擬円板の特徴付け

家迫　正英
大阪市立大学

目 次

1 序

拡張された複素平面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の擬円板とは、$\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の上への擬等角写像による単位円板の像のことである。この擬円板には 19 個の特徴的な性質が知られている (cf. Gehring[1])。
〜19 個の擬円板の特徴付けの一覧〜

1 Hyperbolic segment property
2 Uniform domain
3 Linear local connectivity
4 Arc condition (three point property, of bounded turning)
5 BMO extension property
6 Whitney cube decomposition property
7 Hyperbolic bound property
8 Reflection property
9 Quasiconformal reflection property
10 Schwarzian derivative property (Schwarzian univalent criterion)
11 Logarithmic derivative property
12 Rigid domain
13 L_1^2 extension property
14 Hardy-Littlewood property
15 Homogeneity boundary property
16 Homogeneity domain property
17 Limit set of a discontinuous group
18 Dirichlet integral property
19 Mapping property

このうち、1〜4 の各性質をもつ単連結領域と擬円板は、有名な閉じた定理の鎖によって、互いに同値であることが知られている (cf. Gehring[1],Lehto[7])。このことを既知として、5〜7 の各性質を持つ領域が、擬円板と同値となる事を詳しく解説するのが、本論文の目的である。この目的のため、2〜4、8〜19 の性質の紹介は省略する。

擬円板の特徴付けは、比較的、幾何学的なものが多いが、上の一覧より、解析学的なものも存在する。これらの特徴は、擬等角写像とは直接関わりの無いように思われる領域の様々な解析的あるいは幾何学的性質の間の驚くべきつながりを明らかにしている。上記の一覧にある擬円板の主な性質の幅広い記述は、1982 年に発行された Gehring[1] の講義ノートに与えられており、この Gehring[1] のノートには、多大な参考文献も記されている。

擬円板の境界である擬円は、Pfluger(1961) と Tienari(1962) によって紹介された。1963 年に Ahlfors は、擬円板の持つ性質 4 の Arc condition (弧条件) が擬円と必要十分であることを示し、擬円を幾何学的に特徴付けた。この同じ論文で、Ahlfors は擬等角鏡映についても紹介し、それらを等角写像に対する重要な拡張定理を証明することに用いた。Gehring は、擬円板の持つ性質 3 の Linear local connectivity(線形局所連結) の概念を定義し、1977 年に、境界が二点以上の単連結領域が線形局所連結であるならば、その領域の境界が弧条件を満たす Jordan 曲線であることを証明した。擬円板と擬円板の持つ性質 2 の Uniform domain(一様領域) とが必要十分であることは、1979 年、Martio & Sarvas によって示され、また、1977 年に Gehring & Osgood[3] は、擬円板と擬円板の持つ性質 1 の Hyperbolic segment property(双曲線分性) を持つ単連結領域とが必要十分であることを証明している。

本論文を書くにあたって、その中心となる擬等角写像と擬円板の定義を簡単に述べる。擬等角写像 (quasiconformal mappings) には、解析的定義と幾何学的定義があるが、それぞれ互いに同値である事が知られている (cf. Lehto & Virtanen[8])。

定義 1.1

領域 $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ 上の連続関数 $f(z) = f(x, y)$ が ACL(absolutely continuous on lines) であるとは、D 内の任意の長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ に対して、次の 2 条件が成り立つことである。

1° $[c, d]$ 上の a.e. y に対して、$f(x, y)$ は x の関数として $[a, b]$ 上絶対連続。

2° $[a, b]$ 上の a.e. x に対して、$f(x, y)$ は y の関数として $[c, d]$ 上絶対連続。

領域 D 上の連続関数 $f(z)$ が D 上 ACL であるならば、$f(z)$ は a.e.D 上 $f_z, f_{\overline{z}}$ が存在する (cf. Lehto & Virtanen[8])。

定義 1.2(擬等角写像の解析的定義)

$1 \leq K < \infty$ と仮定する。

f が領域 $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の中への同相写像であって、次の 2 条件が成立する時、f を D 上 K-擬等角 (K-quasiconformal) であるという。

1° f は D 上で ACL である。

2° $\max_{\alpha} |\partial_\alpha f(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_\alpha f(z)|$, $\forall z \in D$ a.e.

ここで、$\partial_\alpha f(z)$ とは、点 z における、f の α 方向の微分である。

定義 1.3(擬等角写像の幾何学的定義)

$1 \leq K < \infty$ と仮定する。

f が領域 $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の中への向きを保つ同相写像であって、次の不等式が成立する時、f を D 上 K-擬等角 (K-quasiconformal) であるという。

$$\sup\Big\{\frac{M(f(Q))}{M(Q)} \;\Big|\; \forall Q \ : \ \text{四辺形}\ s.t.\ \overline{Q} \subset D\Big\} \leq K < \infty$$

ここで、$M(Q)$ とは、四辺形 Q のモジュールである。

f が擬等角であるとは、ある $K \geq 1$ に対して , f が K-擬等角である事をいう。

定義 1.4

領域 D が $\hat{\mathbb{C}}$ 上の K-擬円板 (K-quasidisks) であるとは、D が $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の上への自己 $K-$ 擬等角写像による単位円板の像である。 また、領域 D が擬円板であるとは、ある $K \geq 1$ に対して , D が K-擬円板である事をいう。

第 2 章では、二種類の BMO 関数の定義を紹介し、それらが同値である事を証明する。又、BMO 関数は擬等角写像によって不変である事を証明し、その不変性を用いて、BMO 拡張性を持つ領域と擬円板が関係付けられる事を示す。

第 3 章では、第二章で紹介する Whitney p-cube 分解を用いた Whitney cube 分解性を紹介し、その性質を持つ領域と第二章で紹介した BMO 拡張性を持つ領域とが関係付けられる事を示す。

第 4 章では、双曲距離を用いた領域の性質、双曲有界性を紹介し、その性質を持つ領域と第三章の Whitney cube 分解性を持つ領域とが関係付けられる事を示す。

第 5 章では、双曲線分を用いた領域の性質、双曲線分性を紹介し、その性質を持つ領域と第四章の双曲有界性を持つ境界が 2 点以上の無限遠点を除く単連結領域とが関係付けられる事を示して、擬円板を特徴付ける大きな定理の鎖を閉じる。

この論文を通して用いる記号や言葉をここで述べておく。

· cube は辺が軸に平行とは限らない閉正方形を、ball は閉円板を、p-cube は辺が軸に平行な閉正方形を表す。

· $A_1, \tilde{A_1}, A_2, A_3, \cdots, C_1, C_2, \cdots$ を絶対定数とする。

· $\ell(Q)$ は cube Q の辺の長さ、$diam(Q)$ は cube Q の直径、 $rad(B)$ は ball B の半径とする。

· Δ を単位円板, $B(z, r)$ を z 中心、半径 r の開円板, $D^* = \mathbb{C} - \overline{D}$ とする。

・k_D は D 上の擬双曲距離を, そして h_D は D 上の双曲距離を表す。

最後に、この論文を書くにあたって、指導して下さった佐官謙一先生、ならびに様々な助言を下さった防衛大学の後藤泰宏先生、早稲田大学の松崎克彦先生、そして山口大学の増本誠先生に、この場をお借りして、厚くお礼申し上げたいと思います。

2　BMO 関数と擬円板との関係

2.1　BMO 関数の定義

BMO 関数には書籍によって、定義が異なる。そこでまず、2 種類の BMO 関数の定義を紹介し、その定義が同値であることを証明する。
以下では、特別に表記することがない限り、D は $\mathbb{C}$ 内の領域とする。

定義 2.1(cube による BMO 関数の定義)
f が D 上 BMO 関数 (a bounded mean oscillation function) であるとは、f は D 上実数値局所可積分関数であって、

$$||f||_{*,D}^{C} := \sup_{Q\subset D:\mathrm{cube}} \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(z)-f_Q|dm < +\infty$$

なることである。ここで、$m(Q)$ は Q の面積 (測度)、$dm = dxdy$ $(z = x+iy)$, $f_Q = \dfrac{1}{m(Q)}\displaystyle\int_Q f(z)dm$ である。
このとき、$f \in BMO_C(D)$ と表記する。

定義 2.2(ball による BMO 関数の定義)
f が D 上 BMO 関数 (a bounded mean oscillation function) であるとは、f は D 上実数値局所可積分関数であって、

$$||f||_{*,D}^{B} := \sup_{B\subset D:\mathrm{ball}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(z)-f_B|dm < +\infty$$

なることである。
このとき、$f \in BMO_B(D)$ と表記する。

この二種類の BMO 関数の定義の同値性を示す際に用いられる、２つの重要な定理を証明する。

定理 2.3.C(BMO_C の局所化定理)(Gotoh[4])
D 上実数値局所可積分関数 f について、f はある $\lambda \geq 1$, $L > 0$ に対して、$d(Q,\partial D) \geq \lambda\ell(Q)$ を満たす任意の cube $Q \subset D$ 上 $f \in BMO_C(Q)$ となり、しかも $||f||_{*,Q}^{C} \leq L$ であるとする。この時、$f \in BMO_C(D)$ であり、しかも

$$||f||_{*,D}^{C} \leq A_1 L\lambda$$

証明.　$s = [3\lambda + \sqrt{2}] + 1$ とおく。また、Q を D 上の任意の cube であるとし、Q の中心を x_Q とする。この Q に対し、$\ell(Q_n) = (1-2^{-n})\ell(Q)$ なる x_Q 中心、辺が Q と平行な cube 列 $\{Q_n\}_{n=1,\cdots}$ を選ぶ。そして、各 $Q_n (n \geq 2)$ を辺の長さが $2^{-n-1}\ell(Q)$ なる $4(2^n-1)^2$ 個の合同な cubes に分割し、それらの内で、Q_{n-1} に含まれないものの全体を D_n とする。Q_1 については、それを 4 つの合同な cubes に分割し、それらを D_1 と表す。このとき、$\#\{D_n\} = 2^{n+3} - 12$ である。さらに、D_n の各 cubes を s^2 個の合同な cubes に分割し、その cube たちの族を

$$D_n{}' = \{Q_{n,i}\}_{1\leq i\leq s^2(2^{n+3}-12)}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

と表す。
まず、$Q_{n,i} \cap Q_{n',i'} \neq \phi$ のとき、$|f_{Q_{n,i}} - f_{Q_{n',i'}}| \leq 45L$ を示す。
$\ell(Q_{n,i}) \geq \ell(Q_{n',i'})$ と仮定しておく。このとき、

$$Q_{n,i} \cup Q_{n',i'} \subset 3Q_{n,i}$$

である。ここで、$3Q_{n,i}$ とは、$Q_{n,i}$ と同心かつ辺がそれぞれ平行で、$\ell(3Q_{n,i}) = 3\ell(Q_{n,i})$ の cube のことである。

このとき、$d(Q_{n,i},\partial D)\le d(3Q_{n,i},\partial D)+\sqrt{2}\ell(Q_{n,i})$ であるので、

$$\frac{d(3Q_{n,i},\partial D)}{\ell(3Q_{n,i})}\ge\frac{d(Q_n,\partial D)}{3\ell(Q_{n,i})}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ge\frac{s-\sqrt{2}}{3}\ge\lambda$$

$\therefore 3Q_{n,i}$ は定理の仮定を満たす cube であるので、

$$|f_{Q_{n,i}}-f_{3Q_{n,i}}|\le\frac{9}{m(3Q_{n,i})}\int_{3Q_{n,i}}|f(z)-f_{3Q_{n,i}}|dm\le 9L$$

同様に、$|f_{Q_{n',i'}}-f_{3Q_{n,i}}|\le 36L$

$$\therefore |f_{Q_{n,i}}-f_{Q_{n',i'}}|\le 45L$$

さて、D'_1 に属す cube で、x_Q を含むものの 1 つを Q_0 と置く。このとき、$\forall Q_{n,i}\in D'_n$ と Q_0 は高々ns 個の隣り合った cube 列で結べるので、

$$|f_{Q_{n,i}}-f_{Q_0}|\le 45Lns$$

とわかる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_Q|dm &\le\frac{2}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_{Q_0}|dm\\ &\le\frac{2}{m(Q)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{s^2(2^{n+3}-12)}\Big\{\frac{1}{m(Q_{n,i})}\int_{Q_{n,i}}|f(z)-f_{Q_{n,i}}|dm+45Lns\Big\}m(Q_{n,i})\end{aligned}$$

また、$Q_{n,i}$ は、仮定の条件を満たす cube であるので、$||f||_{*,Q_{n,i}}\le L$ である。
従って、$s\le 6\lambda$ より、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_Q|dm\le\frac{2}{m(Q)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{46Lns\sum_{i=1}^{s^2(2^{n+3}-12)}\frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{2n+2}}\ell(Q)^2\Big\}\le 1472L\lambda$$

$\therefore Q$ は任意だったので、$A_1=1472$ とすれば、

$$||f||_{*,D}\le A_1L\lambda \qquad \square$$

定理 2.3.B(BMO_B の局所化定理)(Gotoh[4])

D 上実数値局所可積分関数 f について、f はある $\tilde{\lambda}\ge 1$, $\tilde{L}>0$ に対して、$d(B,\partial D)\ge\tilde{\lambda}rad(B)$ を満たす任意の ball $B\subset D$ 上 $f\in BMO_B(B)$ となり、しかも $||f||^B_{*,B}\le\tilde{L}$ であるとする。この時、$f\in BMO_B(D)$ であり、しかも

$$||f||^B_{*,D}\le\tilde{A}_1\tilde{L}\tilde{\lambda}$$

この定理を証明するためには、次のような分解と、いくつかの補題を必要とする。

補題 2.4(α-Whitney p-cube 分解)(Stein[11])

$\alpha\ge 1$ に対し、次を満たす D のある p-cube 分解 $E^{\alpha}_D=\{Q_j\}$ が常に存在する。

1° $D=\bigcup_j Q_j$

2° $Q_j^\circ\cap Q_k^\circ=\phi$ $(j\ne k)$

3° $\alpha\le\dfrac{d(Q_j,\partial D)}{\ell(Q_j)}\le 2\alpha+\sqrt{2}$

4° $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)}\le 4$, $(Q_j\cap Q_k\ne\phi)$

証明.　まず、$\mathbb{C}$ を格子状に辺の長さが 1 の p-cube 族に分割する。この p-cube 族において、
$d(\widetilde{Q_j},\partial D) \geq \alpha\ell(\widetilde{Q_j})$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{Q_j}\}$ と、
$d(Q_j,\partial D) < \alpha\ell(Q_j)$ なる D と共通部分を持つ p-cube たちの族 $\{Q_j\}$ とに分ける。
族 $\{Q_j\}$ に対し、$\forall Q \in \{Q_j\}$ を 4 つの合同な p-cubes に分割する。このときに得られる分割 Q' は、

$$\frac{d(Q',\partial D)}{\ell(Q')} \leq \frac{d(Q,\partial D)+\sqrt{2}\ell(Q')}{\frac{1}{2}\ell(Q)} < \frac{2(\alpha\ell(Q)+\frac{\sqrt{2}}{2}\ell(Q))}{\ell(Q)} = 2\alpha+\sqrt{2}$$

を満たす。次に、この分割で得られた p-cube たちの族 $\{Q'\}$ において、再び、
$d(\widetilde{Q_j}',\partial D) \geq \alpha\ell(\widetilde{Q_j}')$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{Q_j}'\}$ と、
$d(Q_j',\partial D) < \alpha\ell(Q_j')$ なる D と共通部分を持つ p-cube たちの族 $\{Q_j'\}$ とに分ける。
上記と同様に、$\forall Q' \in \{Q_j'\}$ を 4 つの合同な p-cubes に分割すると、得られる分割 Q'' に対して、

$$\frac{d(Q'',\partial D)}{\ell(Q'')} < 2\alpha+\sqrt{2}$$

を得る。以下、この操作を繰り返し行えば、各 $n \geq 1$ に対し、辺の長さが 2^{-n} の D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{Q_j^{(n)}}\}$ が得られ、その族の元 $\widetilde{Q_j^{(n)}}$ は、

$$\alpha \leq \frac{d(\widetilde{Q_j^{(n)}},\partial D)}{\ell(\widetilde{Q_j^{(n)}})} \leq 2\alpha+\sqrt{2}$$

