

名古屋大学大学院  
多元数理科学研究科修士論文

# Tricorn の分岐について

指導教員：川平友規 先生  
著者氏名：衛藤優介

2016 年 3 月



## 1 序：

本論文は、複素力学系における Mandelbrot 集合と、それとよく似た定義で構成される Tricorn について述べたサーベイ論文である。Mandelbrot 集合については [2] Robert L Devaney, An introduction to chaotic dynamical Systems, Addison-Wesley, 1989. を参考にし、Tricorn については [1] W.D.Crowe, R.Hasson, P.J.Rippon, P.E.D.Strain-Clark, On the structure of the Mandelbar set, Nonlinearity, 2 (1989), 541-553. を参考にした。

はじめに、本論文に深く関わる Mandelbrot 集合, Tricorn と Julia 集合の関係性を述べる。まず Julia 集合について簡単に述べる。詳しい定義は 3 章に記した。Julia 集合の内部も含めた集合を充填 Julia 集合という。複素平面上の点を二次写像  $z \mapsto z^2 + c$  (ただし  $c$  は複素数の定数) の反復合成により、その点が発散するかしないかで分類する。このとき、発散しない複素平面上の点の集合が充填 Julia 集合である。充填 Julia 集合は複素数のパラメータ  $c$  の取り方により様々な形になる。例えば次の、Fig.1, Fig.2, Fig.3, Fig.4 のような形である。

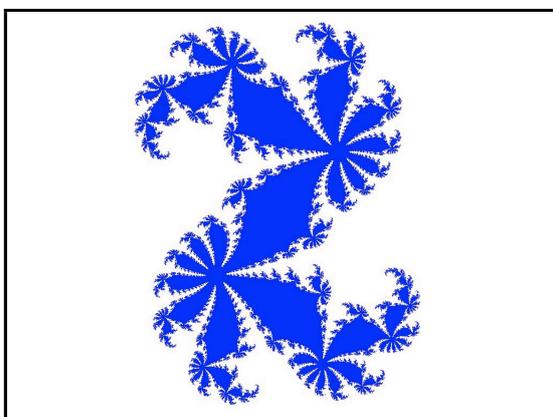


Fig. 1

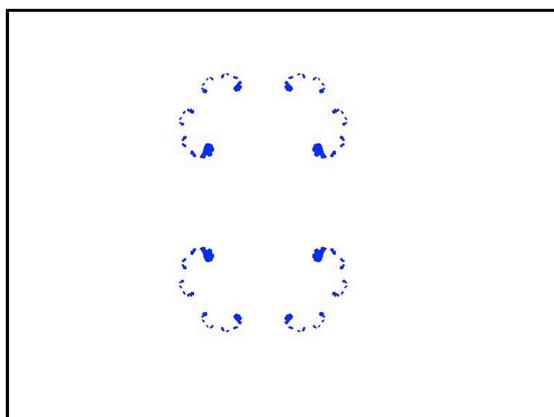


Fig. 2

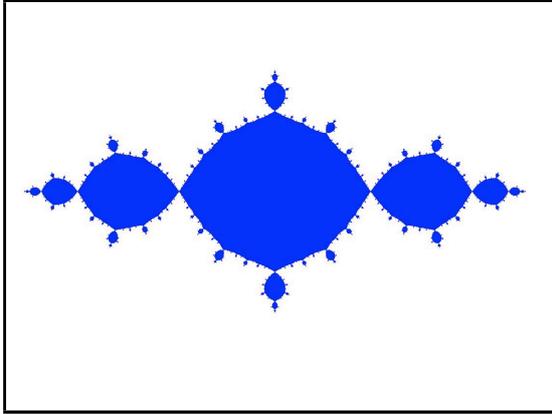


Fig. 3

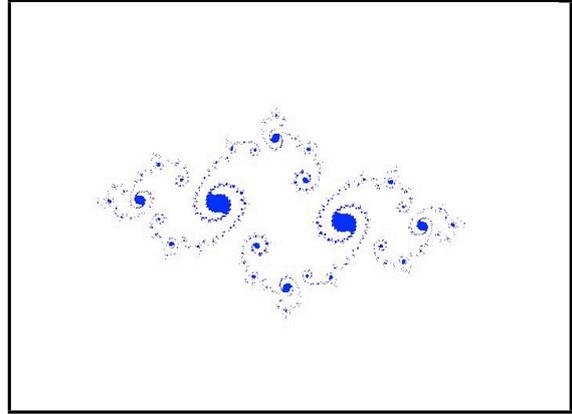


Fig. 4

(※ Fig.2, Fig.4 はコンピュータによって描画しているため、繋がっているように描画されているが、実際の集合は Cantor 集合である。それぞれの複素パラメータ  $c$  の値は Fig.1 :  $c = 0.360284 + 0.100376i$ , Fig.2 :  $c = 0.5$ , Fig.3 :  $c = -1$ , Fig.4 :  $c = -0.7688 + 0.1632i$  である。)

充填 Julia 集合が連結集合か Cantor 集合かという形の変化は、複素平面上の点  $0$  が二次写像の反復合成により発散するか、しないかの違いによって引き起こされる。  $0$  が二次写像の反復合成により発散する場合、充填 Julia 集合は必ず測度  $0$  の Cantor 集合になる。この充填 Julia 集合の形を決定する道標の役割を果たす「 $0$  の二次写像による反復合成」が発散しないような複素数  $c$  の値の集合はどのようなものか。その集合が Mandelbrot 集合である。

Mandelbrot 集合は  $P_c(z) = z^2 + c$  という関数族を用いて構成される。この関数族を少し変形し、 $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  という関数に変える。Mandelbrot 集合の場合と同様に、複素平面上の点  $0$  が  $f_c$  の反復合成により発散するかしないかで複素パラメータ  $c$  を分類する。  $0$  が発散しないような複素パラメータ  $c$  の集合を Tricorn とよび  $T$  で表す。これら  $M$  と  $T$  は次の Fig.5, Fig.6 のような形をしている。

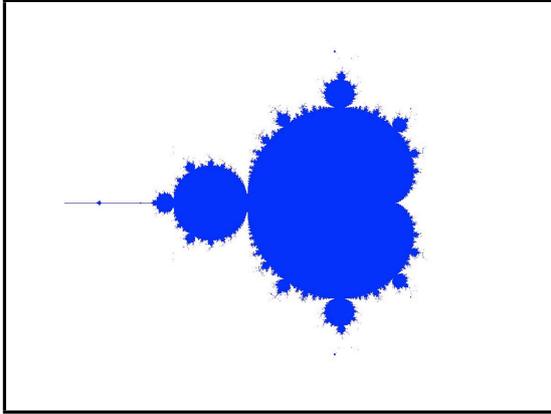


Fig.5 Mandelbrot 集合

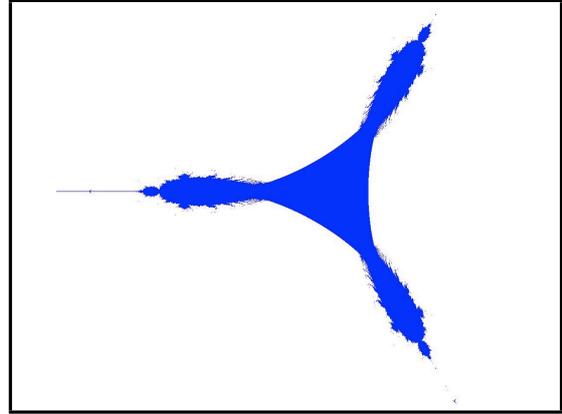


Fig.6 Tricorn

これらの集合には共通して次のような性質がある.

- 閉円板  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  に含まれるコンパクト集合である.
- 実軸に関して対称である.

これらの証明は Mandelbrot 集合については第 2 章で, Tricorn については第 3 章で行う.

Tricorn のみの性質としては次のものがある.

- 回転対称性がある.

この性質の証明は第 3 章で行う.

本論文では特に, 次の定理に着目した. この定理を本論文のメインテーマとし, 第 4 章で定理 4.4 として証明を行った.

**定理 ([1]Theorem5)** 集合  $\Omega_1, \Omega_2, D_1, D_2$  を次のように定義する.

$P_c(z) = z^2 + c$  に対して,  $P_c$  の  $n$  回反復合成  $P_c \circ P_c \circ \dots \circ P_c$  を  $P_c^n$  で表す.

- $\Omega_1$  を数列  $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 1 の吸引的周期点 (不動点) に収束するような  $c$  の集合とする.
- $\Omega_2$  を数列  $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積するような  $c$  の集合とする.

$f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  に対して,

- $D_1$  を数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 1 の吸引的周期点 (不動点) に収束するような複素数  $c$  の集合とする.

- $D_2$  を数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積するような複素数  $c$  の集合とする.

このとき,  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  の共通境界は  $c = -3/4$  の 1 点のみであるが,  $D_1$  と  $D_2$  の共通境界は曲線を含む.

証明の流れとしては, 補題 4.5, 補題 4.6 で不動点の存在や位置について考察した. この結果を用いて定理 4.4 の証明をする. 特に本論文の補題 4.6 における方程式  $f_c(z) = z$  の解の存在と解の位置については [2] で深く扱われていなかったため, その部分を厳密に考察し詳しい証明を与えた.

