# ブラウン運動, Stochastic calculus の基本事項

–関数論との接点を中心に–

厚地 淳
慶應義塾大学経済学部

2010.2.13

## 1 基本概念、記号.

### 1.1 基本的な記号など.

**定義 1 (確率空間)** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が確率空間 *(probability space)*
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は、$\Omega$ の部分集合からなるある $\sigma-$ 加法族、$P$ が $\mathcal{F}$ 上の確率測度.

**定義 2 (確率変数)** $X : \Omega \to \mathbf{R}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 *(random variable)*
$\Leftrightarrow$ $X$ は $\mathcal{F}-$ 可測関数, *i.e.* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ *for* $\forall A \in \mathcal{F}$.

**定義 3 (期待値)** $X$ の期待値 $E[X]$ は $X$ の $\Omega$ 上での測度 $P$ による積分のこと.

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega).$$

**定義 4 (確率過程)** 確率変数の列 $\{X_t\}_{t\in\Lambda}$ を確率過程という。以下では、時間集合 $\Lambda$ は *0* 以上の整数か *0* 以上の実数を考える。

**例. (ランダムウォーク)** $\{\xi_n\}$ を i.i.d の確率変数列とする。$X_n = \sum_{k=0}^n \xi_k$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を $\mathbf{R}$ 上のランダムウォークという。特に、$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = 1/2$ のとき、単純ランダムウォーク (simple random walk) という。

### 1.2 確率空間の構成.

上のランダムウォークの例では、確率空間を明示せずに、すでにそのような確率空間はあると仮定してその上の確率変数列を考えた。実際にそのような確率空間確率変数が存在するかどうかは、別問題である。考えている問題に適合した確率空間 (確率モデル) を構成することは、基本的問題である。

**例.** simple random walk の場合の $\{\xi_n\}$ は次のようにモデルを設定することができる。$\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, $P =$ Lebesgue 測度.$\omega \in \Omega$ を 2 進小数展開し、

$$\omega = \sum_{k=1}^\infty \frac{\omega_k}{2^k}$$

とする。$\xi_n(\omega) = 2\omega_n - 1$ とおけば、$\{\xi_n\}$ i.i.d. であり、$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = 1/2$ を満たす。($k/2^n$ のような数は、二通りの 2 進小数展開を持つが、このような数全体は測度零であり問題にならないことに注意せよ。)

$\xi_n$ が $\mathbf{R}$ に値を持つときは、このように単純ではない。$\mathbf{R}^\infty$ 上の測度を考えなくてはならない。このようなときに威力を発揮するのは、「拡張定理」と呼ばれるもので、特に Kolmogorov の拡張定理はこのような無限直積空間上の測度を構成する場合重要である。後述するブラウン運動の構成にも使うことができる。

### 1.3 確率変数の収束

**定義 5** i) $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ のとき、$X_n$ は $X$ に概収束するといい、$\lim_{n\to\infty} X_n = X\ a.s.$ とかく。
ii) $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$ のとき、$X_n$ は $X$ に $L^p-$ 収束するという。
iii) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ となるとき、$X_n$ は $X$ に確率収束するといい、$\lim_{n\to\infty} X_n = X\quad in\ prob.$ などとかく。

これらの収束の関係 (強さ) は、次のようになっている。$1 \le p < \infty$ とする。

$$\text{概収束} \implies \text{確率収束}, \quad L^p - \text{収束} \implies \text{確率収束}, \quad \text{概収束} \not\Longleftrightarrow L^p - \text{収束}.$$

## 2 条件付期待値.

### 2.1 定義

**定義 6** $X$ を可積分な確率変数、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の $sub\ \sigma-algebra$ とする。次の条件を満たす確率変数 $Y$ を $X$ の条件付期待値という。
i) $Y$ は $\mathcal{G}$ 可測.
ii) $E[X\ :\ A] = E[Y\ :\ A]\ for\ A \in \mathcal{G}$.
この $Y$ は 零集合を除いて一意的である。これを $E[X|\mathcal{G}]$ とかく。

### 2.2 条件付期待値の意味

i) $\mu(A) = E[X\ :\ A]$ によって、$\mathcal{G}$ 上の測度を定義する。明らかにこれは、$P$ に関し絶対連続である。よって、Radon-Nikodym 微分 $\frac{d\mu}{dP}$ が存在するが、

$$\frac{d\mu}{dP} = E[X|\mathcal{G}], \quad a.s.$$

ii) $X$ を 2 乗可積分とする. $E[X|\mathcal{G}]$ は、$\mathcal{G}-$ 可測確率変数のうちで、$L^2$ ノルムを最小にするものである。すなわち、

$$E[|X - E[X|\mathcal{G}]|^2] = \inf\{E[|X - Y|^2] :\ Y : \mathcal{G} - \text{可測}\ \}.$$

### 2.3 条件付期待値の性質

以下ではすべて $X$ は可積分、i.e.$E[|X|] < \infty$. とする。$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は $\mathcal{F}$ の sub $\sigma-$field.