を満たす。次に、$\forall \mathcal{Q} \in \{\widetilde{Q_j}\}$ に対し、
$d(\widetilde{\mathcal{Q}_j},\partial D) \leq (2\alpha+\sqrt{2})\ell(\widetilde{\mathcal{Q}_j})$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{\mathcal{Q}_j}\}$ と、
$d(\mathcal{Q}_j,\partial D) > (2\alpha+\sqrt{2})\ell(\mathcal{Q}_j)$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\mathcal{Q}_j\}$ とに分ける。
$\forall \mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_j\}$ に対し、$\mathcal{Q}$ を含み、$\ell(\mathcal{Q}') = 2\ell(\mathcal{Q})$ なる p-cube $\mathcal{Q}'$ をとると、

$$\frac{d(\mathcal{Q}',\partial D)}{\ell(\mathcal{Q}')} \geq \frac{d(\mathcal{Q},\partial D)-\sqrt{2}\ell(\mathcal{Q})}{\ell(\mathcal{Q}')} > \frac{(2\alpha+\sqrt{2})\ell(\mathcal{Q})-\sqrt{2}\ell(\mathcal{Q})}{2\ell(\mathcal{Q})} = \alpha$$

を満たす。これより特に、$\mathcal{Q}' \subset D$ であるので、各 $\mathcal{Q}'$ に含まれる $\{\mathcal{Q}_j\}$ 内の p-cube は全て、$\mathcal{Q}'$ に統合し、その $\mathcal{Q}'$ たちの族を $\{\mathcal{Q}'\}$ とする。この p-cube 族 $\{\mathcal{Q}'\}$ において、再び、
$d(\widetilde{\mathcal{Q}_j}',\partial D) \leq (2\alpha+\sqrt{2})\ell(\widetilde{\mathcal{Q}_j}')$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{\mathcal{Q}_j}'\}$ と、
$d(\mathcal{Q}_j',\partial D) > (2\alpha+\sqrt{2})\ell(\mathcal{Q}_j')$ なる D に含まれる p-cube たちの族 $\{\mathcal{Q}_j'\}$ とに分ける。
そして、上記と同様に、$\forall \mathcal{Q}' \in \{\mathcal{Q}_j'\}$ に対し、$\mathcal{Q}'$ を含み、$\ell(\mathcal{Q}'') = 2\ell(\mathcal{Q}')$ なる p-cube $\mathcal{Q}''$ をとると、

$$\frac{d(\mathcal{Q}'',\partial D)}{\ell(\mathcal{Q}'')} \geq \alpha\ ,\ \mathcal{Q}'' \subset D$$

を満たす p-cube たちの族 $\{\mathcal{Q}''\}$ を得る。

以下、この操作を $d(\mathcal{Q},\partial D) > (2\alpha+\sqrt{2})\ell(\mathcal{Q})$ なる p-cube $\mathcal{Q}$ が存在する限り繰り返し行えば、先ほどの p-cube 族とあわせて、各 $(n \in \mathbb{Z})$ に対し、辺の長さが 2^n の D に含まれる p-cube たちの族 $\{\widetilde{Q_j^{(n)}}\}$ が得られ、その元 $\widetilde{Q_j^{(n)}}$ は、

$$\alpha \leq \frac{d(\widetilde{Q_j^{(n)}},\partial D)}{\ell(\widetilde{Q_j^{(n)}})} \leq 2\alpha+\sqrt{2}$$

を満たす。

$$E_D^{\alpha} = \{Q_j\} := \bigcup_n \{\widetilde{Q_j^{(n)}}\}$$

とすれば、その構成方法から、

$$D = \bigcup_{Q \in E_D^{\alpha}} Q\ \ ,\ \ Q_j^{\circ} \cap Q_k^{\circ} = \phi\ (j \neq k)\ \ ,\ \ \alpha \leq \frac{d(Q_j,\partial D)}{\ell(Q_j)} \leq 2\alpha+\sqrt{2}\ \ (\forall Q_j, Q_k \in E_D^{\alpha})$$

が従う。最後に、$\forall Q_j, Q_k \in E_D^\alpha$ に対し、$Q_j \cap Q_k \neq \phi$ ならば、

$$\ell(Q_j) \leq \frac{d(Q_j, \partial D)}{\alpha} \leq \frac{d(Q_k, \partial D) + \sqrt{2}\ell(Q_k)}{\alpha} \leq (2 + 2\sqrt{2})\ell(Q_k)$$

とわかる。E_D^α の構成方法から、各 p-cube の辺の長さは 2^n $(n \in \mathbb{Z})$ であるので、

$$\ell(Q_j) \leq 4\ell(Q_k)$$

$\therefore$ Q_j と Q_k の対称性より、

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\ell(Q_j)}{\ell(Q_k)} \leq 4 \qquad \Box$$

この E_D^α を、D の $\alpha-$Whitney p-cube 分解 と呼び、その元 $Q \in E_D^\alpha$ を $\alpha-$Whitney cube、または単に Whitney cube と呼ぶ。

補題 2.5(Gehring[1])

$\forall z_0 \in D, \forall r > 0$ に対し、$B_0 = B(z_0, r) \subset D$ であるならば、このとき、

$$\int_{B_0} h_D(z, z_0) dm \leq 2m(B_0)$$

証明. D を単位円板と仮定すると、

$$h_D(z, 0) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

であるので、

$$\int_D h_D(z, 0) dm = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Big(\log \frac{1 + r}{1 - r}\Big) r dr d\theta = 2\pi$$

一般の領域の場合、

$$w = f(z) = \frac{1}{r}(z - z_0)$$

は、B_0 を単位円板 $\mathit{\Delta}$ に等角に写す。又、$B_0 \subset D$ であるので、

$$h_D(z, z_0) \leq h_{B_0}(z, z_0) \quad , \forall z \in B_0$$

$$\therefore \int_{B_0} h_D(z, z_0) dm \leq \int_{B_0} h_{B_0}(z, z_0) dm = \int_{B_0} h_{\mathit{\Delta}}(f(z), f(z_0)) dm = r^2 \int_{\mathit{\Delta}} h_{\mathit{\Delta}}(w, 0) d\tilde{m} = 2m(B_0) \qquad \Box$$

補題 2.6

任意の ball B の $\lambda-$Whitney p-cube 分解 E_B^λ に対して、B 内の曲線 γ が不等式

$$|\gamma|_{qh} \leq \frac{1}{40\lambda}$$

を満たすならば、γ と交わる E_B^λ 内の Whitney cube の個数は高々4 個である。
ここで、$|\gamma|_{qh}$ は γ を B 上の擬双曲距離 k_B で計ったときの長さである。

証明. $Q \in E_B^\lambda$ を γ と交わる辺の長さが最大の Whitney cube とし、z_0 を $\gamma \cap Q$ 上の任意の点とする。この点 z_0 に対し、開円板 $B_0 := B(z_0, \frac{1}{8}\ell(Q))$ をとる。このとき、$B_0 \subset B$ であり、$\forall \zeta \in B_0$ に対して、

$$d(\zeta, \partial B) \leq |\zeta - z_0| + d(z_0, \partial B) \leq (2\lambda + 2\sqrt{2} + \frac{1}{8})\ell(Q)$$

$$\therefore\ k_B(z_0, \partial B_0) = \inf_{w \in \partial B_0} k_B(z_0, w) \geq \inf_{w \in \partial B_0} \inf_{\alpha} \int_\alpha \frac{1}{(2\lambda + 2\sqrt{2} + \frac{1}{8})\ell(Q)} |d\zeta| > \frac{1}{40\lambda}$$

仮定から、$|\gamma|_{qh} \leq \dfrac{1}{40\lambda} < k_B(z_0, \partial B_0)$ なので、$\gamma \subset B_0$ であり、Whitney p-cube 分解の性質 4° より、B_0 は $Q \cap \tilde{Q} = \phi$ なる Whitney cubes $\tilde{Q}$ とは交わらず、交わったとしても、高々4 つの $Q \cap Q' \neq \phi$ なる Whitney cubes Q' だけである。 $\Box$

定理 2.3.B を証明する前に、補題 2.4 に対する Whitney chain を定義する。

定義 2.7

任意の Whitney cubes $Q_j, Q_k \in E_D^\alpha$ に対して、Whitney cube 列 $Q_j = Q(0), Q(1), \cdots, Q(M) = Q_k \in E_D^\alpha$ が、$Q(k) \cap Q(k+1) \neq \phi \ \ (k = 0, 1, \cdots, M-1)$ を満たすとき、この Whitney cube 列を Q_j と Q_k をつなぐ Whitney chain であるといい、

$$Q_j = Q(0) \to Q(1) \to \cdots \to Q(M) = Q_k$$

と表す。ここで、M は Q_j と Q_k をつなぐ Whitney chain の長さと呼ばれる。

定理 2.3.B の証明. 任意の ball $B \subset D$ をとる。この B に対し、補題 2.4 を適用させて、B の $(\tilde{\lambda}+1)-$Whitney p-cube 分解 $E_B^{\tilde{\lambda}+1} = \{Q_j\}$ を行う。この分解から、$\forall Q_j, Q_k \in E_B^{\tilde{\lambda}+1}$ に対し、$Q_j \cap Q_k \neq \phi$ であるなら、

$$Q_j \cup Q_k \subset B' \quad \cdots \ (2.1.1) \qquad (\tilde{\lambda}+1)B' \subset B \quad \cdots \ (2.1.2)$$
$$m(B') \leq \frac{25}{2}\pi m(Q_j) \quad \cdots \ (2.1.3) \qquad m(B') \leq \frac{25}{2}\pi m(Q_k) \quad \cdots \ (2.1.4)$$

を満たすある ball B' がとれる。ここで、$(\tilde{\lambda}+1)B'$ とは、B' と同心円板で、$rad((\tilde{\lambda}+1)B') = (\tilde{\lambda}+1)rad(B')$ の ball のことである。この ball B' は、(2.1.2) より、

$$d(B', \partial D) \geq d(B', \partial B) = d((\tilde{\lambda}+1)B', \partial B) + \Big(rad((\tilde{\lambda}+1)B') - rad(B')\Big) \geq \tilde{\lambda} rad(B')$$

であるので、B' は仮定の条件を満たす ball である。よって、(2.1.1), (2.1.3), (2.1.4) から、

$$|f_{B'} - f_{Q_j}| \leq \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(z) - f_{B'}| dm \leq \frac{\frac{25}{2}\pi}{m(B')} \int_{B'} |f(z) - f_{B'}| dm \leq \frac{25}{2}\pi \tilde{L}$$

であり、また同様に、$|f_{B'} - f_{Q_k}| \leq \dfrac{25}{2}\pi \tilde{L}$ である。

$\therefore Q_j \cap Q_k \neq \phi$ であるならば、このとき

$$|f_{Q_j} - f_{Q_k}| \leq 25\pi \tilde{L}$$

がいえた。

次に、ball B の中心を z_0 とし、点 z_0 を含む $E_B^{\tilde{\lambda}+1}$ 内の Whitney cube を Q_0 とする。このとき、$\forall Q \in E_B^{\tilde{\lambda}+1}$ に対し、Q_0 と Q をつなぐ Whitney chain

$$Q_0 = Q(0) \to Q(1) \to \cdots \to Q(M) = Q$$

を考える。この Whitney chain に対し、

$$d_1(Q_0, Q) := \min\{M \ \big| \ Q_0 = Q(0) \to Q(1) \to \cdots \to Q(M) = Q\}$$

とおく。簡易化のために、$d_1(Q_0, Q) = n$ とすれば、$\forall z \in Q$ に対し、

$$n \leq 160(\tilde{\lambda}+1)k_B(z, z_0) + 4$$

が成立する。実際、z_0 と z を B 内の擬双曲測地線 γ で結ぶ。ここで、$\gamma \subset B$ が擬双曲測地線であるとは、$\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \gamma$ に対し、端点が ζ_1, ζ_2 の γ の部分弧を $\gamma(\zeta_1, \zeta_2)$ とするならば、

$$k_B(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{\gamma(\zeta_1, \zeta_2)} \frac{1}{d(w, \partial B)} |dw|$$

を満たす曲線の事を言う (cf. Gehring & Osgood[3])。さて、γ を擬双曲距離の意味で、

$$s = [40(\tilde{\lambda}+1)k_B(z, z_0)] + 1$$

個の擬双曲測地線 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ に等分割する。このとき、

$$|\gamma_k|_{qh} = \frac{k_B(z, z_0)}{s} = \frac{k_B(z, z_0)}{[40(\tilde{\lambda}+1)k_B(z, z_0)] + 1} \leq \frac{1}{40(\tilde{\lambda}+1)} \ (k = 1, 2, \cdots, s)$$

となることから、補題 2.6 より、各 γ_k $(k=1,2,\cdots,s)$ と交わる $E_B^{\tilde\lambda+1}$ 内の Whitney cubes は高々4 個である。

$$\therefore\quad n\le 4s=4[40(\tilde\lambda+1)k_B(z,z_0)]+4\le 160(\tilde\lambda+1)k_B(z,z_0)+4$$

以上から、$\forall z\in Q$ に対し、

$$|f_{Q_0}-f_Q|\le\sum_{k=0}^{n-1}|f_{Q(k+1)}-f_{Q(k)}|\le\sum_{k=0}^{n-1}25\pi\tilde L=25\pi\tilde Ln\le 4000\pi\tilde L(\tilde\lambda+1)k_B(z,z_0)+100\pi\tilde L$$

であり、Koebe の歪曲定理から、

$$|f_{Q_0}-f_Q|\le 8000\pi\tilde L(\tilde\lambda+1)h_B(z,z_0)+100\pi\tilde L$$

$\therefore |f_{Q_0}-f_Q|$ を Q 上の z の定関数だと思えば、Whitney cube の性質 $1^\circ,2^\circ$ と、補題 2.5 より、

$$\sum_{Q\in E_B^{\tilde\lambda+1}}\int_Q|f_{Q_0}-f_Q|dm\le\Big(16000\pi\tilde L(\tilde\lambda+1)+100\pi\tilde L\Big)m(B)$$

従って、

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(z)-f_B|dm&\le\frac{2}{m(B)}\int_B|f(z)-f_{Q_0}|dm\\&\le\frac{2}{m(B)}\sum_{Q\in E_B^{\tilde\lambda+1}}\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_Q|dm\Big)m(Q)+\frac{2}{m(Q)}\sum_{Q\in E_B^{\tilde\lambda+1}}\int_Q|f_{Q_0}-f_Q|dm\end{aligned}$$

ここで、${B_Q}'$ を (2.1.1)〜(2.1.4) を満たす Q を覆う ball だとすれば、

$$\begin{aligned}&\le\frac{2}{m(B)}\sum_{Q\in E_B^{\tilde\lambda+1}}\Big(\frac{2}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_{B_Q{}'}|dm\Big)m(Q)+\frac{2}{m(B)}\cdot\Big(16000\pi\tilde L(\tilde\lambda+1)+100\pi\tilde L\Big)m(B)\\&\le 64250\pi\tilde L\tilde\lambda\end{aligned}$$

$\therefore\quad \tilde A_1=64250\pi$ とすれば、B は任意だったので、

$$f\in BMO_B(D)\ \ s.t.\ ||f||_{*,D}^B\le\tilde A_1\tilde L\tilde\lambda\qquad\square$$

さて、以上の 2 つの定理 (定理 2.3.C , 定理 2.3.B) を用いて、定義 2.1 と定義 2.2 が同値であることを示そう。

定理 2.8(BMO の定義の同値性定理)(Gotoh[4])

$$f\in BMO_C(D)\iff f\in BMO_B(D)$$

証明. $(\Longrightarrow)$ $f\in BMO_C(D)$, $||f||_{*,D}^C<+\infty$ とする。

$$d(B,\partial D)\ge 2rad(B)\quad\cdots\ (2.1.5)$$

なる任意の ball $B\subset D$ に対して、B に外接するある cube Q がとれる。このとき、B の仮定より、$Q\subset D$, $m(Q)=\dfrac{4}{\pi}m(B)$ である。
よって、

$$||f||_{*,D}^C\ge\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(z)-f_Q|dm\ge\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{m(B)}\int_B|f(z)-f_Q|dm\ge\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{m(B)}\int_B|f(z)-f_B|dm$$

さて、任意の ball $\tilde B\subset B$ を考えると、

$$d(B,\partial D)\le d(\tilde B,\partial D)\ ,\ rad(B)\ge rad(\tilde B)$$

であるので、$\tilde B$ も条件 (2.1.5) を満たす。よって、上記と同様に $\tilde B$ に外接する cube $\tilde Q$ を考えれば、

$$||f||_{*,D}^C\ge\frac{1}{m(\tilde Q)}\int_{\tilde Q}|f(z)-f_{\tilde Q}|dm\ge\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{m(\tilde B)}\int_{\tilde B}|f(z)-f_{\tilde B}|dm$$

$$\therefore \quad ||f||^B_{*,B} \leq \frac{8}{\pi}||f||^C_{*,D}$$

定理 2.3.B より、

$$||f||^B_{*,D} \leq \tilde{A}_1\frac{16}{\pi}||f||^C_{*,D}$$

($\Longleftarrow$) $f \in BMO_B(D)$, $||f||^B_{*,D} < +\infty$ とする。上の証明と同様に、$d(Q, \partial D) \geq \ell(Q)$ を満たす任意の cube $Q \subset D$ に対し、Q に外接するある ball B をとれば、

$$||f||^C_{*,Q} \leq \pi||f||^B_{*,D}$$

がいえる。よって、定理 2.3.C より、

$$||f||^C_{*,D} \leq A_1\pi||f||^B_{*,D} \qquad \Box$$

実際、

$$\frac{1}{A_1\pi}||f||^C_{*,D} \leq ||f||^B_{*,D} \leq \tilde{A}_1\frac{16}{\pi}||f||^C_{*,D}$$