最後に, 本論文の構成について述べる. 本論文は 4 章からなる. 第 2 章では主に Mandelbrot 集合の定義や性質について述べる. 章の冒頭では Mandelbrot 集合を考えるきっかけとなった Julia 集合の定義についても述べる. 第 3 章では, Tricorn についての定義や性質を述べる. 第 4 章では本論文のメインテーマである定理の証明を行う.

## 2 Mandelbrot 集合

この章では, まず, Mandelbrot 集合を考えるきっかけとなった充填 Julia 集合について定義する. 次に Mandelbrot 集合について定義し, その性質について証明を行う.

以下,  $n \in \mathbb{N}$  に対し, 関数  $Q$  の  $n$  回合成を  $Q^n = Q \circ Q \circ \dots \circ Q$  と表す. また,  $P_c(z) = z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ ) とする.

**定義 2.1 (反発的周期点)**  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $P_c$  の周期  $n$  の 反発的周期点  $z_0$  とは,  $P_c^n(z_0) = z_0$  かつ  $|(P_c^n)'(z_0)| > 1$  を満たす点である.

### 2.1 Julia 集合

**定義 2.2 (Julia 集合)** 与えられた  $c \in \mathbb{C}$  に対して, 2 次関数  $P_c$  の Julia 集合 とは,  $P_c$  の反発周期点全体の集合の閉包である.

**定義 2.3 (充填 Julia 集合)** 与えられた  $c \in \mathbb{C}$  に対して, 2 次関数  $P_c$  の 充填 Julia 集合  $K_c$  を次のように定義する.

$c \in \mathbb{C}$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$K_c = \{z \in \mathbb{C} : |P_c^n(z)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

序章でも述べたように、この集合は複素数  $c$  の値により様々な形になる。

**定理 2.4** ([2] Proposition 8.2) 充填 Julia 集合の境界は Julia 集合である。

## 2.2 Mandelbrot 集合

**定義 2.5** (Mandelbrot 集合) Mandelbrot 集合 は次のように定義される。

$$M = \{c \in \mathbb{C} : |P_c^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

コンピュータによって描画した Mandelbrot 集合は次の Fig. 2.1 のようになる。

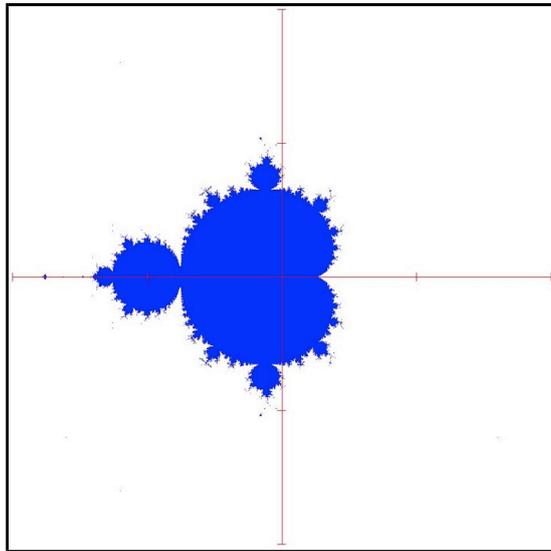


Fig. 2.1 Mandelbrot 集合

(描画範囲:  $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ ,  $-2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2$ )

Fig. 2.1 を見ても分かる通り、次の性質があることが予想される。

$M$ に関する定理

**定理 2.6** 集合  $M$  は閉円板  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  に含まれるコンパクト集合である.

**定理 2.7** 集合  $M$  は実軸に関して対称である.

各々の証明を行う.

**定理 2.6 の証明 :**

(i) 有界性, (ii) 閉集合の 2 つを示す.

(i) 有界性

$c \in \{c \in \mathbb{C} : |c| > 2\}$  に対して  $z \in \mathbb{C}$  を  $|c| \leq |z|$  となるようにとる. このとき

$$\begin{aligned} |P_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \\ &\geq |z||c| - |z| \\ &= |z|(|c| - 1) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $|c| > 2$  より,  $|c| - 1 > 1$  である.  $\lambda = |c| - 1$  とおけば,

$$|P_c(z)| \geq \lambda|z|$$

が成り立つ.  $n$  回合成を考えれば,

$$|P_c^n(z)| \geq \lambda^n|z|$$

が成り立つ.  $\lambda = |c| - 1 > 1$  なので  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$|P_c^n(z)| \rightarrow \infty$$

であるから, 複素数  $c$  が  $|c| > 2$  のとき  $c \notin M$  である. よって, 有界性を示せた.

(ii) 閉集合

$M$  の補集合  $M^c$  が開集合であることを示す.

$c \in M^c$  とする. このとき  $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である. これを書き直すと  $|P_c^{n-1}(c)| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である. ゆえに, ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$|P_c^{N-1}(c)| > 2$$

が成り立つ.  $|P_c^{n-1}(c)|$  は  $c$  の連続関数であるから,  $c$  を中心とした, ごく小さな円板内にある  $c'$  について

$$|P_{c'}^{N-1}(c')| > 2$$

が成り立つ.  $|c'| \leq 2$  のとき,  $|c'| \leq 2 < |P_{c'}^{N-1}(c')|$  であるから

$$\begin{aligned} |P_{c'}^N(c')| &= |\{P_{c'}^{N-1}(c')\}^2 + c'| \\ &\geq |P_{c'}^{N-1}(c')|^2 - |c'| \\ &> |P_{c'}^{N-1}(c')|^2 - |P_{c'}^{N-1}(c')| \\ &= |P_{c'}^{N-1}(c')|(|P_{c'}^{N-1}(c')| - 1) \end{aligned}$$

となる.  $\lambda = |P_{c'}^{N-1}(c')| - 1 > 1$  とおけば,

$$|P_{c'}^N(c')| \geq \lambda |P_{c'}^{N-1}(c')|$$

ゆえに, 両辺の  $k$  回合成を考えれば

$$|P_{c'}^{N+k}(c')| \geq \lambda^k |P_{c'}^{N-1}(c')|$$

よって,  $k \rightarrow \infty$  で  $|P_{c'}^{N+k}(c')| \rightarrow \infty$  となることがわかる.

次に,  $|c'| > 2$  のときは (i) の議論から  $c' \notin M$  である.

いずれの場合も  $c'$  は  $M$  には含まれないことがわかる. よって  $c$  を中心とした, ごく小さな円板内のすべての点は  $M^c$  に含まれるので集合  $M^c$  は開集合である. ゆえに,  $M$  は閉集合である.

(i), (ii) から, 集合  $M$  は  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  にありコンパクトであることが言えた.

< Q.E.D. >

### 注意:

$c = -2$  のとき,  $P_c(-2) = 2$ ,  $P_c(2) = 2$  であるから,  $-2 \in M$  である.

$\{c \in \mathbb{C} : |c| > 2\} \notin M$  であるから  $M$  を含む原点中心の閉円板の半径を 2 に設定するのはもっとも厳しい条件である.

### 定理 2.7 の証明:

実軸に関する対称性を示すために  $\forall c \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|P_{\bar{c}}^n(0)| = |P_c^n(0)|$$

が成り立つことを示す.

まず, より一般に  $\forall z \in \mathbb{C}$  に対して, 帰納法により

$$|P_{\bar{c}}^n(z)| = |P_c^n(\bar{z})|$$

を示す.

(i)  $n = 1$  のとき

$$\begin{aligned}P_{\bar{c}}(z) &= z^2 + \bar{c} \\ P_c(\bar{z}) &= \bar{z}^2 + c\end{aligned}$$

であり,  $\overline{P_{\bar{c}}(z)} = P_c(\bar{z})$  であるから,

$$|P_{\bar{c}}(z)| = |P_c(\bar{z})|$$

が成り立つ.

(ii)  $n = k$  のとき

$$|P_{\bar{c}}^k(z)| = |P_c^k(\bar{z})|$$

が成り立つとする. 両辺に  $P_{\bar{c}}(z)$  を代入すると,

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= |P_{\bar{c}}^k(P_{\bar{c}}(z))| \\ &= |P_{\bar{c}}^{k+1}(z)| \\ \text{右辺} &= |P_c^k(\overline{P_{\bar{c}}(z)})| \\ &= |P_c^k(P_c(\bar{z}))| \\ &= |P_c^{k+1}(\bar{z})|\end{aligned}$$

よって,

$$|P_{\bar{c}}^{k+1}(z)| = |P_c^{k+1}(\bar{z})|$$

であるから  $n = k + 1$  のときも成り立つ.

ゆえに,  $n \geq 1$  に対して

$$|P_{\bar{c}}^n(z)| = |P_c^n(\bar{z})|$$

であるから

$$|P_{\bar{c}}^n(0)| = |P_c^n(0)|$$

が示された.

$$M = \{c \in \mathbb{C} : |P_{\bar{c}}^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\} = \{c \in \mathbb{C} : |P_c^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

であるから  $M$  は実軸に関して対称である.

