10 Quasiregular 写像の偏導関数の高次可積分性

10.1. Gehring の逆 Hölder 不等式 n 次元 qr 写像はその定義から局所 L^n 可積分な偏導関数をもつ。F. W. Gehring は論文 [G1973] において quasiconformal 写像の場合に n と写像の dilatation K のみに依存する $p = p(n, K) > n$ があって偏導関数が局所 L^p 可積分であることをしめし、O. Martio はただちにこの結果を qr 写像の場合に一般化した。この章ではこの Martio の証明について述べる。まず Stieltjes 積分に関する一つの不等式から始めよう。

10.2. Lemma. $q \in (0, \infty), a \in (1, \infty)$ とし $h : [1, \infty) \to [0, \infty)$ を非増加かつ

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = 0, \tag{10.3}$$

$$-\int_t^\infty s^q dh(s) \leq a t^q h(t), \quad t \in [1, \infty) \tag{10.4}$$

をみたすとする。このとき $p \in [q, qa/(a-1))$ に対し

$$-\int_1^\infty t^p dh(t) \leq \frac{q}{aq - (a-1)p} \left(-\int_1^\infty t^q dh(t) \right) \tag{10.5}$$

が成立する。この不等式は sharp である。

Proof. (第 1 段) ある $j \in (1, \infty)$ に対して $h(t) = 0, t \in [j, \infty)$ が成立する場合。このとき $r \in (0, \infty)$ に対して

$$I(r) = -\int_1^\infty t^r dh(t) = -\int_1^j t^r dh(t)$$

とおく。$p \in (0, \infty)$ のとき部分積分により

$$I(p) = -\int_1^j t^{p-q} t^q dh(t) = I(q) + (p-q)J, \tag{10.6}$$

ここで

$$J = \int_1^j t^{p-q-1} \left(-\int_t^j s^q dh(s) \right) dt.$$

さらに (10.4) と部分積分により

$$J \leq a \int_1^j t^{p-1} h(t) dt = -\frac{a}{p} h(1) + \frac{a}{p} \int_1^j t^p dh(t) = -\frac{a}{p} h(1) + \frac{a}{p} I(p).$$

(10.4) に $t = 1$ を代入して

$$-ah(1) \leq \int_1^j s^q dh(s) = -I(q).$$

よって $J \leq -I(q)/p + aI(p)/p$. $p \geq q$ ならば (10.6) より $(1 - a(p-q)/p)I(p) \leq qI(q)/p$. さらに $p < qa/(a-1)$ ならば最後の不等式の左辺の係数は正。したがって $p \in [q, qa/(a-1))$ のとき (10.5) を得る。

(第 2 段)　一般の場合。まず (10.5) の右辺における積分は有限であるとしてよい。このとき $j=2,3,\ldots$ に対して

$$h_j(t)=\begin{cases} h(t) & (t\in[1,j) \text{ のとき}) \\ 0 & (t\in[j,\infty) \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと

$$\lim_{j\to\infty}\left(-\int_1^\infty t^p\,dh_j(t)\right)=-\int_1^\infty t^p\,dh(t) \tag{10.7}$$

が成立する。$h_j:[1,\infty)\to[0,\infty)$ は非増加で

$$-\int_t^\infty s^q\,dh(s)\le at^q h_j(t)$$

である。なぜなら $t\ge j$ のときは定義から両辺は 0, $j>t$ のときは (10.4) から

$$-\int_t^\infty s^q\,dh_j(s)\le-\int_t^\infty s^q\,dh(s)\le at^q h(t)=at^q h_j(t).$$

よって第 1 段の結果より $p\in[q,qa/(a-1))$ のとき

$$-\int_1^\infty t^p\,dh_j(t)\le\frac{q}{aq-(a-1)p}\left(-\int_1^\infty t^q dh_j(t)\right)\le\frac{q}{aq-(a-1)p}\left(-\int_1^\infty t^q\,dh(t)\right)$$

(10.5) は $j\to\infty$ として得られる。とくに $h(t)=t^{-qa/(a-1)}$ のとき

$$-\int_t^\infty s^q\,dh(s)=-\frac{qa}{a-1}\int_t^\infty s^{-q/(a-1)-1}ds=at^{-q/(a-1)}=at^q h(t).$$

すなわち (1.4) における等号が成立し、したがって (10.5) で等号が成立することがわかる。よって (10.5) は sharp である。

10.8. Maximal function. $g:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ は局所 L^1 可積分とする。g の maximal function $M(g):\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ を

$$M(g)(x)=\sup\frac{1}{m(B)}\int_B g\,dm$$

で定義する。ただし B は x に中心をもつすべての n 次元球を動くものとする。もし $q\in(1,\infty)$ に対して g が局所 L^q 可積分ならば Hölder の不等式より $M(g)^q\le M(g^q)$ が成立する。次の補題は定数倍してこれとは逆向きの不等式が成立すれば、ある $p>q$ に対して g が局所 L^p 可積分であることを述べている。

10.9. Lemma. $q,b\in(1,\infty)$, Q を $\mathbf{R}^n$ 内の n-cube, $g:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ は局所 L^q 可積分であるとし、さらに Q 上 a.e. に不等式

$$M(g^q)\le bM(g)^q \tag{10.10}$$

が成立していると仮定する。このとき q, b および n のみに依存する正定数 c が存在して $p \in [q, q+c)$ に対して g は Q 上 L^p 可積分であり

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q g^p \, dm \leq \frac{c}{q+c-p} \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q g^q \, dm \right)^{p/q} \tag{10.11}$$

と評価される。

Proof. 「Q 上 a.e. に $g = 0$」ではないと仮定してよい。(10.11) において g をその正定数倍でおきかえても不等式は保存されるので

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q g^q \, dm = 1 \tag{10.12}$$

を仮定してもよい。次に $t \in (0, \infty)$ に対して

$$E(t) = \{x \in Q : g(x) > t\} \tag{10.13}$$

とおく。

まず q, b および n のみに依存する正定数 a が存在して $t \in [1, \infty)$ に対して

$$\int_{E(t)} g^q \, dm \leq a t^{q-1} \int_{E(t)} g \, dm \tag{10.14}$$

が成立することを見る。$t \in [1, \infty)$ を固定して $s \in (t, \infty)$ を

$$s^q = a_n b \left(\frac{qt}{q-1} \right)^q, \quad a_n = \Omega_n n^{n/2} > 1$$

となるように選ぶ。

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q g^q \, dm = 1 \leq s^q$$

だから Calderón-Zygmund の方法 Lemma 10.40 より座標軸に平行な辺をもつ n-cubes $Q_j \subset Q$ の disjoint 列が存在して、すべての j に対して

$$s^q < \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} g^q \, dm \leq 2^n s^q \tag{10.15}$$

かつ $G = \cup_j Q_j$ とおくとき $Q \setminus G$ 上 a.e. に $g \leq s$ が成立する。すると $m(E(s) \setminus G) = 0$ で (1.15) より

$$\int_{E(s)} g^q \, dm \leq \sum_j \int_{Q_j} g^q \, dm \leq 2^n s^q m(G). \tag{10.16}$$

$x \in Q_j, r = \operatorname{diam}(Q_j)$ をそれぞれ中心・半径にもつ球 $B = B(x, r)$ に対して (10.15) より

$$M(g^q)(x) \geq \frac{1}{m(B)} \int_B g^q \, dm \geq \frac{m(Q_j)}{m(B)} \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} g^q \, dm = \frac{s^q}{a_n}.$$

(10.10) と s の選び方より $F \subset G, m(G \setminus F) = 0$ が存在して $x \in F$ ならば

$$M(g)(x) > \frac{q}{q-1}t$$

が成り立つ。

$F(\subset Q)$ は有界集合ゆえ、被覆定理 Lemma 10.41 をもちいれば上のような球の disjoint 列 B_j が存在して

$$m(G) = m(F) \leq 5^n \sum_j m(B_j) \tag{10.17}$$

各 j について

$$\frac{qt}{q-1} m(B_j) \leq \int_{B_j} gdm \leq \int_{B_j \cap E(t)} gdm + tm(B_j).$$

よって

$$m(B_j) \leq \frac{q-1}{t} \int_{B_j \cap E(t)} gdm.$$

この不等式と (10.16), (10.17) より

$$\int_{E(s)} g^q dm \leq \frac{10^n s^q (q-1)}{t} \int_{E(t)} gdm$$

明らかに

$$\int_{E(t)\setminus E(s)} g^q dm \leq \int_{E(t)\setminus E(s)} s^{q-1} gdm = s^{q-1} \int_{E(t)} gdm \tag{10.18}$$