である。

以上の事から、$BMO_C(D)$ も $BMO_B(D)$ も同値であるので、以降、BMO の定義は 定義 2.1 の cube の方を採用し、誤解の恐れがない場合には、単に、$BMO(D)$, $||\cdot||_{*,D}$ と表記する。

2.2 BMO 関数の擬等角不変性

まず、小節 2.1 において証明した、BMO の局所化定理を用いて、後で用いられる、いくつかの定理や系を紹介する。

系 2.9(Gotoh[4])

$f \in BMO(D)$ であれば、$Q^\circ \subset D$ なる任意の cube Q に対し、$f \in L^1(Q)$ でしかも

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(z) - f_Q|dm \leq ||f||_{*,D}$$

証明. 定理 2.3.C の証明のように、Q を $D_m{}'$ の cube 族に分割する。また仮定より、$f \in BMO(D)$ であるので、$||f||_{*,\tilde{Q}} \leq ||f||_{*,D}$,$\forall \tilde{Q} \subset D$

$$\therefore \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(z)|dm \leq \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(z) - f_{Q_0}|dm + |f_{Q_0}| \leq \frac{1}{2}A_1||f||_{*,D}\lambda + \frac{1}{m(Q_0)}\int_{Q_0}|f(z)|dm$$

$f \in BMO(D)$ なので、f は D 上局所可積分であり、$||f||_{*,D} < +\infty$ であることから、

$$f \in L^1(Q)$$

また、$Q_n = (1 - \frac{1}{n})Q \ \ (\subset D)$ とおき、

$$\frac{1}{m(Q_n)}\int_{Q_n} |f(z) - f_{Q_n}|dm \leq ||f||_{*,D}$$

において、両辺を $n \to \infty$ とすれば良い。 $\Box$

定理 2.10 (BMO の 1 点除去可能定理)(Gotoh[4])

D 内の任意の点 z_0 に対して、$D' := D - \{z_0\}$ と置くならば、このとき、$BMO(D') = BMO(D)$ であり、しかも

$$||f||_{*,D'} \le ||f||_{*,D} \le A_2 ||f||_{*,D'}$$

証明. ($\supset$) $\forall f \in BMO(D)$ に対し、

$$\infty > ||f||_{*,D} = \sup_{Q\subset D:\text{cube}} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(z) - f_Q| dm \ge \sup_{Q\subset D':\text{cube}} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(z) - f_Q| dm = ||f||_{*,D'}$$

なので、$f \in BMO(D')$

$$\therefore \quad BMO(D) \subset BMO(D') \quad , \quad ||f||_{*,D'} \le ||f||_{*,D}$$

($\subset$) $\forall f \in BMO(D')$ と、$d(Q, \partial D) \ge 4\ell(Q)$ なる任意の cube $Q \subset D$ に対し、Q 上での f の mean oscillation を評価する。

$z_0 \notin Q$ ならば問題は無いので、$z_0 \in Q$ として良い。この Q に対し、Q' を、z_0 中心、辺が Q の辺と平行で、$\ell(Q') = 2\ell(Q)$ なる cube とすると、$Q \subset Q' \subset 2Q' \subset D$ を満たし、そして、Q' を各辺の長さが $\ell(Q)$ の 4 つの合同な cubes に分割し、右上から反時計回りに Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とすると、

$$Q' = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \quad , \quad Q_j^\circ \subset D' \ \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

さらに、Q_1, Q_2 を含み、境界が z_0 を通るような $\ell(\hat{Q}_{1,2}) = 2\ell(Q)$ なる cube $\hat{Q}_{1,2}$ をとれば、 $\hat{Q}_{1,2}^\circ \subset D'$ である。このとき、系 2.9 より、

$$\frac{1}{m(\hat{Q}_{1,2})} \int_{\hat{Q}_{1,2}} |f(z) - f_{\hat{Q}_{1,2}}| dm \le ||f||_{*,D'}$$

$\therefore \quad j = 1, 2$ に対して、

$$|f_{Q_j} - f_{\hat{Q}_{1,2}}| \le \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(z) - f_{\hat{Q}_{1,2}}| dm \le \frac{4}{m(\hat{Q}_{1,2})} \int_{\hat{Q}_{1,2}} |f(z) - f_{\hat{Q}_{1,2}}| dm \le 4||f||_{*,D'}$$

$$\therefore \quad |f_{Q_1} - f_{Q_2}| \le |f_{Q_1} - f_{\hat{Q}_{1,2}}| + |f_{\hat{Q}_{1,2}} - f_{Q_2}| \le 8||f||_{*,D'}$$

同様にして、$\hat{Q}_{2,3}, \hat{Q}_{1,4}$ を構成すれば、

$$|f_{Q_2} - f_{Q_3}| \le 8||f||_{*,D'} \quad , \quad |f_{Q_4} - f_{Q_1}| \le 8||f||_{*,D'}$$

であり、

$$|f_{Q_3} - f_{Q_1}| \le |f_{Q_3} - f_{Q_2}| + |f_{Q_2} - f_{Q_1}| \le 16||f||_{*,D'}$$

従って、再び系 2.9 を用いれば、

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(z) - f_Q| dm \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f(z) - f_{Q_1}| dm \le 2 \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(z) - f_{Q_1}| dm \le 72||f||_{*,D'}$$

$\therefore \quad z_0 \in Q$ かつ $d(Q, \partial D) \ge 4\ell(Q)$ なる任意の cube $Q \subset D$ に対して、

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(z) - f_Q| dm \le 72||f||_{*,D'}$$

がいえた。さて、$\tilde{Q} \subset Q$ なる任意の cube $\tilde{Q}$ について考える。

(場合 1)

$z_0 \notin \tilde{Q}$ のとき、$\tilde{Q} \subset D'$ であるので、

$$\frac{1}{m(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |f(z) - f_{\tilde{Q}}| dm \le ||f||_{*,D'}$$

(場合 2)

$z_0 \in \tilde{Q}$ のとき、$d(\tilde{Q}, \partial D) \geq d(Q, \partial D)$, $\ell(Q) \geq \ell(\tilde{Q})$ であるので、この $\tilde{Q}$ は $d(\tilde{Q}, \partial D) \geq 4\ell(\tilde{Q})$ を満たす。

$\therefore$ Q を $\tilde{Q}$ とおきかえて、上と同様の議論を行えば、

$$\frac{1}{m(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |f(z) - f_{\tilde{Q}}| dm \leq 72||f||_{*,D'}$$

よって、場合 1,2 から、

$$||f||_{*,Q} \leq 72||f||_{*,D'}$$

従って、定理 2.3.C より、

$$f \in BMO(D) \text{ であり、しかも } ||f||_{*,D} \leq A_1 \cdot 72||f||_{*,D'} \cdot 4 = 288A_1||f||_{*,D'}$$

以上より、$A_2 = 288A_1$ とおけば、

$$BMO(D') = BMO(D) \ , \ ||f||_{*,D'} \leq ||f||_{*,D} \leq A_2||f||_{*,D'} \qquad \square$$

定理 2.11 (BMO の鏡像の原理)(Gotoh[4])

$D' \subset \mathbb{C}$ を実軸に対称な領域とし、$D = D' \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とする。

$p(z) = \overline{z}$, $f \in BMO(D)$ に対し、

$$f'(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D \\ f(p(z)) & z \in p(D) \end{cases}$$

と定めれば、$f' \in BMO(D')$ であり、しかも $||f'||_{*,D'} \leq A_3||f||_{*,D}$

証明. $d(Q, \partial D') \geq 2\ell(Q)$ なる任意の cube $Q \subset D'$ に対し、Q 上での f' の mean oscillation を評価する。

f' の定義から、f' は D' 上実数値局所可積分関数である。また、$Q \cap \mathbb{R} = \phi$ であるならば、問題は無いので、$Q \cap \mathbb{R} \neq \phi$ としてよい。

Q を実軸 $\mathbb{R}$ によって、2 つの領域 $\tilde{Q_1}, \tilde{Q_2}$ に分割すると、

$$Q_1^\circ \subset D \ , \ Q_2^\circ \subset p(D) \ , \ Q_1 = p(Q_2) \ , \ Q_j \cap \mathbb{R} \neq \phi \ , \ \tilde{Q_j} \subset Q_j \ , \ \ell(Q_j) = \sqrt{2}\ell(Q) \ \ (j = 1, 2)$$

を満たすある p-cubes Q_1, Q_2 がとれる。このとき、$Q \subset Q_1 \cup Q_2 \subset D'$ であるので、系 2.9 より、

$$\frac{1}{m(Q_1)} \int_{Q_1} |f'(z) - f'_{Q_1}| dm \leq ||f||_{*,D} \ \ , \ \ \frac{1}{m(Q_2)} \int_{Q_2} |f'(z) - f'_{Q_2}| dm \leq ||f||_{*,D}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'(z) - f'_Q| dm &\leq \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f'(z) - f'_{Q_2}| dm \\
&\leq \frac{4}{m(Q_1)} \int_{Q_1} |f'(z) - f'_{Q_2}| dm + \frac{4}{m(Q_2)} \int_{Q_2} |f'(z) - f'_{Q_2}| dm \\
&\leq \frac{4}{m(Q_1)} \int_{Q_1} |f(z) - f_{Q_1}| dm + 4||f||_{*,D} \leq 8||f||_{*,D}
\end{aligned}$$

さて、任意の cube $Q' \subset Q$ をとると、$d(Q', \partial D') \leq 2\ell(Q')$ となり、上と同様の議論を行えば、

$$\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} |f'(z) - f'_{Q'}| dm \leq 8||f||_{*,D}$$

がいえるので、

$$\therefore \ \ f' \in BMO(Q) \text{ かつ } ||f'||_{*,Q} \leq 8||f||_{*,D}$$

とわかる。よって、定理 2.3.C より、$f' \in BMO(D')$ であり、しかも、

$$||f'||_{*,D'} \leq A_1 \cdot 8||f||_{*,D} \cdot 2 = A_3||f||_{*,D} \qquad \square$$

今から、BMO 関数の擬等角不変性の証明にとりかかる。

定理 2.12(BMO 関数の擬等角不変性)(Reimann[9])

D_1, D_2 を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし、f を D_1 から D_2 の上への K-擬等角写像とする。$u_2 \in BMO(D_2)$ に対し、$u_1 := u_2 \circ f$ と置くならば、$u_1 \in BMO(D_1)$ であり、しかもある K のみに依存した定数 $b(K)$ が存在して、

$$||u_1||_{*,D_1} \leq b(K)||u_2||_{*,D_2}$$

これを証明するために、いくつかの定理を紹介する。

定理 2.13(Calderón - Zygmund の分解定理)(Gotoh[4])

$\mathbb{C}$ 内の任意の cube Q に対し、$g \geq 0$ を $p \geq 1$ なる $g \in L^p(Q)$ とする。このとき、$\dfrac{1}{m(Q)}\displaystyle\int_Q g^p(z)dm \leq s^p$ なる任意の s に対し、以下の条件を満たす Q 内の有限個もしくは無限個の cube たちの族 $\{Q_j^{s^p}\}$ が存在する。

1° $(Q_j^{s^p})^\circ \cap (Q_k^{s^p})^\circ = \phi \quad (j \neq k)$

2° $s^p < \dfrac{1}{m(Q_j^{s^p})}\displaystyle\int_{Q_j^{s^p}} g^p(z)dm \leq 4s^p \quad ,\forall j$

3° $\displaystyle\sum_j m(Q_j^{s^p}) < \frac{1}{s^p}\int_Q g^p(z)dm$

4° $g \leq s \quad$, a.e. $Q - \displaystyle\bigcup_j Q_j^{s^p}$

証明. まず cube Q を 4 つの合同な cubes に分割する。これにより得られた 4 つの cubes をさらに 4 分割する。以下、このような 4 分割の過程を無限に繰り返す。但し、この分割の途中で得られた cube Q' が、

$$s^p < \frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} g^p(z)dm$$

となったならば、Q' の次の分割を行わず、Q' を $\{Q_j^{s^p}\}$ の元として登録する。このとき、Q' を 4 分割の 1 つとする、$\dfrac{1}{m(\tilde{Q})}\displaystyle\int_{\tilde{Q}} g^p(z)dm \leq s^p$ なる 1 つ前の cube $\tilde{Q}$ が存在するので、

$$s^p < \frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} g^p(z)dm \leq \frac{4}{m(\tilde{Q})}\int_{\tilde{Q}} g^p(z)dm \leq 4s^p$$

$\therefore$ 2° は示された。また、$\{Q_j^{s^p}\}$ の構成方法から、1° は明らかである。

2° より、

$$m(Q_j^{s^p}) < \frac{1}{s^p}\int_{Q_j^{s^p}} g^p(z)dm$$

であるので、この不等式の両辺を j で和をとれば、3° が言える。

最後に、$\zeta \in Q - \displaystyle\bigcup_j Q_j^{s^p}$ なら、ζ を含む cube 列 $\{Q_n\}$ で、

$$Q_n \supset Q_{n+1} \quad , \quad \ell(Q_n) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad , \quad \frac{1}{m(Q_n)}\int_{Q_n} g^p(z)dm \leq s^p$$

なるものがとれる。$g^p \in L^1(Q)$ なので、Lebesgue の微分定理より、

$$s^p \geq \frac{1}{m(Q_n)}\int_{Q_n} g^p(z)dm \longrightarrow g^p(\zeta) \quad (n \to \infty) \quad \text{a.e} \qquad \square$$

この Q の cube 分解 $\{Q_j^{s^p}\}$ を、(s,p)-Carderón-Zygmund ((s,p)-C-Z) cube 分解 と呼ぶ。

定理 2.14(John & Nirenberg[5])

$u \in BMO(D)$ で、D 内の任意の cube Q に対し、$\mu(\sigma) := m(\{z \in Q \mid |u(z) - u_Q| > \sigma\})$ と置くならば、このとき、ある定数 a, b が存在して、

$$\mu(\sigma) \leq a \exp\Big(-\frac{b\sigma}{||u||_{*,D}}\Big) m(Q)$$

証明. $||u||_{*,D} \neq 0$ と仮定して良い。任意の cube $Q \subset D$ に対し、

$$S_\sigma := \{z \in Q \mid |u(z) - u_Q| > \sigma\}$$

とおく。次に、

$$\mu(\sigma) = m(S_\sigma) \leq A(\sigma) \int_Q |u(z) - u_Q| dm$$

なる、σ に依存した、最小の数 $A(\sigma)$ をとる。この時、$m(S_\sigma) < \dfrac{1}{\sigma} \displaystyle\int_Q |u(z) - u_Q| dm$ であるので、

$$A(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma}$$

であるとわかる。今、$\sigma \geq 4||u||_{*,D}$ に対し、

$$A(\sigma) \leq \frac{||u||_{*,D}}{s} A(\sigma - 4s) \ \ , \ \ \frac{1}{4}\sigma \geq \forall s \geq ||u||_{*,D} \quad \cdots \ (2.2.1)$$

を示す。このために、

$$\frac{1}{4}\sigma \geq s \geq ||u||_{*,D} \geq \frac{1}{m(Q)} \int_Q |u(z) - u_Q| dm$$

なる、Q 内の $|u(z) - u_Q|$ に対する $(s, 1)$-C-Z cube 分解 $\{Q_j^s\}$ を行う。C-Z cube 分解の性質 4° より、$\forall z \in Q$ に対し、$|u(z) - u_Q| > \sigma$ ならば、$|u(z) - u_Q| > s$ となり、z は $\{Q_j^s\}$ 内のある cube に属する。従って、性質 2° より、

$$S_\sigma = \{z \in Q \mid |u(z) - u_Q| > \sigma\} \subset \bigcup_j \{z \in Q_j^s \mid |u(z) - u_{Q_j^s}| > \sigma - 4s\}$$

$\therefore$ C-Z cube 分解の性質 1° より、

$$m(S_\sigma) \leq \sum_j m(\{z \in Q_j^s \mid |u(z) - u_{Q_j^s}| > \sigma - 4s\})$$

が従う。$u \in BMO(D)$ であるので、特に、$\forall Q_j^s \in \{Q_j^s\}$ に対して、$u \in BMO(Q_j^s)$, $||u||_{*,Q_j^s} \leq ||u||_{*,D}$ であり、証明の最初に行った操作を Q_j^s にも行えば、

$$m(S_{\sigma-4s}) \leq A(\sigma - 4s) \int_{Q_j^s} |u(z) - u_{Q_j^s}| dm \leq A(\sigma - 4s) m(Q_j^s) ||u||_{*,D}$$