< Q.E.D. >

### 3 Tricorn

Mandelbrot 集合は  $P_c(z) = z^2 + c$  によって構成された。この式を少し変形させ、 $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  とする。

**定義 3.1 (Tricorn)** Tricorn  $T$  は次のように定義される。

$$T = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

ポイントは Mandelbrot 集合の  $P_c(z) = z^2 + c$  は正則関数であったが、Tricorn の  $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  は正則ではないところである。ただし、2 回合成  $f_c^2(z) = z^4 + 2\bar{c}z^2 + \bar{c}^2 + c$  は正則関数である。

Tricorn をコンピュータによって描画したものは次の Fig. 3.1 である。

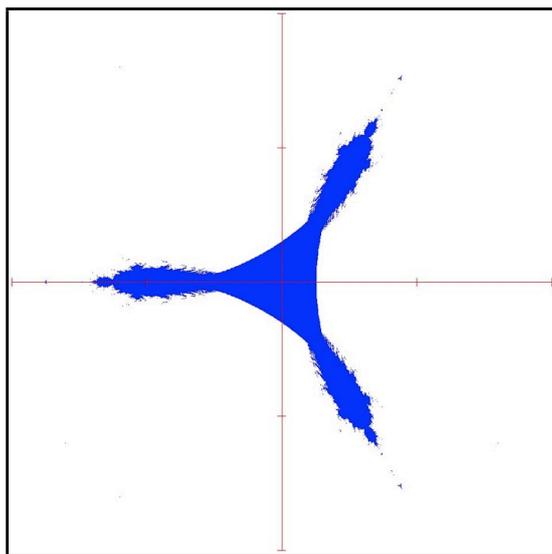


Fig. 3.1 Tricorn

(描画範囲 :  $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2, -2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2$ )

図を見ても分かる通り、 $T$  には次のような性質がある。

$T$ に関する定理

**定理 3.2**  $\sigma : z \mapsto e^{2\pi i/3}z$  とする. このとき,  $\sigma(T) = T$  (回転対称性)

**定理 3.3** 集合  $T$  は閉円板  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  に含まれるコンパクト集合である.

**定理 3.4** 集合  $T$  は実軸に関して対称である.

**定理 3.2 の証明 :**

$\sigma : z \mapsto e^{2\pi i/3}z$  とする. このとき,  $\sigma(T) = T$  となることを示すために  $\forall z \in \mathbb{C}, \forall c \in \mathbb{C}$  に対して

$$f_{\omega c}(\omega z) = \omega f_c(z)$$

を示す. ただし,  $\omega = e^{2\pi i/3}$  とする.

$$\begin{aligned} f_{\omega c}(\omega z) &= \overline{(\omega z)}^2 + \omega c \\ &= \overline{\omega}^2 \overline{z}^2 + \omega c \\ &= \omega \overline{z}^2 + \omega c \\ &= \omega(\overline{z}^2 + c) \\ &= \omega f_c(z) \end{aligned}$$

よって

$$f_{\omega c}(\omega z) = \omega f_c(z)$$

が成り立つ. これらを  $n$  回合成することを考えれば,

$$f_{\omega c}^n(\omega z) = \omega f_c^n(z)$$

よって,

$$f_{\omega c}^n(0) = \omega f_c^n(0)$$

となるから, 両辺の絶対値を考えれば,

$$|f_{\omega c}^n(0)| = |f_c^n(0)|$$

である. よって,

$$T = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\} = \{c \in \mathbb{C} : |f_{\omega c}^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

が成り立つから,  $\sigma : z \mapsto e^{2\pi i/3}z$  としたとき,  $\sigma(T) = T$  が成り立つ.

< Q.E.D. >

**定理 3.3 の証明:**

こちらも  $M$  と同様に (i) 有界性, (ii) 閉集合の 2 つを示す.

(i) 有界性

$c \in \{c \in \mathbb{C} : |c| > 2\}$  に対して  $z \in \mathbb{C}$  を  $|c| \leq |z|$  となるようにとる. このとき

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |\bar{z}^2 + c| \geq |\bar{z}|^2 - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| \\ &\geq |z||c| - |z| \\ &= |z|(|c| - 1) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $|c| \geq 2$  より,  $|c| - 1 > 1$  である.  $\lambda = |c| - 1$  とおけば,

$$|f_c(z)| \geq \lambda|z|$$

が成り立つ.  $n$  回合成を考えれば,

$$|f_c^n(z)| \geq \lambda^n|z|$$

が成り立つ.  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$$

であるから,  $|c| > 2$  のとき  $c \notin T$  である. ゆえに集合  $T$  は  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  にある.

(ii) 閉集合

$T$  の補集合  $T^c$  が開集合であることを示す.

$c \in T^c$  とする. このとき  $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である. これを書き直すと  $|f_c^{n-1}(c)| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である. ゆえに, ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$|f_c^{N-1}(c)| > 2$$

が成り立つ.  $|f_c^{n-1}(c)|$  は  $c$  の連続関数であるから,  $c$  を中心とした, ごく小さな円板内にある  $c'$  について

$$|f_{c'}^{N-1}(c')| > 2$$

が成り立つ.

$|c'| \leq 2$  のとき,  $|c'| \leq 2 < |f_{c'}^{N-1}(c')|$  であるから

$$\begin{aligned} |f_{c'}^N(c')| &= \left| \overline{f_{c'}^{N-1}(c')}^2 + c' \right| \\ &\geq |f_{c'}^{N-1}(c')|^2 - |c'| \\ &> |f_{c'}^{N-1}(c')|^2 - |f_{c'}^{N-1}(c')| \\ &= |f_{c'}^{N-1}(c')|(|f_{c'}^{N-1}(c')| - 1) \end{aligned}$$

となる.  $\lambda = |f_{c'}^{N-1}(c')| - 1 > 1$  とおけば,

$$|f_{c'}^N(c')| \geq \lambda |f_{c'}^{N-1}(c')|$$

ゆえに, 両辺の  $k$  回合成を考えれば

$$|f_{c'}^{N+k}(c')| \geq \lambda^k |f_{c'}^{N-1}(c')|$$

よって,  $k \rightarrow \infty$  で  $|f_{c'}^{N+k}(c')| \rightarrow \infty$  となることがわかる.

次に,  $|c'| > 2$  のとき, (i) の議論から  $c' \notin T$  である.

いずれの場合も  $c'$  は  $T$  には含まれないことがわかる.

ゆえに,  $c$  を中心とした, ごく小さな円板内のすべての点は  $T^c$  に含まれるので集合  $T^c$  は開集合である. ゆえに,  $T$  は閉集合である.

(i), (ii) から, 集合  $M$  は  $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$  にありコンパクトであることが言えた.

< Q.E.D. >

### 定理 3.4 の証明 :

実軸に関する対称性を示すために  $\forall c \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|f_{\bar{c}}^n(0)| = |f_c^n(0)|$$

が成り立つことを示す.

まず, より一般に  $\forall z \in \mathbb{C}$  に対して帰納法により

$$|f_{\bar{c}}^n(z)| = |f_c^n(\bar{z})|$$

を示す.

(i)  $n = 1$  のとき

$$\begin{aligned} f_{\bar{c}}(z) &= \bar{z}^2 + \bar{c} \\ f_c(\bar{z}) &= \overline{\bar{z}}^2 + c = z^2 + c \end{aligned}$$

であり,  $\overline{f_{\bar{c}}(z)} = f_c(\bar{z})$  であるから,

$$|f_{\bar{c}}(z)| = |f_c(\bar{z})|$$

である.

(ii)  $n = k$  のとき

$$|f_{\bar{c}}^k(z)| = |f_c^k(\bar{z})|$$

が成り立つとする. 両辺に  $f_{\bar{c}}(z)$  を代入すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= |f_{\bar{c}}^k(f_{\bar{c}}(z))| \\ &= |f_{\bar{c}}^{k+1}(z)| \\ \text{右辺} &= |f_c^k(\overline{f_{\bar{c}}(z)})| \\ &= |f_c^k(f_c(\bar{z}))| \\ &= |f_c^{k+1}(\bar{z})| \end{aligned}$$

よって,

$$|f_{\bar{c}}^{k+1}(z)| = |f_c^{k+1}(\bar{z})|$$

であるから  $n = k + 1$  のときも成り立つ.

ゆえに,

$$|f_{\bar{c}}^n(z)| = |f_c^n(\bar{z})|$$

であるから

$$|f_{\bar{c}}^n(0)| = |f_c^n(0)|$$

が示された.

$$T = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\} = \{c \in \mathbb{C} : |f_{\bar{c}}^n(0)| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

であるから  $T$  は実軸に関して対称である.

< Q.E.D. >

## 4 Mandelbrot 集合と Tricorn の分岐

### 定義 4.1 (不動点と周期点)

正則関数  $P(z)$  に対して,

- 周期  $n$  の周期点  $z_0$  とは  $P^n(z_0) = z_0$  (ただし,  $n$  はこの式を満たす最小のもの) となる点である. 特に,  $P^n(z_0) = z_0$  かつ  $|(P^n)'(z_0)| < 1$  を満たす点  $z_0$  を 周期  $n$  の吸引的周期点 という.
- 吸引的不動点  $z_0$  とは  $P(z_0) = z_0$  かつ  $|P'(z_0)| < 1$  を満たす点である.