だから

$$\int_{E(t)} g^q dm \leq \int_{E(t)\setminus E(s)} + \int_{E(s)} g^q dm \leq \left(10^n \left(\frac{s}{t}\right)^q (q-1) + \left(\frac{s}{t}\right)^{q-1} \right) \int_{E(t)} gdm.$$

したがって

$$a = 10^n \left(\frac{s}{t}\right)^q (q-1) + \left(\frac{s}{t}\right)^{q-1} \left(= 10^n a_n b(q-1) \left(\frac{q}{q-1}\right)^q + (a_n b)^{(q-1)/q} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{q-1} \right) \tag{10.19}$$

各 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$h(t) = \int_{E(t)} gdm$$

とおくと $h : [1, \infty) \to [0, \infty)$ は非増加かつ g は $L^q(Q)$ に属するから

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

すべて $r, t \in [1, \infty)$ のに対して明らかに

$$\int_{E(t)} g^r dm = -\int_t^\infty s^{r-1} dh(s)$$

と書き直すことができる。よって (10.14) は (10.4) が (q を $q-1$ におきかえて) 今考えている h について成立していることを意味している。よって Lemma 10.2 より $p-1\in[q-1,(q-1)a/(a-1))$ ならば

$$\int_{E(1)} g^p dm \le \frac{(q-1)/(a-1)}{q-p+(q-1)/(a-1)}\int_{E(1)} g^q dm$$

すなわち

$$c=\frac{q-1}{a-1}$$

とおくと $p\in[q,q+c)$ のとき

$$\int_{E(1)} g^p dm \le \frac{c}{q+c-p}\int_{E(1)} g^q dm$$

$Q\setminus E(1)$ 上では $g^p\le g^q$ だから $p\in[q,q+c)$ のとき、$1\le c/(q+c-p)$ をもちいて

$$\int_Q g^p dm \le \frac{c}{q+c-p}\int_Q g^q dm$$

を得る。これと (10.12) から (10.11) を得る。

10.20. Lemma. $q,b\in(1,\infty)$, Q を $\mathbf{R}^n$ 内の n-cube, $g:Q\to[0,\infty]$ は Q において L^q 可積分とする。任意の座標軸に平行な辺をもつ n-cube $Q'\subset Q$ に対して

$$\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} g^q dm \le b\left(\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} g dm\right)^q \tag{10.21}$$

が成立するならば q,b および n のみに依存する正定数 c が存在して $p\in[q,q+c)$ のときは Q において L^p 可積分で

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q g^p dm \le \frac{c}{q+c-p}\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q g^q dm\right)^{p/q} \tag{10.22}$$

Proof. (議論の進め方は前補題の証明とほとんど同じなので詳しく立ち入らないところがある。) 今 (10.12) が成立していると仮定してよい。次に $t\in[1,\infty)$ に対し $s\in[1,\infty)$ を

$$s^q=b\left(\frac{qt}{q-1}\right)^q$$

となるように選ぶ。Lemma 10.9 の証明と同じように座標軸に平行な辺をもつ cube の disjoint 列 $Q_j\subset Q$ を (10.15), (10.16) が成立するようにとる。すると (10.15) と (10.21) により各 j に対して明らかに

$$s^q<\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} g^q dm \le b\left(\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} g dm\right)^q.$$

よって s の選び方により

$$\frac{qt}{q-1}m(Q_j)\le\int_{Q_j} g dm\le\int_{Q_j\cap E(t)} g dm+tm(Q_j)$$

だから

$$m(Q_j) \leq \frac{q-1}{t} \int_{Q_j \cap E(t)} g\,dm$$

この不等式と (10.16) より

$$\int_{E(s)} g^q dm \leq 2^n s^q \sum_j m(Q_j) \leq \frac{2^n s^q (q-1)}{t} \sum_j \int_{E(t)\cap Q_j} gm \leq \frac{2^n s^q (q-1)}{t} \sum_j \int_{E(t)} g\,dm.$$

これと自明な不等式 (10.18) から

$$\int_{E(t)} g^q dm \leq a \int_{E(t)} g\,dm, \quad a = 2^n (q-1) \left(\frac{s}{t}\right)^q + \left(\frac{s}{t}\right)^{q-1}.$$

これから (10.22) が $c = (q-1)/(a-1)$ として成立する。

10.23. qr 写像に対する新しい dilatation. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像とする。6.11 において f の linear dilatation $H(x, f)$ を定義したが、この linear dilatation は写像が quasiregular であることと同値な条件を与えるのに使われた。ここでは $H(x, f, r)$ のかわりに

$$\tilde{l}(x, f, r) = \sup\{s > 0 : U(x, f, s) \subset B(x, r)\}$$

をもちいて $\tilde{H}(x, f, r) = L(x, f, r)/\tilde{l}(x, f, r)$ を考える。ここで $U(x, f, s)$ は $f^{-1}B(f(x), s)$ の x-成分である。$l(x, f, r)$ と $\tilde{l}(x, f, r)$ との違いをが下図のような写像として感じとってもらいたい。

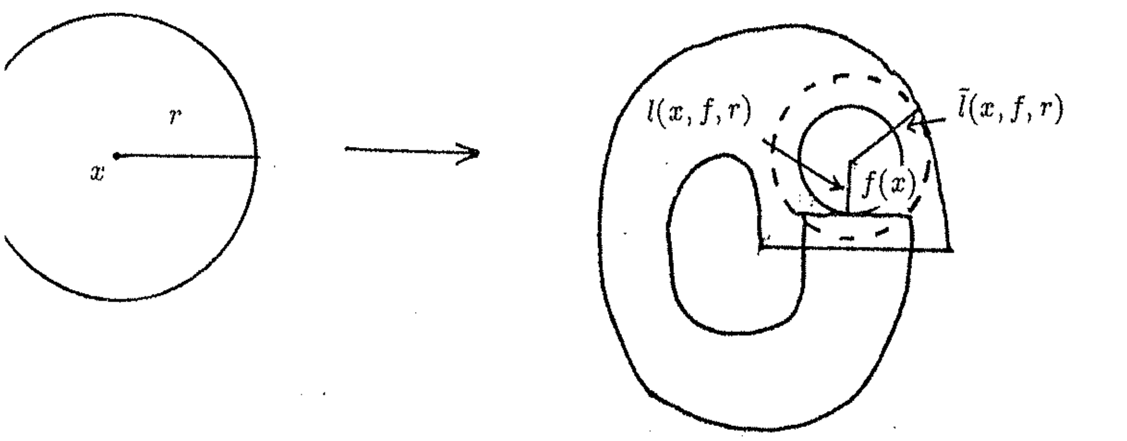

Figure 10.1

$U(x, f, s) \subset B(x, r)$ とすると

$$\partial U(x, f, r) \subset \partial f B(x, r) \subset f \partial B(x, r),$$

$$s = \operatorname{dist}(f(x), \partial U(x, f, r)) \geq \operatorname{dist}(f(x), f\partial B(x, r)) = l(x, f, r)$$

だから一般には

$$\tilde{l}(x, f, r) \geq l(x, f, r)$$

である。Lemma 2.12 より $\sigma_x > 0$ が存在して $0 < s \le \sigma_x$ に対して $U(x,f,s)$ は x のノーマル近傍で $f\partial U(x,f,s) = f\partial B(x,r)$ となる。今 r を $L(x,f,r) < \sigma_x$ をみたすように十分小さくとると $U(x,f,l(x,f,r)) \subset B(x,r)$ で、しかも $\partial U(x,f,l(x,f,r))$ の点で球面 $S(x,r)$ に含まれるものが存在する。f は開写像ゆえ $\tilde{l}(x,f,r) = l(x,f,r)$. このことから

$$H(x,f) = \limsup_{r\to 0} H(x,f,r) = \limsup_{r\to 0} \tilde{H}(x,f,r).$$

10.24. Lemma. $0 < r < r_0$ に対して $U(x,f,r)$ はノーマル領域とする。このとき $0 < r < r_0$ において $r \mapsto L^*(x,f,r)$,

$$L^*(x,f,r) = \sup\{|y-x| : y \in \partial U(x,f,r)\}$$

は狭義の単調増加で左側連続である。

Proof. $U(x,f,r)$ $(0 < r < r_0)$ の定義より $0 < s < r < r_0$ に対して $U(x,f,s) \subset U(x,f,r)$ であり $s < r' < r$ となる r' をとると $U(x,f,\rho) \in J(G)$ $(\rho = s, r)$ だから Lemma 2.5 より ($\overline{U}(x,f,s)$ のコンパクト性をもちいて)

