) = 2k\pi$ $(k \neq 0)$ のとき， $s_j = k$
- $E^j(z) \in \mathbb{R}_{>0}$ のとき， $s_j = 0^+$， $E^j(z) \in \mathbb{R}_{<0}$ のとき， $s_j = 0^-$

z を任意にとることによって定まるこの列を z の**道程** (itinerary) と呼び，$S(z)$ と表す．$S(z)$ の j 成分は s_j と表される．明らかに，$s_j = 0^{\pm}$ ならば $s_{j+k} = 0^{+}$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たす．

一方 A の要素からなる記号列 s を任意に考えたとき，必ずしも何らかの z の道程となるとは限らない．記号列 s に対してある z が存在し，$S(z) = s$ となるとき，s は**許容道程**であるという．許容道程であるような無限列全体の集合を Σ と表す．以下で s が許容道程となるような必要十分条件を考えたい．まず以下を満たすことを示す．

命題 2.7 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してその道程を $s = s_0 s_1 s_2 \cdots$ とする．このときある $x \in \mathbb{R}$ が存在し，すべての j に対して $2\pi|s_j| \leq E^j(x)$ を満たす．

証明． $z \in \mathbb{C}$ に対し，$y = |\mathrm{Re}(z)|$ とする．このとき，$|E(z)| \leq e^y$ であるから，帰納的に $|E^j(z)| \leq E^j(y)$ を得る．$x = y + 2\pi$ と定めると，$y \geq 0$ なので，

$$E(x) = e^y\, e^{2\pi} \geq e^y + 2\pi$$

を満たす．よって帰納的に，

$$E^j(x) \geq E^j(y) + 2\pi$$

であるから，

$$2\pi|s_j| \leq |E^j(z)| + 2\pi \leq E^j(y) + 2\pi \leq E^j(x)$$

を満たすことが示された． ■

命題 2.7 の不等式 $2\pi|s_j| \leq E^j(x)$ $(j \in \mathbb{N})$ を満たすような記号列 s を **exponential order** と呼ぶ．次のような記号列の集合 Σ を考える．

- $s_j = 0^{\pm}$ ならば $s_{j+k} = 0^{+}$ $(j, k \in \mathbb{N})$
- s は exponential order

s が許容道程となる必要十分条件は $s \in \Sigma$ であることを示したい．すなわち $s \in \Sigma$ ならば，ある z が存在して $S(z) = s$ を満たすことを示したい．そのためにはいくつかのステップを踏む必要がある．まず，以下を示す．

命題 2.8 $s = s_0 s_1 s_2 \cdots s_n 111 \cdots$（あるいは $s_0 s_1 s_2 \cdots s_n \cdots -1-1-1 \cdots$）で $s_i \neq 0^{\pm}$ $(j \leq n)$ とする．このとき，$S(z) = s$ を満たす z が存在する．

証明． まず，$R(1), R(-1)$ 内にはそれぞれ不動点が存在することを示す．$e^z = z$ を満たすならば，$e^x \cos y = x$ かつ，$e^x \sin y = y$ を満たす必要がある．この 2 曲線の交点のうち，$y \in (0, \pi)$，$y \in (-\pi, 0)$ を満たすものがそれぞれ 1 つ存在することから，不動点の存在がいえる．$R(1)$ 内の不動点を z_0 とすると，各 $R(k)$ で E によって z_0 に写される点が存在するので $S(z) = s$ を満たすような z の存在がいえる．$R(-1)$ 内の不動点についても同様のことがいえる．それぞれの不動点は単位円の外側にあり，明らかに反発的不動点となる．詳しくは図を参照せよ． ■