なる σ に依存した、最小の数 $A(\sigma - 4s)$ がとれる。

$\therefore$ C-Z cube 分解の性質 3° より、

$$m(S_\sigma) \leq \sum_j A(\sigma - 4s) m(Q_j^s) ||u||_{*,D} \leq A(\sigma - 4s) ||u||_{*,D} \cdot \frac{1}{s} \int_Q |u(z) - u_Q| dm$$

$\therefore$ $A(\sigma)$ の定義から、

$$A(\sigma) \leq \frac{||u||_{*,D}}{s} A(\sigma - 4s)$$

が示された。(2.2.1) において、$s = e||u||_{*,D}$ とおく事により、$\exists \sigma > 0$ に対し、

$$A(\sigma) \leq B \exp\Big(-\frac{1}{4e||u||_{*,D}}\sigma\Big) \quad (B \text{ は定数}) \quad \cdots \ (2.2.2)$$

であるなら、

$$A(\sigma + 4e||u||_{*,D}) \leq \frac{||u||_{*,D}}{e||u||_{*,D}} A(\sigma) \leq \frac{1}{e} B \exp\Big(-\frac{1}{4e||u||_{*,D}}\sigma\Big) = B \exp\Big(-\frac{1}{4e||u||_{*,D}}(\sigma + 4e||u||_{*,D})\Big)$$

これより、ある区間 $[k, k+4e||u||_{*,D}]$ $(\exists k \in \mathbb{R}_+)$ 上、不等式 (2.2.2) が保たれるなら、区間 $[0, 4e||u||_{*,D})$ 上最小の k 以上の σ に対しても、(2.2.2) は保たれる。しかし、計算により、

$$4e||u||_{*,D} \leq \forall\sigma \leq (4e+4e)||u||_{*,D}$$

に対し、

$$A(\sigma) \ \leq \frac{1}{\sigma} \ \leq \ \frac{1}{4e||u||_{*,D}} \leq \frac{e}{4||u||_{*,D}} \exp\big(-\frac{1}{4e||u||_{*,D}}\sigma\big)$$

が示せる。従って、$\forall\sigma > 0$ に対し、定数 $B = \dfrac{e}{4||u||_{*,D}}$ において、不等式 (2.2.2) は保たれる。

$$\therefore \quad m(S_\sigma) \leq A(\sigma)\int_Q |u(z)-u_Q|dm \leq \frac{e}{4||u||_{*,D}} \exp\big(-\frac{1}{4e||u||_{*,D}}\sigma\big)\int_Q |u(z)-u_Q|dm$$

すなわち、$a = \dfrac{e}{4}$, $b = \dfrac{1}{4e}$ とすれば、

$$m(S_\sigma) \leq \frac{a}{||u||_{*,D}} \exp\big(-\frac{b\sigma}{||u||_{*,D}}\big)\int_Q |u(z)-u_Q|dm$$

$$\therefore \mu(\sigma) \leq \frac{a}{||u||_{*,D}} \exp\big(-\frac{b\sigma}{||u||_{*,D}}\big)\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |u(z)-u_Q|dm\Big)m(Q) \leq a\exp\big(-\frac{b\sigma}{||u||_{*,D}}\big)m(Q) \qquad \square$$

<u>定理 2.15</u>(Reimann[9])

領域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ に対し、f を D_1 から D_2 の上への K-擬等角写像とする。このとき、ある K のみに依存した定数 $k(K) > 1$ が存在して、$d(Q_2, \partial D_2) > 2k(K)diam(Q_2)$ なる任意の cube $Q_2 \subset D_2$ に対して、

$$Q_2 \subset f(Q_1) \ \ , \ \ diam(f(Q_1)) < d(f(Q_1), \partial D_2) \ \ , \ \ m(f(Q_1)) \leq 2k(K)^2 m(Q_2)$$

を満たすある cube $Q_1 \subset D_1$ が存在する。

証明. この証明には、環状領域に対する擬等角写像の幾何学的性質、すなわち、領域 $D, D' \subset \mathbb{C}$ と、向きを保存する同相写像 $f \ : \ D \ \longrightarrow \ D'$ に対し、f が $K-$ 擬等角写像であるならば、かつそのときに限って、$\overline{R} \subset D$ なる環状領域 $R \subset D$ に対し、

$$\frac{1}{K} \leq \frac{M(f(R))}{M(R)} \leq K$$

なる性質を用いる。ここで $M(R)$ は環状領域 R のモジュールである (cf. Lehto[7])。

f に平行移動を施しても一般性は失われないので、任意の cube $Q_2 \subset D_2$ の中心が 0 で、$f(0) = 0$ と仮定してよい。

さて、$d(Q_2, \partial D_2) > 2k \cdot diam(Q_2)$ なる中心が 0 の任意の cube $Q_2 \subset D_2$ を与える。この定数 $k > 1$ は後ほど決定される。この cube Q_2 に対して、円環領域

$$R_2 := \{z \in \mathbb{C} \ \big| \ \frac{1}{2}diam(Q_2) < |z| < \frac{1}{2}k \cdot diam(Q_2)\}$$

を考えると、$R_2 \cap Q_2 = \phi$, $R_2 \subset D_2$ である。さらに、

$$r_2^1 := \frac{1}{2}diam(Q_2) \ , \ r_2^2 := \frac{1}{2}k \cdot diam(Q_2)$$

とおけば、

$$M(R_2) = \log\frac{r_2^2}{r_2^1} = \log k \quad \cdots \ (2.2.3)$$

である。次に、

$$C_2^1 := \{z \in \mathbb{C} \ \big| \ |z| \leq r_2^1\} \ , \ C_2^2 := \{z \in \mathbb{C} \ \big| \ |z| \geq r_2^2\} \ , \ r_1 := \sup_{z \in C_2^1} |f^{-1}(z)| \ , \ r_2 := \inf_{z \in C_2^2} |f^{-1}(z)|$$

とおけば、 $|f^{-1}(z)| \le r_1$, $\forall z \in Q_2$ である。$R_1 = f^{-1}(R_2)$ とすれば、R_1 は、0 , z_1 ($|z_1| = r_1$) と z_2 ($|z_2| = r_2$) , ∞ を分離するので、Teichmüller's module theorem より、

$$M(R_1) \le 2\mu\Big(\sqrt{\frac{|z_1|}{|z_1|+|z_2|}}\Big) = 2\mu\Big(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}\Big) \quad \cdots \ (2.2.4)$$

がいえる。ここで、$\mu(\cdot)$ は、Grötzsch extremal domain のモジュールである (cf. Lehto & Virtanen[8])。
$\therefore$ f の K-擬等角性と (2.2.3), (2.2.4) から、

$$\log k = M(R_2) \le KM(R_1) \le 2K\mu\Big(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}\Big)$$

すなわち、

$$k \le \exp\big(2K\mu\Big(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}\Big)\big)$$

が従う。ここで、はじめに設定した k について、

$$k = e^{2K\mu(\sqrt{\sqrt{2}-1})}$$

としておけば、$K \ge 1$, $\mu(\cdot) > 0$ なので、$k > 1$ を満たし、k は K のみに依存する定数である。よって、上の不等式から、$\mu(r)$ は r の減少関数であるので、

$$\sqrt{2} \le \frac{r_2}{r_1}$$

がいえる。これより、D_1 内のある cube Q_1 を、中心が 0 で、$\ell(Q_1) = 2r_1$ $(diam(Q_1) = 2\sqrt{2}r_1)$ を満たすように選べば、この Q_1 は定理の要求を満たす。というのは、任意の点 $z \in Q_2$ に対し、$|f^{-1}(z)| \le r_1$ であるので、 $f^{-1}(Q_2) \subset Q_1$、つまり、f は同相なので、$Q_2 \subset f(Q_1)$。また、$r_1 < r_2$ なので、∂Q_1 は R_1 に含まれることから、$\partial f(Q_1)$ は R_2 に含まれる。

$$\therefore \quad diam(f(Q_1)) \le diam(R_2) = k \cdot diam(Q_2)$$

また、仮定より、$diam(Q_2) < \dfrac{1}{2k} d(Q_2, \partial D_2)$ かつ $k > 1$ なので、

$$\therefore \quad \frac{1}{2} d(Q_2, \partial D_2) < d(R_2, \partial D_2)$$

よって、

$$diam(f(Q_1)) < d(R_2, \partial D_2) \le d(f(Q_1), \partial D_2)$$

がいえる。最後に上の式から、$m(f(Q_1)) \le 2k^2 m(Q_2)$ も従う。 □

定理 2.16(Gehring[2])
　領域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ に対し、f を D_1 から D_2 の上への K-擬等角写像とする。この f について、Q を $diam(f(Q)) < d(f(Q), \partial D_2)$ を満たす D_1 内の cube とするならば、このとき、ある定数 $p(K) > 2$, $q(K)$ が存在して、 任意の可測集合 $A \subset Q$ に対し、

$$\frac{m(f(A))}{m(f(Q))} \le q(K)\Big(\frac{m(A)}{m(Q)}\Big)^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}$$

この証明には、いくつかの仮定が必要である。

写像 f を D から $\mathbb{C}$ の中への同相写像とする。また、各 $z \in D$ に対し、

$$L_f(z) := \limsup_{\zeta \to z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} \quad \cdots \ (2.2.5)$$

とおき、$J_f(z)$ を f の点 z におけるヤコビアンとする。 これらは、D 上非負かつ可測で、

$$J_f(z) \leq L_f(z)^2 \quad , \ \forall z \in D \quad \cdots \ (2.2.6)$$

を満たし、さらに、Lebesgue の定理から、任意のコンパクト集合 $E \subset D$ に対し、

$$\int_E J_f dm \leq \int_{f(E)} dm' = m(f(E)) < \infty$$

が言えるので、$J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ である。
 また、f が D 上 K-擬等角であるならば、

$$L_f(z)^2 \leq K J_f(z) \quad , \ \text{a.e.}\ D \quad \cdots \ (2.2.7)$$

であるので、$L_f \in L^2_{\mathrm{loc}}(D)$ もいえる。

補題 2.17(Gehring[2])
 h を $[1,\infty)$ 上の非負実数値単調非増加関数で、$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ を満たすとする。$\exists q > 0, \exists a > 1$ に対し、

$$-\int_{t+0}^{\infty} s^q dh(s) \leq a t^q h(t+0) \quad , \ \forall t \geq 1$$

を満たすならば、このとき、任意の $p \in [q, \frac{a}{a-1}q]$ に対して、

$$-\int_{1+0}^{\infty} t^p dh(t) \leq \frac{q}{aq-(a-1)p}\Big(-\int_{1+0}^{\infty} t^q dh(t)\Big)$$

ここで、$x+0$ は、実軸正の方向から点 x に近づけたときの値を表している。

証明. まず、$\forall t \geq T$ に対し、$h(t) = 0$ なる $T \geq 1$ が存在すると仮定する。そして、

$$I_r(t) := -\int_{t+0}^{\infty} s^r dh(s)$$

とおく。このとき仮定は、

$$I_q(t) \leq a t^q h(t+0) \quad , \ \forall t \geq 1$$

と表せ、このとき、

$$I_p(1) \leq \frac{q}{aq-(a-1)p} I_q(1) \quad , \ \forall p \in [q, \frac{a}{a-1}q]$$

を示せばよい。さて、補題の証明に取り掛かる前に、証明に用いられる 2 つの主張をここで紹介する。
 $I = [a,b]$ を有界区間、Δ を $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ なる I の分割、$\Delta_j \mu := |\mu(a_j) - \mu(a_{j-1})|$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ とする。また、I 上の実数値関数 f に対し、

$$\overline{f_j} := \sup_{x\in[a_{j-1},a_j]} f(x) \quad , \quad \underline{f_j} := \inf_{x\in[a_{j-1},a_j]} f(x) \quad , \quad \overline{S_\mu}(f,\Delta) := \sum_{j=1}^{k} \overline{f_j}\Delta_j\mu \quad , \quad \underline{S_\mu}(f,\Delta) := \sum_{j=1}^{k} \underline{f_j}\Delta_j\mu$$

とする。
主張 1
 h を $\mathbb{R}$ 上の実数値単調非増加関数で、$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ を満たすとし、w を $\mathbb{R}$ 上の連続可積分関数とする。

$$\mu(x) := -\int_{x+0}^{\infty} w(t) dh(t)$$

と置くならば、このとき、I 上の連続可積分関数 f に対し、

$$\int_I f(t) d\Big(-\int_{t+0}^{\infty} w(s) dh(s)\Big) = \int_I f(t) d\mu(t) = \int_I f(t) w(t) dh(t)$$

証明.　$w(t) \geq 0$ と仮定してよい。μ の定義から、μ は単調増加なので、

$$\overline{S_\mu}(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{k} \overline{f_j}(\mu(a_j) - \mu(a_{j-1})) = \sum_{j=1}^{k} \overline{f_j}\Big(\int_{a_{j-1}+0}^{a_j+0} w(t)dh(t)\Big)$$

$\overline{f}^{\Delta}(t) = \overline{f_j}$　, $t \in [a_{j-1}, a_j)$ とおくと、$\overline{f}^{\Delta}(t)$ は I 上単関数であるので、右辺は、

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{f_j}\Big(\int_{a_{j-1}+0}^{a_j+0} w(t)dh(t)\Big) = \sum_{j=1}^{k} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \overline{f_j} w(t)dh(t) \ = \ \int_I \overline{f}^{\Delta}(t)w(t)dh(t)$$

となる。Δ を細分化すれば、f の仮定から、$\overline{f}^{\Delta}$ は f に有界概収束する。
$\therefore$ Lebesgue の収束定理より、

$$\int_I \overline{f}^{\Delta}(t)w(t)dh(t) \longrightarrow \int_I f(t)w(t)dh(t)$$

である。従って、

$$\int_I f(t)d\mu(t) = \inf_{\Delta} \overline{S_\mu}(f,\Delta) \longrightarrow \int_I f(t)w(t)dh(t) \qquad \square$$

主張 2
　f, μ がそれぞれ I 上の右連続有界変動関数であるならば、

$$\int_I f d\mu + \int_I \mu df = \Big[f(t)\mu(t)\Big]_a^b$$

が成立する。
証明.　μ, f 共に単調増加関数であるとしてよい。また、μ, f の単調増加性から、

$$\overline{f_j} = f(a_j) \ \ , \ \ \underline{\mu_j} = \mu(a_{j-1})$$

である。このとき、

$$\overline{S_\mu}(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{k} f(a_j)\big(\mu(a_j) - \mu(a_{j-1})\big) = -\sum_{j=1}^{k} \mu(a_{j-1})\big(f(a_j) - f(a_{j-1})\big) + \mu(b)f(b) - \mu(a)f(a)$$

すなわち、

$$\overline{S_\mu}(f,\Delta) + \underline{S_f}(\mu,\Delta) = \Big[\mu(t)f(t)\Big]_a^b$$

である。Δ を細分化すれば、左辺の第 1 項は $\displaystyle\int_I f d\mu$ に、第 2 項は、$\displaystyle\int_I \mu df$ に収束する。　$\square$

　さて、補題の証明にもどる。
　$p \geq q$ に対して、補題の仮定と主張 1,2 より、

$$\begin{aligned} I_p(1) &= -\int_{1+0}^{T+0} t^{p-q} t^q dh(t) = -\int_{1+0}^{T+0} t^{p-q} dI_q(t) \\ &= -\Big[t^{p-q} I_q(t)\Big]_{1+0}^{T+0} + (p-q)\int_{1+0}^{T+0} I_q(t)\cdot t^{p-q-1}dt \ \leq \ I_q(1) + a(p-q)\int_{1+0}^{T+0} h(t+0)\cdot t^{p-1}dt \end{aligned}$$

再び、主張 2 と仮定より、

$$\int_{1+0}^{T+0} h(t+0)\cdot t^{p-1}dt = \Big[h(t)\frac{1}{p}t^p\Big]_{1+0}^{T+0} - \int_{1+0}^{T+0} \frac{1}{p}t^p dh(t) \leq -\frac{1}{ap}I_q(1) + \frac{1}{p}I_p(1)$$

以上より、

$$I_p(1) \ \leq \ I_q(1) + a(p-q)\Big(-\frac{1}{ap}I_q(1) + \frac{1}{p}I_p(1)\Big)$$

すなわち、

$$\big(aq - (a-1)p\big)I_p(1) \leq qI_q(1)$$

$\therefore \quad q \leq p \leq \dfrac{a}{a-1}q$ のとき、

$$I_p(1) \leq \frac{q}{aq-(a-1)p} I_q(1)$$

がいえた。次に、一般の h について考える。

$$h_T(t) := \begin{cases} h(t) & 1 \leq t \leq T \\ 0 & T < t \end{cases} \quad , \ T > 1$$