$$f\overline{U}(x,f,s) \subset \overline{fU(x,f,s)} = B(f(x),s)$$

$$f\partial U(x,f,r') \subset \partial fU(x,f,r') = S(f(x),r')$$

したがって $\overline{U}(x,f,s) \subset U(x,f,r') \subset U(x,f,r)$. これより $L^*(x,f,s) < L^*(x,f,r)$. $L^*(x,f,r)$ の左側連続性を示すために $\epsilon > 0$ を十分小さくとり $z \in \partial U(x,f,r)$ を $|z-x| > L^*(x,f,r) - \epsilon/2$ となるようにとる。次に $u \in U(x,f,r) \cap B(z,\epsilon/2)$ とする。A を $U(x,f,r)$ に含まれる 0 と u とを結ぶ閉弧とすると fA はコンパクトでかつ $fA \subset B(f(x),r)$ ゆえに $\mathrm{dist}(fA, S(f(x),r)) = 2\tau > 0$ である。$s = r - \tau$ とおくと $fA \subset B(f(x),s)$ であり、A の連結性より $A \subset U(x,f,s)$. したがって

$$L^*(x,f,s) > |x-u| \ge |x-z| - |z-u| \ge L^*(x,f,r) - \epsilon.$$

一方 $L^*(x,f,s) < L^*(x,f,r)$ であった。よって $L^*(x,f,r)$ は左側連続である。

10.25. Lemma. $\overline{B}(x,r) \subset G$ ならば $U(x,f,\tilde{l}(x,f,r)) \subset B(x,r)$.

Proof. $\tilde{l} = \tilde{l}(x,f,r)$ とする。$\tilde{l} > \epsilon > 0$ のとき $U(x,f,\tilde{l}-\epsilon) \subset B(x,r)$ である。すると Lemma 2.5 より $U(x,f,\tilde{l}-\epsilon)$ はノーマル領域である。Lemma 10.24 より

$$L^*(x,f,\tilde{l}) = \lim_{\epsilon\to 0} L^*(x,f,\tilde{l}-\epsilon) \le r.$$

10.26. $x_0 \in G$ を固定する。$r_0 > 0$ を $r_0 \in (0, 4r_0]$ のとき
(a) $U(x_0,f,r)$ は x_0 のノーマル近傍、
(b) $CU(x_0,f,r)$ は連結
となるようにとる。$U_0 = U(x,f,r), d_0 = \mathrm{dist}(\partial U(x_0,f,2r_0), U_0) > 0$ とおく。

10.27. Lemma. $x \in U_0, r \in (0, d_0]$ に対して $K(f), n, i(x_0, f)$ のみに依存する定数 C が存在して $\tilde{H}(x, f, r) \leq C$.

Proof. $x \in U_0, r \in (0, d_0]$ を固定する。$r \leq d_0$ と d_0 の定義より $B(x, r) \subset U(x_0, f, 2r_0)$. すると $fB(x, r) \subset B(f(x_0), 2r_0)$ と $|f(x) - f(x_0)| < r_0$ より $\operatorname{dist}(f(x), \partial fB(x, r)) < 3r_0$. したがって

$$\operatorname{dist}(f(x_0), \partial fB(x, r)) \leq \operatorname{dist}(f(x), f(x_0)) + \operatorname{dist}(f(x), \partial fB(x, r)) < 4r_0.$$

すなわち $U = U(x, f, L), L = L(x, f, r)$ とおくと $U \subset U(x_0, f, 4r_0)$ で U はノーマル領域。$\tilde{l} = \tilde{l}(x, f, r)$ とおく。$\tilde{l} < L$ としてよい (そうでなければ評価 $\tilde{H}(x, f, r) = 1$ を得る。) $0 < \epsilon < L - \tilde{l}$ とする。$U(x, f, \tilde{l} + \epsilon)$ は $S(x, r)$ と交わる。$E = (U, C)$ (C は $U(x, f, \tilde{l} + \epsilon)$ の閉包) はノーマル・コンデンサーである。$\complement U$ が連結であることをしめそう。もしそうでなければ $\complement U$ の有界成分 F が存在する。$U \subset U(x_0, f, 4r_0)$ だから (b) より $F \subset U(x_0, f, 4r_0)$. $f\partial F \subset f\partial U = \partial fU = S(f(x), L)$. したがって $z \in \partial F \subset F$ を一つ選んでおくと $f(z) \in S(f(x), L)$. $f(x_0)$ と $f(z)$ を通る直線を T とし T' を $T \cap (\overline{B}(f(x_0), 4r_0) \setminus B(f(x), L))$ の $f(z)$-成分とする。$f^{-1}T' \subset \complement U$ だから、その z-成分 T_1 は F に含まれる。T' は $S(f(x_0), 4r_0)$ に一つの端点をもち $U(x_0, f, 4r_0)$ はノーマル領域ゆえ T_1 は $\partial U(x_0, f, 4r_0)$ と交わるが、このことは $F \subset U(x_0, f, 4r_0)$ に矛盾する。よって $\complement U$ は連結である。

以上のことから $U \setminus C$ は ring で、$S(x, r)$ の点 ξ_1, ξ_2 が存在して $x, \xi_1 \in C$, $\infty, \xi_2 \in \complement U$ だから $\operatorname{cap} E \geq \tau_n(1)$ (4.20 参照)。Theorem 6.14 から

$$0 < \tau_n(1) \leq \operatorname{cap} E \leq K_O(f) N(f, U) \operatorname{cap} fE \leq K(f) i(x_0, f) \omega_{n-1} \left(\log \frac{L}{\tilde{l} + \epsilon} \right)^{1-n}.$$

よって

$$\frac{L}{\tilde{l} + \epsilon} \leq C = \exp\left(\left(\frac{K(f) i(x_0, f) \omega_{n-1}}{\tau_n(1)} \right)^{1/(n-1)} \right).$$

$\epsilon \to 0$ として補題の主張を得る。

10.28. Theorem. $f : G \to \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ を qr 写像とする。このとき G のコンパクト部分集合 C に対して $p = p(K(f), n, \tilde{N}(f, C)) > n$ が存在して f の偏導関数は C 上 L^p 可積分である。ここで $\tilde{N}(f, C) = \sup_{x \in C} i(x, f)$.

10.29. この章の残りの部分は上の定理を証明に充てられる。f は非定数と仮定してよい。Lemma 10.9 から上の定理の証明には次の補題をしめせばよい。

10.30. Lemma. 各 $x_0 \in G$ に対して x_0 の近傍 U が存在して $Q \subset U$ を座標軸に平行な辺をもつ n 次元 cube とするとき

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'|^n dm \leq b \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'| dm \right)^n. \tag{10.31}$$

ここで $b = b(n, K(f), i(x_0, f))$ は $K(f) i(x_0, f)$ については線型。

10.32. $x_0 \in G$ を固定し $r_0 > 0, U_0, d_0$ を 10.26 のようにとる。$U = U_0 \cap B(x_0, d_0)$ とおく。$Q \subset U$ とする。平行移動の合成によって

$$Q = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < s, i = 1, ..., n\},$$

$f(0) = 0$ を仮定してよい。$0 \in U_0, s\sqrt{n} \leq d_0$ である。第1段階として

$$\tilde{l}(0, f, s\sqrt{n}) \leq C'\tilde{l}(0, f, s) \quad C' = C'(n, K(f), i(x_0, f)) \tag{10.33}$$

をしめす。

$L = L(0, f, s\sqrt{n}), U' = U(0, f, L)$ とおく。$E = (U', \overline{B}(s))$ は $U(x_0, f, 4r_0)$ に含まれるノーマル・コンデンサーで CU' は $S(s\sqrt{n})$ と交わる。Lemma 10.27 の証明と同様にして CU' が連結であることがしめせる。

$$\begin{aligned}\tau_n(\sqrt{n}) = \tau(s\sqrt{n}/s) \leq \mathrm{cap}E &\leq K_O(f)N(f, U')\mathrm{cap}fE \\ &\leq K(f)i(x_0, f)\omega_{n-1}\left(\log\frac{L(0, f, s\sqrt{n})}{L(0, f, s)}\right)^{1-n}\end{aligned}$$

このことより $L(0, f, s\sqrt{n}) \leq C''L(0, f, s)$, C'' は $K(f)i(x_0, f)$ と n のみに依存する定数。Lemma 10.27 から $L(0, f, s\sqrt{n}) \leq C''C\tilde{l}(0, f, s)$, $\tilde{l}(0, f, s\sqrt{n}) < L(0, f, s\sqrt{n})$ だから (10.33) を得る。

$r \in (0, s/\sqrt{n})$ とし

$$Q' = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < r, i = 1, ..., n\}$$