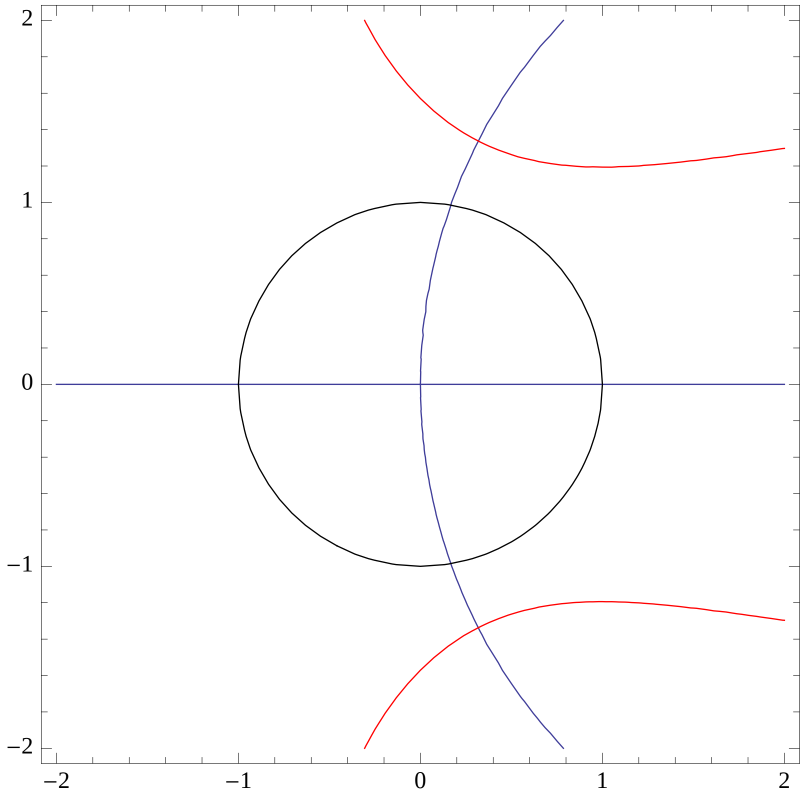

図 6: $e^x \cos y = x$ の曲線（赤）と $e^x \sin y = y$ の曲線（青）

$s \in \Sigma$ を $s_j \neq 0^{\pm}$ $(j \in \mathbb{N})$ を満たすようにとる．このとき，s は exponential order であるから，$E^j(\hat{x}) \geq 2\pi|s_j|$ が任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような $\hat{x} \in \mathbb{R}$ が存在する．以下，$\hat{x} > 2\pi$ と考える．

$$B_j := \left\{ z \in \overline{R(s_j)} \mid E^j(\hat{x}) \leq \mathrm{Re}(z) \leq E^j(\hat{x}) + 2\pi \right\}$$

と定めると次が成り立つ．

命題 2.9 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して以下の 3 つを満たす．

(i) $E(B_j) \supset B_{j+1}$

(ii) $s_{j+1} \neq \pm 1$ ならば，$B_j \cap E^{-1}(B_{j+1}) \subset B_j^{\circ}$

(iii) $A \subset B_{j+1}^{\circ}$ ならば，$B_j \cap E^{-1}(A) \subset B_j^{\circ}$

証明． $E(B_j)$ は半径 $E^{j+1}(\hat{x})$ の円と，半径 $E(E^j(\hat{x}) + 2\pi)$ の円で囲まれる閉円環である．外側の円板上の点で $|\mathrm{Im}(z)| = \mathrm{Re}(z)$ を満たす点の実部は $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{2\pi} E^{j+1}(\hat{x})$ であり，この値は $E^{j+1}(\hat{x}) + 2\pi$ より大きい．ここで，$z \in B_{j+1}$ を任意にとると，$|\mathrm{Im}(z)| \leq |s_j|\pi$ であり，$\mathrm{Re}(z) \geq E^j(\hat{x}) \geq 2|s_j|\pi$ であるから，$|\mathrm{Im}(z)| \leq \mathrm{Re}(z)$ を満たす．また，$\mathrm{Re}(z) \in [E^{j+1}(x), E^{j+1}(x) + 2\pi]$ であるから，$z \in E(B_j)$ を満たすので $E(B_j) \supset B_{j+1}$ を得る．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対する B_{n+1} と $E(B_n)$ の位置関係の詳細については図を参照せよ．さらに $z \in E(\partial B_j)$ となるのは，$s_{j+1} = \pm 1$ のときに限る．よって $s_{j+1} \neq \pm 1$ ならば，$B_j \cap E^{-1}(B_{j+1}) \subset B_j^{\circ}$ を得る． ■

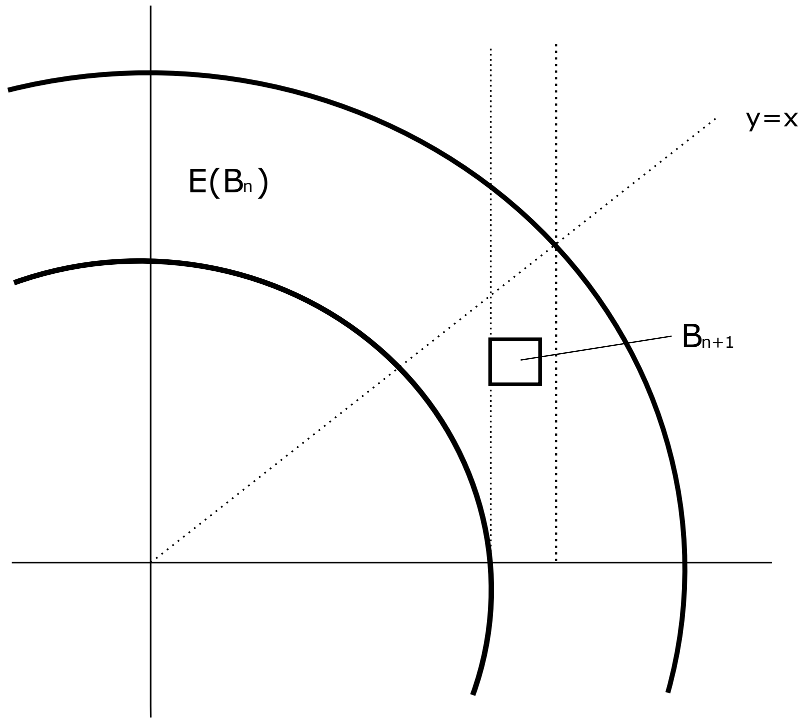

図 7: B_{n+1} と $E(B_n)$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，W_n を $E^{-1}(B_{n+1}) \cap B_n$ の連結成分で E によって B_{n+1} に同相に写されるものとする．さらに，

$$V_n := \left\{ z \in B_0 \mid E^j(z) \in W_j \ (j = 0, 1, \cdots, n-1) \right\}$$

と定める．このとき次が成り立つ．

命題 2.10 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して V_n は空でない閉集合である．さらに以下を満たす．

- $V_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} E^{-j}(W_j)$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$