1. $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
2. $X$ が $\mathcal{G}$-可測ならば、$E[X|\mathcal{G}] = X$ a.s.
3. $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$.
4. $X \geq 0 \implies E[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
5. $0 \leq X_n \uparrow X \implies E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]\ (n \to \infty)$.
6. $X_n \geq 0 \implies E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X|\mathcal{G}]$.
7. $|X_n| \leq V,\ E[V] < \infty,\ X_n \to X\ a.s.(n \to \infty) \implies E[X_n|\mathcal{G}] \to E[X|\mathcal{G}]\ (n \to \infty)$.
8. (Jensen の不等式) $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が 凸関数 で $E[|\phi(X)||\mathcal{G}] < \infty \implies \phi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\phi(X)|\mathcal{G}]$.
9. $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \implies E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]\ a.s.$
10. $Z$ が $\mathcal{G}$-可測ならば、$E[XZ|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$ a.s.
11. $X$ が $\mathcal{G}$ と独立 $\implies E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ a.s.

問. $\mathcal{G} = \sigma(A)\ (A \in \mathcal{F},\ P(A) > 0)$ のとき、$E[X|\mathcal{G}]$ はどのようにかけるか。

# 3 Brown 運動.

## 3.1 定義

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

とおく。$\Omega=\{\omega\in C([0,\infty)\to\mathbf{R})\mid\omega_0=0\}$, $B_t(\omega)=\omega_t$, $\omega\in\Omega$ とおくとき、任意の $0<t_1<t_2\cdots<t_n$, $A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対し、

$$P(B_{t_1}\in A_1,B_{t_2}\in A_2,\dots,B_{t_n}\in A_n) \tag{3.1}$$

$$=\int_{A_1}p(t_1,0,x_1)dx_1\int_{A_2}p(t_2-t_1,x_1,x_2)dx_2\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)dx_n \tag{3.2}$$

を満たす $\Omega$ 上の測度 $P$ が存在する。これを Wiener 測度、または、$(\{B_t\},P)$ をブラウン運動という。

注意. 上の定義で $\Omega$ を具体的に与えない場合もある。すなわち、$B_0=0$ a.s. なる確率 1 で連続な path を持つ独立増分過程 (加法過程) で、$B_t-B_s\sim N(0,t-s)$ であるものをブラウン運動ということもある。標準ブラウン運動ともいう。

## 3.2 Brown 運動の性質

**命題 7** *i)* ブラウン運動は、独立増分過程である。特に、$s<t$ のとき、$\{B_t-B_s\}$ と $\sigma(B_u,u\le s)$ は独立である。
*ii)* $B_t\overset{d}{=}\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}$ $(a>0)$.
*iii)* $\{B_t\}$ は、$\mathcal{F}_t$-マルチンゲールである. ただし、$\mathcal{F}_t=\sigma(B_u,u\le t)$.

$B_0(\omega)=x$ となるブラウン運動も同様に考えられる. すなわち、$C([0,\infty)\to\mathbf{R})$ 上の確率測度で、$P_x(B_0=x)=1$ かつ

$$P_x(B_{t_1}\in A_1,B_{t_2}\in A_2,\dots,B_{t_n}\in A_n)$$
$$=\int_{A_1}p(t_1,x,x_1)dx_1\int_{A_2}p(t_2-t_1,x_1,x_2)dx_2\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)dx_n$$

を満たすものが存在する。$(B_t,P_x)$ を $x$ から出発するブラウン運動ということがある。

**命題 8** $(B_t,P_x)$ は、強マルコフ過程 *(*拡散過程*)* である。

**命題 9 (Brown 運動の path property)** ブラウン運動の道は、確率 1 で、いたるところ微分不可能である。また、いかなる有界区間でも確率 1 で有界変動ではない。

**命題 10 (Law of iterated logarithm(LIL))**

$$\text{i)}\qquad \limsup_{t\to 0}\frac{|B_t|}{\sqrt{2t\log\log 1/t}}=1\ a.s.$$

$$\text{ii)}\qquad \limsup_{t\to+\infty}\frac{|B_t|}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\ a.s.$$

### 3.3 ランダムウォークとの関係:invariance principle

不変原理 (invariance priciple) は、ランダムウォーク (単純とは限らない) からブラウン運動が得られることを示す。

$X_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を $\mathbf{R}$ 上のランダムウォークとする。ただし、$\xi_n$ の平均は 0、分散 $\sigma^2$ とする。今、

$$Y_t = X_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, \quad t \geq 0$$

とおく。さらに、

$$Z_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}$$

とおくと、連続な path を持つ確率過程が得られる。

**定理 11** $Z^{(n)}$ の有限次元分布はブラウン運動の有限次元分布に収束する。すなわち、任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m, \quad A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対し、

$$P(Z_{t_1}^{(n)} \in A_1, \dots, Z_{t_m}^{(n)} \in A_m) \to P(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_m} \in A_m), \quad (n \to \infty)$$

$Z^{(n)} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C([0,\infty)), \mathcal{B}(C([0,\infty))))$ は可測写像と思えるので、この写像により、もともとの $P$ から $(C([0,\infty)), \mathcal{B}(C([0,\infty))))$ 上の測度 $P_n$ が誘導される。次が成り立つ。Donsker の不変原理と呼ばれる。

**定理 12** $P_n$ は $n \to \infty$ のとき、*Wiener* 測度に弱収束する。

## 4 マルチンゲール I : 離散時間の場合.

### 4.1 定義.

**定義 13 (filtration)** 増大する *sub* $\sigma-$*algebra* の列 $\{\mathcal{F}_n\}$ を *filtration* と呼ぶ. ここでの増大の意味は、$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ となっていることである。
*filtration* と確率空間の組 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ を *filtration* 付き確率空間 *(filtered probability space)* という。