また, 関数  $f(z)$  が 反正則関数 とは,  $z \mapsto \overline{f(z)}$  が正則であることをいう. 反正則関数  $f_c(z)$  に対して,

- 不動点 (周期 1 の周期点)  $z_0$  とは,  $f_c(z_0) = z_0$  を満たす点である. 特に,  $f_c(z_0) = z_0$  かつ  $|(f_c^2)'(z_0)| < 1$  となる点  $z_0$  を 吸引的不動点 という.
- 周期 2 の周期点 とは,  $f_c^2(z_0) = z_0$  ( $f_c(z_0) \neq z_0$ ) を満たす点である. 特に,  $f_c^2(z_0) = z_0$  かつ  $|(f_c^2)'(z_0)| < 1$  となる点  $z_0$  を 周期 2 の吸引周期点 という.

**注意 :**

$P_c$  の吸引的不動点の定義は  $P(z_0) = z_0$  かつ  $|P'(z_0)| < 1$  を満たす点  $z_0$  のことであった. 同様に  $f_c$  の吸引的周期点も  $f_c(z_0) = z_0$  かつ  $|f_c'(z_0)| < 1$  を満たす点と定義したが,  $f_c$  は正則関数ではないため  $f_c'(z)$  を定義できない. そのため, 正則関数である  $f_c^2(z) = z^4 + 2\bar{c}z^2 + \bar{c}^2 + c$  を用いて  $f_c(z_0) = z_0$  かつ  $|(f_c^2)'(z_0)| < 1$  を満たす点を吸引的周期点と定義した.

ここで, Mandelbrot 集合の部分集合である  $\Omega_1, \Omega_2$  について定義する.

$P_c(z) = z^2 + c$  に対して,

- $\Omega_1$  を数列  $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 1 の吸引的周期点 (不動点) に収束するような  $c$  の集合とする.
- $\Omega_2$  を数列  $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積するような  $c$  の集合とする.

**命題 4.2** 上記のように  $\Omega_1, \Omega_2$  を定めたとき,  $\Omega_1, \Omega_2$  は次のように書ける.

$$\Omega_1 = \{c \in \mathbb{C} : c = w - w^2, w \in \mathbb{C}, |w| < 1/2\}$$

$$\Omega_2 = \{c \in \mathbb{C} : |c + 1| < 1/4\}$$

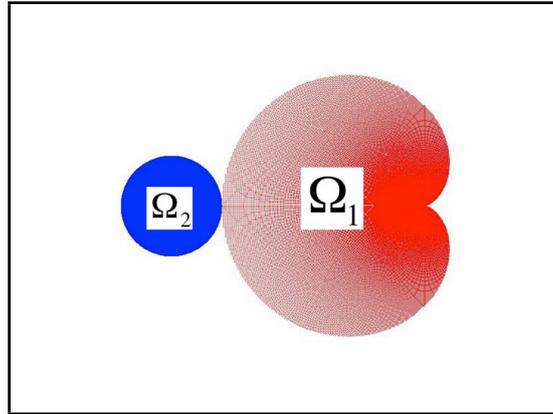


Fig.4.1  $\Omega_1, \Omega_2$  の形状

**命題 4.2 の証明 :**

(i)  $\Omega_1$  について

$P_c(z)$  の吸引的不動点  $w$  とは,  $P_c(w) = w$  かつ,  $|P'_c(w)| < 1$  を満たす点  $w$  である.

よって,  $P_c(w) = w$  から

$$w^2 + c = w$$

である. これから,

$$c = w - w^2$$

である. また,  $|P'_c(w)| < 1$  から  $|P'_c(w)| = 2|w|$  であるから,

$$|w| < 1/2$$

以上から,

$$\Omega_1 = \{c \in \mathbb{C} : c = w - w^2, |w| < 1/2\}$$

である.

(ii)  $\Omega_2$  について

$P_c(z)$  の周期 2 の吸引的周期点  $w_1, w_2$  とは,  $P_c(w_1) = w_2, P_c(w_2) = w_1$  を満たし, (つまり  $P_c^2(w_1) = w_1$ ) かつ,  $|(P_c^2)'(w_1)| < 1$  を満たす.  $P_c(w_1) = w_2, P_c(w_2) = w_1$  であるから,

$$P_c(P_c(w_2)) = P_c^2(w_2) = w_2$$

ここで、微分係数は

$$(P_c^2)'(w_2) = P_c'(P_c(w_2))P_c'(w_2) = P_c'(w_1)P_c'(w_2) = 4w_1w_2$$

となる。  $|(P_c^2)'(w_2)| < 1$  を満たすから、

$$|(P_c^2)'(w_2)| = 4|w_1w_2| < 1$$

である。ここで、解と係数の関係から  $w_1w_2 = c + 1$  である。ゆえに、

$$|c + 1| < \frac{1}{4}$$

である。よって、

$$\Omega_2 = \{c \in \mathbb{C} : |c + 1| < 1/4\}$$

である。

< Q.E.D. >

次は、Tricorn の部分集合である  $D_1, D_2$  について定義する。

$f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  に対して、

- $D_1$  を数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 1 の吸引的周期点 (不動点) に収束するような複素数  $c$  の集合とする。
- $D_2$  を数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積するような複素数  $c$  の集合とする。

**命題 4.3** 上記のように  $D_1$  を定めたとき、 $D_1$  は次のように書ける。

$$D_1 = \{c \in \mathbb{C} : c = w - \bar{w}^2, |w| < 1/2, w \in \mathbb{C}\}$$

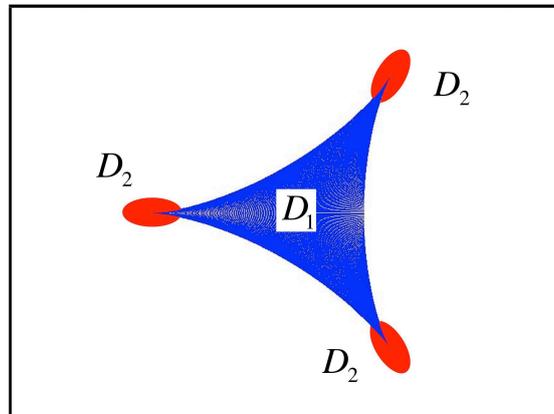


Fig.4.2  $D_1$  と  $D_2$  の形状

(※ Fig4.2 はコンピュータの数値計算によって描かれたものではなく，あくまで説明のためにペイントソフトを用いて描かれたものである点に注意を要する.)

**命題 4.3 の証明：**

吸引的不動点  $z_0$  は

$$f_c(z_0) = z_0$$

を満たす．よって

$$\bar{z}_0^2 + c = z_0$$

である．これより，

$$c = z_0 - \bar{z}_0^2$$

である．また，吸引的周期点  $z_0$  の条件として

$$|(f_c^2)'(z_0)| < 1$$

である．不動点であるから  $f_c(z_0) = \bar{z}_0 + c = z_0$  を満たす．

$$\begin{aligned} |(f_c^2)'(z_0)| &= |4z_0^3 + 4\bar{c}z_0| \\ &= 4|z_0||z_0^2 + \bar{c}| \\ &= 4|z_0||z_0| \\ &= 4|z_0|^2 \end{aligned}$$

よって， $|z_0| < 1/2$  である．ゆえに，

$$D_1 = \{c = w - \bar{w}^2 : |w| < 1/2\}$$

となる．

< Q.E.D. >

各々の集合を比べると， $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  の境界の共通部分は  $-3/4$  の 1 点のみなのに対し， $D_1$  と  $D_2$  の境界の共通部分は曲線を含む．

**注意：**

Tricorn には定理 3.2, 3.4 より回転対称性と実軸に関する線対称性があった．この性質を利用すれば，

- 回転対称性から,  $c = -3/4$  付近の  $D_1, D_2$  の共通境界の性質を確認すれば, Tricorn の他の  $D_1, D_2$  の共通境界部分についても同様の性質を確認することができる.
- 実軸に関する対称性から,  $c = -3/4$  付近の実軸よりも上にある共通境界部分の性質を確認すれば十分である.

このことから, 今後の証明において  $f_c(z)$  の  $c$  の実部が  $-3/4$  付近で虚部は正の部分のみで  $D_1$  と  $D_2$  の境界部分を考えれば回転対称性と実軸に関しての対称性より Tricorn の他の  $D_1$  と  $D_2$  の境界部分でも同じような結果が得られる.

ゆえに, これから先,  $c = a + bi$  は,  $-1 < a < 0, 0 < b < 1$  として話を進める.

上記の事実に注意して  $D_1$  と  $D_2$  の境界の共通部分は曲線を含むことを示すために次の定理を示す.

**定理 4.4** ([1] Theorem5) ある  $\varepsilon > 0$  が存在して, 各  $c \in D(-3/4, \varepsilon) \setminus \overline{D_1}$  に対し, 数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積する. ただし,  $D(-3/4, \varepsilon)$  は  $-3/4$  中心, 半径  $\varepsilon$  の開円板である.