とおけば、h_T は $[1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ の単調非増加関数であり、$\lim_{t\to\infty} h_T(t) = 0$ を満たす。さらに、仮定の条件

$$-\int_{t+0}^{\infty} s^q dh_T(s) \leq at^q h_T(t+0) \quad , \ \forall t \geq 1$$

も満たす。実際、$t > T$ ならば、両辺共に 0 となり、自明である。

$t \leq T$ のとき、

$$\begin{aligned}
-\int_{t+0}^{\infty} s^q dh_T(s) &= -\Big(\int_{t+0}^{T-0} s^q dh_T(s) + \int_{T-0}^{T+0} s^q dh_T(s) + \Big) \\
&= -\Big(\int_{t+0}^{T-0} s^q dh(s) + \Big[s^q h_T(s)\Big]_{T-0}^{T+0} - \int_{T-0}^{T+0} h_T(s) d\big(s^q\big)\Big) \\
&\leq I_q(t) + \int_{T-0}^{\infty} T^q dh(s) + T^q h(T) \ \leq \ at^q h(t+0) \ = \ at^q h_T(t+0)
\end{aligned}$$

である。よって、$h_T(t)$ は、上で示したように、$q \leq \forall p \leq \dfrac{a}{a-1}q$ に対し、

$$-\int_{1+0}^{T+0} t^p dh(t) \leq -\int_{1+0}^{\infty} t^p dh_T(t) \leq \frac{q}{aq-(a-1)p}\Big(-\int_{1+0}^{\infty} t^q dh_T(t)\Big) \leq \frac{q}{aq-(a-1)p} I_q(1)$$

となり、最後に、両辺を $T \longrightarrow \infty$ とすれば良い。 $\square$

<u>補題 2.18</u>(Gehring[2])

Q を $\mathbb{C}$ 内の任意の cube とする。$\exists q > 1$, $\exists b \geq 1$ に対し、$g \geq 0$ が $g \in L^q(Q)$ であり、さらに、任意の cube $\tilde{Q} \subset Q$ に対して、

$$\frac{1}{m(\tilde{Q})}\int_{\tilde{Q}} g^q dm \leq b\Big(\frac{1}{m(\tilde{Q})}\int_{\tilde{Q}} gdm\Big)^q \quad \cdots \ (2.2.8)$$

が成立するならば、このとき、ある q と b のみに依存した定数 $c = c(q,b) > 0$ が存在して、任意の $p \in [q, q+c)$ に対して、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q g^p dm \leq \frac{c}{q+c-p}\Big(\frac{1}{m(Q)}\Big)^{\frac{p}{q}} \quad \cdots \ (2.2.9)$$

証明. $g \equiv 0 \ \ a.e.\ Q$ ならば、(2.2.9) は自明となってしまうので、$g \not\equiv 0 \ \ a.e.\ Q$ として良い。また、適当な定数 d を用いて、dg を g と置き換えることによって、一般性を失う事なしに、

$$\int_Q g^q dm = m(Q) \quad \cdots \ (2.2.10)$$

として良い。

各 $t > 0$ に対し、

$$E(t) := \{z \in Q \ \big| \ g(z) > t\} \quad \cdots \ (2.2.11)$$

と置く。$\forall t \geq 1$ に対し、

$$\int_{E(t)} g^q dm \leq at^{q-1}\int_{E(t)} gdm \quad \cdots \ (2.2.12)$$

を示す事からはじめる。ここで、a は q と b のみに依存した定数である。

$$s := b^{\frac{1}{q}}\frac{q}{q-1}t$$

とおく。この時、$s > t$ である。さて、この s に対し、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q g^q dm = 1 \leq s^q$$

であるので、定理 2.13 を用いて、Q を (s,q)-C-Z cube 分解する。この時、C-Z cube 分解の性質 4° より、

$$m\Big(E(s) - \big(\bigcup_j Q_j^{s^q}\big)\Big) = 0$$

である。また、(2.2.8) と C-Z cube 分解の性質 2° から、

$$s^q < \frac{1}{m(Q_j^{s^q})}\int_{Q_j^{s^q}} g^q dm \leq b\Big(\frac{1}{m(Q_j^{s^q})}\int_{Q_j^{s^q}} gdm\Big)^q$$

であり、これより、

$$m(Q_j^{s^q})^q \leq \Big(\frac{b^{\frac{1}{q}}}{s}\Big(\int_{Q_j^{s^q}\cap E(t)} gdm + \int_{Q_j^{s^q}-E(t)} gdm\Big)\Big)^q$$

ここで、$s > t$ であるので、C-Z cube 分解の性質 4° より、

$$E(t) \supset \big(\bigcup_j Q_j^{s^q}\big) \supset Q_j^{s^q} \quad , \quad \forall j$$

よって、$m\big(Q_j^{s^q} - E(t)\big) = 0$ であるから、

$$\int_{Q_j^{s^q}-E(t)} gdm = 0$$

$$\therefore \quad m(Q_j^{s^q})^q \leq \Big(\frac{q-1}{qt}\int_{Q_j^{s^q}\cap E(t)} gdm\Big)^q$$

つまり、

$$m(Q_j^{s^q}) \leq \frac{q-1}{qt}\int_{Q_j^{s^q}\cap E(t)} gdm \quad , \forall j$$

このことを用いれば、C-Z cube 分解の性質 1° , 2° より、

$$\int_{E(s)} g^q dm = \int_{E(s)\cap\big(\bigcup_j Q_j^{s^q}\big)} g^q dm = \int_{\bigcup_j Q_j^{s^q}} g^q dm \leq \sum_j 4s^q m(Q_j^{s^q}) \leq 4s^q\frac{q-1}{qt}\int_{E(t)} gdm$$

一方、

$$\int_{E(t)-E(s)} g^q dm \leq s^{q-1}\int_{E(t)} gdm$$

従って、

$$a = \Big(b^{\frac{q-1}{q}} + 4b\Big)\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^{q-1}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}\int_{E(t)} g^q dm &= \int_{E(t)-E(s)} g^q dm + \int_{E(t)\cap E(s)} g^q dm \\ &\leq b^{\frac{q-1}{q}}\Big(\frac{q}{q-1}t\Big)^{q-1}\int_{E(t)} gdm + 4s^q\frac{q-1}{qt}\int_{E(t)} gdm \;=\; at^{q-1}\int_{E(t)} gdm\end{aligned}$$

となり、(2.2.12) を得る。

さて、$\forall t \geq 1$ に対し、

$$h(t) := \int_{E(t)} gdm$$

とおく。$g \geq 0$ であるので、h は単調非増加関数であり、$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ をも満たす。この時、

$$\int_{E(t)} g^r dm = -\int_{t+0}^{\infty} s^{r-1}dh(s) \quad \cdots \text{ (2.2.13)}$$

である事は簡単に示せる。よって、(2.2.12) から、

$$-\int_{t+0}^{\infty} s^{q-1}dh(s) \le at^{q-1}h(t+0)$$

となり、補題 2.17 の仮定を満たすので、任意の $(p-1) \in \left[q-1, \frac{a}{a-1}(q-1)\right]$ に対して、

$$-\int_{1+0}^{\infty} t^{p-1}dh(t) \le \frac{q-1}{a(q-1)-(a-1)(p-1)}\Big(-\int_{1+0}^{\infty} t^{q-1}dh(t)\Big)$$

従って、$c = \dfrac{q-1}{a-1}$ とすれば、$\forall p \in [q, q+c)$ に対し、(2.2.13) から、

$$\int_{E(1)} g^p dm = -\int_{1+0}^{\infty} s^{p-1}dh(s) \le \frac{c}{q+c-p}\int_{E(1)} g^q dm$$

今、$Q - E(1)$ 上では、$g \le 1$ であるので、

$$g^p \le g^q \quad \text{on } Q - E(1)$$

よって、$\forall p \in [q, q+c)$ に対し、

$$\int_Q g^p dm \le \int_{Q-E(1)} g^q dm + \int_{E(1)} g^p dm \le \frac{c}{q+c-p}\Big(\int_{Q-E(1)} g^q dm + \int_{Q\cap E(1)} g^q dm\Big) \le \frac{c}{q+c-p}\int_Q g^q dm$$

$\therefore$ (2.2.10) より、g を再び dg に戻せばよい。 □

補題 2.19(Gehring[2])

領域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ に対し、f を D_1 から D_2 の上への K-擬等角写像とする。この f について、Q を

$$diam(f(Q)) < d(f(Q), \partial D_2) \quad \cdots \text{ (2.2.14)}$$

を満たす D_1 内の cube とするならば、このとき、ある K のみに依存した定数 $k = k(K)$ が存在して、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^2 dm \le k\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q L_f dm\Big)^2 \quad \cdots \text{ (2.2.15)}$$

証明. $\forall t > 0$ に対し、

$$R_T(t) := \hat{\mathbb{C}} - \{[-1,0] \cup [t,\infty]\} \quad : \text{Teichmüller extremal domain}$$

を考える (cf. Lehto[7])。この時、Grötzsch extremal domain のモジュール $\mu(r)$ を用いて

$$M\big(R_T(t)\big) = 2\mu\Big(\sqrt{\frac{1}{1+t}}\Big) < \log 16(1+t) \quad \cdots \text{ (2.2.16)}$$

と評価できる (cf. Lehto & Virtanen [8])。

さて、f に、平行移動と回転を行う事によって、

$$Q = \{x + iy \subset D_1 \;\big|\; -s \le x \le s\,,\ -s \le y \le s\}\ ,\ s \in (0,\infty)$$

とし、$f(0) = 0$ としても、一般性は失われない。そして、

$$r = \frac{s}{48^K\sqrt{2}}$$

とおき、

$$R_1 := \hat{\mathbb{C}} - \{C_1 \cup C_2\} \quad : \text{円環領域}$$

とする。ここで、

$$C_1 := \{x + iy \in \hat{\mathbb{C}} \;\big|\; -r \le x \le r\,,\ -r \le y \le r\}\ ,\quad C_2 := \hat{\mathbb{C}} - Q^\circ$$

である。C_1, C_2 は、円環領域

$$R := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \sqrt{2}r < |z| < s\}$$

によって分離されるので、$R \subset R_1$ である事から、再びモジュールの単調性を用いて、

$$M(R_1) \geq M(R) = \log \frac{s}{\sqrt{2}r} = K \log 48 \quad \cdots \ (2.2.17)$$

と評価できる。

次に、

$$r' := \max_{z \in \partial C_1} |f(z)| \ , \ s' := \min_{z \in \partial C_2} |f(z)| \ , \ t' := \max_{z \in \partial C_2} |f(z)|$$

とし、それぞれ到達する点をそれぞれ z' , w' , ζ' とする。この時、環状領域 $f(R_1)$ は $f(z'), 0$ と $f(w'), \infty$ を分離するので、Teichmüller's module theorem より、

$$M\big(f(R_1)\big) \leq 2\mu\Big(\sqrt{\frac{|f(z')|}{|f(z')| + |f(w')|}}\Big) = M\big(R_T(\frac{s'}{r'})\big) \quad \cdots \ (2.2.18)$$

よって、(2.2.16), (2.2.17), (2.2.18) と、f の K-擬等角性から、

$$K \log 48 \leq M(R_1) \leq KM(f(R_1)) \leq KM\big(R_T(\frac{s'}{r'})\big) < K \log 16(1 + \frac{s'}{r'})$$

すなわち、

$$2r' < s' \quad \cdots \ (2.2.19)$$

を得る。さて、射影 $p : x + iy \longrightarrow x$ を考え、$\forall x \in p(C_1)$ に対し、$\gamma_x = \gamma_x(\zeta)$ を $x + ir$ と $x + is$ をつなぐ閉線分とする。このとき、f の擬等角性から、$m(E) = m(p(C_1)) = 2r$ かつ f は $\forall x \in E$ に対し、γ_x 上絶対連続となるようなある Borel 集合 $E \subset p(C_1)$ が存在し、また、$L_f \in L^2_{\text{loc}}(D_1)$ であるので、Fubini の定理から、

$$\int_{\gamma_{\tilde{x}}} L_f(\tilde{x}, y) dy \leq \frac{1}{2r} \int_Q L_f dm \quad \cdots \ (2.2.20)$$

なるある $\tilde{x} \in E$ を選べる。この時、$\tilde{x} + ir \in \partial C_1$, $\tilde{x} + is \in \partial C_2$ であるので、

$$s' - r' \leq |f(\tilde{x} + is)| - |f(\tilde{x} + ir)| \leq \int_{\gamma_{\tilde{x}}} |f'| dy \leq \int_{\gamma_{\tilde{x}}} L_f dy$$

$\therefore$ (2.2.19), (2.2.20) より、

$$s' < \frac{1}{r} \int_Q L_f dm \quad \cdots \ (2.2.21)$$

今、$s' \neq t'$ とし、

$$R'_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid s' < |z| < t'\}$$

とおくと、(2.2.14) より、$R'_2 \subset D_2$ である。また、$R_2 = f^{-1}(R'_2)$ は環状領域で、$0, w'$ と ζ', ∞ を分離する。よって再び、Teichmüller's module theorem とモジュール $\mu(\cdot)$ の単調減少性から、

$$M(R_2) \leq 2\mu\Big(\sqrt{\frac{|w'|}{|w'| + |\zeta'|}}\Big) \leq M\big(R_T(\sqrt{2})\big)$$

$\therefore$ (2.2.16) と f の K-擬等角性より、

$$\log \frac{t'}{s'} = M(R_2') \leq KM(R_2) \leq KM\big(R_T(\sqrt{2})\big) < K \log 16(1 + \sqrt{2})$$

すなわち、

$$t' < \big(16(1 + \sqrt{2})\big)^K s' \quad \cdots \ (2.2.22)$$

を得る。ここで、計算を簡単にするために、$a = \big(16(1 + \sqrt{2})\big)^K$ とおく。(2.2.22) は、$a > 0$ より、$t' = s'$ の時にも成立する。

最後に、$f(Q) \subset \overline{B(0, t')}$ であるので、(2.2.7), (2.2.21), (2.2.22) より、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^2 dm \le \frac{1}{m(Q)}\int_Q K J_f dm \le K\frac{\pi t'^2}{4s^2}$$
$$< K\pi\Big(\frac{a}{2s}\cdot\frac{1}{r}\int_Q L_f dm\Big)^2 < K\pi\Big(\frac{2as}{r}\cdot\frac{1}{m(Q)}\int_Q L_f dm\Big)^2 \;=\; 8\cdot 48^{2K}\cdot\pi a^2 K\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q L_f dm\Big)^2$$

$\therefore\;\; k = 8\cdot 48^{2K}\cdot \pi a^2 K$ とすれば、(2.2.19) が示された。 □

これでようやく、定理 2.16 を証明する準備が整った。

定理 2.16 の証明.　補題 2.19 より、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^2 dm \le k\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q L_f dm\Big)^2$$

を満たす、ある定数 $k = k(K)$ が存在する。また (2.2.7) より、$L_f \in L^2_{\mathrm{loc}}(D_1)$ なので、$L_f \in L^2(Q)$ であり、定義から、$L_f \ge 0$ である。よって、補題 2.18 より、$q = 2$, $b = k$ と思えば、ある定数 $c = c(2,k) > 0$ が存在して、任意の $r \in [2, 2+c)$ に対して、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^r dm \le \frac{c}{2+c-r}\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^2 dm\Big)^{\frac{r}{2}}$$

$\therefore\;$ (2.2.6), (2.2.7) より、

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q {J_f}^{\frac{r}{2}} dm \le \frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^r dm \le \frac{c}{2+c-r}\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q {L_f}^2 dm\Big)^{\frac{r}{2}} \le \frac{c}{2+c-r}K^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_f dm\Big)^{\frac{r}{2}}$$

$\therefore\;\; p = 2 + \frac{c}{2}$, $q = 2^{\frac{2}{p}}K$ とおけば、$p \in [2, 2+c)$ なので、$r = p$ とすれば、

$$\Big(\frac{1}{m(Q)}\int_Q {J_f}^{\frac{p}{2}} dm\Big)^{\frac{2}{p}} \le q\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_f dm$$

従って、A を Q 上の任意の可測集合とすると、Hölder の不等式から、

$$\frac{m(f(A))}{m(A)} = \frac{1}{m(A)}\int_A J_f dm \le \frac{1}{m(A)}\Big(\int_A {J_f}^{\frac{p}{2}} dm\Big)^{\frac{2}{p}}\Big(\int_A dm\Big)^{\frac{\frac{p}{2}-1}{\frac{p}{2}}}$$
$$\le \frac{(m(A))^{\frac{p-2}{p}}}{m(A)}\big(m(Q)\big)^{\frac{2}{p}} q\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_f dm \;=\; \frac{q}{m(A)}\big(m(A)\big)^{\frac{p-2}{p}}\big(m(Q)\big)^{-\frac{p-2}{p}} m(f(Q))$$

$$\therefore\quad \frac{m(f(A))}{m(f(Q))} \le q\Big(\frac{m(A)}{m(Q)}\Big)^{\frac{p-2}{p}} \qquad \square$$