**例.** 確率過程 $\{X_n\}$ に対して、$\mathcal{F}_n = \sigma(X_m; m \leq n)$ を natural filtaration という。ただし、$\sigma(X_m; m \leq n)$ は、$X_1, \dots, X_n$ で生成される $\sigma-$field、すなわち、$X_1, \dots, X_n$ をすべて可測にする最小の $\sigma-$field である。

**定義 14** 確率過程 $\{X_n\}$ が $\mathcal{F}_n-$ 適合 *($\mathcal{F}_n-$adapted)* であるとは、各 $n$ に対し、$X_n$ が $\mathcal{F}_n-$ 可測となることである。

**定義 15** $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ 上の確率過程 $\{X_n\}$ が次の条件を満たすとき、$\{\mathcal{F}_n\}-$ マルチンゲール *(martingale)* という。
i) $E[X_n] < \infty$, *for* $\forall n$.
ii) $\mathcal{F}_n-$ 適合である。
iii) *For* $m \leq n$

$$E[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m, \quad a.s.$$

**定義 16** 上のマルチンゲールの定義で、iii) の条件を
iii)$'$ *For* $m \le n$

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] \le X_m, \quad a.s.$$

に代えたものを $\{\mathcal{F}_n\}-$ 優マルチンゲール *(supermartingale)*,
iii)$''$ *For* $m \le n$

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] \ge X_m, \quad a.s.$$

に代えたものを $\{\mathcal{F}_n\}-$ 劣マルチンゲール *(submartingale)* という。

**例.** $X_n = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k, \quad X_0 = 0$ とする。ただし、$\epsilon_n$ は平均 0 の確率変数である。$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ とすると、$\{X_n\}$ は $\mathcal{F}_n-$martingale である。

### 4.2 マルチンゲールの基本的性質

**定義 17** 0 以上の整数に値をとる確率変数 $T$ が $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ のとき、$T$ を $\mathcal{F}_n-$*stopping time* という。

**記号.** $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

**定義 18 (stopped process)** $X_n^T = X_{n \wedge T}$ によって 新たな確率過程 $X^T$ を定義する。

**定理 19** $X_n$ がマルチンゲール、$T$ が *stopping time* ならば、$X^T$ はマルチンゲールである。

**定理 20** $X_n$ がマルチンゲールであるための必要十分条件は、任意の有界な *stopping time* $T$ に対し、

$$E[X_T] = E[X_0]$$

となることである。

証明は次の確率積分を用いる。

### 4.3 離散的確率積分

**定義 21** 確率過程 $\{H_n\}$ が、各 $n$ について $H_n$ は $\mathcal{F}_{n-1}-$ 可測であるとき、*previsible* という。

$H_n$ が previsible, $X_n$ がマルチンゲールのとき、確率過程 $\{(H \cdot X)_n\}$ を

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}), \quad (H \cdot X)_0 = 0$$

で定義する。$\{(H \cdot X)_n\}$ は 離散版の確率積分である。

**命題 22** $H_n$ が *bounded, previsible* ならば、$\{(H \cdot X)_n\}$ は $\mathcal{F}_n-$ マルチンゲールである。

**問.** $H_n$ が 単に $\mathcal{F}_n-$ 適合であるとき、$\{(H \cdot X)_n\}$ はどのような確率過程となるか。

定理 19、定理 20 の証明. 確率積分で $H_t = 1_{T \ge n}$ とおけばよい。

### 4.4 マルチンゲールの収束定理

**定理 23** *($L^2-$ 有界の場合)* マルチンゲール $X_n$ が、

$$\sup_n E[X_n^2] < \infty \quad (L^2 - \text{有界})$$

ならば、$\exists \lim_{n\to\infty} X_n\ (= X_\infty)\ a.s.$かつ *in* $L^2$ であり、

$$X_n = E[X_\infty | \mathcal{F}_n]$$

が成り立つ。

**定理 24** 劣マルチンゲール $X_n$ が、

$$\sup_n E[X_n^+] < \infty$$

を満たすならば、$\exists \lim_{n\to\infty} X_n\ (= X_\infty)\ a.s.$

### 4.5 Doob 分解

**定理 25** $X_n$ を劣マルチンゲールとする。このとき、マルチンゲール $M_n$ と *previsible* 増大過程 $A_n$ が存在して、

$$X_n - X_0 = M_n + A_n$$

が成り立つ。

特に、$Y_n$ がマルチンゲールのとき、$X_n = Y_n^2$ は劣マルチンゲールになるが、これに Doob 分解を適用したときの増大部分は、後述する連続時間のときの 2 次変分に対応する。これを $< Y >$ とかくことにする。これがマルチンゲールの挙動を特徴付ける上で重要なものであることは、次のことからもわかる。

**命題 26** $X$ を 2 乗可積分マルチンゲールとする。
i) $X$ が $L^2-$ 有界. $\Leftrightarrow E[< X >_\infty] < \infty.$
ii) $< X >_\infty < \infty\ a.s. \quad \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} X_n < \infty\ a.s.$

**注意 27** 上の ii) の逆は、若干の条件の下で成り立つ。たとえば、$|X_n - X_{n-1}|$ が有界であればよい。

## 5 マルチンゲール II : 連続マルチンゲール.

### 5.1 定義.

離散時間と同様に filtration を定義する。$\{\mathcal{F}_t\}$ を「よい」あるいは「普通の」filtration とする。以降の section では、考える確率過程は常に連続な path を持つとする。