証明． 各 n に対して B_n は閉集合であるから，W_n も閉集合となる．よって各 j に対して $E^{-n}(W_n)$ も閉集合であるから V_n は閉集合である．各 n に対して V_n がコンパクト空間 B_0 内の空でない閉集合であるとし，$V_n \supset V_{n+1}$ を満たすとする．このとき，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ となることを示したい．$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \emptyset$ であると仮定すると，$D_n := B_0 \setminus V_n$ は開集合であり，以下を満たす．

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = B_0$
- $D_n \subset D_{n+1}$

このとき，B_0 のコンパクト性より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $D_{n_0} = B_0$ となるため，$V_{n_0} = \emptyset$ となるため矛盾する．よって $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ が示される． ■

ここまでの事実から次のことが示せる．

命題 2.11 $s \in \Sigma$ を $s_i \neq 0^{\pm}$ $(i \in \mathbb{N})$ を満たすようにとる．このとき，ある $z \in \mathbb{C}$ が存在して $S(z) = s$ を満たす．

証明． $s_j = \pm 1$ のときは議論の方法が異なるため，まずはその場合を除いて考える．$s \in \Sigma$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $j > n$ が存在して $s_j \neq 0^{\pm}$ かつ $s_j \neq \pm 1$ となるようにとる．このとき， $S(z) = s$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を構成する．命題 2.10 より，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ は空でない． $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ を任意にとる．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n := E^n(z) \in B_n$ となる．さらに仮定より，ある $j \in \mathbb{N}_{\geq n}$ が存在して $s_j \neq \pm 1$ となる．よって命題 2.9 (ii) より， $z_{j-1} \in B_{j-1}^{\circ}$ となる．さらに命題 2.9 (iii) より，任意の $k \in \mathbb{N}_{\leq j-2}$ で $z_k \in B_k^{\circ}$ となる．よって $S(z) = s_0 s_1 \cdots s_n \cdots$ となる． n は任意であるから $S(z) = s$ を満たす．

次にある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $j \geq n$ ならば $s_j = \pm 1$ を満たす場合を考える．同じように $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ とする．命題 2.8 より， $j \geq n$ ならば $s_j = 1$ （あるいは $j \geq n$ ならば $s_j = -1$）を満たす場合は既に示した．よって $j \geq n$ で $s_j = 1, s_{j+1} = -1$ となる場合を考える．このとき， $z_{j-1} \in B_{j-1}^{\circ}$ を満たすので，任意の $k \in \mathbb{N}_{\geq j-2}$ で $z_k \in B_k^{\circ}$ となる．この j は任意に大きくとれる．よって $S(z) = s$ となる z が構成される． ■

これによって S の全射性が示された．$S(z) = s = s_0 s_1 s_2 \cdots$ であるとき，明らかに $S(E(z)) = s_1 s_2 s_3 \cdots$ であることに注意する．このことと，$\delta(s_0 s_1 s_2 \cdots) = s_1 s_2 s_3 \cdots$ で定義される**シフト写像**を用いて以下の関係式が成り立つ．

$$S(E(z)) = \delta(S(z))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{E} & \mathbb{C} \\ s\downarrow & & \downarrow s \\ \Sigma & \xrightarrow{\delta} & \Sigma \end{array}$$

この関係性を用いることで E の軌道を調べるためには道程に対応させて調べればよいことがわかる．以下でその道程に対応した周期点が作れることを示したい．まず次のような領域を定義する．

定義 2.12 領域 $H \subset \mathbb{C}$ が以下をすべて満たすとき， H を**蹄鉄型領域**という．

- $H \subset \overline{R(j)}$ $(j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$
- 連続曲線 $\zeta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ を境界に持つ．
- $\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{Re}\zeta_i(t) = +\infty$
- $\lim_{t\to\pm\infty} \zeta_i'(t) = 0$

命題 2.13 H が蹄鉄型領域であるとする．このとき，任意の $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し，$E_j^{-1}(H)$ もまた蹄鉄型領域となる．(ただし， $E_j = E|_{R(j)}$ とする．)

証明． $E_j : R(j) \to \mathbb{C} \backslash (\mathbb{R}_{>0} \cup \{0\})$ は微分同相写像なので $E_j^{-1}(H)$ も $E_j^{-1}(\zeta_i)(i = 1, 2)$ を境界に持ち，$E_j^{-1}(H) \subset R(j)$ を満たす．

$$\Gamma_\alpha = \{z \in R(j) \mid \mathrm{Re}(z) = \alpha\}(\alpha \in \mathbb{R})$$

と定める．このとき，$E(\Gamma_\alpha)$ は半径 e^α の円となる．α を十分に大きくとれば，$E(\Gamma_\alpha)$ と曲線 ζ_i が交点を持つ．さらに，$\alpha \to \infty$ とすれば，$E_j(\Gamma_\alpha)$ と曲線 ζ_i の交点で成す角は $\pi/2$ に収束する．E_j は等角写像であるため角度を保つことから，Γ_α と $E_j^{-1}(\zeta_i)$ の成す角も $\pi/2$ に収束する．よって $\lim_{t\to\infty} \zeta'(t) = 0$ がいえる．よって $E_j^{-1}(H)$ は蹄鉄型領域となる． ■

