Radial and Chodal Loewner Equation II

堀田　一敬　HOTTA, IKKEI

2010 年 2 月 13 日（Sat.）

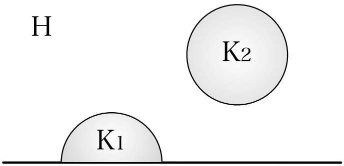
東北大学大学院 情報科学研究科 情報基礎科学専攻 博士後期課程 3 年

Compact $\mathbb{H}$-Hull

- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ とする

Definition（compact $\mathbb{H}$-hull）

$\mathbb{H}$ から集合 A を除いたものが単連結になるような有界閉集合 $A \in \overline{\mathbb{H}}$ を compact $\mathbb{H}$-hull という（hull は連結である必要はない）．また Q を compact $\mathbb{H}$-hull 全体の集合とする．



例：K_1 は hull であるが K_2 は hull でない．

Capacity

Theorem

任意の $A \in \mathcal{Q}$ に対し，等角写像 $g_A : \mathbb{H} \backslash A \to \mathbb{H}$ で

$$\lim_{z \to \infty} [g_A(z) - z] = 0 \tag{1}$$

となるようなものが一意に存在する.

つまり上記の g_A は

$$g_A(z) = z + \frac{b_1(A)}{z} + \frac{b_2(A)}{z^2} + \cdots$$

というような展開式を持つような等角写像である．ここで全ての係数 b_n は実数である.

(1) を **流体力学的条件（hydrodynamic condition）** という

Definition (capacity)

$A \in \mathcal{Q}$ に対し，半平面キャパシティ（half-plane capacity）hcap(A) を

$$\lim_{z\to\infty} z[g_A(z) - z] = 0$$

で定義する．つまり言い換えると

$$g_A(z) = z + \frac{\mathsf{hcap}(A)}{z} + O(\frac{1}{|z|^2}) \qquad (z \to \infty)$$

と表される．

Theorem（capacity の基本性質）

$r > 0$, $x \in \mathbb{R}$ とすると，任意の $A \in \mathcal{Q}$ に対して次が成立;

1. $\mathrm{hcap}(rA) = r^2 hcap(A)$
2. $\mathrm{hcap}(A + x) = \mathrm{hcap}(A)$

また，$A, B \in \mathcal{Q}$ に対し $A \subset B$ のとき次が成立;

3. $\mathrm{hcap}(B) = \mathrm{hcap}(A) + \mathrm{hcap}(g_A(A' \setminus A))$

3. については $g_B(z) = g_{g_A(B\setminus A)} \circ g_A$ を考えれば良い．実際，２つの関数

$$f(z) = z + \frac{a}{z} + \cdots, \qquad g(z) = z + \frac{b}{z} + \cdots$$

を考えた時，その合成関数 $f \circ g(z)$ に対し $\lim_{z\to\infty} z[f(g(z)) - z] = a + b$.
つまり $f \circ g(z)$ は

$$f \circ g(z) = z + \frac{a+b}{z} + \cdots$$

のような形である．

Example 01.

A を単位円板 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ の上半分とする．つまり $A = \overline{\mathbb{D}} \cap \mathbb{H}$．そのとき $\mathbb{H} \backslash A$ を $\mathbb{H}$ へと写す等角写像 g_A は

$$g_A = z + \frac{1}{z}$$

で与えられる．つまり $\mathrm{hcap}(A) = 1$.

Example 02.

B を 0 と i を結ぶ線分とする．つまり $B = (0, i]$．そのとき $\mathbb{H} \backslash B$ を $\mathbb{H}$ へと写す等角写像は

$$g_B(z) = \sqrt{1 + z^2} = z + \frac{1}{2z} + \cdots$$

で与えられる．つまり $\mathrm{hcap}(B) = 1/2$.

Chordal Loewner Equation

- $t \in [0, \infty)$ とする.
- γ：実軸から延びる $\mathbb{H}$ 内の Jordan 曲線（つまり $\gamma(0) \in \mathbb{R}$）.
- $H_t := \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ とすると，H_t を $\mathbb{H}$ へと写すような等角写像 $g_t := g_{\gamma(0,\infty]}$ で $\lim_{z\to\infty} g_t(z) - z = 0$ となるようなものが一意に存在する.
- そのとき $g_t(z)$ は

$$g_t(z) = z + \frac{b(t)}{z} + O(\frac{1}{|z|}) \qquad (z \to \infty)$$

  という展開を持つ．ここで $b(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0, t])$.
- 次のように定義される U_t を driving function（駆動関数）と呼ぶ;

$$U_t = \lim_{z \to \gamma(t)} g_t(z)$$

  つまり U_t は曲線 γ の先端 $\gamma(t)$ の g_t による像である．よって $U_t \in \mathbb{R}$.

Theorem (Chordal Loewner equation)

g_t を前述のような γ に対して定まる等角写像とし，$b(t) = \mathsf{hcap}(\gamma(0,t))$ は C^1 級とする．このとき $g_t(z)$ は次の初期値問題の解である;

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \qquad (z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]) \tag{2}$$

- 微分方程式 (2) を Chordal Loewner equation (CLE) と呼ぶ．またこの方程式を満たす $g_t(z)$ を Chordal Loewner chain と呼ぶ.
- ここでは $b(t) \in C^1$ を仮定したが，一般には $b(t)$ は t に関して狭義単調増加及び連続であることが示され，C^1 に含まれるとは限らない.
- SLE を考える際は通常 $b(t) = 2t$ と正規化して考えるのが一般的である．この場合 CLE は

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \tag{3}$$

という形になる.
- $f_t(w) := g_t^{-1}(w)$ とする．そのとき $f_t \circ g_t(z) = z$ であり，両辺を t で微分すると $\dot{f}_t(w) + f_t'(w)\dot{g}_t(z) = 0$．よって (3) は

$$\dot{f}_t(w) = -f_t'(w)\frac{2}{w - U_t}$$

のようにも表すことができる.