**定義 28** $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の連続確率過程 $\{X_t\}$ が次の条件を満たすとき、$\{\mathcal{F}_t\}-$ マルチンゲールという。
i) $E[X_t] < \infty$, *for* $\forall t$.
ii) *For* $s \leq t$

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad a.s.$$

劣マルチンゲール、優マルチンゲールについても前と同様に定義する。

**注意 29** 時間集合を離散集合に制限することで、連続マルチンゲールは離散マルチンゲールになる。

**例.** Brown 運動 $B_t$ は, natural filtration に関してマルチンゲールである。

**定義 30** $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の確率変数 $T$ で、各 $t$ に対し、

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

を満たすものを $\{\mathcal{F}_t\}-$*stopping time* という。

**例.** $X$ を連続な確率過程、$\{\mathcal{F}_t\}$ を $X$ の natural filtration とする。$D$ を $\mathbf{R}$ のボレル集合とする。

$$T_D = \inf\{t > 0 : X_t \in D\}$$

とおくと、$T_D$ は $\{\mathcal{F}_t\}-$stopping time となる。

前と同様に次が成り立つ。

**定理 31 (Optional stopping theorem)** $M_t$ を連続マルチンゲールとする。$S \leq T$ を有界な *stopping time* とすると

$$E[M_T] = E[M_S] = E[M_0].$$

**系 32** 前定理と同じ仮定の下で、

$$E[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S$$

が成り立つ。

**定理 33** $X$ が $\{\mathcal{F}_t\}-$ マルチンゲール、$T$ が $\{\mathcal{F}_t\}-$*stopping time* のとき、$X^T$ を $X_t^T = X_{t\wedge T}$ で定義すると、$X^T$ は $\{\mathcal{F}_t\}-$ マルチンゲールになる。

**定義 34** ある *stopping time* の列 $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$, *a.s. as* $n \uparrow \infty$ が存在して、$X^{T_n}$ が $\mathcal{F}_t-$*martingale* となるとき、$X$ を局所マルチンゲール *(local martingale)* という。局所劣マルチンゲールも同様に定義する。

**定義 35** 連続な確率過程 $X$ が 局所劣マルチンゲールの差でかけるとき、セミマルチンゲール *(semi-martingale)* という。

**命題 36** $M$ を連続マルチンゲールとする。このとき、確率 *1* で、$t \mapsto M_t$ はいたるところ有界変動でない。

**定理 37 (Doob-Meyer 分解)** $X_t$ を連続な劣マルチンゲールとする。このとき、マルチンゲール $M_t$ $(M_0 = 0)$ と $\mathcal{F}_t-$*adapted* 増大過程 $A_t$ $(A_0 = 0)$ が存在して、

$$X_t - X_0 = M_t + A_t \quad a.s.$$

とかける。この表現は一意である。

## 5.2 ２次変分 (quadratic variation)

**定義 38** $M$ を 連続マルチンゲールとする時、$M^2$ の *Doob-Meyer* 分解の増大過程の部分を２次変分過程 *(quadratic variation)* と呼び、$< M >_t$ とかく。すなわち、

$$M_t^2 - M_0^2 - < M >_t = \text{マルチンゲール}$$

となる。

２次変分の名は次に由来する。

**定理 39** $\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ を $[0, t]$ の分割とする。このとき、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 = < X >_t \qquad in\ prob.$$

ただし、$|\Delta| = \max_k |t_{k+1} - t_k|$.

**命題 40** $B$ をブラウン運動とすると、$< B >_t = t$.

$X, Y$ が マルチンゲールのとき、

$$< X, Y >_t = \frac{1}{4}(< X + Y >_t - < X - Y >_t)$$

により、$< X, Y >$ を定義する。このとき、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) = < X, Y >_t \qquad \text{in prob.}$$

が成り立つ。さらに、$A$ が有界変動過程ならば、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (A_{t_{k+1}} - A_{t_k})^2 = 0$$

であり、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) = 0$$

であるから、$< A >_t = 0$, $< A, X >_t = 0$ とするのは自然であろう。

# 6　確率積分

## 6.1　定義

**定義 41** $\mathcal{F}_t$ 適合過程 $\{X_t\}$ に対し、各 $t$ に対し、写像

$$X : (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})), \quad (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$$

が $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])-$ 可測のとき、$\{X_t\}$ は発展的可測 *(progressively measurable)* という。

　いくつか空間を用意する。

$$H^2 = \{M : \text{ contiuous martingale } | \sup_t E[|M_t|^2] < \infty\}.$$

$M \in H^2$ に対し、

$$||M||^2_{H^2} = E[M^2_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[M^2_t]$$

とおくと、このノルムに関し、$H^2$ は Hilbert 空間になる。

$$\mathcal{L}^2(M) = \{K : \text{ progressively measurable } |E[\int_0^\infty K^2_s d < M >_s] < \infty\},$$

$$||K||^2_M = E[\int_0^\infty K^2_s d < M >_s], \quad L^2(M) = \mathcal{L}^2(M)/\sim .$$