定理 2.12 の証明.　$u_2 \in BMO(D_2)$, $u_1 := u_2 \circ f$ と仮定する。f^{-1} もまた K-擬等角であるので、この f^{-1} に、定理 2.15 を適用する。このときに得られたある cube $Q_2 \subset D_2$ について、

$$A^2_\sigma := \{w \in Q_2 \mid |u_2(w) - (u_2)_{Q_2}| > \sigma\}$$

$$A^1_\sigma := \{z \in f^{-1}(Q_2) \mid |u_1(z) - (u_2)_{Q_2}| > \sigma\} \ (= f^{-1}(A^2_\sigma))$$

とおけば、f^{-1} の K-擬等角性と、Q_2 の仮定から、定理 2.16 が適用できて、

$$\frac{m(f^{-1}(A^2_\sigma))}{m(f^{-1}(Q_2))} \le q(K)\Big(\frac{m(A^2_\sigma)}{m(Q_2)}\Big)^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}$$

をみたすある定数 $p(K) > 2$, $q(K)$ が存在する。また、$u_2 \in BMO(D_2)$ に対して、定理 2.14 より、ある定数 a, b が存在して、

$$m(A^2_\sigma) \le a\exp\big(-\frac{b}{||u_2||_{*,D_2}}\sigma\big)m(Q_2)$$

がいえるので、以上から、

$$\frac{m(A^1_\sigma)}{m(f^{-1}(Q_2))} \le q(K)\Big(\frac{a\exp\big(-\frac{b}{||u_2||_{*,D_2}}\sigma\big)m(Q_2)}{m(Q_2)}\Big)^{\frac{p(K)-2}{p(K)}} = q(K)a^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}\exp\big(-\frac{b(p(K)-2)}{p(K)||u_2||_{*,D_2}}\sigma\big)$$

u_1 は定義から、D_1 上実数値局所可積分であるので、$|u_1(z)-(u_2)_{Q_2}|$ も D_1 上実数値局所可積分。又、分布関数 $m(A^1_\sigma)$ は σ の非増加関数であるので、

$$\int_{f^{-1}(Q_2)} |u_1(z)-(u_2)_{Q_2}|dm = -\int_0^\infty \sigma dm(A^1_\sigma) = \int_0^\infty m(A^1_\sigma)d\sigma$$

を満たす。

$$\therefore \quad \frac{1}{m(f^{-1}(Q_2))}\int_{f^{-1}(Q_2)} |u_1(z)-(u_2)_{Q_2}|dm = \int_0^\infty \frac{m(A^1_\sigma)}{m(f^{-1}(Q_2))}d\sigma$$
$$\leq q(K)a^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}\int_0^\infty \exp\big(-\frac{b(p(K)-2)}{p(K)||u_2||_{*,D_2}}\sigma\big)d\sigma = q(K)a^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}\cdot\frac{p(K)}{b(p(K)-2)}||u_2||_{*,D_2}$$

よって、定理 2.15 の不等式から

$$\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|u_1(z)-(u_1)_{Q_1}|dm \leq \frac{2}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|u_1(z)-(u_2)_{Q_2}|dm$$
$$\leq \frac{4k(K)^2}{m(f^{-1}(Q_2))}\int_{f^{-1}(Q_2)}|u_1(z)-(u_2)_{Q_2}|dm \leq 4k(K)^2q(K)a^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}\cdot\frac{p(K)}{b(p(K)-2)}||u_2||_{*,D_2}$$

$\therefore$ $c(K):=4k(K)^2q(K)a^{\frac{p(K)-2}{p(K)}}\cdot\frac{p(K)}{b(p(K)-2)}$ とおけば、$d(Q_1,\partial D_1)>2k(K)diam(Q_1)$ なる任意の cube $Q_1\subset D_1$ に対し、

$$\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|u_1(z)-(u_1)_{Q_1}|dm \leq c(K)||u_2||_{*,D_2}$$

が成立する。ここで、Q_1 内の任意の cube $\tilde{Q_1}$ について考える。

$$d(\tilde{Q_1},\partial D_1)\geq d(Q_1,\partial D_1)\ ,\ diam(\tilde{Q_1})\leq diam(Q_1)$$

であるので、$\tilde{Q_1}$ は、式 $d(\tilde{Q_1},\partial D_1)>2k(K)diam(\tilde{Q_1})$ を満たす。先の議論と同様に、$\tilde{Q_1}$ に対する、cube $\tilde{Q_2}\subset D_2$, $\tilde{A^2_\sigma}$, $\tilde{A^1_\sigma}$ を決定すれば、

$$\frac{1}{m(\tilde{Q_1})}\int_{\tilde{Q_1}}|u_1(z)-(u_1)_{\tilde{Q_1}}|dm \leq c(K)||u_2||_{*,D_2}$$

がいえる。すなわち、

$$||u_1||_{*,Q_1}\leq c(K)||u_2||_{*,D_2}$$

がいえた。定理 2.15 の証明より、$k(K)>1$ であるので、定理 2.3.C より、

$$u_1\in BMO(D_1)\ \ \text{であり、しかも}\ \ ||u_1||_{*,D_1}\leq A_1\cdot 2\sqrt{2}k(K)\cdot c(K)\cdot||u_2||_{*,D_2}$$

最後に $b(K):=2\sqrt{2}A_1c(K)k(K)$ とすれば良い。 □

2.3 擬円板と BMO 拡張性との関係

はじめに、BMO 拡張性の定義を行ってから、擬円板との関係性を示す定理を紹介する。

定義 2.20(BMO 拡張性)

D が BMO 拡張性 (BMO extension property) を持つとは、ある定数 M が存在して、任意の $u\in BMO(D)$ に対し、$||v||_{*,\mathbb{C}}\leq M||u||_{*,D}$ なるある u の拡張 $v\in BMO(\mathbb{C})$ が存在することをいう。

定理 2.21(Gehring[1])

D が K-擬円板であるならば、D は $M=M(K)$ なる BMO 拡張性を持つ。

この定理を証明するために、1 つの補題を紹介する。

補題 2.22(Reimann & Rychener[10])

D が単位円板、もしくは上半平面で、$u \in BMO(D)$ であるならば、ある u の拡張 $v \in BMO(\mathbb{C})$ が存在して、

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq A_4 ||u||_{*,D}$$

を満たす。

証明. $\psi(z) := \dfrac{i-z}{i+z}$, $j(z) := \overline{z}$ とする。

(場合 1)

$D = H$: 上半平面 の場合。

$$v(z) := \begin{cases} u(z) & z \in H \\ u \circ j(z) & z \in j(H) = L \end{cases}$$

とおけば、定理 2.11 より、$v \in BMO(\mathbb{C})$ であり、$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq A_3 ||u||_{*,H}$

(場合 2)

$D = \varDelta$: 単位円板 の場合。

$$v(z) := \begin{cases} u(z) & z \in \varDelta \\ u \circ \psi \circ j \circ \psi^{-1}(z) & z \in \varDelta^* \end{cases}$$

とおく。このとき、ψ は $H \longrightarrow \varDelta$ の上への 1-擬等角写像であるので、定理 2.12 より、$u \circ \psi \in BMO(H)$ であり、しかもある定数 $b(1)$ が存在して、

$$||u \circ \psi||_{*,H} \leq b(1) ||u||_{*,\varDelta} \quad \cdots \ (2.3.1)$$

を満たす。さて、場合 1 より、

$$\tilde{v}(w) := \begin{cases} u \circ \psi(w) & w \in H \\ u \circ \psi \circ j(w) & w \in L \end{cases}$$

とおけば、$\tilde{v} \in BMO(\mathbb{C})$ であり、

$$||\tilde{v}||_{*,\mathbb{C}} \leq A_3 ||u \circ \psi||_{*,H} \quad \cdots \ (2.3.2)$$

を満たす。また、定理 2.10 より、$BMO(\mathbb{C}) = BMO(\mathbb{C} - \{-i\})$ であって、しかも、

$$||\tilde{v}||_{*,\mathbb{C}-\{-i\}} \leq ||\tilde{v}||_{*,\mathbb{C}} \quad \cdots \ (2.3.3)$$

が成り立つ。最後に、$v(z) = \tilde{v} \circ \psi^{-1}(z)$ とおけば、ψ^{-1} は $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{-i\}$ の上への 1-擬等角写像であるので、再び定理 2.12 より、$v \in BMO(\mathbb{C})$ であり、しかも同じ定数 $b(1)$ で、

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq b(1) ||\tilde{v}||_{*,\mathbb{C}-\{-i\}} \quad \cdots \ (2.3.4)$$

が従う。以上より、(2.3.1)〜(2.3.4) を統合すると、

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq A_3 b(1)^2 ||u||_{*,\varDelta}$$

また、$v|_{\varDelta} = u$ となり、$A_4 := A_3 b(1)^2$ とおけば、$v \in BMO(\mathbb{C})$ は u の拡張で、しかも

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq A_4 ||u||_{*,\varDelta} \qquad \square$$

定理 2.22 の証明. D が K-擬円板という仮定から、D を単位円板 $\varDelta$ へ写すような $\hat{\mathbb{C}}$ 上のある K-擬等角写像 f が存在する。この f に Möbius 変換を施す事によって、$f(\infty) = \infty$ と仮定してよい。

今、$\forall u \in BMO(D)$ と仮定し、$u' := u \circ f^{-1}|_{\varDelta}$ とおく。この時、定理 2.12 より、$u' \in BMO(\varDelta)$ であって、しかもある定数 $b(K)$ が存在して、

$$||u'||_{*,\varDelta} \leq b(K) ||u||_{*,D}$$

を満たす。また、補題 2.22 より、ある u' の拡張 $v' \in BMO(\mathbb{C})$ が存在して、

$$||v'||_{*,\mathbb{C}} \leq A_4 ||u'||_{*,\Delta}$$

が成り立つ。この v' に対して、$v = v' \circ f$ とおけば、再度定理 2.12 より、$v \in BMO(\mathbb{C})$ であり、同じ $b(K)$ で、

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq b(K) ||v'||_{*,\mathbb{C}}$$

がいえる。従って、上記の事柄をつなぎ合わせると、

$$v|_D = v' \circ f|_D = u' \circ f|_D = u \circ f^{-1} \circ f|_D = u$$

を満たし、$M(K) = A_4 b(K)^2$ とおけば、

$$||v||_{*,\mathbb{C}} \leq A_4 b(K)^2 ||u||_{*,D} = M(K) ||u||_{*,D} \qquad \square$$

3 BMO 拡張性と Whitney cube 分解性との関係

この章では、小節 2.3 で紹介した BMO 拡張性と 2.1 で紹介した Whitney cube を用いた性質との関係性を調べる。

3.1 準備

任意の cube $Q_j, Q_k \subset \mathbb{C}$ に対して、

$$d_2(Q_j, Q_k) := \Big|\log\frac{\ell(Q_j)}{\ell(Q_k)}\Big| + \log\Big(\frac{d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j)+\ell(Q_k)} + 2\Big)$$

と定義する。そして再度、

$$Q_j = Q(0) \to Q(1) \to \cdots \to Q(M) = Q_k \ : \ \text{Whitney cube } Q_j \text{と } Q_k \text{をつなぐ Whitney chain}$$

$$d_1(Q_j, Q_k) := \min\{M \mid Q_j = Q(0) \to Q(1) \to \cdots \to Q(M) = Q_k\}$$

を思い出しておく。

注意として、$d_1(\cdot,\cdot)$ は Whitney cube に関して、距離となる事がわかる。これらの記号は、Jones[6] の記法に従った。

補題 3.1(Jones[6])

任意の $\varphi \in BMO(\mathbb{C})$ と任意の cubes $Q_j, Q_k \subset \mathbb{C}$ を選べば、このとき、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \le C_1 d_2(Q_j, Q_k)||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$$

証明. まず、2 つの cubes $Q_0, Q_1 \subset \mathbb{C}$ が、

$$Q_0 \subset Q_1 \ , \ m(Q_1) \le e m(Q_0)$$

であると仮定する。このとき、

$$|\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_1}| \le \frac{1}{m(Q_0)}\int_{Q_0}|\varphi(z) - \varphi_{Q_1}|dm \le \frac{m(Q_1)}{m(Q_0)}\cdot\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|\varphi(z) - \varphi_{Q_1}|dm \le e||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$$

又、$Q_0 \subset Q_1$ より、$\log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)} + 2\Big) \ge 1$ なので、

$$|\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_1}| \le e||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \le e\log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$$

次に、cubes Q_0, Q_1 が、

$$Q_0 \subset Q_1 \ , \ m(Q_1) > e m(Q_0)$$

であると仮定する。このとき、$m(Q_1) \le e^k m(Q_0)$ を満たす最小の自然数 $k \ge 2$ をとる。そして、この自然数 k に対して、

$$Q_0 = Q^1 \subset Q^2 \subset \cdots \subset Q^{k+1} = Q_1 \ \text{ かつ } \ m(Q^{j+1}) \le e m(Q^j) \ \ , j = 1, \cdots, k$$

となるような cube 列 $\{Q^j\}_{j=1,\cdots,k+1}$ を選べる。これらは、上の仮定から、$|\varphi_{Q^j} - \varphi_{Q^{j+1}}| \le e||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$ であるので、

$$\therefore |\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_1}| \le \sum_{j=1}^{k}|\varphi_{Q^j} - \varphi_{Q^{j+1}}| \le \sum_{j=1}^{k} e||\varphi||_{*,\mathbb{C}} = ek||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$$

また、k の選び方から、

$$k \le 2\log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)}\Big) + 1 < 3\log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)$$

$$\therefore |\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_1}| \leq ek||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \leq 3e \log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}}$$

以上より、$Q_0 \subset Q_1$ のときはいつでも、

$$|\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_1}| \leq 3e \log\Big(\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \quad \cdots \ (3.1.1)$$

が成立する。

さて、任意の 2 つの cubes $Q_j, Q_k \subset \mathbb{C}$ を取る。添え字の入れ替えより、$\ell(Q_j) \leq \ell(Q_k)$ としてよい。このとき、

$$Q_0 \subset Q_k \ , \ \ell(Q_0) = \ell(Q_j) \ , \ d(Q_j, Q_k) = d(Q_j, Q_0)$$

なる $\mathbb{C}$ 内のある cube Q_0 が選べる。そして、この Q_0 に対して、

$$Q_0 \subset Q_1 \ , \ Q_j \subset Q_1 \ , \ell(Q_1) = 6\ell(Q_j) + 2d(Q_j, Q_k)$$

を満たすある cube $Q_1 \subset \mathbb{C}$ が存在する。よって、(3.1.1) より、

$$\begin{aligned}
&|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_0}| \leq |\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_1}| + |\varphi_{Q_1} - \varphi_{Q_0}| \\
&\qquad = 6e \log\Big(\frac{8\ell(Q_j) + 2d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j)}\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \\
&\qquad = 6e\Big\{\log\Big(4 + \Big(1 + \frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)}\Big)\Big(\frac{d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j) + \ell(Q_k)}\Big)\Big)\Big\}||\varphi||_{*,\mathbb{C}} + 6e(\log 2)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \\
&\qquad \leq 6e \log\Big(2 + \frac{d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j) + \ell(Q_k)}\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} + 6e \log\Big(\frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)}\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} + 12e(\log 2)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \\
&\therefore \ |\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq |\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_0}| + |\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_k}| \\
&\qquad \leq 6e \log\Big(2 + \frac{d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j) + \ell(Q_k)}\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} + 9e \log\Big(\frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)}\Big)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} + (18e \log 2)||\varphi||_{*,\mathbb{C}} \\
&\qquad = 24e\Big\{\log\Big(\frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)}\Big) + \log\Big(\frac{d(Q_j, Q_k)}{\ell(Q_j) + \ell(Q_k)} + 2\Big)\Big\}||\varphi||_{*,\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $C_1 = 24e$ とすれば、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq C_1||\varphi||_{*,\mathbb{C}} d_2(Q_j, Q_k) \qquad \square$$

補題 3.2(Jones[6])

任意の $\varphi \in BMO(D)$ と、任意の Whitney cubes $Q_j, Q_k \in E_D^\alpha$ に対し、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq C_2 d_1(Q_j, Q_k)||\varphi||_{*,D}$$

が成り立つ。

証明. d_1 の定義から、$Q_j \cap Q_k \neq \phi$ のとき、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq C_2||\varphi||_{*,D}$$