次に，$s_i \neq 0^{\pm}(i \leq n)$ とし，以下のような集合を考える．

$$V(s_0, s_1, \cdots, s_n) = \left\{z \in R(s_0) \mid E^j(z) \in R(s_j)\ (1 \leq j \leq n)\right\}.$$

$V(s_0) = R(s_0)$ であり，

$$\begin{aligned} V(s_0, s_1, \cdots, s_n) &= \{z \in V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}) \mid E^n(z) \in R(s_n)\} \\ &= V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}) \cap E^{-n}(R(s_n)) \end{aligned}$$

となる．

命題 2.14 $s_1 \neq \pm 1$ とする．このとき，$V(s_0, s_1)$ は蹄鉄型領域となる．

以下の図 8 は $V(s_0, s_1)$ の例となっている．

証明． $V(s_0, s_1) = R(s_0) \cap E^{-1}(R(s_1))$ となることに注意する．$E : R(s_0) \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$ は微分同相であるから $E^{-1}(\partial\overline{(R(s_1))})$ は $R(s_0)$ 内の 2 曲線で構成される．その 2 曲線を $\zeta_i : \mathbb{R}, \to \mathbb{C}(i = 1, 2)$ とする．命題 2.13 の証明と同様に，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Gamma_\alpha = \{z \in R(s_0) \mid \mathrm{Re}(z) = \alpha\}$$

と定める．このとき，$\alpha \to \infty$ とすれば，$E_{s_0}(\Gamma_\alpha)$ と $\partial\overline{(R(s_1))}$ は交点を 4 つ持ち，そこでのなす角は $\pi/2$ に収束する．その交点の逆像は Γ_α 上の点となり，写像の等角性より交点で成す角は $\pi/2$ に収束する．よって $V(s_0, s_1)$ は蹄鉄型領域となる．■

命題 2.15 $n \in \mathbb{N}$ とし，$s_n \neq \pm 1$ とする．このとき，$V(s_0, s_1, \cdots, s_n)$ は蹄鉄型領域となる．

以下の図 9 は $V(s_0, s_1, s_2)$ の例となっている．$V(s_0, s_1, s_2) = V(s_0, s_1) \cap E^{-2}(R(s_2))$ となることに注意せよ．

証明． 命題 2.13 より，$V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1})$ が蹄鉄型領域ならば，$V(s_0, s_1, \cdots, s_n)$ は蹄鉄型領域となる．命題 2.14 より，帰納的に $V(s_0, s_1, \cdots, s_n)$ が蹄鉄型領域となることが示される． ■