**定理 42** $M \in H^2$ とする。各 $K \in L^2(M)$ に対し，任意の $N \in H^2$ に対して

$$< K \cdot M, N >_t = \int_0^t K_s d < M, N >_s, \quad (K \cdot M)_0 = 0$$

となるような $K \cdot M \in H^2$ が存在する。

**定義 43** 上の $K \cdot M$ を $K$ の $M$ による確率積分という。

$$(K \cdot M)_t = \int_0^t K_s dM_s$$

とかく。

**注意 44** *1.* $K \cdot M$ は $K, M$ 双方について線形である。
*2.* $M$ が局所マルチンゲールの場合も、*stopping time* を用いる議論で、確率積分を定義することができる。

　証明は次に注意する。

**補題 45 (Kunita-Watanabe の不等式)**

$$E[\int_0^\infty K_s d < M, N >_s] \le ||N||_{H^2} ||K||_M.$$

**定義 46** *semi-martingale* $X_t = X_0 + M_t + A_t$, *(*$M$ *: 局所マルチンゲール、*$A$ *: 有界変動)* に対し、

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s dM_s + \int_0^t K_s dA_s$$

と定義する。

**命題 47** $K$ を連続とする。$\Delta_n$ を $|\Delta_n| \to 0$ *as* $n \to \infty$ となる $[0,t]$ の分割の列とする。

$$\int_0^t K_s dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} K_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) \quad \textit{in prob.}$$

が成り立つ。

**補題 48** $K^n \to 0$ *(*$n \to \infty$*)* かつ $|K_n| \le C$ *(*$C$ *: const.)* とする。このとき、

$$\int_0^t K_s^n dX_s \to 0 \quad (n \to \infty).$$

上の定義では、「被積分過程」$K$ の分点は、左端を取っている。ほかの点を取ったらどうなるか？(「関数」のリーマン積分では、どのような点をとっても極限は同じ。)
簡単のため、$K_t = f(X_t)$ とする。$0 \le \theta \le 1$ とする。

**命題 49** $d < X >_t$ が *Lebesgue* 測度 $dt$ に関し絶対連続ならば、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} f(X_{t_i+\theta(t_{i+1}-t_i)})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) = \int_0^t f(X_s)dX_s + \theta \int_0^t f'(X_s)d < X >_s \quad \textit{in prob.}$$

$\theta = 1/2$ のときの極限を Stratonovich 積分という。

## 6.2 伊藤の公式

**定理 50** $X$ を セミマルチンゲール、$f$ を $C^2$ 級関数とする。

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X >_s .$$

この証明はいくつか知られている。
1. マルチンゲールの path property から従う。

**命題 51** $x_t$ を 有界な２次変分を持つ $[0, \infty)$ 上の関数とする。

$$f(x_t) - f(x_0) = \int_0^t f'(x_s)dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(x_s)d < x >_s .$$

ただし、右辺の第１項は、命題 *47* の右辺の和の極限としてとる。$< x >$ は普通の意味の２次変分である。

2. まず、$X, Y$ をセミマルチンゲールとするとき、

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + < X, Y >_t$$

を示し、任意の多項式について成り立つことを示す。後は極限移行。なお、最初の式は、$X^2$ について示せば示される。

Stratonovich 積分を用いると普通の意味の chain rule が成り立つ。

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s.$$

これをもって「確率微分形式」を考えることができる。

伊藤の公式は多変数でも成り立つ。

**定理 52** $X = (X^1, \ldots, X^d)$ を $\mathbf{R}^d$ 上のセミマルチンゲール、$f \in C^2(\mathbf{R}^d)$ とする。

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \nabla f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d < X^j, X^j >_s .$$

特に、$X$ が、$\mathbf{R}^d$ 上のブラウン運動ならば、

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \nabla f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s) ds.$$

## 7　確率微分方程式について少し

確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt$$

を考える。ここで、$B_t$ は、標準ブラウン運動。常微分方程式のときと同じように、係数が高々１次の増大度を持ちリプシッツ条件を満たせば、解の存在と一意性 (strong solution, pathwise uniqueness) が成り立つ。具体的な例を見てみよう。

1.(Langevin 方程式)

$$dX_t = \sigma dB_t - bX_t dt, \quad X_0 = x.$$

解は、

$$X_t = e^{-bt} x + \int_0^t e^{-(t-s)b} \sigma dB_s.$$

これは、Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ばれる。

2.(Black-Scholes)

$$dS_t = \alpha S_t dB_t + \beta S_t dt.$$

解

$$S_t = S_0 \exp\{\alpha B_t + (\beta - \alpha^2/2)t\}.$$

3.

$$dX_t = dB_t + \frac{a - X_t}{1 - t} dt, \quad 0 \le t < 1, \qquad X_0 = 0.$$

解は、

$$X_t = at + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad 0 \le t < 1.$$

これは、Brownian bridge と呼ばれる。

4. $X_t = B_t^3$ の満たす SDE を求めよ。

5.$B_t = (B_t,^1, B_t^2, \ldots, B_t^m)$ を $m$ 次元ブラウン運動とするとき、$X_t = |B_t|^2,\ Y_t = |B_t|$ の満たす SDE を求めよ。

次に注意せよ。

**定理 53 (P.Lévy の定理)** 局所マルチンゲール $M$ が、$< M >_t = t$ を満たすならば、$M$ はブラウン運動である。

**系 54** $M$ がマルチンゲールならば、$M(\langle M\rangle_t^{-1})$ はブラウン運動である。言い換えると、あるブラウン運動 $\beta(t)$ が存在して、$M_t = \beta(< M >_t)$ と書くことができる。