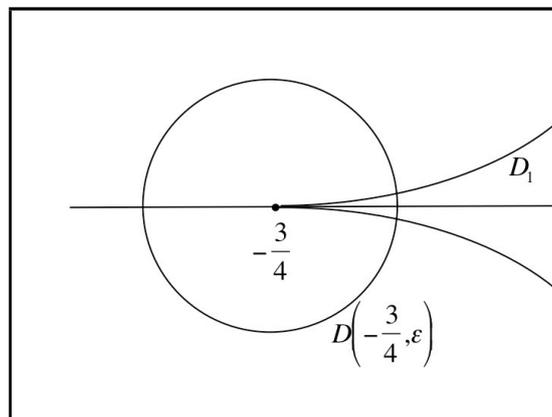


Fig. 4.3

定理 4.1 の証明のためにいくつかの補題を示す.

**補題 4.5**  $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  の周期 2 以下の周期点の個数は重複度込みで 4 個である.

**補題 4.5 の証明:**

不動点 (周期 1 の周期点) と周期 2 の周期点  $w$  は次の等式を満たしている.

$$f_c^2(w) = w$$
$$f_c^2(w) - w = 0$$

を満たしているから

$$f_c^2(w) - w = w^4 + 2\bar{c}w^2 - w + \bar{c}^2 + c = 0$$

である. この方程式は代数学の基本定理より重複度も込めて 4 つの解をもつ. ゆえに, 周期 2 以下の周期点の個数は重複度込みで 4 個である.

< Q.E.D. >

**補題 4.6 ( [1] ,Lemma 1)**

$c = a + bi$  で,  $a, b$  の範囲は  $-1 < a < 0, 0 < b < 1$  とする. このとき次の (a)~(c) が言える.

- (a)  $c \notin D_1$  のとき,  $f_c$  の不動点は  $|z_1| > 1/2, |z_2| > 1/2$  となる 2 つの異なる不動点  $z_1, z_2$  のみである.
- (b)  $c \in D_1$  のとき  $f_c$  の不動点は  $|z_1| > 1/2, |z_2| > 1/2, |w_1| \leq 1/2, |w_2| \geq 1/2$  となる 4 つの異なる不動点  $z_1, z_2, w_1, w_2$  を持つ. 特に, 周期 2 の周期点は存在しない.
- (c)  $c \in \partial D_1$  のとき,  $f_c$  の不動点は  $|z_1| > 1/2, |z_2| > 1/2$  となる 2 つの不動点  $z_1, z_2$  と  $|w| = 1/2$  となる不動点  $w$  の計 3 つの不動点を持つ.

**補題 4.6 の証明 :**

まず, 不動点を考えるために方程式  $f_c(z) = \bar{z}^2 + c = z$  を考える.  $z = x + iy, c = a + bi$  として, 実部と虚部それぞれの方程式を  $H_1, H_2$  とする.

$$H_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} - a \quad H_2 : \left(x + \frac{1}{2}\right)y = \frac{b}{2}$$

(ただし,  $-1 < a < 0, 0 < b < 1$ )

$H_1, H_2$  をそれぞれ,

$$y = \pm \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a}$$
$$y = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

と変形し.

$$y = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a}$$

$$y = -\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a}$$

$$y = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

とする. 上記の式で定義される曲線をそれぞれ  $H_1^+$ ,  $H_1^-$ ,  $H_2$  とする. それぞれの式と定義域は

$$H_1^+ : y = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} \quad \left(x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} < x\right)$$

$$H_1^- : y = -\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} \quad \left(x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} < x\right)$$

$$H_2 : y = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad \left(-\frac{1}{2} \text{ 以外のすべての実数}\right)$$

である.

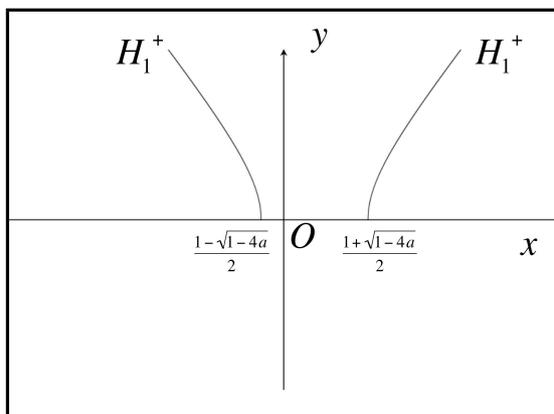


Fig.4.4  $H_1^+$  のグラフ

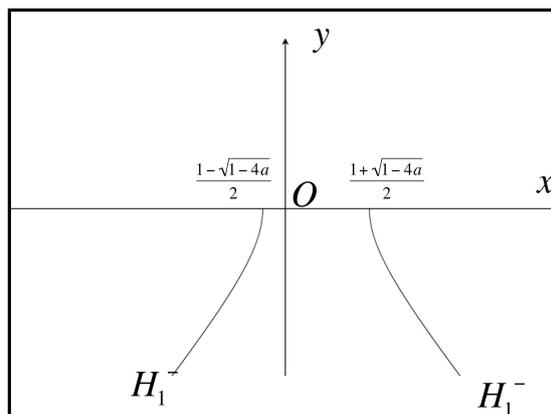


Fig4.5  $H_1^-$  のグラフ

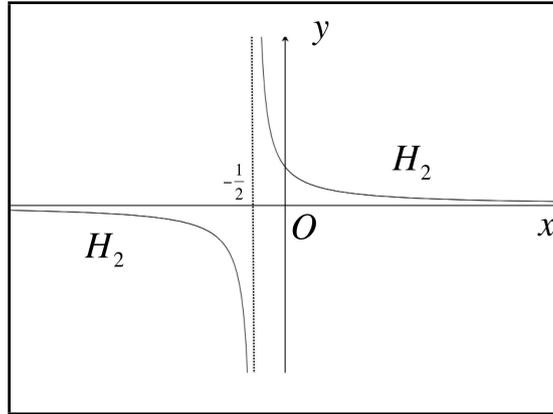


Fig.4.6  $H_2$  のグラフ

$x < -1/2$  の範囲で,  $H_1^-$  と  $H_2$  の交点の個数を調べるために方程式

$$-\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

を考える.  $\phi_1$  を

$$\phi_1(x) = -\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} - \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

とおく. このとき,

$$\phi_1'(x) = \frac{1}{2} \left( -\frac{2x-1}{\sqrt{a+(x-1)x}} + \frac{4b}{(2x+1)^2} \right)$$

であり,  $x < -1/2$  の範囲で,

$$\phi_1'(x) > 0$$

である. また,

$$\phi_1(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow -1/2 - 0)$$

$$\phi_1(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow -\infty)$$

である. よって中間値の定理より  $x < -1/2$  の範囲で, 方程式  $\phi_1(x) = 0$  は解を 1 つ持つ. この解を  $x_1$  とし,  $H_2$  に代入して得られた  $\frac{b}{2(x_1 + \frac{1}{2})}$  を  $y_1$  とすれば,  $H_1, H_2$  の交点は  $(x_1, y_1)$  である. このとき  $x_1 < -1/2$  であるから,  $x_1^2 + y_1^2 > 1/2$  となる. ゆえに,  $x < -1/2$  の範囲にある  $H_1$  と  $H_2$  の交点の座標は原点からの距離が  $1/2$  より大きい.

次に、 $x > 1/2$  の範囲で、 $H_1^+$  と  $H_2$  の交点の個数を調べる。今考えている  $a$  の範囲では、 $\frac{1}{2} < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$  が成り立つ。よって  $H_1^+$  の定義域の関係から、 $\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$  の範囲には解はない。 $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} < x$  の範囲で交点の個数を調べるために方程式

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

の解の個数を考える。 $\phi_2$  を

$$\phi_2(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} - \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

とおく。このとき

$$\phi_2'(x) = \frac{1}{2} \left( -\frac{2x-1}{\sqrt{a+(x-1)x}} + \frac{4b}{(2x+1)^2} \right)$$

であり、 $x < -1/2$  の範囲では、

$$\phi_2'(x) > 0$$

である。また、

$$\phi_2\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right) = -\frac{b}{\sqrt{1-4a}+2} < 0$$

$$\phi_2(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

である。よって中間値の定理より  $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$  の範囲で、 $\phi_2(x)$  は解を1つ持つ。ゆえに、 $x > 1/2$  の範囲で方程式  $\phi_2(x) = 0$  は解を1つ持つ。この解を  $x_2$  とし、 $H_2$  に代入して得られた  $\frac{b}{2(x_2 + \frac{1}{2})}$  を  $y_2$  とすれば、 $H_1, H_2$  の交点は  $(x_2, y_2)$  である。 $x_2 > 1/2$  であるから、 $x_2^2 + y_2^2 > 1/2$  となる。ゆえに、 $x > 1/2$  の範囲にある  $H_1$  と  $H_2$  の交点の座標は原点からの距離が  $1/2$  より大きい。