とおく。$E = (Q, Q')$ は G に含まれるコンデンサーで

$$\mathrm{cap}E \leq \omega_{n-1}\left(\log\frac{s}{r\sqrt{n}}\right). \tag{10.34}$$

$r' = \sup_{x \in \partial Q'}|f(x)|, L = L(0, f, s\sqrt{n}), \tilde{l} = \tilde{l}(0, f, s)$ とおく。このとき

$$\mathrm{cap}fE = \mathrm{cap}(fQ, fQ') \geq \mathrm{cap}(fB(s\sqrt{n}), fQ') \geq \mathrm{cap}(B(L), fQ') \geq \tau_n(L/r'). \tag{10.35}$$

(10.34), (10.35) と Capacity Inequality 7.38. より

$$\tau_n(L/r') \leq \mathrm{cap}fE \leq K_I(f)\mathrm{cap}E \leq K(f)\omega_{n-1}\left(\log\frac{s}{r\sqrt{n}}\right)^{1-n} \tag{10.36}$$

$\alpha = \alpha(n, K(f), i(x_0, f)) = \max(C, C')$ とおく。ここで C は Lemma 10.27 で C' は (10.33) で与えられた定数である。r が 0 から $s\sqrt{n}$ まで動くとき (10.36) の左辺は 0 から ∞ まで動くから r を (10.36) の右辺が $\tau_n(2\alpha^2)$ となるように選ぶことができる。このとき

$$\frac{s}{r\sqrt{n}} = \left(\frac{\tau_n(2\alpha^2)}{K(f)\omega_{n-1}}\right)^{1/(1-n)},$$

ここで

$$s = \gamma r = r\sqrt{n}\exp\left(\left(\frac{\tau_n(2\alpha^2)}{K(f)\omega_{n-1}}\right)^{1/(1-n)}\right)$$

γ は $n, K(f), i(x_0, f)$ のみに依存する定数である。τ_n は単調減少ゆえ $L/r' \geq 2\alpha^2$ よって $L/\alpha \geq 2\alpha r'$. Lemma 10.27 より

$$\tilde{l}(0, f, s\sqrt{n}) \geq \frac{1}{C} L(0, f, s\sqrt{n}) \geq \frac{1}{\alpha} L(0, f, s\sqrt{n}) \geq 2\alpha r' \geq 2C'r'.$$

(10.33) より

$$\tilde{l}(0, f, s) \geq \frac{1}{C'} \tilde{l}(0, f, s\sqrt{n}) \geq 2r' \tag{10.37}$$

$p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ を直交射影 $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ とする。$y \in pQ'$ に対して J_y を $(Q \setminus Q') \cap p^{-1}(y)$ の closed upper segment (下図参照) とする。

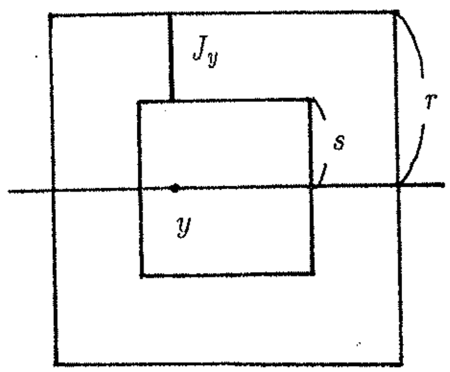

Figure 10.2

Fubini の定理より

$$\int_Q |f'| dm \geq \int_{pQ'} \left[\int_{J_y} |f'| dm_1 \right] dm_{n-1}(y).$$

このことと f が ACL であることからある $y \in pQ'$ が存在して J_y 上 f は絶対連続かつ

$$\int_{J_y} |f'| dm_1 \leq m_{n-1}(pQ') \int_Q |f'| dm = (2r)^{1-n} \int_Q |f'| dm \tag{10.38}$$

$l(fJ_y)$ を弧 $f|_{J_y}$の長さとする。($f|_{J_y}$ は単射であるとは限らない。) このとき

$$\tilde{l} - r' \leq l(fJ_y) \tag{10.39}$$

をしめす。もし $l(fJ_y) < \tilde{l} - r'$ならば $fJ_y \subset B(\tilde{l})$. Lemma 2.6 より $f^{-1}fJ_y \cap \overline{U}(0, f, \tilde{l})$ の各成分は $U(0, f, \tilde{l})$ に含まれ、かつそれらは f によって fJ_y 全体に写される。J_y は $U(0, f, \tilde{l}) \supset Q'$ よりそのような成分の一部分であるから $J_y \subset U(0, f, \tilde{l})$. 一方 Lemma 10.25 より $U(0, f, \tilde{l}) \subset B(s)$ である。ところが J_y の任意の近傍 V に対して $V \not\subset B(s)$ であるから矛盾である。

(10.37), (10.28) (10.39) より

$$\tilde{l} \leq 2(\tilde{l} - r') \leq 2l(fJ_y) \leq 2 \int_{J_y} |f'| dm_1 \leq 2(2r)^{1-n} \int_Q |f'| dm$$

Lemma 10.27 , (10.36) および $s=\gamma r$ より

$$\begin{aligned} m(fQ) &\le \Omega_n L^n \le \Omega_n C^n \tilde{l}(0,f,s\sqrt{n})^n \le \Omega_n (CC')^n \tilde{l}(0,f,s)^n \\ &\le \Omega_n \alpha^{2n} \tilde{l}^n \le \Omega_n \alpha^{2n} \left(2(2r)^{1-n} \int_Q |f'|dm \right)^n \\ &= \frac{b}{K(f)i(x_0,f)} \left(\frac{2r}{(2r)^n} \int_Q |f'|dm \right)^n \\ &= \frac{bm(Q)}{K(f)i(x_0,f)} \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'|dm \right)^n \end{aligned}$$

b は $n, K(f), i(x_0,f)$ のみに依存する定数である。積分公式 1.4 と $y \in fQ$ に対して $N(y,f,Q) \le i(x_0,f)$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'|dm &\le \frac{K(f)}{m(Q)} \int_Q J(x,f)dm(x) \le \frac{K(f)}{m(Q)} \int_{fQ} N(y,f,Q)dm(y) \\ &\le \frac{K(f)i(x_0,f)m(fQ)}{m(Q)} \le b \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f'|dm \right)^n \end{aligned}$$

よって (10.31) がしめせた。

10.40. Lemma. Calderón-Zygmund の基本補題 g を座標軸に平行な辺 n 次元 cube Q 上の非負可積分関数とし s は正定数で $m(Q)^{-1}\int_Q g dm \le s$ とする。このとき座標軸に平行な辺をもつ n 次元 cube の disjoint 列 $Q_j \subset Q$ が存在して $G = \cup_j Q_j$ とおくと

(1) $Q \setminus G$ 上 a.e. に $g(x) \le s$ かつ

(2)

$$s < \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} g(x)dm \le 2^n s.$$

Proof. Q の各辺を 2 等分して 2^n 個の合同な cube をつくる。Q' をその中の一つとする。次の 2 つのケースが考えらる。

$$\text{(A)}\ \frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} g(x)dm \le s, \quad \text{(B)}\ \frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} g(x)dm > s$$

(B) の場合は Q' を求めるべき cube の列 Q_j のメンバーに加える。このとき

$$s < \frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} g(x)dm \le \frac{1}{2^{-n}m(Q)} \int_Q g(x)dm \le 2^n s$$

である。(A) の場合は Q' をさらに細分する。これを繰り返して (2) をみたすような cube の列 Q_j をすべての Q' から出発してつくっていく。$G = \cup_j Q_j$ とおく。$F = Q \setminus G$ の a.e. の点 x に対して Lebesgue の定理より

$$g(x) = \lim \frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} g(x)dm$$

が成立する。ここで Q'' は x を含むすべての cube を動く。diam$Q''\to 0$ のときの極限を考える。すると F の a.e. の点 x に対して x はを含む cube の列 $\{Q''_k\}$ で diam$Q''_k\to 0, m(Q''_k)^{-1}\int_{Q''_k} gdm\le s$ となるものがとれる。よって (1) が成り立つ。