多変数版も成り立つ。

**定理 55** $\mathbf{R}^d$ 上の局所マルチンゲール *(i.e.* $M_t = (M_t^1, M_t^2, \ldots, M_t^d)$, $M_t^k$ $(k = 1, \ldots, d)$ が局所マルチンゲール*)* が、

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \delta_{ij} t$$

を満たすならば、$M$ は、$\mathbf{R}^d$ 上のブラウン運動である。

5 の SDE はそれぞれ、

$$dX_t = 2\sqrt{X_t} d\beta_t + m dt, \qquad dY_t = d\beta_t + \frac{m-1}{2Y_t} dt$$

となる。ただし、$\beta_t$ は、標準ブラウン運動。

# 8 測度の変換:Cameron-Martin,Girsanov, 丸山の公式

以下では、ブラウン運動は $\mathbf{R}^d$ で考えている。

$M_t$ $(M_0 = 1)$ を $P$ に関し連続なマルチンゲールとする。

$$Q(A) := E[M_t : A] \text{ for } A \in \mathcal{F}_t$$

と定義する。このとき、$Q(A) = E[M_s : A]$ $(\forall s \ge t)$ である。

**定理 56** $X_t$ が $P$ に関し連続なマルチンゲールならば、$X_t - D_t$ は $Q$ に関してマルチンゲールになる。ただし、

$$D_t := \int_0^t \frac{d\langle X, M\rangle_s}{M_s}.$$

さらに、この変換で二次変分は不変である。

例. $D_t = \int_0^t a_s ds$ ならば、$M_t = \exp(\int_0^t a_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2 ds)$ とおけばよい。

簡単な応用例：1. Support theorem.

**定理 57** $\phi(t)$ $(\phi(0) = 0)$ を $[0,1]$ 上の連続関数とする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ があって、

$$P(\sup_{0 \le t \le 1} |B_t - \phi(t)| < \epsilon) > \delta.$$

(pf.) $\phi$ が滑らかなとき見れば十分. $X_t = B_t,\ D_t = \phi(t)$ $(a_s = \phi'(s))$ とおけ。

2. h-transform. 優調和変換.

$D$ を $\mathbf{R}^d$ の単位球、$h$ を $D$ 上の正値調和関数とする。$B_t$ : $\mathbf{R}^d$ 上の BM.

$M_t = h(\hat{B}_{t \wedge \tau_D})/h(\hat{B}_0)$ の場合を考える。ただし、$\hat{B}$ は、$\partial D$ で殺したもの。このとき、$D_t = \int_0^{t \wedge \tau_D} \frac{\nabla h(\hat{B}_s)}{h(\hat{B}_s)} ds$. $Q$ の下では $\hat{B}_t - D_t$ は、ブラウン運動なので、これを $W_t$ $(W_0 = 0)$ とすると、$\hat{B}_t$ は、SDE

$$\hat{B}_t = \hat{B}_0 + W_t + \int_0^{t \wedge \tau_D} \frac{\nabla h(\hat{B}_s)}{h(\hat{B}_s)} ds$$

を満たす。特に、$h$ が Poisson 核のときが重要。$h(x) = P_D(x, y)$ $(y \in \partial D)$ とするとき $Q = P_x^y$ とかく。$\hat{B}_t \to y$ $(t \to \tau_D)$ $P_x^y - a.s.$ が成り立つ。正則関数や調和関数の境界挙動を調べるときに重要である。

# 9 マルコフ性, 強マルコフ性

$\Omega$ は $\mathbf{R}^d$ 上の道の空間とし、$(\Omega, \mathcal{F}_t, P_x, X_t)$ を $\mathbf{R}^d$ 上のブラウン運動とする。

**定義 58** $\theta : \Omega \to \Omega$ を $\theta_t(\omega)(s) = \omega(t + s)$ で定義する。

例.

$$\int_t^{s+t} f(X_u) du = \int_0^s f(B_u) du \circ \theta_t.$$

$$f(B_s) \circ \theta_t = f(B_{s+t}).$$

$F \in \mathcal{F}_\infty$ で有界とする。

**命題 59 (マルコフ性)**

$$E_x[F \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{B_t}[F] \quad a.s.\ (0 \le t < \infty).$$

例.

$$E_x[f(B_{s+t}) | \mathcal{F}_t] = E_x[f(B_s) \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{B_t}[f(B_s)].$$

$$E_x[\int_t^{s+t} f(X_u) du | \mathcal{F}_t] = E_x[\int_0^s f(B_u) du \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{B_t}[\int_0^s f(B_u) du].$$

**命題 60 (強マルコフ性)** *$T$ を stopping time とする.*

$$E_x[F \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[F] \quad a.s.$$

一般に、強マルコフ過程で標本路が確率 1 で連続なものを拡散過程 (diffusion process) と呼ぶ. ブラウン運動は拡散過程である。

# 10 関数論との関連

## 10.1 容量と極集合

**定義 61** $\sigma_A = \inf\{t > 0 | B_t \in A\}$ とおく。

$$P_x(\sigma_A < \infty) = 0 \quad (\forall x \notin A)$$

となるとき、$A$ を 極集合 *(polar set)* と呼ぶ。

$A$ が容量 ($d = 2$ のとき対数容量, $d \geq 3$ のときニュートン容量) 零 ならば、$A$ は polar.