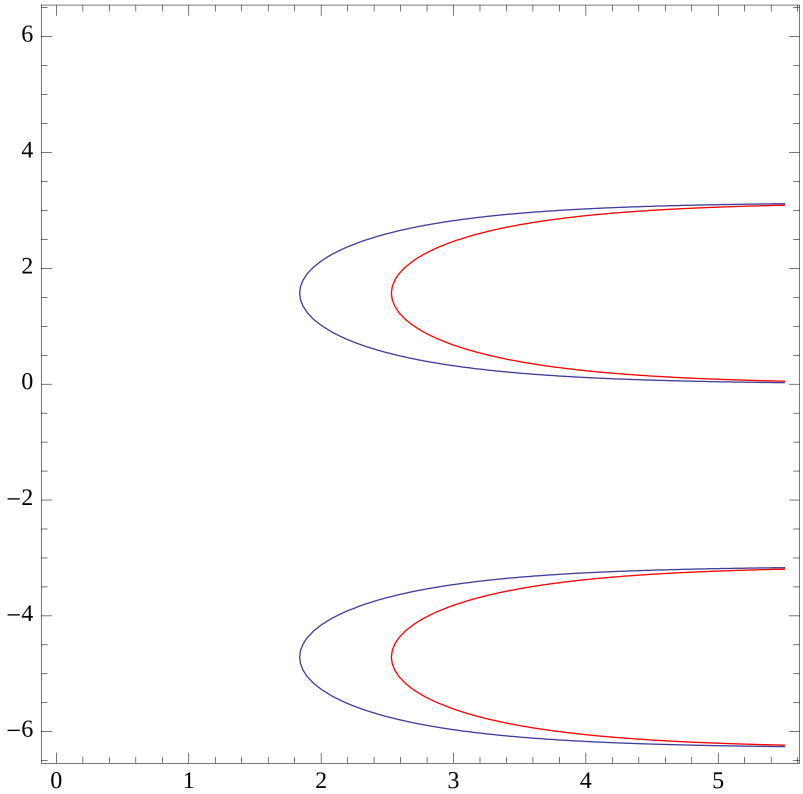

図 8: 蹄鉄型領域 $V(1,2)$ と $V(-1,2)$

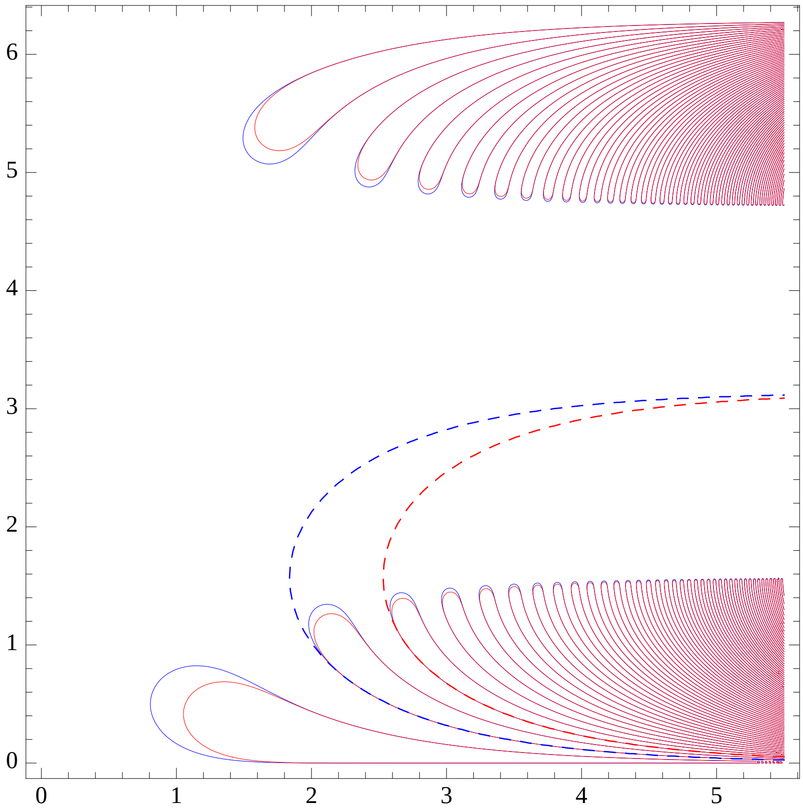

図 9: 蹄鉄型領域 $V(1,2)$（破線） と $E^{-2}(R(2))$（実線）

周期 n の周期点は $s = s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots$ という周期的な道程を持つことは明らかである．逆に任意の周期的な道程に対応した周期点が存在することを示す．すなわち，以下が成り立つ

定理 2.16 $s = s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots = \overline{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}}$ とする．このとき， $S(z) = s$ を満たす反発的周期点 $z \in \mathbb{C}$ が存在する．

証明． 命題 2.8 より，$s = 111 \cdots$ あるいは $s = -1-1-1 \cdots$ の場合は反発的不動点が存在する． $s = \overline{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}}$ を少なくとも一つの i で $s_i \neq \pm 1$ となるようにとる．このとき，一般性を失わないため， $s_0 \neq \pm 1$ としてよい． $V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0)$ は $R(s_0)$ 内の蹄鉄型領域である． $E^n : V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0) \to R(s_0)$ は微分同相である．

$$V_\alpha = \{z \in V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0) \mid \mathrm{Re}(z) \leq \alpha\},$$

$$W_\alpha = \{z \in V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0) \mid \mathrm{Re}(z) = \alpha\}$$

と定める．$V(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_0)$ が蹄鉄型領域であるから，α を十分に大きくとれば，W_α は2つの成分を持つ．この2つの成分は E^n によって，1つは $\{z \in R(s_0) \mid \mathrm{Re}(z) \leq \alpha\}$ 内に，もう1つは $\{z \in R(s_0) \mid \mathrm{Re}(z) \geq \alpha\}$ 内に写される．よって $V_\alpha \subset E^n(V_\alpha)$ を満たすため，$E|^n_{V_\alpha}$ は自身の内部に写すような逆写像を持つ．よって定理 1.3 より，V_α 内に不動点が存在する．補題 2.3 より， $(E^n)'(z) \geq 2\pi$ となるため，不動点は反発的である．

残っている場合は s が 1 と -1 のみで構成された周期列となる場合であるがこれについては $s_0 = 1, s_1 = -1$ となる場合に $R(s_0)$ を修正することで $V(s_0, s_1)$ を蹄鉄型領域にできることから示せる． ■

2.3 指数関数の族の構造不安定性

正のパラメータとして λ を準備し，写像族 $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ を考える．上に示した通り， $\lambda = 1$ のとき，$J(E_\lambda) = \mathbb{C}$ となる．実は $\lambda > 1/e$ のとき， $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$ が成り立つ．このことは証明の際に考えた集合 S 及び H を適当に修正することで示すことができる．

さて， $\lambda < 1/e$ のときのジュリア集合はどうなっているかを考えることにする．$\lambda < 1/e$ のとき $E_\lambda(z)$ は実数直線上に2つの不動点を持ち，そのうちの1つは吸引的であり，もう一方は反発的となる．その吸引的不動点を q とすると， $q < 1$ を満たす．ここで複素平面上に直線 $x = 1$ を考える．この直線は E_λ によって半径 $\lambda e < 1$ の円に写されるので左半平面 $\{z \mid \mathrm{Re}(z) < 1\}$ はこの円の内部に写されることになる．左半平面の内部に存在する円に吸引的不動点 q が存在しているので，この左半平面は吸引域に含まれる．よって左半平面上で $\{E_\lambda^n\}$ は正規族になるため，ジュリア集合には含まれない．

以上のことをまとめると写像族 E_λ は $\lambda = 1/e$ を境界としてジュリア集合の姿が全く異なるものとなる． $\lambda < 1/e$ で右半平面の一部であったジュリア集合が， $\lambda = 1/e$ を超えると複素平面全体に広がることを示している．つまり，複素解析的写像のジュ