最後に  $-1/2 < x < 1/2$  の範囲に解が存在するかどうかを調べる。

$H_1^+$  の定義域の関係から、 $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$  の範囲には  $H_1, H_2$  の交点はない。

$-1 < a \leq -3/4$  のとき、 $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < -\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2} < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$  であるから、このときは  $-1/2 < x < 1/2$  の範囲で  $H_1^+$  と  $H_2$  の交点は存在しない。

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$  の範囲で  $H_1, H_2$  の交点を考える.  $-3/4 < a < 0$  を定数として固定し,  $b$  の範囲は  $0 < b < 1$  とする.

$$A = \frac{1}{4} - a, B = \frac{b}{2}, X = x - \frac{1}{2}$$

とおく. このとき,

$$\frac{1}{4} < A < 1, B > 0, -1 < X < -\sqrt{A}$$

である. ここで, 方程式

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a} = \frac{b}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

をそれぞれ  $A, B, X$  で置き換えた方程式

$$\sqrt{X^2 - A} = \frac{B}{X+1} \quad \dots (*)$$

の解を考える. ただし,  $X$  の範囲は  $-1 < X \leq -\sqrt{A}$  である. この範囲で方程式の両辺は正なので2乗して

$$X^2 - A = \frac{B^2}{(X+1)^2}$$

さらに  $(X+1)^2 > 0$  なので, 方程式

$$B^2 = (X+1)^2(X^2 - A)$$

を考えても同値である. 右辺の式を

$$\phi(X) = (X+1)^2(X^2 - A)$$

とおく. このとき

$$\frac{\partial}{\partial X} \phi(X) = 2(X+1)(X^2 - A) + 2X(X+1)^2$$

である. よってこの関数の増減は  $-1 < X \leq \sqrt{A}$  の範囲で

|            |      |            |                            |            |             |
|------------|------|------------|----------------------------|------------|-------------|
| $X$        | $-1$ | $\dots$    | $\frac{-1-\sqrt{1+8A}}{4}$ | $\dots$    | $-\sqrt{A}$ |
| $\phi'(X)$ | $0$  | $+$        | $0$                        | $-$        | $-$         |
| $\phi(X)$  | $0$  | $\nearrow$ | $M(A)$                     | $\searrow$ | $0$         |

ただし,

$$M(A) = \phi \left( \frac{-1 - \sqrt{1 + 8A}}{4} \right)$$

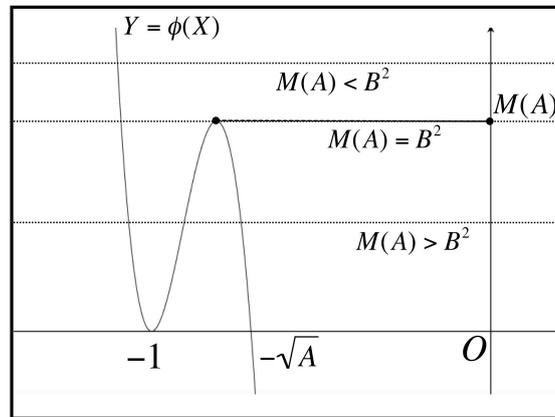


Fig. 4.7

方程式 (\*) の解は

$$\begin{cases} B^2 > M(A) \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ B^2 = M(A) \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ 0 < B^2 < M(A) \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

となる.

方程式  $B^2 = M(A)$  を考える. この方程式を  $a, b$  で書き直せば,

$$8a^2 - 24a - \sqrt{3 - 8a}(8a - 3) + 8b^2 + \frac{9}{2} = 0 \quad \dots (**)$$

ここで,  $a, b$  が方程式 (\*\*) を満たしているとき,  $c = a + bi$  は  $D_1$  の境界上にあることを示したい. つまり,  $c = a + bi \in \{c \in \mathbb{C} : c = w - \bar{w}^2, w \in \mathbb{C}, |w| = 1/2\}$  であることを示す.

$w = p + qi$  として, 方程式  $c = w - \bar{w}^2$  の実部と虚部を比較すれば

$$\begin{cases} a = p - p^2 + q^2 \\ b = q + 2pq \end{cases}$$

となる. ここで

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} \cos \theta \\ q = \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases}$$

と置き換える. ただし,  $\theta$  の範囲を

$$\theta' < \theta < \pi$$

に制限する.  $\theta'$  は  $0 < \theta' < \pi$  かつ  $\cos \theta' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$  を満たすものである. このとき,  $a, b$  の範囲が今考えている  $-\frac{3}{4} < a < 0, 0 < b < 1$  を満たし, かつ, 今考えている範囲で  $\theta$  はただ 1 つが対応している. 正確に言えば,  $a, b$  の範囲から,  $\theta$  は次の範囲を満たす必要がある.

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} < \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta < 0 \\ 0 < \frac{1}{2} \sin \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases}$$

このとき,  $\cos \theta, \sin \theta$  について上の不等式を解けば

$$\begin{cases} -1 < \cos \theta < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta > 0 \end{cases}$$

である. ゆえに,  $\theta$  の範囲を  $\theta' < \theta < \pi$  (ただし  $\theta'$  は  $0 < \theta' < \pi$  かつ  $\cos \theta' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ) に制限すれば,  $-\frac{3}{4} < a < 0, 0 < b < 1$  を満たすような  $\theta$  が一意に取れる. このように  $a, b$  を置き替えても方程式 (\*\* ) を満たすから  $c = a + bi \in \partial D_1$  のとき  $B^2 = M(A)$  である. ゆえに,  $c = a + bi \in \partial D_1$  で方程式 (\*) は解を 1 つ持つ. (\*) に  $X = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2}$  を代入しても (\*) は成り立つ. ゆえに,  $H_1$  と  $H_2$  の交点の  $x$  座標は  $\frac{1}{2} \cos \theta$  である. これを  $H_2$  に代入すれば,  $H_1$  と  $H_2$  の交点の  $y$  座標は  $\frac{1}{2} \sin \theta$  であることがわかる. ゆえに,  $H_1$  と  $H_2$  の交点の座標は

$$(x, y) = \left( \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

である (ただし,  $\theta$  は上記の不等式から定まるもの). よって,  $c \in \partial D_1$  のとき,  $-1/2 < x < 1/2$  の範囲での  $H_1$  と  $H_2$  の交点の座標は原点からの距離が  $1/2$  である.

今, 方程式 (\*\* ) を  $b =$  の形で書き直せば,

$$b = \Phi(a) = \sqrt{-\frac{1}{8}(8a^2 - 24a - \sqrt{3} - 8a(8a - 3)) + \frac{9}{2}}$$

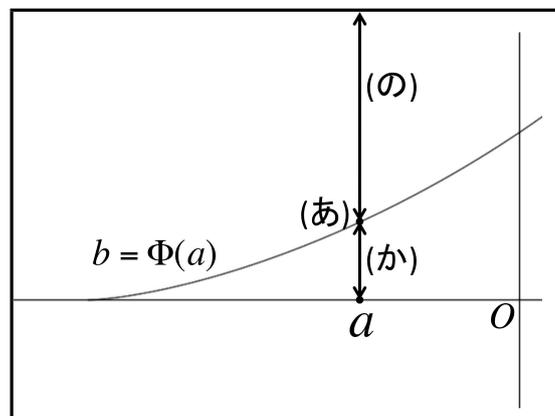


Fig. 4.8

この式は  $a, b$  に  $c = a + bi \in \partial D_1$  となる  $a, b$  を代入しても成り立つ。よってこの曲線は  $\partial D_1$  の一部分と一致している。

$0 \leq B^2 < M(A)$  (Fig.4.8 では (か) の場合) のとき、つまり

$$b < \Phi(a) = \sqrt{-\frac{1}{8}(8a^2 - 24a - \sqrt{3-8a}(8a-3) + \frac{9}{2})}$$

のとき、 $Y = \phi(X)$  と  $Y = B^2$  は 2 つの交点を持つから、方程式 (\*) は 2 つの解を持つ。さらに  $c = a + bi \in D_1$  である。

また、 $B^2 > M(A)$  (Fig.4.8 では (の) の場合) のとき、つまり、

$$b > \Phi(a) = \sqrt{-\frac{1}{8}(8a^2 - 24a - \sqrt{3-8a}(8a-3) + \frac{9}{2})}$$

のとき  $Y = \phi(X)$  と  $Y = B^2$  に交点はないから方程式 (\*) に解はない。さらに、 $c = a + bi \notin D_1$  である。

$0 < B^2 < M(A)$  のときに現れる  $Y = \phi(X)$  と  $Y = B^2$  の 2 つの交点を  $X_1, X_2$  とする。ただし、

$$-1 < X_1 < \frac{-1 - \sqrt{1+8A}}{4} < X_2 < -\sqrt{A}$$

である。  $X = x - \frac{1}{2}$  であるから、 $X_1, X_2$  それぞれに対応する  $x$  をそれぞれ  $u_1, u_2$  とする。このとき、 $u_1, u_2$  の範囲は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < u_1 < \frac{1 - \sqrt{1+8A}}{4} \\ \frac{1 - \sqrt{1+8A}}{4} < u_2 < \frac{1}{2} - \sqrt{A} \end{aligned}$$

である。次に  $v_1, v_2$  を  $H_2$  の式から

$$v_1 = \frac{2B}{2u_1 + 1}, \quad v_2 = \frac{2B}{2u_1 + 1}$$

とする。このとき  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  は  $H_1, H_2$  の 2 つの交点の座標である。

まず、 $u_1^2 + v_1^2 > \frac{1}{4}$  を示す。

$$u_1^2 + v_1^2 - \frac{1}{4} = u_1^2 + \frac{4B^2}{(2u_1 + 1)^2} - \frac{1}{4}$$

$0 < B^2$  であることと,  $u_1$  の範囲から次の不等式が成り立つ.  $\alpha = \frac{1-\sqrt{1+8A}}{4}$  とおいて

$$\begin{aligned} u_1^2 + v_1^2 - \frac{1}{4} &> u_1^2 - \frac{1}{4} \\ &> \alpha^2 - \frac{1}{4} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに,  $u_1^2 + v_1^2 > \frac{1}{4}$  である.