10.41. Lemma. E を $\mathbf{R}^n$ の可測部分集合で有界な半径をもつ可算個の球の族 $\mathcal{B}$ によって覆われているとする。このとき、$\mathcal{B}$ から disjoint な球からなる部分列 $B_1,B_2,...$ を選べて (番号を付け直す)

$$\sum_k^\infty m(B_k)\ge 5^{-n}m(E)$$

とできる。

Proof. $B_1,B_2,...$ を次のように選んでいく。まず B_1 を $\mathrm{diam}(B_1)\ge 2^{-1}\sup\{\mathrm{diam}(B):B\in\mathcal{B}\}$ となるように選ぶ。今 $B_1,...,B_k$ まで選んだとして B_{k+1} を $B_1,...,B_k$ のどれとも交わらず、かつ

$$\mathrm{diam}(B_{k+1})\ge\frac{1}{2}\sup\{\mathrm{dism}(B):B\in\mathcal{B}, B \text{ は } B_1,...,B_k \text{ のどれとも交わらない }\}$$

となるように選ぶ。

もし $\sum_k^\infty m(B_k)=\infty$ ならば補題の不等式は成り立っているので $\sum_k^\infty m(B_k)<\infty$ と仮定してよい。このとき $\mathrm{diam}(B_k)\to 0, k\to\infty$ である。B_k^* を B_k と同じ中心をもち B_k の半径の 5 倍の半径をもつ球とする。所望の不等式は

$$E\subset\cup_k B_k^* \tag{10.42}$$

をしめせばしたがう。(10.42) をしめすには最初に与えられた E を覆う球の列の各メンバー B がある B_k^* に含まれることをいえばよい。まず B と交わるような B_k が存在することをしめす。k を $\mathrm{diam}(B_{k+1})\le 2^{-1}\mathrm{diam}(B)$ をみたす最初の番号とする。もし B が $B_1,...,B_k$ のどれとも交わらなければ選び方より

$$\mathrm{diam}(B_{k+1})\ge\frac{1}{2}\mathrm{diam}(B)$$

であるはずだから矛盾。よって B はある $B_l,\ l\in\{1,...,k\}$ と交わる。$\mathrm{diam}(B_l)\ge\frac{1}{2}\mathrm{diam}(B)$ が k の選び方よりいえる。したがって $B\subset B_l^*$ である。

11 Quasiregular 写像に対する Picard の定理

11.1. 古典的な Schottky の定理によれば f が複素平面内の単位円板 $\mathbf{B}^2$ 上の正則写像で値 $0,1$ を取らないとすると、$\theta<1$ に対して θ と $f(0)$ のみに依存する定数 $M(\theta,f(0))$ が存在して $|z|\le\theta$ のとき $|f(z)|\le M(\theta,f(0))$ が成立する。この定理から Picard の定理「整関数が 2 点を除外値にもてばそれは定数関数である」を導くことができる。この章の目的は S. Rickman によって得られた Schottky 定理の拡張の高次元 qr 写像への拡張をしめすことである。すなわち

11.2. Theorem. $f:\mathbf{B}^n\to\mathbf{R}^n\setminus\{a_1,\dots,a_{q-1}\}$, $n\ge 3$, を K-quasiregular とする。n と K のみに依存する定数 q_0 が存在して $q\ge q_0$ ならば

$$\log|f(x)|\le C_0(-\log s_0+\log^+|f(0)|)(1-|x|)^{-C}. \tag{11.3}$$

ここで $s_0=\dfrac{1}{4}\min\{\sigma(a_i,a_j):i,j=1,\dots,q$ (ただし $a_q=\infty$)$\}$, C_0, C は n,K,s_0 のみに依存する定数である。

上の定理において $\sigma(a,b)$ は $\overline{\mathbf{R}^n}$ 上の球面距離 (計量 $|dx|/(1+|x|^2)$ によって定義される距離), $\log^+x=\max\{0,\log x\}$ である。この定理より直ちに Picard の定理のアナロジーが成立することがわかる。

11.4. Theorem. q_0 を上述のように取る。$f:\mathbf{B}^n\to\overline{\mathbf{R}^n}\setminus\{a_1,\dots,a_q\}, q\ge q_0$, が K-quasimeromorphic ならば定数関数である。

Proof. 除外値を無限遠点に写す Möbius 変換を合成することにより f は quasiregular であると仮定してよい。$u\in\mathbf{R}^n$ とし $h(x)=2|u|x$, $(x\in\mathbf{B}^n)$ とおく。$f\circ h$ は K-qr 写像で、これに定理 11.2 を適応すると $x=2^{-1}|u|^{-1}u$ に対して

$$|f(u)|\le\exp\{C_0(-\log s_0+\log^+|f(0)|)2^C\}.$$

よって f は有界関数であり qr 写像に対する Liouville の定理 8.6 より f は定数である。

11.5. Notation. $\overline{\mathbf{R}^n}$ における球面距離 $\sigma(\cdot,\cdot)$ での中心 x 半径 r の n 次元 ball を $D(x,r)$, その境界を $C(x,r)$ で表わす。また $\mathbf{B}^n$ 上の定曲率 -1 の双曲計量に関する距離を $\rho(\cdot,\cdot)$ で表わす。

11.6. 個数関数の球面上での平均. V を ball $B^n(x_0,r_0)$ とし $g:V\to\overline{\mathbf{R}^n}$ を非定数 K-qm 写像とする。$y\in\overline{\mathbf{R}^n}$ と集合 $E,\overline{E}\subset V$, に対して

$$n(E,y)=\sum_{x\in g^{-1}(y)\cap E} i(x,g)$$

とおく。$i(x,g)$ は x における g の局所位相指数である。X を $\overline{\mathbf{R}^n}$ における $n-1$ 次元球面とするとき $\sigma(X)=\int_X d\mathcal{H}(y)$ とおく。$\mathcal{H}$ は $n-1$ 次元 Hausdorff 測度で、単位球面 S の測度 $\mathcal{H}(S)$ が通常の S の面積 $\omega_{n-1}=n\pi^{n/2}\Gamma(1+n/2)^{-1}$ となるように定数倍したものである。$\nu(E,X)$ を $n(E,y)$

の $n-1$ 次元球面距離から定まる測度での平均とする:

$$\nu(E,X)=\frac{1}{\sigma(X)}\int_X n(E,y)d\mathcal{H}(y).$$

特に $E=\overline{B^n}(r), X=S^{n-1}(t)$ のとき $n(r,y)=n(\overline{B^n}(r),y), \nu(r,t)=\nu(\overline{B^n}(r),S^{n-1}(t))$ と書く。このとき

$$\nu(r,t)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_S n(r,ty)d\mathcal{H}(y).$$

以下、個数関数の「比較定理」について述べる。

11.7. Lemma. $r,s,t>0, \theta>1$ で $\overline{B^n}(\theta r)\subset V$ とする。このとき

$$\nu(\theta r,t)\geq\nu(r,s)-\frac{K|\log t/s|^{n-1}}{(\log\theta)^{n-1}}.$$

Proof. 必要ならば写像 $x\mapsto x'=(-x_1/|x|^2, x_2/|x|^2,...,x_n/|x|^2)$ を g の後に合成することによって $s\leq t$ としてよい。$s=t$ のときは Lemma の不等式は自明なので $s<t$ と仮定する。$m=1,2,...$ に対して

$$E_m=\{y\in S: n(\theta r,ty)=n(r,sy)-m\},\quad E=\cup_m E_m \text{ (disjoint 和)}$$

とおく。これらは Borel 集合である。すると

$$\int_S n(\theta r,ty)d\mathcal{H}(y)=\int_{S\setminus E} n(\theta r,ty)d\mathcal{H}(y)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{E_m} n(\theta r,ty)d\mathcal{H}(y).$$

$y\in S\setminus E$ のとき $n(\theta r,ty)\geq n(r,sy)$ だから上の積分は

$$\begin{aligned}\int_S n(\theta r,ty)d\mathcal{H}(y) &\geq \int_{S\setminus E} n(r,sy)d\mathcal{H}(y)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{E_m}(n(r,sy)-m)d\mathcal{H}(y)\\ &= \int_S n(r,sy)d\mathcal{H}(y)+\sum_{m=1}^{\infty} m\mathcal{H}^{n-1}(E_m).\end{aligned}$$

$y\in S$ に対して弧 $\beta_y:[s,t]\to\mathbf{R}^n$ を $\beta_y(u)=uy$ で定義する。そして $\Gamma_m=\{\beta_y: y\in E_m\}$ とおく。