リア集合はパラメータに関して必ずしも連続的な変化をするわけではないことを示している．

写像族においてパラメータを変化させる際に，その振る舞いが連続的な変化を見せるかどうかを示す指標として次のような定義が存在する．

定義 2.17 Λ をパラメータの空間とし，$F_\Lambda = \{f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}_{\lambda \in \Lambda}$ をそのパラメータによって定まる連続関数の族とする．F_Λ が $\lambda = \lambda_0$ で**構造安定**であるとは，λ_0 の近傍 $U \subset \Lambda$ が存在して，任意の $\lambda \in U$ に対して f_λ と f_{λ_0} が共役となることをいう．

自明な写像族において構造安定および，構造不安定なパラメータを確かめてみる．

例 2.18 パラメータの空間を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし，1 次多項式の族として $P_\lambda(z) = \lambda z (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ を考える．このとき，以下を満たす．

- $|\lambda| \neq 1$ で， P_λ は構造安定となる．
- $|\lambda| = 1$ で， P_λ は構造不安定となる．

実際， $|\lambda| < 1$ の範囲および， $|\lambda| > 1$ の範囲ではそれぞれの範囲内での挙動は似通ったものとなる．($|\lambda| < 1$ のときは 0 が吸引的周期点となり， $|\lambda| > 1$ のときは 0 は反発的周期点となるため，それぞれの周期点の種類に従った振る舞いを見せる．) つまりその範囲内で共役写像を作ることができるため，構造安定なパラメータであるといえる．しかし， $|\lambda| = 1$ のときは，写像は回転の写像となるため， $|\lambda| \neq 1$ のときとは全く異なる振る舞いを見せる．従って， $|\lambda| = 1$ の近傍内では共役にならないパラメータが存在するため，構造不安定なパラメータとなる．

また，他の例として 2 次多項式について少し触れる．1 章で扱ったように 2 次多項式のパラメータを変化させることでファトゥ成分の個数が変化する場合があった．これは何らかのパラメータで構造安定でないことを直感的に表している．そのパラメータに相当する部分がマンデルブロー集合の境界部分となることが知られている．

以下で，構造安定性の定義を用いて写像族 E_λ についてパラメータを変化させた場合を考える．このとき，以下の定理が成立することが [2] において証明されている．

定理 2.19 [2] パラメータの空間を $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．関数の族 $f_\lambda(z) = \lambda e^z (\lambda \in \Lambda)$ は $\lambda = 1$ で構造安定ではない．

このことを証明するために，まず以下の命題を準備しておく必要がある．

命題 2.20 f, g を解析的な複素関数とし，互いに共役であるとする．このとき， f が吸引周的期点 z_0 を持つならば， g も吸引的周期点を持つ．

証明． f, g が互いに共役であるから同相写像 h が存在して $g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z)$ となる．よって z_0 の周期 n とすると， $g^n(h(z_0)) = h(f^n(z_0)) = h(z_0)$ となる． z_0 の吸引域を U とすれば， $h(z_0) \in h(U)$ であり，命題 1.6 より， $|(g^n)'(h(z_0))| < 1$ を満たす． ■

この事実を利用して指数関数の族における構造不安定性を示すことを考える．そのために，$\lambda = 1$ の周りで具体的な近傍をつくり，その近傍上で $f_1(z) = e^z$ と共役にならないようなパラメータが存在することを確かめる必要がある．命題 2.1 より，$f_1(z) = e^z$ は複素平面上に反発的周期点を稠密に持っている．このことは，e^z は複素平面上に吸引的周期点を持たないことを意味する．一方，命題 2.20 により，共役な関数は吸引的周期点を共通に持っている．このことから，1 の任意の近傍 U に対して，ある $\lambda \in U$ が存在し，f_λ が吸引的周期点を複素平面上に持てば，$f_\lambda(z)$ は $f_1(z) = e^z$ と共役にはならないことを意味する．すなわち問題は以下の定理を証明すれば十分となる．

定理 2.21 $\lambda = e^{i\theta}(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ とする．任意に 0 に近いような θ が存在して $E_\lambda(z) = e^{i\theta}e^z$ は吸引周期点を少なくとも 1 つ持つ．

この定理を示すことで，単位円周上の点で $\lambda = 1$ に任意に近いような λ が存在して λe^z が e^z と共役にならないことが示せるため，構造安定性の定義を満たさないことが確かめられる．

定理 2.21 を証明するためにまず，集合 S を以下のように定める．

$$S = \{z \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \pi, \mathrm{Re}(z) \geq 2\}$$

$z_0 \in S$ とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n = E_\lambda(z_{n-1})$ と定める． また，E_λ を θ をパラメータとしてみる場合として $E_\lambda(z) = f_\theta(z) = e^{i\theta}e^z$ と定める．このとき，$\{z_n\}$ は実部と虚部がそれぞれ θ に依存するような点列とみることができるため $z_n = x_n + iy_n = z_n(\theta) = x_n(\theta) + iy_n(\theta)$ と表記できる．このとき，次の補題が成立する．

補題 2.22 $0 < \theta_1 < \pi/2$ となるような θ_1 が存在し，$0 \leq \theta \leq \theta_1$ かつ，$z_0, z_1 \in S$ ならば，以下の不等式を満たす．

(i) $x_1(\theta) > 2x_0 + 1$

(ii) $y_1(\theta) > 2y_0$

証明． まず，$\theta = 0$ の場合を証明する．このとき，

$$f_0(z_0) = e^{z_0} = e^{x_0+iy_0} = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0)$$