となる事のみを調べればよい。今、$Q_j \cap Q_k \neq \phi$ であるので、

$$\ell(Q_0) = \frac{1}{4}\ell(Q_j) \ , \ \ell(Q_1) = \frac{1}{4}\ell(Q_k) \ , \ Q_0 \cap Q_1 \neq \phi$$

を満たす、ある cube たち $Q_0 \subset Q_j$, $Q_1 \subset Q_k$ がとれる。補題 3.1 の証明より、

$$|\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_j}| \leq 3e \log\Big(\frac{\ell(Q_j)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)||\varphi||_{*,D} = 3e(\log 6)||\varphi||_{*,D}$$

が示せ、同様に、 $|\varphi_{Q_1} - \varphi_{Q_k}| \leq 3e(\log 6)||\varphi||_{*,D}$ もいえる。

次に、これらの cubes Q_0, Q_1 に対し、

$$\ell(Q_2) = \ell(Q_0) + \ell(Q_1) \ , \ Q_0, Q_1 \subset Q_2$$

なる cube $Q_2 \subset \mathbb{C}$ を選ぶと、Whitney p-cube 分解の性質より、 $Q_2 \subset D$ となる。これより、

$$|\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_2}| \leq 3e \log\Big(\frac{\ell(Q_2)}{\ell(Q_0)} + 2\Big)||\varphi||_{*,D} = 3e \log\Big(\frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)} + 3\Big)||\varphi||_{*,D} \leq 3e(\log 7)||\varphi||_{*,D}$$

同様に、$|\varphi_{Q_1} - \varphi_{Q_2}| \leq 3e(\log 7)||\varphi||_{*,D}$ であるので、よって、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq |\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_0}| + |\varphi_{Q_0} - \varphi_{Q_2}| + |\varphi_{Q_2} - \varphi_{Q_1}| + |\varphi_{Q_1} - \varphi_{Q_k}| \leq 6e(\log 42)||\varphi||_{*,D}$$

$\therefore C_2 = 6e\log 42$ とすれば、

$$|\varphi_{Q_j} - \varphi_{Q_k}| \leq C_2||\varphi||_{*,D} \qquad \square$$

補題 3.3(Jones[6])

任意の Whitney cube $Q_j \in E_D^1$ を一つ固定する。もし、任意の Whitney cube $Q_k \in E_D^1$ に対し、$\varphi_j(z) := d_1(Q_j, Q_k)\ \ (\forall z \in Q_k)$ とおくならば、このとき $\varphi_j \in BMO(D)$ であり、しかも

$$||\varphi||_{*,D} \leq C_3$$

証明. φ_j の定義から、φ_j は D 上実数値局所可積分関数である。

まず、任意の ball $B \subset D$ に対し、B の 1-Whitney p-cube 分解 $E_B^1 = \{\mathcal{Q}\}$ を行う。Whitney p-cube 分解の構成方法から、任意の $\mathcal{Q}_k \in E_B^1$ に対し、ある $Q_{k'} \in E_D^1$ が存在して、$\mathcal{Q}_k \subset Q_{k'}$ がいえるので、$\forall z_k \in \mathcal{Q}_k$ に対し、

$$\varphi_j(z_k) = d_1(Q_j, Q_{k'})$$

である。また、$\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{Q}_\ell \neq \phi$ なる任意の Whitney cubes $\mathcal{Q}_k, \mathcal{Q}_\ell \in E_B^1$ に対して、各々を含む E_D^1 内のある Whitney cubes をそれぞれ $Q_{k'}, Q_{\ell'}$ とすれば、$Q_{k'} \cap Q_{\ell'} \neq \phi$ であるので、

$$|(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_\ell}| \leq 1 \quad \cdots\ (3.1.2)$$

がいえる。

さて、B の中心を z_B とし、z_B を含む E_B^1 内の Whitney cube $\mathcal{Q}_0$ を一つ選ぶ。このとき、定理 2.3.B の証明と同様に、$\forall z \in \forall \mathcal{Q}_k \in E_B^1$ に対し、

$$d_1(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_k) \leq 160k_B(z_B, z) + 4$$

がいえる。よって、$d_1(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_k) = n$ なる $\mathcal{Q}_0$ から $\mathcal{Q}_k$ までの Whitney chain を $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}(0) \to \mathcal{Q}(1) \to \cdots \to \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q}_k$ とすれば、(3.1.2) より、

$$|(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k}| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |(\varphi_j)_{\mathcal{Q}(k+1)} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}(k)}| \leq n \leq 160k_B(z_B, z) + 4$$

$\therefore$ 再び、Koebe の歪曲定理から、

$$|(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k}| \leq 320h_B(z_B, z) + 4$$

$\therefore |(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k}|$ を $\mathcal{Q}_k$ 上の z の定関数だと思えば、補題 2.5 より、

$$\sum_{\mathcal{Q}_k \in E_B^1} \int_{\mathcal{Q}_k} |(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k}| dm \leq 644m(B)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{m(B)}\int_B |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_B| dm &\leq \frac{2}{m(B)}\int_B |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0}| dm \\ &\leq \frac{2}{m(B)} \sum_{\mathcal{Q}_k \in E_B^1} \Big(\int_{\mathcal{Q}_k} |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k}| dm + \int_{\mathcal{Q}_k} |(\varphi_j)_{\mathcal{Q}_k} - (\varphi_j)_{\mathcal{Q}_0}| dm\Big)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{m(B)} \sum_{Q_k \in E_B^1} \left(\int_{Q_k} |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_{Q_k}| dm \right) + 1288$$

ここで、$\displaystyle\int_{Q_k} |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_{Q_k}| dm = 0$ であることから、従って、

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |\varphi_j(z) - (\varphi_j)_B| dm \leq 1288$$

$\therefore$ B は任意に選んだ ball だったので、

$$\varphi_j \in BMO_B(D) \ \text{かつ} \ ||\varphi_j||_{*,D}^B \leq 1288$$

$\therefore$ 定理 2.8 より、$C_3 = 1288 A_1 \pi$ とすれば、$\varphi_j \in BMO(D)$ であり、しかも

$$||\varphi_j||_{*,D} \leq C_3 \qquad \square$$

3.2 BMO 拡張性と Whitney cube 分解性との関係

定義 3.4(Whitney cube 分解性)

D の 1-Whitney p-cube 分解 E_D^1 に対し、ある定数 $W > 0$ が存在して、任意の Whitney cubes $Q_j, Q_k \in E_D^1$ に対して、

$$d_1(Q_j, Q_k) \leq W d_2(Q_j, Q_k)$$

が成り立つとき、D は Whitney cube 分解性 (Whitney cube decomposition property) を持つという。

定理 3.5(Jones[6])

D が BMO 拡張性を持つならば、D は $W = W(M)$ なる Whitney cube 分解性 を持つ。

証明. D が BMO 拡張性を持つと仮定する。$\forall Q_j, Q_k \in E_D^1$ に対し、

$$\varphi_j(z) := d_1(Q_j, Q) \ , \ \forall z \in Q \in E_D^1$$

と置くならば、補題 3.3 より、$\varphi_j \in BMO(D)$ であり、しかも

$$||\varphi_j||_{*,D} \leq C_3$$

である。また、補題 3.1 と、上の仮定から、$\forall z \in Q_k$ に対し、

$$d_1(Q_j, Q_k) = |d_1(Q_j, Q_j) - d_1(Q_j, Q_k)| = |(\tilde{\varphi}_j)_{Q_j} - (\tilde{\varphi}_j)_{Q_k}| \leq C_1 M C_3 d_2(Q_j, Q_k)$$

であるので、従って $W = C_1 C_3 M$ とおけば、$\forall Q_j, Q_k \in E_D^1$ に対して、

$$d_1(Q_j, Q_k) \leq W d_2(Q_j, Q_k) \qquad \square$$

4 Whitney cube 分解性と双曲有界性との関係

この章では、第 3 章の Whitney cube 分解性と、この章で新たに定義する、双曲距離を用いた双曲有界性との関係を詳しく述べる。

4.1 準備

補題 4.1(Gehring[1])
$\forall z_1 \in D$ を固定し、$\forall z \in D$ に対して、$u(z) := h_D(z, z_1)$ とおくならば、このとき、$\forall B_0 = B(z_0, r) \subset D$ に対して、

$$|u(z_0) - u_{B_0}| \leq 2$$

である。特に、$u \in BMO_B(D)$ であり、しかも

$$||u||^B_{*,D} \leq 4$$

証明. 三角不等式より、$\forall z \in D$ に対し、

$$|u(z) - u(z_0)| = |h_D(z, z_1) - h_D(z_0, z_1)| \leq h_D(z, z_0)$$

であるので、補題 2.5 より、

$$|u(z_0) - u_{B_0}| \leq \frac{1}{m(B_0)} \int_{B_0} |u(z_0) - u(z)| dm \leq 2$$

これより、1つ目の題意を示せた。また、

$$|u(z) - u_{B_0}| \leq |u(z) - u(z_0)| + |u(z_0) - u_{B_0}| \leq |u(z) - u(z_0)| + 2$$

であるので、上の不等式から、$\forall B_0 \subset D$ に対し、

$$\frac{1}{m(B_0)} \int_{B_0} |u(z) - u_{B_0}| dm \leq \frac{1}{m(B_0)} \int_{B_0} |u(z) - u(z_0)| dm + \frac{1}{m(B_0)} \int_{B_0} 2dm \leq 4$$

よって、u は D 上実数値局所可積分関数なので、$u \in BMO_B(D)$ でしかも、

$$||u||^B_{*,D} \leq 4 \qquad \square$$

4.2 Whitney cube 分解性と双曲有界性との関係

定義 4.2(双曲有界性)
D が 双曲有界性 (hyperbolic bound property) を持つとは、ある定数 c, d が存在して、$\forall z_1, z_2 \in D$ に対し、

$$h_D(z_1, z_2) \leq c j_D(z_1, z_2) + d$$

が成り立つことをいう。ここで、$j_D(z_1, z_2) := \log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_1, \partial D)} + 1\right)\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_2, \partial D)} + 1\right)$ である。
注意として、j_D は距離となる。

<u>定理 4.3</u>
D が Whitney cube 分解性 を持つならば、D は $c=c(W), d=d(W)$ なる双曲有界性を持つ。

証明. $\forall z_1, z_2 \in D$ に対し、

$$z_1 \in Q_1\ ,\ z_2 \in Q_2$$

なるある Whitney cubes $Q_1, Q_2 \in E_D^1$ が存在する。まず、d_2 と j_D の関係からはじめる。先に、

$$\begin{cases} \circ\ a>0, b>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a+b} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \\ \circ\ z_j \in Q_j \Rightarrow d(z_j, \partial D) \le d(Q_j, \partial D) + \sqrt{2}\ell(Q_j) \le 2(1+\sqrt{2})\ell(Q_j) \quad (j=1,2) \\ \circ\ d(Q_1,Q_2) \le |z_1 - z_2| \end{cases}$$

に注意しておく。これらを用いると、

$$\begin{aligned} d_2(Q_1,Q_2) &\le \Big|\log\Big(\frac{\ell(Q_2)}{|z_1-z_2|}\cdot\frac{|z_1-z_2|}{\ell(Q_1)}\Big)\Big| + \log\Big(\frac{|z_1-z_2|}{\ell(Q_1)+\ell(Q_2)}+2\Big) \\ &\le \Big|\log\frac{|z_1-z_2|}{\ell(Q_2)}\Big| + \Big|\log\frac{|z_1-z_2|}{\ell(Q_1)}\Big| + \log\Big(\frac{|z_1-z_2|}{d(z_1,\partial D)+d(z_2,\partial D)} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\Big) + \log(2(1+\sqrt{2})) \\ &< \log\Big(\frac{|z_1-z_2|}{d(z_1,\partial D)}+1\Big)\Big(\frac{|z_1-z_2|}{d(z_2,\partial D)}+1\Big) + \log\Big(\frac{|z_1-z_2|}{d(z_1,\partial D)}+1\Big)\Big(\frac{|z_1-z_2|}{d(z_2,\partial D)}+1\Big) + 3\log(2(1+\sqrt{2})) \\ &= 2j_D(z_1,z_2) + 3\log(2(1+\sqrt{2})) \end{aligned}$$

すなわち、

$$d_2(Q_1,Q_2) \le 2j_D(z_1,z_2) + 3\log(2(1+\sqrt{2}))$$

がいえた。

次に、h_D と d_1 の関係を調べる。定義から、$\ell(Q_j) \le d(Q_j,\partial D) \le d(z_j,\partial D) \quad (j=1,2)$ であるので、$B_j := \overline{B(z_j, \frac{1}{2}\ell(Q_j))}$ は D に属する。そして、この B_j に外接する cube を $\tilde{Q_j}$ とすると、これもまた D に属する。そして、この $\tilde{Q_j}$ と Q_j に対して、

$$\ell({Q_j}') = \frac{3}{2}\ell(Q_j)\ ,\ Q_j, \tilde{Q_j} \subset {Q_j}'$$

を満たす cube ${Q_j}' \subset D$ が選べる。よって、

$$u(z) := h_D(z,z_1)\quad,\ \forall z \in D$$

と置くことにより、補題 4.1 と補題 3.1 の証明、さらに定理 2.8 から、各 $j=1,2$ に対して、

$$\begin{aligned} |u(z_j) - u_{Q_j}| &\le |u(z_j) - u_{B_j}| + |u_{B_j} - u_{Q_j'}| + |u_{Q_j'} - u_{Q_j}| \\ &\le 2 + \frac{1}{m(B_j)}\int_{B_j}|u(z) - u_{Q_j'}|dm + 3e\log(\frac{3}{2}+2)\cdot A_1\pi||u||_{*,D}^B \\ &\le 2 + \frac{9}{\pi}||u||_{*,D} + 12eA_1\pi\log\frac{7}{2} \quad\le\quad 2 + 36A_1 + 12eA_1\pi\log\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ 補題 3.2 と、再び、補題 4.1、定理 2.8 を用いれば、

$$\begin{aligned} h_D(z_1,z_2) = |u(z_1) - u(z_2)| &\le |u(z_1) - u_{Q_1}| + |u_{Q_1} - u_{Q_2}| + |u_{Q_2} - u(z_2)| \\ &\le 4A_1C_2\pi d_1(Q_1,Q_2) + \Big(4 + 72A_1 + 24eA_1\pi\log\frac{7}{2}\Big) \end{aligned}$$

最後に、

$$c = A_1C_2W\pi\quad,\quad d = 12A_1C_2W\pi\log(2(1+\sqrt{2})) + 4 + 72A_1 + 24eA_1\pi\log\frac{7}{2}$$

と置けば、仮定より、$\forall z_1, z_2 \in D$ に対し、

$$h_D(z_1,z_2) \le 4A_1C_2\pi W d_2(Q_1,Q_2) + \Big(4 + 72A_1 + 24eA_1\pi\log\frac{7}{2}\Big) \le cj_D(z_1,z_2) + d \qquad \square$$

5　双曲有界性と双曲線分性との関係

最後に、双曲有界性と双曲線分性の関係を明示して、擬円板における大きな閉じた定理の鎖を完成させよう。

5.1　準備

補題 5.1(Gehring[1])
$D \subset \mathbb{C}$ が単連結領域であるならば、このとき、$\forall z_1, z_2 \in D$ に対して、

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{4} j_D(z_1, z_2)$$

証明.　α を D 上の点 z_1, z_2 を結ぶ双曲線分とする。Schwarz の補題と Koebe の歪曲定理を応用すると、

$$h_D(z_1, z_2) = \int_\alpha \rho_D(z)|dz| \geq \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{1}{d(z, \partial D)}|dz|$$

がいえる。また、各 $z \in \alpha$ に対して、

$$d(z, \partial D) \leq d(z_1, \partial D) + |z - z_1|$$

であることから、

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{|dz|}{d(z_1, \partial D) + |z - z_1|}$$

だと分かる。よって、

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{|dz|}{d(z_1, \partial D) + |z - z_1|} \geq \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{d|z - z_1|}{d(z_1, \partial D) + |z - z_1|} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_1, \partial D)} + 1\right)$$

z_1 と z_2 の役割を入れ替えると、同様に

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_2, \partial D)} + 1\right)$$

がいえる。この二つの不等式を組み合わせると、

$$2h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_1, \partial D)} + 1\right) + \log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_2, \partial D)} + 1\right)\right)$$

$$\therefore\ h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{4}\log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_1, \partial D)} + 1\right)\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_2, \partial D)} + 1\right) = \frac{1}{4} j_D(z_1, z_2) \qquad \square$$

補題 5.2(Gehring[1])
$D \subset \mathbb{C}$ が単連結領域であるならば、このとき、

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\left|\log\frac{d(z_1, \partial D)}{d(z_2, \partial D)}\right|$$