$y\in E_m$ に対して Theorem 5.4 より $f^{-1}(y)\cap\overline{B(r)}$ 内に始点をもつ β_y の maxinal $g|_{B(\theta r)}$-lifts $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ $(k=n(r,sy))$ ですべて x,t のに対して

$$\operatorname{card}\{j:\alpha_j(t)=x\}\leq i(x,f)$$

をみたすものが存在する。$y\in E_m$ なので少なくとも $\alpha_1,...,\alpha_k$ の中の m 個は $\partial B(\theta r)$ まで延びている。そうした lifts を E_m 上の y 全体について集めて得られる弧の族を Γ_m^* とおく。すると Poleckii-Väisälä の不等式 7.30 より

$$M(\Gamma_m)\leq\frac{K_I}{m}M(\Gamma_m^*). \tag{11.8}$$

$B_m = \{uy : y \in E_m, s \leq u \leq t\}$ とおくと、B_m $(m = 1, 2, \ldots)$ は互いに disjoint な Borel 集合で $\Gamma_m \subset B_m$, すなわち $\{\Gamma_m\}$ は separate [V1971, 6.6], したがって Γ_m^* も separate である ($g^{-1}B_m$ を考えればよい。) さらに Γ_m の弧は $S(\theta r)$ と $S(r)$ とを結ぶ部分弧をもつから

$$\sum_m M(\Gamma_m^*) = M(\cup \Gamma_m^*) \leq \frac{\omega_{n-1}}{(\log \theta)^{n-1}}. \tag{11.9}$$

一方

$$M(\Gamma_m) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(E_m)}{(\log t/s)^{n-1}}. \tag{11.10}$$

11.8, 11.9, 11.10 から

$$\sum_m m\mathcal{H}^{n-1}(E_m) \leq \frac{K_I(\log t/s)^{n-1}}{(\log \theta)^{n-1}}.$$

これから Lemma が従う。

11.11. Lemma. $A(r)$ を $n(r, y)$ の $\mathbf{R}^n$ 上の n 次元球面測度に関する平均とするとき n のみに依存する定数 a, a' が存在して

$$\nu(r/\theta, t) - \frac{K(a + a'|\log t|^{n-1})}{(\log \theta)^{n-1}} \leq A(r) \leq \nu(\theta r, t) + \frac{K(a + a'|\log t|^{n-1})}{(\log \theta)^{n-1}}. \tag{11.12}$$

ここで $r > 0, \theta > 1$ は $B(\theta r) \subset V$ となるような実数である。

Lemma 11.7 より $0 < s < \infty$ に対して

$$\nu(\theta r, t) \geq \nu(r, s) - d|\log t/s|^{n-1}, \quad d = \frac{K}{(\log \theta)^{n-1}}.$$

この両辺に $s^{n-1}/(1+s^2)^n$ をかけて s について積分する。

$$\nu(\theta r, t)\int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^n}ds \geq \int_0^\infty \frac{\nu(r, s)s^{n-1}}{(1+s^2)^n}ds - d\int_0^\infty \frac{s^{n-1}|\log t/s|}{(1+s^2)^n}ds.$$

これから

$$\nu(\theta r, t) \geq A(r) - dh(t)$$

ここで

$$h(t) = \int_0^\infty \frac{s^{n-1}|\log t/s|}{(1+s^2)^n}ds \bigg/ \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^n}ds.$$

$|\log(t/s)|^{n-1} \leq (|\log t| + |\log s|)^{n-1} \leq 2^{n-2}(|\log t|^{n-1} + |\log s|^{n-1})$ をもちいて $h(t) \leq a'|\log t|^{n-1} + a$ の形の評価を得て (2.12) の右の不等式が成立する。左の不等式も $\nu(r, t) \geq \nu(r/\theta, s) - d|\log t/s|$ から同様にして得られる。

11.13. Lemma. $y, z \in \overline{\mathbf{R}^n}, 0 < s < t < \pi/2$ とし $\overline{B}(\theta r) \subset V$ となるように $r > 0, \theta > 1$ をとると

$$\nu(\theta r, C(y, s)) \geq \nu(r, C(z, t)) - \frac{K(b + b'(|\log s|^{n-1} + |\log t|^{n-1}))}{(\log \theta)^{n-1}}.$$

ここで b, b' は n のみに依存する正定数である。

Proof. R_y を S^n の回転から導かれる $\overline{\mathbf{R}^n}$ の Möbius 変換で y を 0 に写すものとする。このとき g に対する $\nu(r, C(y,s))$ と $R_y \circ g$ に対する $\nu(r, C(0,s))$ は等しい。さらに g と $R_y \circ g$ との maximal dilatation は等しい。$0 < s \leq \pi/2$ のとき $C(0,s)$ の Euclid 半径 $\tan s/2$ に対して $s/\pi \leq \tan\frac{s}{2} \leq \sqrt{2}s$ だから Lemma 11.11 を (a, a' を変更して)

$$\nu(r/\theta, C(0,s)) - \frac{K(a+a'|\log s|^{n-1})}{(\log\theta)^{n-1}} \leq A(r) \leq \nu(\theta r, C(0,s)) + \frac{K(a+a'|\log s|^{n-1})}{(\log\theta)^{n-1}}.$$

と書き改めることができる。この不等式より

$$\begin{aligned}
\nu(r/\theta, C(0,s)) &\geq A(\sqrt{\theta}r) - \frac{K(a+a'|\log s|^{n-1})}{(\frac{1}{2}\log\theta)^{n-1}} \\
&\geq \nu(r, C(z,t)) - \left(\frac{K(a+a'|\log t|^{n-1})}{(\frac{1}{2}\log\theta)^{n-1}} + \frac{K(a+a'|\log s|^{n-1})}{(\frac{1}{2}\log\theta)^{n-1}}\right) \\
&= \nu(r, C(z,t)) - \frac{K(2^n a + 2^{n-1}a'(|\log t|^{n-1} + |\log s|^{n-1}))}{(\log\theta)^{n-1}}
\end{aligned}$$

11.14. Lemma. 次の性質をもつ $\theta_0 = \theta_0(n, K) > 1$ が存在する。$r > 0, \theta > \theta_0$ を $\overline{B}(\theta^2 r) \subset V$ となるように選ぶ。$u, v \in \overline{B}(r), y \in \overline{\mathbf{R}^n}$ が $s = \sigma(g(u), y) < t = \sigma(g(v), y) < \pi$ をみたすとき、もし y とある $\overline{\mathbf{R}^n} \setminus D(y,t)$ の点 z が gV に含まれなければ

$$\nu(\theta^2 r, C(y,t)) \geq \frac{d_n \log\theta}{K} (\log t/s)^{n-1}.$$

ここで d_n は n のみに依存する定数である。

Proof. Lemma 11.13 の証明で述べたのと同じ理由から $y = 0$ と仮定してよい。$\alpha_1 : [0,1] \to \overline{D(0,s)}$ を $\alpha_1(0) = g(u), \alpha_1(1) = y$ をみたす弧とし $\alpha_2 : [0,1] \to \overline{\mathbf{R}^n} \setminus D(y,t)$ を $\alpha_2(0) = g(v), \alpha_2(1) = z$ をみたす弧とする。仮定より y と z は gV に含まれない。したがって α_i $(i = 1,2)$ の $g|_{B(\theta r)}$-lift α_i^* で $g^{-1}(\alpha_i(0)) \cap \overline{B}(r)$ に始点にもち $S(\theta r)$ に終点をもつものが存在する。Γ を $|\alpha_1^*| = \alpha_1^*([0,1])$ と $|\alpha_2^*| = \alpha_2^*([0,1])$ を $B(\theta r) \setminus \overline{B}(r)$ で結ぶ弧の族とする。$D(0,t), D(0,s)$ はそれぞれ中心が 0 で半径が $\tan t/2, \tan s/2$ の Euclid 球だから

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log\tan(t/2) - \log\tan(s/2)} \frac{1}{|x|} & (x \in D(0,t) \setminus D(0,s) \text{ のとき}) \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

とおくと ρ は $g\Gamma$ に対して admissible である。[MRV1969, Theorem 3.2] の証明にある計算を用いれば

$$\begin{aligned}
M(\Gamma) &\leq K_O(g) \int_{\mathbf{R}^n} n(\theta r, y) \rho(y)^n dm(y) \\
&= K_O(g) \int_{\tan(s/2)}^{\tan(t/2)} \left(\int_{S^{n-1}} \frac{n(\theta r, \tau z)}{(\log\frac{\tan(t/2)}{\tan(s/2)})^n} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \right) \frac{d\tau}{\tau}
\end{aligned}$$

$$= \frac{K_O(g)\omega_{n-1}}{\log(\frac{\tan(t/2)}{\tan(s/2)})^n}\int_{\tan(s/2)}^{\tan(t/2)}\frac{\nu(\theta r,\tau)}{\tau}\tau$$

一方 Theorem 4.29 より $c_n\log\theta \le M(\Gamma)$. よって

$$\frac{c_n\log\theta}{K\omega_{n-1}}(\log T/S)^n \le \int_S^T\frac{\nu(\theta r,\tau)}{\tau} = \int_1^{T/S}\frac{\nu(\theta r,s\tau)}{\tau},\ T=\tan t/2, S=\tan s/2. \tag{11.15}$$