## 10.2 調和測度とグリーン関数

$D$ を滑らかな境界を持つ $\mathbf{R}^d$ の領域とする。$f \in C_b(\partial D)$, $g \in C_b(\overline{D})$ とする。$u(x) = E_x[f(B_{\tau_D})]$, $v(x) = E_x[\int_0^{\tau_D} g(B_t)dt]$ とおくと、
$u$ は、$D$ 上調和、$u|_{\partial D} = f$,
$v$ は、$g \geq 0$ の時 $D$ 上優調和、特に、$\frac{1}{2}\Delta v(x) = -g(x)$.

これより、

$$E_x[f(B_{\tau_D})] = \int_{\partial D} f(y) d\omega_D^x(y),$$

$$E_x[\int_0^{\tau_D} g(B_t)dt] = \int_D g(y) G_D(x,y) dy$$

がわかる。($u(X_{t\wedge\tau_D})$ がマルチンゲール、$v(X_{t\wedge\tau_D})$ が優マルチンゲールであり、

$$\lim_{t\to\infty} E_x[u(X_{t\wedge\tau_D})] = E_x[f(B_{\tau_D})], \ \lim_{t\to\infty} E_x[v(X_{t\wedge\tau_D})] = v(x) - E_x[\int_0^{\tau_D} g(B_t)dt]$$

となることを示せ。これとリースの定理より上がわかる。)

また、Dynkin の公式 (Ito の公式を積分したもの) より、$f \in C_b^2(D) \cap C_b(\overline{D})$ のとき、

$$E_x[f(B_{\tau_D})] - f(x) = \frac{1}{2} E_x[\int_0^{\tau_D} \Delta f(B_t)dt]$$

i.e.

$$\int_{\partial D} f(y) d\omega_D^x(y) - f(x) = \frac{1}{2} \int_D \Delta f(y) G_D(x,y) dy.$$

**命題 62 (Dirichlet 問題:Poisson 方程式)** $f \in C_b(\partial D)$, $g \in C_b(\overline{D})$ とする。

$$\frac{1}{2}\Delta u(x) = g(x) \ (x \in D), \quad u(x) = f(x) \ (x \in \partial D)$$

の解 $u$ は、

$$u(x) = E_x[f(B_{\tau_D})] - E_x[\int_0^{\tau_D} g(B_t)dt]$$

を満たす。

**命題 63** $f \in C_b(D)$ とする。

$$\frac{1}{2}\Delta u(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \ (x \in D,\ t>0), \quad u(0,x) = f(x) \ (x \in D),\ u(t,x) = 0 \ (x \in \partial D,\ t>0)$$

の解は、

$$u(t,x) = E_x[f(X_t) : \tau_D > t]$$

を満たす。

**定理 64 (Feynmann-Kac の公式)** $f \in C_b(\partial D)$, $V(x) \geq 0$ とし、$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ は、

$$-\frac{1}{2}\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0 \ (x \in D), \quad u(x) = f(x) \ (x \in \partial D)$$

を満たすとする。このとき、

$$u(x) = E_x[f(B_{\tau_D})e^{-\int_0^{\tau_D} V(B_s)ds}].$$

## 10.3 正則関数と Lévy の conformal invariance

$X_t, Y_t$ が独立な $\mathbf{R}$ 上のブラウン運動のとき、$Z_t = X_t + iY_t$ を複素ブラウン運動と呼ぶ。

**定理 65** $f$ を $\mathbf{C}$ 上の正則関数、$Z_t$ を複素ブラウン運動とする．ある複素ブラウン運動 $\tilde{Z}_t$ が存在して、

$$f(Z_t) = \tilde{Z}_{\rho_t} \quad with \ \ \rho_t = \int_0^t |f'|^2(Z_s)ds.$$

応用例:

Picard の定理の証明 (B.Davis 1975,79)
Fatou の定理, 境界挙動.
angular derivative (Burdzy).
Bloch 関数の LIL(Makarov, T.Lyons, Banuelos, Banuoelos et al.)
BMO, Hardy class の調和関数とマルチンゲールの対応 (Burkholder)
Harnack 不等式、境界 Harnack 原理 (Bass-Burdzy, 相川)
Liouville 型定理.

### 10.4 例題

1. $f$ を $D=\{|z|<1\}$ 上の Nevanlinna class $\mathcal{N}$ の関数とする。このとき、$f$ は non-tagential limit を持つことを示せ。ただし、

$$f \in \mathcal{N} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

(ヒント：まず、$U_t = \log^+ |f(X_{t \wedge \tau_D})|$ が劣マルチンゲールであることを示せ。$f \in \mathcal{N}$ なのでマルチンゲールの収束定理より、$\lim_{t\to\infty} U_t$ が存在することがわかる。ブラウン運動の path に沿って調和関数の極限値が存在することと、non-tangential limit の存在の同値性 ($d=2$) を用いる。)

2. $u$ を $\mathbf{C}$ 上の劣調和関数とする。

$$u(z) = o(\log |z|)$$

ならば、$u$ は定数であることを示せ。(ヒント：$\tau_r = \inf\{t>0 | \, |Z_t| > r\}$, $\sigma_a = \inf\{t>0 | \, |Z_t| < a\}$ とおく。$P_x(\sigma_1 > \tau_r)$ $(1<|x|<r)$ を計算してみよ。これは、$1<|x|<r$ で調和である。$u(Z_{\sigma_1 \wedge \tau_r \wedge t})$ を考えよ。)