であり，$z_1 \in S$ より，$e^{x_0} \sin y_0 \leq \pi$ であるから，

$$\sin y_0 \leq \frac{\pi}{e^{x_0}} \leq \frac{\pi}{e^2} < \frac{1}{3}$$

よって，$\cos y_0 > 0.8$ となるため，

$$x_1 = e^{x_0} \cos y_0 > 0.8\ e^{x_0} > 2x_0 + 1.5$$

$$y_1 = e^{x_0} \sin y_0 > \frac{e^{x_0}y_0}{2} > \frac{e^2 y_0}{2} > 3y_0$$

$\theta \neq 0$ とする．$f_\theta(z) = e^{i\theta} f_0(z)$ となることに注意する． $z, f_\theta(z) \in S$ とする．このとき，$f_0(z) \in S$ を示す．もし，$f_0(z) \notin S$ ならば，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ であることと $f_\theta \in S$ であることから，$f_0(z)$ は第 4 象限の点となる．しかし，$f_0(z)$ は第 1 象限または，第 2 象限にしか存在しえないため矛盾する．よって $f_0(z) \in S$ を満たす．ここで， $\theta < \theta_1$ となる θ が存在して，$e^{i\theta} w \in S$ を満たす任意の $w \in S$ に対して以下を満たすことを示す.

(1) $0 < \mathrm{Re}(w - e^{i\theta} w) < \frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{Im}(e^{i\theta} w) > \mathrm{Im}(w)$

$e^{i\theta} w \in S$ のとき $\mathrm{Re}(w) > \frac{\pi}{\sin\theta}$ なので，

$$\begin{aligned} 0 &< \mathrm{Re}(w - e^{i\theta} w) = \mathrm{Re}(w)(1-\cos\theta) + \mathrm{Im}(w)\sin\theta \\ &< (\mathrm{Re}(w))(1-\cos\theta) + \pi\sin\theta < \frac{\pi(1-\cos\theta)}{\sin\theta} + \pi\sin\theta \\ &\to 0 \qquad (\theta \to 0) \end{aligned}$$

となるため，(1) が従う．(2) は，$w, e^{i\theta} w \in S$ と θ の範囲から従う．$\theta = 0$ のときに (i),(ii) が成り立つことと (1),(2) を組み合わせることで補題が成立することが確かめられる． ■

以下で，直前の補題を用いて吸引的周期点を持つようなパラメータが存在することを示すための準備を進める．$\theta_2 > 0$ で $f_\theta^2(0) \in S$ $(0 \leq \theta \leq \theta_2)$ を満たすものが存在する．このとき，$0 \leq \theta < \min(\theta_1, \theta_2)$ とし，$G_n(\theta) = f_\theta^n(0)$ と定める．このとき，$G_1(\theta)$ は単位円の一部となり，$G_2(\theta)$ は S 内を通る曲線を含むものとなる．以下で各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \theta \leq \theta_j$ ならば $G_j(\theta) \in S$ となるような $\theta_j < 2\pi$ のうち，最大のものを $\hat{\theta}_j$ と定める．さらに各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\gamma_j = \left\{ z \in S \mid \text{ある}\theta \in [0, \hat{\theta}_j] \text{ が存在して } G_j(\theta) = z \right\}$$

と定めると γ_j は $f_0^j(0)$ を含む曲線上の点の集合となる．このとき十分に大きい $n \geq 3$ で γ_n が $y = 0$ から $y = \pi$ を結ぶ曲線となることを示したい．すなわち，以下を示す.

補題 2.23 ある $n \geq 3$ と $\hat{\theta}_n \in [0, \theta_1]$ が存在して， $\mathrm{Im}(G_n(\hat{\theta}_n)) = \pi, \mathrm{Re}(G_n(\hat{\theta}_n)) \geq 2$ かつ，すべての $\theta \in [0, \hat{\theta}_n]$ で $G_n(\theta) \in S$ を満たす.

証明． 今，示したいことが成り立たないと仮定して考える．このとき，任意の $j \in \mathbb{N}$ で $[0, \hat{\theta}_j] \subset [0, \hat{\theta}_{j+1}]$ となることを示す．ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して $[0, \hat{\theta}_j] \supsetneq [0, \hat{\theta}_{j+1}]$ を満たすと仮定する．このとき，ある $\theta' \in (\hat{\theta}_{j+1}, \hat{\theta}_j]$ が存在して，任意の $\theta \in (\hat{\theta}_{j+1}, \theta')$ で $G_{j+1}(\theta) \notin S$ となる．このとき $\mathrm{Im}(G_j(\hat{\theta}_{j+1})) = 0$ または，$\mathrm{Re}(G_j(\hat{\theta}_{j+1})) = 2$ を満たす必要がある．しかし，$G_j(\hat{\theta}_{j+1}) \in S$ より $\mathrm{Im}(G_{j+1}(\hat{\theta}_{j+1})) > 0$ かつ $\mathrm{Re}(G_{j+1}(\hat{\theta}_{j+1})) > 2$ である必要があるため矛盾する．よって任意の $j \in \mathbb{N}$ で $[0, \hat{\theta}_j] \subset [0, \hat{\theta}_{j+1}]$ を満たす．このことと，仮定している事実から任意の j に対して γ_j が S の境界部分を含まず

S の内部にとどまり続けることを意味する．従って補題 2.22 の不等式を無限回適用できることを意味するが，虚部の不等式 (ii) からこれは矛盾であるため，仮定が否定される． ■