- U_t を具体的に与えて (3) を解くことで γ を復元してみる.
  $\Longrightarrow g_t(\gamma_t) = U_t$ を満たすような γ_t を求めれば良い.

$U_t = A \in \mathbb{R}$（定数）の場合

(3) より

$$\dot{g}_t(z)(g_t(z) - A) = 2.$$

これを解いて

$$g_t(z) = A + \sqrt{(z-A)^2 + 4t}.$$

$f_t(z) := g_t^{-1}(z)$ とおくと,

$$f_t(w) = A + \sqrt{(w-A)^2 - 4t}.$$

よって

$$\gamma_t = f_t(U_t) = A + 2i\sqrt{t}.$$

これは実軸から縦に伸びていくスリットである. このように駆動関数により定まる γ_t を トレース (trace) という.

Radial Loewner Equation

単位円板モデルの Loewner equation も同様に考える事ができる.

- $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$
- γ : $\mathbb{D}$ の境界から延びる, $\mathbb{D}$ 内の Jordan 曲線（つまり $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D}$）.
- $g_t(z) : \mathbb{D} \setminus \gamma[0,t] \to \mathbb{D}$, 等角写像. 特に次のように正規化されたもの;

  $$g_t(z) = e^t z + a_2(t) z^2 + \cdots \qquad (z \in \mathbb{D} \setminus \gamma[0,t])$$

  これは一意に存在する（Riemann の写像定理の一意性）.
- driving function U_t も Chordal の場合と同様に定義する. つまり

  $$U_t = \lim_{z \to \gamma(t)} g_t(z).$$

Theorem

g_t を前述のような γ に対して定まる等角写像とする．このとき $g_t(z)$ は次の初期値問題の解である;

$$\dot{g}_t(z) = g_t(z)\frac{e^{iU_t} + g_t(z)}{e^{iU_t} - g_t(z)}, \quad g_0(z) = z \qquad (z \in \mathbb{D} \setminus \gamma(0,t]) \tag{4}$$

- 微分方程式 (2) を Radial Loewner equation (RLE) と呼ぶ．またこの方程式を満たす $g_t(z)$ を Radial Loewner chain と呼ぶ．
- Chordal の場合と同様に，$f_t(w) := g_t^{-1}(w)$ とおくことにより (4) は

$$\dot{f}_t(w) = -wf_t'(w)\frac{e^{iU_t} + w}{e^{iU_t} - w},$$

のように表すことができる．

Local behavior of RLE

$g_t(z)$: Radial Loewner chain とする.

$h(z) = -i \log g_t(z)$ とおけば，適当な branch を取って

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_t(z) &= -i\frac{\dot{g}_t(z)}{g_t(z)} = i\frac{e^{ih_t(z)} + e^{iU_t}}{e^{ih_t(z)} - e^{iU_t}} \\
&= \cot\left[\frac{h_t(z) - U_t}{2}\right] \\
&\approx \frac{2}{h_t(z) - U_t} \qquad (h_t(z) - U_t : \text{small enough})
\end{aligned}
$$

とできる．つまり局所的な性質を見る事で Chordal Loewner equation と同様の式を得る事ができ，これが Chordal の場合に $b(t) = 2$ のように正規化される理由でもある.

Schramm-Loewner evolution

Recall (Chordal Loewner equation)

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \qquad (z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t])$$

- $\mathcal{B}_t$： 1次元ブラウン運動（Brownian Motion），$\mathcal{B}_0 = 0$ とする.
- Loewner equation の駆動関数 U_t として

$$U_t = \sqrt{\kappa}\mathcal{B}_t, \quad \kappa > 0$$

を採用した CLE

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z$$

の解として得られる $\{g_t\}_{t \geq 0}$ を Schramm-Loewner evolution と呼び，SLE$_\kappa$ で記す.

Theorem

SLE$_\kappa$ で得られる γ は，確率 1 で曲線である.

Theorem

SLE$_\kappa$ により定まる γ のハウスドルフ次元は確率 1 で

$$d_\kappa = \min\left(1 + \frac{\kappa}{8}, 2\right)$$

である.

SLE$_\kappa$ により定まる γ は一般にはジョルダン曲線ではない．κ の値によって次のような振る舞いをすることが知られている;

Theorem

1. $0 < \kappa \leq 4$ のとき γ はジョルダン曲線であり，$\gamma(0,\infty) \subset \mathbb{H}$ である．また $\lim_{t\to\infty} |\gamma(t)| = \infty$.
2. $4 < \kappa < 8$ のとき，γ は自身や実軸と接することがあるが $\gamma(0,\infty) \subsetneq \mathbb{H}$ であり，つまり $\mathbb{H}$ を埋め尽くすことはない．また $\lim_{t\to\infty} |\gamma(t)| = \infty$.
3. $\kappa \geq 8$ のとき，γ は $\overline{\mathbb{H}}$ の全ての点を埋め尽くす，つまり $\gamma[0,\infty) = \overline{\mathbb{H}}$.