3. 次の Makarov による Bloch 関数の LIL を示せ。

**定理 66** $f$ を $D=\{|z|<1\}$ 上の正則関数で、

$$\sup_{z\in D} (1-|z|)|f'(z)| < \infty$$

とする。このとき、$\exists C = C(f) > 0$ $s.t.$

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|f(re^{i\theta})|}{\log(1-r)^{-1} \log_3 (1-r)^{-1}} \le C \quad (\text{a.e.}\theta).$$

(後述する hyperbolic Brownian motion と、ブラウン運動の LIL を使え。この証明法は、T.Lyons による。)

## 11 一般化:拡散過程

### 11.1 一般的な拡散過程

強マルコフ過程で標本路が確率 1 で連続なものを拡散過程 (diffusion process) と呼ぶ.

$L$ が、状態空間 $S$ 上の拡散過程 $X_t$ の 生成作用素 (generator) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds = \text{ a local martingale } \quad (\forall f \in C_0^2(S))$$

$L$ がある測度 $m$ に対し、$L^2(S)$ 上の sel-adjoint operator になるとき、$X$ は、対称拡散過程と呼ばれる。

例: $\mathbf{R}^d$ 上のブラウン運動 $B$ のとき、$S=\mathbf{R}^d$, $L=\frac{1}{2}\Delta$, $m=$Lebesgue 測度.

### 11.2 リーマン多様体上のブラウン運動

リーマン計量に付随するラプラシアン $\Delta$ に対して、$\frac{1}{2}\Delta$ を generator とする拡散過程が存在する。これをリーマン多様体上のブラウン運動と呼ぶ。リーマン多様体 $M$ 上のブラウン運動 $X_t$ と $f \in C^2(M)$ に対して、

$$f(X_t) - f(X_0) = B(\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)ds) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)ds$$

が成立する。ただし、$B_t$ は 0 から出発する $\mathbf{R}$ 上のブラウン運動である。また、

$$P_x(X_t \in A) = \int_A p(t,x,y)dv(y)$$

となる。ここで、$p(t,x,y)$ は、熱方程式の (minimal な) 基本解, $dv(y)$ はリーマン体積要素である。

### 11.3 time-changed diffusion process

$\phi(x) \in C(M)$ を $\phi > 0$ とする。

$$L = \frac{1}{2}\phi(x)\Delta$$

によって新たな operator $L$ を定義する。$L$ を $L^2(dm)$(ただし、$dm = \phi(x)^{-1}dv(x)$) 上の対称作用素と見て、これを generator とする拡散過程を $\tilde{X}$ とする。

$$X_t = \tilde{X}(\rho_t) \quad \text{with} \quad \rho_t = \int_0^t \phi(X_s)^{-1}ds$$

が成立する。ここで、$X_t$ は、$\frac{1}{2}\Delta$ を generator とするブラウン運動。

例. $M = \{|z| < 1\}$ のとき、

$$ds^2 = \frac{dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}$$

を考えると、$(M, ds^2)$ は完備なリーマン多様体となる。これに対応するブラウン運動を $X_t$ とすると、

$$X(\rho_t) = Z_t \text{ with } \quad \rho_t = \int_0^t \frac{1}{(1-|Z_s|^2)^2}ds.$$

ここで、$Z_t$ は $\mathbf{C}$ 上のある複素ブラウン運動.

### 11.4 大域挙動とリーマン面の型

**定義 67** リーマン多様体 $M$ 上のブラウン運動 $X_t$ が、再帰的 *(recurrent)* とは、任意の開集合 $A \subset M$ に対し、

$$\limsup_{t\to\infty} 1_A(X_t) = 1 \qquad P_x - a.s. \quad (\forall x \in M).$$

$M$ をリーマン面とする。これに conformal metric をひとつ入れ、対応するブラウン運動を考える。ほかの conformal metric を考え対応するブラウン運動を考えるとそれらは、time-change で移りあう。等角同型な面同士の上のブラウン運動も同様である。

**命題 68** i) $M \in O_G \Leftrightarrow M$ 上のブラウン運動は再帰的。
ii) $M \in O_{HB} \Leftrightarrow M$ 上のブラウン運動の *invariant $\sigma$-field* は自明。

# 参考文献

[1] R. Banuelos and C. N. Moore Probabilistic behavior of harmonic functions, Birkhauser, 1999.

[2] R. Bass, Probabilistic Techniques in Analysis, Springer, 1995. 392 pages.

[3] R. Durret, Brownian Motion and Martingales in Analysis, Wadsworth, 1984.

[4] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian motion and Stochastic calculus.* 2nd ed. Springer, 1991.(邦訳:渡辺寿夫訳、「ブラウン運動と確率積分」シュプリンガー東京 )

[5] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, Berlin,1991.(最近出た改訂版あり)

[6] D. Williams, *Probability with martingale.* Cambridge University Press, 1991.

[7] 舟木 直久, 確率微分方程式. 「現代数学の基礎」9. 岩波書店, 1997.

[8] 長井 英生, 確率微分方程式. 共立講座 ２１世紀の数学 27. 共立出版, 1999.

[9] B. Øksendal, *Stochastic differential equations*,5th. ed. Universitext, Springer, 1998. (邦訳:谷口説男訳 )