証明.　補題 5.1 の証明から、$d(z_2, \partial D) \leq d(z_1, \partial D) + |z_1 - z_2|$ であるので、

$$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{|z_1 - z_2|}{d(z_1, \partial D)} + 1\right) \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{d(z_2, \partial D)}{d(z_1, \partial D)}\right)$$

z_1 と z_2 の役割を入れ換えて、同様に、　$h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{d(z_1, \partial D)}{d(z_2, \partial D)}\right)$

$$\therefore\ h_D(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2}\left|\log\frac{d(z_1, \partial D)}{d(z_2, \partial D)}\right| \qquad \square$$

5.2　双曲有界性と双曲線分性との関係

定義 5.3(双曲線分性)

$D \subset \mathbb{C}$ を境界が 2 点以上の単連結領域であるとする。このとき、ある定数 a, b が存在して、$\forall z_1, z_2 \in D$ に対し、その 2 点を結ぶ D 上の双曲線分 α が、次の 2 条件を満たす時、D が 双曲線分性 (hyperbolic segment property) を持つという。

$$1^\circ \quad \ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2|$$
$$2^\circ \quad \min_{j=1,2}\{\ell(\alpha_j)\} \leq bd(z, \partial D)\ ,\ \forall z \in \alpha$$

ここで、$\ell(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha |dz|$、$\alpha_1, \alpha_2$ は $\alpha - \{z\}$ の各成分である。

次の定理を証明することによって、拡張された定理の鎖を閉じよう。

定理 5.4(Gehring[1],Gehring & Osgood[3])

境界が 2 点以上の単連結領域 D が双曲有界性を持つならば、D は、$a = a(c, d), b = b(c, d)$ なる双曲線分性を持つ。

証明.　D は、双曲有界性を持つと仮定する。補題 5.1 より、$\forall z_1, z_2 \in D$ に対し、

$$\frac{1}{4} j_D(z_1, z_2) \leq h_D(z_1, z_2)$$

であることから、$z_1 \longrightarrow z_2$, $z_1 \longrightarrow \partial D$ とする事により、初めから、$d \geq 0$, $c \geq \frac{1}{4}$ としてよい。

D 上の任意の 2 点 z_1, z_2 を固定し、α を z_1 と z_2 を結ぶ D 上の双曲線分とする。この α に対し、

$$\begin{cases} \ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2| \\ \min\limits_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \leq bd(z, \partial D) \quad , \ \forall z \in \alpha \end{cases}$$

を示さなければならない。ここで、端点が $z, w \in \alpha$ の α 上の部分弧を $\alpha(z, w)$ と書く。

さて、

$$r := \min\{\sup_{z \in \alpha} d(z, \partial D), 2|z_1 - z_2|\}$$

とおく。このとき、

$$\begin{cases} r < \max\limits_{j=1,2} d(z_j, \partial D) & \cdots (P1) \\ r \geq \max\limits_{j=1,2} d(z_j, \partial D) & \cdots (P2) \end{cases}$$

の 2 つの場合に分けて考える。

$(P1)$ のとき、まず

$$r < d(z_1, \partial D)$$

と仮定する。$r = \sup\limits_{z \in \alpha} d(z, \partial D)$ であるなら、$\sup\limits_{z \in \alpha} d(z, \partial D) < d(z_1, \partial D)$ となってしまうので、このとき、

$$r = 2|z_1 - z_2|$$

である。z_1 と z_2 をつなぐ Euclid 線分を β とすると、$\forall z \in \beta$ に対して、

$$d(z, \partial D) \geq \frac{1}{2} d(z_1, \partial D) > \frac{1}{2} r = |z_1 - z_2|$$

とわかる。よって、

$$h_D(z_1, z_2) \leq \int_\beta \frac{2}{d(z, \partial D)} |dz| < 2 \quad \cdots \ (5.2.1)$$

$\forall z \in \alpha$ に対して、$h_D(z, z_1) \leq h_D(z_1, z_2)$ なので、補題 5.2 より、

$$\frac{1}{2} \left| \log \frac{d(z, \partial D)}{d(z_1, \partial D)} \right| \leq h_D(z, z_1) \leq h_D(z_1, z_2) < 2$$

が従うので、これより、$\forall z \in \alpha$ に対し、

$$e^{-4} d(z_1, \partial D) \leq d(z, \partial D) \leq e^4 d(z_1, \partial D)$$

がいえる。したがって (5.2.1) より、

$$\ell(\alpha) < e^4 d(z_1, \partial D) \int_\alpha \frac{1}{d(z, \partial D)} |dz| \leq 2e^4 d(z_1, \partial D) h_D(z_1, z_2) \leq 8e^4 |z_1 - z_2|$$

また、再び (5.2.1) から、$\forall z \in \alpha$ に対して、

$$\min_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \leq \ell(\alpha) \leq 2e^4 d(z_1, \partial D) h_D(z_1, z_2) \leq 4e^8 d(z, \partial D)$$

以上の事をまとめると、

$$\begin{cases} \ell(\alpha) \leq 8e^4 |z_1 - z_2| \\ \min_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \leq 4e^8 d(z, \partial D) \quad , \ \forall z \in \alpha \end{cases}$$

が従うので、$r < d(z_1, \partial D)$ の場合は示された。同様にして、z_1 と z_2 の役割を入れ換えると、$r < d(z_2, \partial D)$ の場合も示される。

$\therefore$ $(P1)$ の場合に題意は示された。

次に、$(P2)$ であると仮定しよう。α のコンパクト性と、r の定義より、

$$r \leq \sup_{z \in \alpha} d(z, \partial D) = d(z_0, \partial D)$$

を満たす α 上の点 z_0 が選べる。各 $j = 1, 2$ に対して、m_j を

$$2^{m_j} d(z_j, \partial D) \leq r$$

を満たす最大の整数とし、$\alpha(z_j, z_0)$ に沿って z_j から z_0 まで点を動かした時の

$$d(w_j, \partial D) = 2^{m_j} d(z_j, \partial D)$$

を満たす α 上の最初の点を w_j とする。この定義から明らかに、

$$d(w_j, \partial D) \leq r < 2d(w_j, \partial D) \quad \cdots \ (5.2.2)$$

である。さてまず、$j = 1, 2$ に対して、

$$\begin{cases} \ell(\alpha(z_j, w_j)) \leq a_1 d(w_j, \partial D) \\ \ell(\alpha(z_j, z)) \leq b_1 d(z, \partial D) \quad , \ \forall z \in \alpha(z_j, w_j) \end{cases} \quad \cdots \ (5.2.3)$$

を示そう。

$m_j \geq 1$, $j = 1$ としてよい。(5.2.3) を示すために、点列 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{m_1+1} \in \alpha(z_1, w_1)$ を $\zeta_1 = z_1$ かつ 各 ζ_k が、$\alpha(z_1, w_1)$ に沿って z_1 から w_1 まで点を動かした時の $d(\zeta_k, \partial D) = 2^{k-1} d(z_1, \partial D)$ を満たす最初の点となるように選ぶ。このとき、$\zeta_{m_1+1} = w_1$ である。1 つ k を固定し、

$$t := \frac{\ell(\alpha(\zeta_k, \zeta_{k+1}))}{d(\zeta_k, \partial D)}$$

とおく。$z \in \alpha(\zeta_k, \zeta_{k+1})$ ならば、ζ_k の定義より、

$$d(z, \partial D) \leq d(\zeta_{k+1}, \partial D) = 2d(\zeta_k, \partial D)$$

である。よって、

$$t \leq 2 \int_{\alpha(\zeta_k, \zeta_{k+1})} \frac{1}{d(z, \partial D)} |dz| \leq 4h_D(\zeta_k, \zeta_{k+1})$$

今、$j_D(\zeta_k,\zeta_{k+1}) = 2\log(t+1)$ なので、$\frac{1}{4} \leq c$ より、

$$\frac{t}{4} \leq h_D(\zeta_k,\zeta_{k+1}) \leq cj_D(\zeta_k,\zeta_{k+1}) + d \leq 2c\Big(e^{2d}(t+1)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

よって、$t \geq 1$ であるならば、

$$1 \leq t \leq 128c^2e^{2d}$$

$\therefore\ a_1 = 128c^2e^{2d}$ とおけば、

$$h_D(\zeta_k,\zeta_{k+1}) \leq 2c(2e^{2d}t)^{\frac{1}{2}} \leq a_1$$

もし、$t < 1$ なら、$a_1 \geq 8$ なので、$t < a_1$ となり、再び、上式が従う。

次に、$\forall z \in \alpha(\zeta_k,\zeta_{k+1})$ なら、補題 5.2 より、

$$0 < \log\frac{d(\zeta_{k+1},\partial D)}{d(z,\partial D)} \leq 2h_D(z,\zeta_{k+1}) \leq 2h_D(\zeta_k,\zeta_{k+1}) < 2a_1$$

これより、t の定義から、

$$\begin{cases} \ell(\alpha(\zeta_k,\zeta_{k+1})) = td(\zeta_k,\partial D) \leq a_1 d(\zeta_k,\partial D) \\ d(\zeta_{k+1},\partial D) \leq e^{2a_1}d(z,\partial D) \quad ,\ \forall z \in \alpha(\zeta_k,\zeta_{k+1}) \end{cases}$$

がいえる。これは、$\forall k = 1,2,\cdots,m_1$ でいえるので、

$$\ell(\alpha(z_1,w_1)) = \sum_{k=1}^{m_1}\ell(\alpha(\zeta_k,\zeta_{k+1})) \leq a_1\sum_{k=1}^{m_1}d(\zeta_k,\partial D) = a_1(2^{m_1}-1)d(z_1,\partial D) < a_1 d(w_1,\partial D)$$

が従う。すなわち、(5.2.3) の 1 つめの不等式が示された。今、$z \in \alpha(z_1,w_1)$ とする。このとき、ある $k > 0$ に対して、

$$z \in \alpha(\zeta_k,\zeta_{k+1})$$

であるので、再び、

$$\ell(\alpha(z_1,z)) \leq \sum_{n=1}^{k}\ell(\alpha(\zeta_n,\zeta_{n+1})) \leq a_1(2^k-1)d(z_1,\partial D) < a_1 d(\zeta_{k+1},\partial D) \leq a_1e^{2a_1}d(z,\partial D)$$

$\therefore\ b_1 = a_1e^{2a_1}$ とおけば、最初に主張した式 (5.2.3)

$$\begin{cases} \ell(\alpha(z_j,w_j)) \leq a_1 d(w_j,\partial D) \\ \ell(\alpha(z_j,z)) \leq b_1 d(z,\partial D) \quad ,\ \forall z \in \alpha(z_j,w_j) \end{cases}$$

が示された。

次に、上で決定した w_1, w_2 に対して、$d(w_1,\partial D) \leq d(w_2,\partial D)$ であるならば、このとき、

$$\begin{cases} \ell(\alpha(w_1,w_2)) \leq 2b_1 d(w_1,\partial D) \\ d(w_2,\partial D) \leq e^{2a_1}d(z,\partial D) \quad ,\ \forall z \in \alpha(w_1,w_2) \end{cases} \qquad \cdots\ (5.2.4)$$

である事を示そう。はじめに、$w_1 \neq w_2$ と仮定してよい。上記と同様、再び、2 つの場合を考えよう。すなわち、まず、

$$r = \sup_{z\in\alpha} d(z,\partial D)$$

とする。そして同じように、

$$t := \frac{\ell(\alpha(w_1,w_2))}{d(w_1,\partial D)}$$

とおく。(5.2.2) より、$\forall z \in \alpha(w_1,w_2)$ に対して、

$$d(z,\partial D) \leq r < 2d(w_1,\partial D)$$

であるので、この場合、(5.2.4) を得るためには、ζ_k を w_1 に、ζ_{k+1} を w_2 に置き換えて、同じ議論をすればよい。

さて、次に、$r = 2|z_1 - z_2|$ の時に、(5.2.4) が成立する事を示そう。三角不等式と、(5.2.2)、(5.2.3) を用いれば、

$$|w_1 - w_2| \le |w_1 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - w_2| \le 4a_1 d(w_1, \partial D)$$

また、

$$j_D(w_1, w_2) \le 2\log\Big(\frac{|w_1 - w_2|}{d(w_1, \partial D)} + 1\Big) \le 2\log(4a_1 + 1) < 2\log 5a_1$$

であるので、

$$h_D(w_1, w_2) \le 2c\log(5a_1) + d \le 2c(5a_1 e^{2d})^{\frac{1}{2}} < a_1$$

今、$z \in \alpha(w_1, w_2)$ なら、補題 5.2 より、

$$\Big|\log\frac{d(z, \partial D)}{d(w_2, \partial D)}\Big| \le 2h_D(z, w_2) \le 2h_D(w_1, w_2) < 2a_1$$

$$\therefore\ e^{-2a_1} d(w_2, \partial D) \le d(z, \partial D) \le e^{2a_1} d(w_1, \partial D)\ \ ,\ \forall z \in \alpha(w_1, w_2)$$

従って、

$$\ell(\alpha(w_1, w_2)) \le e^{2a_1} d(w_1, \partial D)\int_{\alpha(w_1, w_2)} \frac{1}{d(z, \partial D)}|dz| \le 2e^{2a_1} d(w_1, \partial D) h_D(w_1, w_2)\ <\ 2b_1 d(w_1, \partial D)$$

さらに、前の不等式から、$\forall z \in \alpha(w_1, w_2)$ に対して、

$$d(w_2, \partial D) \le e^{2a_1} d(z, \partial D)$$

がいえるので、$r = 2|w_1 - w_2|$ の場合でも (5.2.4) は成立する事が分かった。

以上で、この定理を示す準備が整った。添え字の付け替えにより、

$$d(w_1, \partial D) \le d(w_2, \partial D)$$

と仮定してよい。この時、(5.2.2)、(5.2.3)、(5.2.4)、さらに a_1, b_1 の定義より、

$$\ell(\alpha) \le \ell(\alpha(z_1, w_1)) + \ell(\alpha(w_1, w_2)) + \ell(\alpha(w_2, z_2)) \le (2a_1 + 2b_1) d(w_2, \partial D) < 4b_1 r \le 8b_1|z_1 - z_2| \quad \cdots\ (5.2.5)$$

これは、要求されている定理の 1 つ目の不等式を示している。

次に、$\forall z \in \alpha$ ならば、$z \in \alpha(z_j, w_j)$ $(j = 1, 2)$ の場合、(5.2.3) より、

$$\min_{j=1,2} \ell(\alpha(z_j, z)) \le \ell(\alpha(z_j, z)) \le b_1 d(z, \partial D)$$

また、$z \in \alpha(w_1, w_2)$ の場合、(5.2.4) と (5.2.5) より、

$$\min_{j=1,2} \ell(\alpha(z_j, z)) \le \frac{1}{2}\ell(\alpha) \le 2b_1 d(w_2, \partial D) \le 2b_1 e^{2a_1} d(z, \partial D)$$

以上から、いずれにしても、要求されている定理の 2 つ目の不等式も示された。

従って、$a_1 = 128c^2 e^{2d}$, $b_1 = a_1 e^{2a_1}$ であり、$d \ge 0$, $c \ge \frac{1}{4}$ である事から、$a_1 \ge 8$, $b_1 \ge 8e^{16}$ がわかるので、$(P1)$ と $(P2)$ を統合して、$a = b_1$, $b = 2b_1 e^{2a_1}$ とおけば、

$$\begin{cases} \ell(\alpha) \le a|z_1 - z_2| \\ \min\limits_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \le bd(z, \partial D)\ \ ,\ \forall z \in \alpha \end{cases}$$

が示された。 □

参考文献

[1] Gehring,F.W. *Characteristic properties of Quasidisks* ,Sém. Math. Sup. 84. Presses Univ. Montréal, 1982

[2] Gehring,F.W *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi-conformal mapping* ,Acta Math. 130, 1973, 265-277

[3] Gehring,F.W. & Osgood,B.G. *Uniform domains and the quasihyperbolic metric* ,J. Analyse Math. 36, 1979, 50-74

[4] Gotoh,Y. *Topics in Complex Analysis* -一般領域上の２次元 *BMO* 空間- ,Kyoto Univ., 1991

[5] John,F. & Nirenberg,L. *On functions of bounded mean oscillation* ,Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, 415-426

[6] Jones,P.W. *Extension Theorems for BMO* ,Indiana Univ. Math. J. 29, 1980 , 41-66

[7] Lehto,O. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces* ,Springer-Verlag, 1986

[8] Lehto,O. & Virtanen.K.I *Quasiconformal Mappings in the Plane* ,Springer-Verlag, New York, 1973

[9] Reimann,H.M. *Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings* ,Comment. Math. Helv. 49, 1974, 260-276

[10] Reimann,H.M.& Rychener,T. *Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation* ,Lecture Notes Math. 487. Springer-Verlag. Berlin, 1975

[11] Stein,E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* ,Princeton University Press, Princeton, 1970