$\alpha>0$ とし $\tau\in[1,T/S]$ に対して

$$\varphi(\tau)=\alpha(\log T/S)^{n-1}+C'(\log\tau)^{n-1},\ C'=2K(\log\theta)^{1-n} \tag{11.16}$$

とおく。もしすべての $\tau\in[1,T/S]$ に対して $\nu(\theta r,s\tau)\le\varphi(\tau)$ であると仮定すれば

$$\begin{aligned}\int_S^T\nu(\theta r,\tau)d\tau \le \int_1^{T/S}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau &\le \alpha(\log T/S)^n + C'\int_1^{T/S}\frac{(\log\tau)^{n-1}}{\tau}d\tau \\ &= (\alpha+C'/n)(\log T/S)^n\end{aligned}$$

したがって (11.15) より

$$\frac{c_n\log\theta}{K\omega_{n-1}}\le\alpha+C'/n. \tag{11.17}$$

θ_0 を $(\log\theta_0)^n=4K^2\omega_{n-1}/nc_n$ で定めると $\theta>\theta_0$ のとき (11.16) における C' の定義に戻って

$$\begin{aligned}\frac{c_n\log\theta}{K\omega_{n-1}}-\frac{C'}{n} &= \frac{c_n\log\theta}{K\omega_{n-1}}-\frac{2K}{n(\log\theta)^{n-1}} \\ &\ge (\log\theta)\left(\frac{c_n}{K\omega_{n-1}}-\frac{2K}{n(\log\theta_0)^n}\right)\ge\frac{c_n\log\theta}{2K\omega_{n-1}}\end{aligned}$$

もし $\alpha<c_n\log\theta/(2K\omega_{n-1})$ ならば、これは (11.17) に矛盾する。よって $\alpha<c_n\log\theta/(2K\omega_{n-1})$ としておけばある $\tau_\alpha\in[1,T/S]$ があって $\nu(\theta r,s\tau_\alpha)>\varphi(\tau_\alpha)$. Lemma 11.7 より

$$\begin{aligned}\nu(\theta^2r,s) &\ge \nu(\theta r,s\tau_\alpha)-C'(\log\tau_\alpha)^{n-1} \\ &> \varphi(\tau_\alpha)-C'(\log\tau_\alpha)^{n-1} \\ &= \alpha(\log T/S)^{n-1}\end{aligned}$$

ここで $\alpha\to c_n\log\theta/(2K\omega_{n-1})$ として

$$\nu(\theta^2r,s)\ge\frac{c_n\log\theta}{2K\omega_{n-1}}\left(\frac{\tan t/2}{\tan s/2}\right)^{n-1}.$$

$t/\tan(t/2)$ は $0\le t<\pi$ のとき単調減少であることに注意すると $\theta>\theta_0$ のとき

$$\nu(\theta^2r,s)\ge\frac{d_n\log\theta}{K}(\log t/s)^{n-1},\ \ d_n=\frac{c_n}{2\omega_{n-1}}.$$

11.18. punctured sphere の計量について. $a_1, ..., a_q$ $(q \geq 3)$ を $\overline{\mathbf{R}^n}$ の相異なる点とし $\beta > 0$ を

$$\beta \leq \frac{1}{4} \min_{j \neq k} \sigma(a_j, a_k) \ < \frac{1}{3}$$

となるように選ぶ。$Y = \overline{\mathbf{R}^n} \setminus \{a_1, ..., a_q\}$ は punctured sphere とみなすことができる。$U_j = D(a_j, \beta) \setminus \{a_j\}$ とおき $U = \cup_{j=1}^{q} U_j$ とする。次の条件をみたす Y 上の計量を考える。

$$\left| \tau(y_1, y_2) - \left| \log \frac{\log 1/\sigma(a_j, y_1)}{\log 1/\sigma(a_j, y_2)} \right| \right| \leq P \quad (y_1, y_2 \in U_j \text{ のとき}), \tag{11.19}$$

$$\tau(y_1, y_2) \leq Q\sigma(y_1, y_2) \quad (y_1, y_2 \in Y \setminus U \text{ のとき}). \tag{11.20}$$

P, Q は正定数である。この計量の意味を理解するためにまず $\mathbb{C}$ 内の punctured disk $D^* = \{0 < |z| < 1\}$ 上の Poincaré 計量は $|dz|/(-|z|\log|z|)$ の形で書けることに注意する。D^* の 2 点間の Poincaré 距離 $d(z, w)$ は

$$\sinh \frac{1}{2} d(z, w) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\log z - \log w + 2ni\pi|}{2(\log|z| \log|w|)^{1/2}}.$$

したがって $|z|, |w| < \tan(\beta/2) < \tan(1/6)$ のとき $\sinh \frac{1}{2} d(z, w)$ は

$$\max(\frac{\log(1/|z|)}{\log(1/|w|)}, \frac{\log(1/|w|)}{\log(1/|z|)})$$

と comparable で、ある定数 P' が存在して

$$\left| d(z, w) - \left| \log \frac{\log(1/|z|)}{\log(1/|w|)} \right| \right| < P' \quad (|z|, |w| < \tan(\beta/2)).$$

このことから (11.19), (11.20) をみたす計量を

$$d\tau^2 = \gamma^2 d\sigma^2. \tag{11.21}$$

ここで γ は Y 上の連続関数で $Y \setminus U$ で定数かつ

$$\gamma(y) = \frac{1}{\sigma(a_j, y) \log(1/\sigma(a_j, y))} \quad (y \in U_j \text{ のとき})$$

によって実際に構成することができる。

11.22. 2 次元の場合単位円板から $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{3 \text{ 点}\}$ への正則写像は Poincaré 距離に関して distance decreasing であり、このことが Picard の定理の証明への一つの鍵になっていた。$n \geq 3$ の場合にこの事実に対応する結果を述べる。

11.23. Theorem. $n \geq 3$ とする。$K \geq 1$ に対して正定数 $\delta = \delta(n, K)$ と正整数 $q_0 = q_0(n, K)$ が存在して $q \geq q_0$ のとき (11.19), (11.20) をみたす任意の $Y = \overline{\mathbf{R}^n} \setminus \{a_1, ..., a_q\}$ 上の計量 τ に対して $f : \mathbf{B}^n \to Y$ が K-quasimeromorphic ならば

$$\tau(f(x_1), f(x_2)) \leq C \max(\rho(x_1, x_2), \delta), \quad (x_1, x_2 \in \mathbf{B}^n) \tag{11.24}$$

が成立する。C は n, K, β, P, Q のみに依存する定数である。

Proof. f は非定数であると仮定してよい。b, b', θ_0, d_n を Lemma 11.13 および 11.14 における定数とし

$$C_1 = \frac{(b+2b')K}{(\log 2)^{n-1}}, \quad \theta_1 = \max(\theta_0, \exp(3c_1 K d_n^{-1})) > 1$$

とおく。次に q_0 を

$$q_0 \geq \omega_{n-1}\Omega_{n-1}^{-1}2^{3n-3}\theta_1^{2n-2}(>3) \tag{11.25}$$

をみたす最小の整数とする。

$$\delta = 2^{-5}\theta_1^2 \tag{11.26}$$

とおく。$\beta < 1/3$ ゆえ

$$(\log p)^{n-1} = \frac{1}{2}(\log \frac{p}{\beta})^{n-1} \tag{11.27}$$

をみたす $p \geq 3$ を選ぶことができる。

$x_1, x_2 \in B = \mathbf{B}^n$ を $\rho(x_1, x_2) = \delta$ をみたす点とする。$y_i = f(x_i), i = 1, 2,$ とおく。このとき $\tau(y_1, y_2)$ が定数によって上から評価されることを見る。y_1, y_2 の位置によって場合分けして考える。

Case 1. ある k に対して $y_1, y_2 \in D(a_k, \beta/p)$ が成立する場合。$s_i = \sigma(a_k, y_i), i = 1, 2,$ とおく。$s_2 \leq s_1$ と仮定する。(11.19) より

$$\tau(y_1, y_2) \leq \log \frac{\log s_2^{-1}}{\log s_1^{-1}} + P. \tag{11.28}$$

$r_1 = |x_1 - x_2|\theta_1^2$ とおく。このとき $r_1 \leq 2^{-4}(1-|x_1|)$ が成立することをしめす。もしこれがいえれば $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B$ で Lemma 11.14 より次が成り立つ。

$$\nu(\overline{B}(x_1, r_1), C(a_k, s_1)) \geq \frac{d_n \log \theta_1}{K}(\log \frac{s_1}{s_2})^{n-1}. \tag{11.29}$$