今このようにして定めた曲線 γ_n を指数関数で写すことを考える． $\exp(\gamma_n)$ は正の実軸と負の実軸を結ぶ曲線となり， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $f_\theta(\gamma_n)$ もまた負の実数を含む曲線となる．この負の実数を $z_{n+1}(\theta)$ と定める．また，θ を $f_\theta^{n+1}(0) = z_{n+1}$ となるように定め， $z_j = f_\theta^j(0)$ と定めて f_θ が吸引的周期点を持つことを以下で示していく．そのためにまず次の補題を示す．

補題 2.24 $\exp(x_n) \geq 2 + \sum_{j=1}^{n}(x_j + 1)$

証明． $x_2 \geq 2$ であり，$x_1 \leq 1$ であるから，$x_2 \geq x_1 + 1$ となる．また，補題2.22 (i) より， $2 \leq j \leq n-1$ で $x_{j+1} \geq 2x_j + 1$ より，$x_{j+1} - x_j \geq x_j + 1$ を得る．よって，

$$
\begin{aligned}
2 + \sum_{j=1}^{n}(x_j + 1) &= 2 + \sum_{j=2}^{n-1}(x_j + 1) + x_1 + 1 + x_n + 1 \\
&\leq \sum_{j=2}^{n-1}(x_{j+1} - x_j) + x_2 + x_n + 3 \\
&= 2x_n + 3 < e^{x_n}.
\end{aligned}
$$

■

次に f_θ の反復合成によって自身の内部に写されるような円板を考えたい．$r_{n+1} = 1$ とし， $r_k = r_{k+1}/e^{x_k}e (0 \leq k \leq n)$ とする．このとき， $r_k < 1$ であり， $r_0 = (e^{n+1}\prod_{j=0}^{n} e^{x_j})^{-1}$ となる． B_j を半径 r_j 中心 z_j の円板とするとき，以下が成り立つ．

命題 2.25 $z \in B_0$ とする．このとき任意の j $(0 \leq j \leq n+1)$ に対して $f_\theta^j(z) \in B_j$ となり，さらに以下が成り立つ．

$$
|(f_\theta^{n+1})'(z)| \leq e^{n+1}\prod_{j=0}^{n} e^{x_j}
$$

証明． $z \in B_j$ すなわち， $|z - z_j| < r_j$ とし， $M_j = \sup_{z \in B_j} |f_\theta'(z)|$ とする．このとき，C を z と z_j を B_j 内で結ぶ線分とすれば

$$
|f_\theta(z) - f_\theta(z_j)| = \left| \int_C f_\theta'(w) dw \right|
$$

であるから，

$$
|f_\theta(z) - f_\theta(z_j)| \leq |M_j||z - z_j| < M_j r_j \leq |\lambda e^{x_j + r_j}| r_j < e^{x_j} e r_j = r_{j+1}.
$$

よって $z \in B_j$ ならば，$f_\theta(z) \in B_{j+1}$ であり， $|f_\theta'(z)| \leq e^{x_j+1}$ を得る．この不等式を $|(f_\theta^{n+1})'(z)|$ に $n+1$ 回作用させることで $|(f_\theta^{n+1})'(z)| \leq e^{n+1}\prod_{j=0}^{n} e^{x_j}$ を得る．■

これによって以下の定理が証明され，吸引的周期点の存在性を得る．

定理 2.26 f_θ は周期 $n+2$ の吸引的周期点を B_0 内に持つ．

証明． 命題 2.25 より， $f_\theta^{n+1}(B_0) \subset B_{n+1}$ となる． $f_\theta(B_{n+1}) \subset B_0$ を満たすことを示す． $z \in B_{n+1}$ とする．このとき， $\mathrm{Re}(z) \leq x_{n+1} + 1 = -e^{x_n} + 1$ であり，補題 2.24 より，

$$|f_\theta(z)| \leq \exp(-e^{x_n} + 1) \leq \exp(-(2 + \sum_{j=1}^{n}(x_j + 1)) = e^{-1}(\prod_{j=0}^{n} e^{x_j})^{-1} e^{-n} = r_0$$

となるため， $f_\theta(z) \in B_0$ を満たす．よって定理 1.3 から不動点が存在する．このことから周期 $n+2$ の周期点の存在が確かめられる．その周期点を w とする． $|f'_\theta(w)| < r_0$ であることと，命題 2.25 の不等式を組み合わせて以下を得る．

$$|(f^{n+2})'(w)| = |(f_\theta^{n+1})'(f_\theta(w))||f'_\theta(w)| < 1.$$

よって w は吸引的周期点であることが確かめられた． ■

参考文献

[1] R. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, Perseus Books L. L. C.,1989.

[2] R. Devaney, Structural Instability of exp(z), Proceedings of the American Mathematical Society 94,(1985), 545-548.

[3] R. Devaney & M. Krych, Dynamics of exp(z), Ergodic Theory and Dynamical Systems **4**,(1984), 35-52.

[4] M. Misiurewicz, On iterates of e^z, Ergodic Theory and Dynamical Systems **1**,(1981),103-106.

[5] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Third Edition, Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[6] 上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介，複素力学系序説，培風館，1995.

[7] 松本幸夫，トポロジー入門，岩波書店，2002.

[8] L．V．アールフォルス，複素解析，笠原乾吉 訳，現代数学社，1982.