次に,  $u_2^2 + v_2^2 < \frac{1}{4}$  を示す.

$$u_2^2 + v_2^2 - \frac{1}{4} = u_2^2 + \frac{4B^2}{(2u_2 + 1)^2} - \frac{1}{4}$$

$B^2 < M(A)$  であることと,  $u_2$  の範囲から次の不等式が成り立つ.  $\alpha = \frac{1-\sqrt{1+8A}}{4}$  とおいて

$$\begin{aligned} u_2^2 + v_2^2 - \frac{1}{4} &< \alpha^2 + \frac{4M(A)}{(2\alpha + 1)^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4A(\sqrt{8A-1}-3) + \sqrt{8A-1}}{(\sqrt{8A-1}-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

ゆえに,

$$u_2^2 + v_2^2 < \frac{1}{4}$$

が言える. つまり,  $B^2 < M(A)$  (*Fig.4.8* では (か) の場合) で現われる  $H_1, H_2$  の2つの交点の座標の原点からの距離は, 1つは  $1/2$  より大きく, もう一方は  $1/2$  より小さい.

上記で現われた  $H_1$  と  $H_2$  の交点の座標を複素平面上の点だと考え, 次のように名付ける.

$c \in D_1$  のときに現われる4つの解をそれぞれ,

- $z_1$  を  $\operatorname{Re}(z_1) < \frac{1}{2}$  を満たすものとする.
- $z_2$  を  $\operatorname{Re}(z_2) > \frac{1}{2}$  を満たすものとする.
- $w_2$  を  $|w_2| < \frac{1}{2}$  を満たすものとする.
- $w_1$  を  $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(w_1) < \frac{1}{2}$  かつ  $|w_1| > \frac{1}{2}$  を満たすものとする.

$c \in \partial D_1$  のときに現われる3つの解をそれぞれ

- $z_1$  を  $\operatorname{Re}(z_1) < \frac{1}{2}$  を満たすものとする.

- $z_2$  を  $\operatorname{Re}(z_2) > \frac{1}{2}$  を満たすものとする.
- $w$  を  $|w| = \frac{1}{2}$  を満たすものとする.

$c \notin D_1$  のときに現われる 2 つの解をそれぞれ

- $z_1$  を  $\operatorname{Re}(z_1) < \frac{1}{2}$  を満たすものとする.
- $z_2$  を  $\operatorname{Re}(z_2) > \frac{1}{2}$  を満たすものとする.

$c$  の値による不動点と 2 周期点の関係は次の通りである.

|                      | 不動点                  | 2 周期点      | 不動点の位置                                   |
|----------------------|----------------------|------------|--|
| $c \in D_1$          | $z_1, z_2, w_1, w_2$ | なし         | $ z_1 ,  z_2 ,  w_1  > 1/2,  w_2  < 1/2$ |
| $c \in \partial D_1$ | $z_1, z_2, w$        | なし         | $ z_1 ,  z_2  > 1/2,  w  = 1/2$          |
| $c \notin D_1$       | $z_1, z_2$           | $w_1, w_2$ | $ z_1 ,  z_2  > 1/2$                     |

ここで、次の方程式 (イ), (ロ) について

$$f_c^2(z) - z = 0 \quad (\text{イ})$$

$$f_c(z) - z = 0 \quad (\text{ロ})$$

次の事実がある.

- 補題 4.5 から周期 2 以下の周期点の個数は重複度込みで 4 個である. つまり方程式 (イ) の解は重複も含めて 4 個である.
- 2 周期点は (イ) の解であるが, (ロ) の解ではない.
- 不動点は (ロ) の解でもあり, (イ) の解でもある.

これを踏まえ,  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2, w = \frac{1}{2} \cos \theta + i \frac{1}{2} \sin \theta$  とすれば,  $-1 < a < 0$  かつ  $0 < b < 1$  の条件のもとで次の 3 つがわかる.

- $c \notin D_1$  のとき, 不動点は  $z_1, z_2$  の 2 つのみであった. (イ) の 4 つの解のうち,  $z_1, z_2$  の 2 つは (イ) の解で, かつ (ロ) の解でもあるから不動点である. (イ) の残りの 2 つの解は  $f_c$  の不動点ではないから周期 2 の周期点である.
- $c \in D_1$  のとき不動点は  $z_1, z_2, w_1, w_2$  の 4 つある. これら 4 つの解は (イ) の解でもある. (イ) の 4 つの解のうち, すべてが不動点であるので, 周期 2 の周期点は存在しない.

- $c \in \partial D_1$  のとき不動点は  $z_1, z_2, w$  の 3 つある. これら 3 つは (イ) の解でもある. (イ) の 4 つの解のうち,  $z_1, z_2, w$  の 3 つが不動点である. (イ) の残り 1 つの解は周期 2 の周期点になるはずだが, 周期 2 の周期点は偶数個なければならない. ゆえに, (イ) は異なる 3 つの解を持ち, それらはすべて不動点である. このときの  $w$  は (イ) の重解である. つまり, (イ) の 4 つの解を  $z_1, z_2, w_1, w_2$  とするならば,  $w_1 = w_2 = w$  である.

これらから, 最終的に補題 4.6 の (a)~(c) が示された.

< Q.E.D. >

補題の事実を用いて, 定理 4.4 の証明を行う.

**定理 4.4 の証明:**

ここで,  $w_1, w_2$  と  $w$  の関係について述べる. 補題 4.6 の (c) より  $w_1, w_2$  は  $c \in \partial D_1$  のとき  $|w_1 w_2| = |w|^2 = 1/4$  であった.  $\partial D_1$  に交差するように  $D_1$  の外部から  $c$  の値を変化させたときに  $|w_1 w_2|$  の値がどのように変化するかを調べたい.

$$(f_c^2)'(w_1) = 4w_1 \overline{f_c(w_1)} = 4w_1 \overline{w_2}$$

であるから 2 周期点  $w_1, w_2$  が吸引的であるためには  $|(f_c^2)'(w_1)| < 1$  である必要がある. つまり  $|w_1 w_2| < 1/4$  である必要がある. もし,  $c$  を複素平面上で実 2 次元ベクトルの意味で  $(1, -1)$  方向へ変化させたとき,  $\partial D_1$  に交差する前まで  $|w_1 w_2| < 1/4$  であれば,  $f_c$  は周期 2 の吸引周期点を持つことが言える.

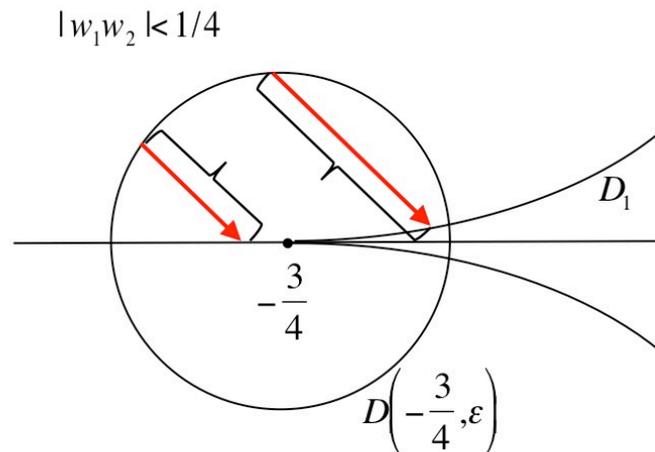


Fig. 4.9

方程式  $f_c^2(z) = z$  の解と係数の関係より

$$z_1 z_2 w_1 w_2 = \bar{c}^2 + c$$

であるから

$$|w_1 w_2| = \frac{|\bar{c}^2 + c|^2}{|z_1| |z_2|}$$

が成り立つ.

$c$  が  $D_1, D_2$  の境界付近にいるとき,  $|w_1 w_2|$  の増減を調べるために,  $|\bar{c}^2 + c|^2$ ,  $|z_1|$ ,  $|z_2|$  それぞれの増減を調べる. まず,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial b}$$

とする.

$$\frac{\partial}{\partial n} |\bar{c}^2 + c|^2, \quad \frac{\partial}{\partial n} |z_1|, \quad \frac{\partial}{\partial n} |z_2|$$

それぞれについて調べる.

(i)  $\frac{\partial}{\partial n} |\bar{c}^2 + c|^2$  について

$c = a + bi$  とする. このとき,

$$\frac{\partial}{\partial n} |\bar{c}^2 + c|^2 = 2a(a+1)(2a+1) + b^2(4a-6) - 2b(2a^2 - 6a + 1) - 4b^3$$

この関数は,  $a + bi = -3/4$  のとき  $3/16$  である. また  $a$  と  $b$  の連続関数であるから  $c$  が  $-3/4$  を中心とした十分に小さな半径の円板内にあるとき

$$\frac{\partial}{\partial n} |\bar{c}^2 + c|^2 > 0$$

**注意:** ここで,  $\frac{\partial}{\partial n} |\bar{c}^2 + c|^2 > 0$  となる  $-3/4$  を中心とした十分に小さな円板の半径を  $\varepsilon > 0$  と定める.

(ii)  $\frac{\partial}{\partial n} |z_1|$  について考える.

$z_1 = x + iy$  として考え, 実部と虚部それぞれの方程式  $H_1, H_2$  から

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{2x+1}{\Delta} \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{2y}{\Delta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{2y}{\Delta} \quad \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{2x-1}{\Delta}$$

ここで、 $\Delta = 4(x^2 + y^2) - 1$  である。  $b > 0$  のとき、

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{-(2x+1) - 2y}{\Delta}$$

また、

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{2y - (2x-1)}{\Delta}$$

$z_1$  は  $|z_1| > 1/2$  であるから  $\Delta > 0$ 、また、 $H_1, H_2$  のグラフからわかるように、 $z_1$  は  $x < -1/2$  で  $y < 0$  であることから

$$x < -1/2, y < 0$$

である。これより、

$$-(2x+1) - 2y > 0$$

また、 $a < 1/4$  のとき、 $1/4 - a > 0$  であるから

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} - a > 0$$

よって

$$2y - (2x-1) > 0$$

これらから、

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{-(2x+1) - 2y}{\Delta} > 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{2y - (2x-1)}{\Delta} > 0$$

がわかる。  $x, y$  それぞれの  $(1, -1)$  への方向微分が正になるということは、  $x$  は増加し  $-1/2$  へ近づき、  $y$  も増加し  $0$  へと近づくということである。 よって  $|z_1|$  は減少する。 ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial n}|z_1| < 0$$

(iii)  $|z_2|$  について考える。

$|z_1|$  のときと同様に、  $z_2 = x + iy$  として、次を考える。  $\Delta = 4(x^2 + y^2) - 1$  で  $b > 0$  のとき、

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{-(2x+1) - 2y}{\Delta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{2y - (2x - 1)}{\Delta}$$

$z_2$  は  $|z_2| > 1/2$  であるから  $\Delta > 0$ , また,  $H_1, H_2$  のグラフからわかるように,  $z_2$  は  $H_1, H_2$  の漸近線の関係から  $x > 1/2$  で,  $y > 0$  より上にあることから

$$x > 1/2, y > 0$$

である. これより,

$$-(2x + 1) - 2y < 0$$

また,  $a < 1/4$  のとき,  $1/4 - a > 0$  であるから

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} - a > 0$$

よって

$$2y - (2x - 1) < 0$$

これらから,

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{-(2x + 1) - 2y}{\Delta} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{2y - (2x - 1)}{\Delta} < 0$$

がわかる.  $x, y$  それぞれの  $(1, -1)$  への方向微分が正になるということは,  $x$  は減少し  $1/2$  へ近づき,  $y$  も減少し  $0$  へと近づくということである. よって  $|z_2|$  は減少する. ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial n}|z_2| < 0$$

(i), (ii), (iii) から,

$$\frac{\partial}{\partial n}|\bar{c}^2 + c|^2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}|z_1| < 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}|z_2| < 0$$

がわかる. よって,

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{|\bar{c}^2 + c|^2}{|z_1||z_2|} = \frac{\partial}{\partial n}|w_1 w_2| > 0$$

つまり,  $|w_1 w_2|$  は複素平面上で  $c$  の値を実 2 次元ベクトルの意味で  $(1, -1)$  方向へ変化させると増加することがわかる.

ここで, 次の命題を考える.

**命題 4.7**  $\mathbb{R} \cap \Omega_2 = \mathbb{R} \cap D_2 = (-5/4, -3/4)$

**命題 4.7 の証明 :**

$c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$  のとき  $P_c(z) = f_c(z)$  であるから  $P_c(0) = f_c(0)$  である. よって  $P_c^n(0) = f_c^n(0)$  となる. ゆえに  $c \in \mathbb{R}$  のとき 2 つの数列  $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は常に同じ実数列である. この結果から

$$\mathbb{R} \cap \Omega_2 = \mathbb{R} \cap D_2$$

である. 前述の  $\Omega_2$  に関する命題 4.1 より  $\Omega_2 \cap \mathbb{R} = (-5/4, -3/4)$  である. ゆえに

$$\mathbb{R} \cap \Omega_2 = \mathbb{R} \cap D_2 = (-5/4, -3/4)$$

が成り立つ.

< Q.E.D. >

命題 4.3 を用いれば,  $c \in (-5/4, -3/4)$  において,  $|w_1 w_2| < 1/4$  である. また, 上記より  $\frac{\partial}{\partial n} |w_1 w_2| > 0$  である.  $c \in \partial D_1$  のとき  $|w_1 w_2| = 1/4$  であることから,  $c$  の値を  $\partial D_1$  に交差するように実 2 次元ベクトルの意味で  $(1, -1)$  方向へ変化させたとき, 交差するまでは  $|w_1 w_2| < 1/4$  である. また, 実軸上の  $(-5/4, -3/4)$  を横切るように実 2 次元ベクトルの意味で  $(1, -1)$  方向へ変化させたとき, 交差するまでは  $|w_1 w_2| < 1/4$  である. よって  $c$  が Fig.4.10 の斜線部にある時  $|w_1 w_2| < 1/4$  となる.

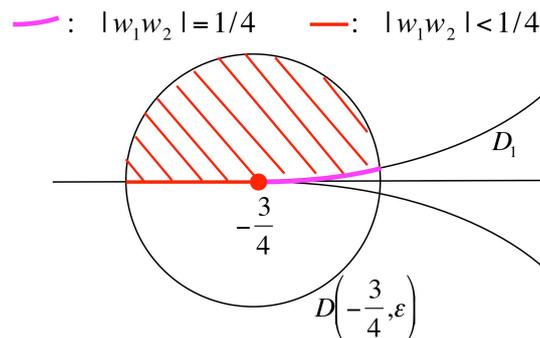


Fig. 4.10

あとは, 定理 4.4 の証明内の (i) のように  $\frac{\partial}{\partial n} |c^2 + c|^2 > 0$  となる  $-3/4$  を中心とした円板の半径を考慮して  $\varepsilon$  を定める. ゆえに, 各  $c \in D(-3/4, \varepsilon) \setminus D_1$  に対し,  $f_c$  が周期 2 の吸引的周期点を持つことが言えた. ここで, 次の命題を用いる.

**命題 4.8** ([2] Theorem4.6)  $Q$  を多項式として,  $z_0$  は  $Q$  の吸引的不動点とする.  $Q'(z) = 0$  を満たす点  $z$  を  $Q$  の臨界点という.  $Q$  の少なくとも 1 つの臨界点は  $z_0$  に収束する.

この命題において  $Q(z) = f_c^2(z)$  とする.

$$\begin{aligned}(f_c^2)'(z) &= 4z^3 + 4\bar{c}z \\ &= 4z(z^2 + \bar{c}) \\ |(f_c^2)'(z)| &= 4|z||z^2 + \bar{c}|\end{aligned}$$

$f_c^2(z)$  の臨界点は  $z = 0$  と  $z^2 = -\bar{c}$  を満たす複素数である. このうち,  $z^2 = -\bar{c}$  を満たす複素数は  $f_c$  によって 0 に写る. よって,  $z^2 = -\bar{c}$  を満たす複素数の  $f_c$  による反復合成の軌道は 0 の軌道と同じになる. ゆえに, 数列  $\{f_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が周期 2 の吸引的周期点に集積することがわかる.

このことから, Fig. 4.10 の斜線部は  $D_2$  に含まれることがわかったので,  $D_1$  と  $D_2$  の共通境界は曲線を含むことが示された.

< Q.E.D. >

## 参考文献

- [1] W.D.Crowe, R.Hasson, P.J.Rippon, P.E.D.Strain-Clark, On the structure of the Mandelbar set, *Nonlinearity*, 2 (1989), 541-553.
- [2] Robert L Devaney, *An introduction to chaotic dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.

## 謝辞

この論文を作成するにあたり、指導教官の川平友規先生から懇切丁寧な指導を賜りました。心より感謝いたします。また、少人数ゼミでは頻繁にアドバイスをしてくださった李正勲さん、藤野弘基さん、一階智弘さんの先輩方、アドバイザーとしてお世話になった糸健太郎先生に感謝いたします。