(11.26) より $r_1 = |x_1 - x_2|\theta_1^2 = 2^{-5}\delta^{-1}|x_1 - x_2| = 2^{-5}\rho(x_1, x_2)^{-1}|x_1 - x_2|$. よって

$$\frac{|x_1 - x_2|}{2(1-|x_1|)} \leq \rho(x_1, x_2)$$

をしめせばよい。

$$\rho(x_1, x_2) \geq 2\tanh\frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) = \frac{2|x_1 - x_2|}{\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + (1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2)}}$$

[VU1988, 2.52] だから

$$|x_1 - x_2|^2 + (1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2) \leq 16(1-|x_1|)^2 \tag{11.30}$$

をしめせばよい。今 x_2 を $\rho(x_1,x_2)=\delta$ をみたしながら動く点であると考えると (11.30) の左辺が最大になるのは x_2 が原点と x_1 を結ぶ線分上にあるときで、このとき

$$1-|x_2|=\frac{2e^\delta(1-|x_1|)}{(1+|x_1|)+e^\delta(1-|x_1|)},\ |x_1-x_2|=|x_1|-|x_2|=\frac{(e^\delta-1)(1-|x_1|)}{(1+|x_1|)+e^\delta(1-|x_1|)}.$$

よって (11.30) は

$$\frac{(e^\delta-1)^2(1+|x_1|)^2+4e^{2\delta}}{(1+|x_1|)+e^\delta(1-|x_1|)}\le 16 \tag{11.31}$$

よりしたがう。実際 $\delta=2^{-5}\theta_1^{-1}<2^{-5}$ だから 11.31 の左辺は $4(e^\delta-1)^2+4e^{2\delta}\le 8e^{2\delta}+4<16$ で上から評価される。

再び証明に戻る。Lemma 11.13 より
(11.32)

$$\nu(\overline{B}(x_1,2r_1),C(a_j,\beta/p))\ge\nu(\overline{B}(x_1,r_1),C(a_k,s_1))-\frac{K(b+b'(|\log\beta/p|^{n-1}+|\log s_1|^{n-1}))}{(\log 2)^{n-1}}.$$

ここで

$$\frac{K(b+b'(|\log\beta/p|^{n-1}+|\log s_1|^{n-1}))}{(\log 2)^{n-1}}\le c_1(\log 1/s_1)^{n-1}=\frac{(b+2b')K(\log 1/s_1)^{n-1}}{(\log 2)^{n-1}} \tag{11.33}$$

をしめす。$s_1\le\beta/p\le 9^{-1}$ で $|\log\beta/p|\le|\log s_1|$ だから

$$b+b'(|\log\beta/p|^{n-1}+|\log s_1|^{n-1})\le b+2b'|\log(1/s_1)|^{n-1}\le(b+2b')(\log(1/s_1))^{n-1}.$$

よって (11.33) がしたがう。これと (11.32) から

$$\nu(\overline{B}(x_1,2r_1),C(a_j,\beta/p))\ge\nu(\overline{B}(x_1,r_1),C(a_k,s_1))-c_1(\log 1/s_1)^{n-1}. \tag{11.34}$$

この式の左辺は $\nu(\overline{B}(x_1,r_1),C(a_k,s_1))>c_1(\log(1/s_1))^{n-1}$ のときに正になるが、(11.29) より

$$\frac{d_n\log\theta_1}{K}(\log\frac{s_1}{s_2})^{n-1}>c_1(\log\frac{1}{s_1})^{n-1}$$

すなわち

$$\left(\frac{\log s_1/s_2}{\log s_1^{-1}}\right)^{n-1}>\frac{c_1K}{d_n\log\theta_1}$$

ならば正になることが保証される。このことを確認したうえで $\tau(y_1,y_2)>c_2$ が

$$c_2=P+\log\left(\left(\frac{c_1K}{d_n\log\theta_1}\right)^{1/(n-1)}+1\right) \tag{11.35}$$

について成立すると仮定して矛盾が導きだせることを見よう。まず $\tau(y_1,y_2)>c_2$ と (11.28) より (11.34) の左辺は正である。このとき $E_j=S(x_1,2r_1)\cap f^{-1}C(a_j,\beta/p)$ とおくと

$$E_j\ne\emptyset,\ j=1,...,q$$

である。なぜなら (11.34) の左辺より $\overline{B}(x_1, 2r_1) \cap f^{-1}C(a_j, \beta/p) \neq \emptyset$ である。もし $f^{-1}C(a_j, \beta/p) \subset B(x_1, 2r_1)$ ならば $\overline{\mathbf{R}^n} \setminus C(a_j, \beta/p)$ の 2 つの成分 $D = D(a_j, \beta/p)$ と D' に対して $f^{-1}D$ または $f^{-1}D'$ の一つの成分 V が $B(x_1, 2r_1)$ に含まれる。よって V は f のノーマル近傍であり $fV = D$ または $fV = D'$. これは $a_1, ..., a_q$ が f の除外値であることに反するからである。

$u = \min_{i \neq j} d(E_i, E_j)$ とし今 $u = d(E_l, E_m)$ であるとする。$E_1, ..., E_q$ から 1 点ずつ選びそれぞれのまわりに半径 $u/2$ の球をとる。それらと $S^{n-1}(2r_1)$ との交わりの面積を考えると

$$q\Omega_{n-1}(u/2)^{n-1} \leq \omega_{n-1}(2r_1)^{n-1}$$

すなわち

$$u \leq 4r_1 \left(\frac{\omega_{n-1}}{q\Omega_{n-1}} \right)^{1/(n-1)} = 4 \left(\frac{\omega_{n-1}}{q\Omega_{n-1}} \right)^{1/(n-1)} \theta_1^2 |x_1 - x_2|.$$

(11.25) より

$$u \leq \frac{1}{2}(q_0/q)^{1/(n-1)}|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

$x_1^2 \in E_l, x_2^2 \in E_m$ を $u = |x_1^2 - x_2^2|$ をみたす点とし $r_2 = \theta_1^2 |x_1^2 - x_2^2|$ とおく。上式より

$$r_2 = u\theta_1^2 \leq \frac{1}{2}\theta_1^2 |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} r_1 \tag{11.36}$$

である。さら $x_1^2 \in S(x_1, 2r_1)$ により $2^{-4}(1 - |x_1^2|) \geq 2^{-4}(1 - |x_1| - 2r_1) \geq r_1 - 2^{-3}r_1 = 7r_1/8 > r_2$. よって $\overline{B}(x_1^2, 2r_2) \subset B$.

$f(x_1^2)$ と $f(x_2^2)$ は $D(a_l, \beta) \setminus \overline{D(a_l, \beta/p)}$ で分離されていて、しかも $a_l, a_k (k \neq l)$ は fB に含まれないから Lemma 11.14 より

$$\nu(\overline{B}(x_1^2, r_2), C(a_l, \beta)) \geq \frac{d_n \log \theta_1}{K} \left(\log \frac{\beta}{\beta/p} \right)^{n-1} = \frac{d_n \log \theta_1}{K} (\log p)^{n-1} \tag{11.37}$$

Lemma 11.13 より各 $j = 1, ..., q$ に対して

$$\nu(\overline{B}(x_1^2, 2r_2), C(a_j, \beta/p)) \geq \nu(\overline{B}(x_1^2, r_2), C(a_l, \beta)) - \frac{K(b + b'(|\log \beta|^{n-1} + |\log \beta/p|^{n-1})}{(\log 2)^{n-1}}.$$

ここで

$$\begin{aligned} b + b'(|\log \beta|^{n-1} + |\log \beta/p|^{n-1}) &= b + b'|\log \beta/p|^{n-1} \left(1 + \left(\frac{|\log 1/\beta|}{|\log p/\beta|} \right)^{n-1} \right) \\ &\leq b + 2b'|\log \beta/p|^{n-1} \end{aligned}$$

だから

$$\nu(\overline{B}(x_1^2, 2r_2), C(a_j, \beta/p)) \geq \nu(\overline{B}(x_1^2, r_2), C(a_l, \beta)) - c_1 |\log \beta/p|^{n-1}. \tag{11.38}$$

ここで c_1 は (11.13) における定数。$\theta_1 \leq \exp(3c_1 K/d_n)$ だから (11.27) より

$$\frac{d_n \log \theta_1}{K} (\log p)^{n-1} - c_1 \left(\log \frac{p}{\beta} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_n \log \theta_1}{K} - 2c_1 \right) |\log \beta/p|^{n-1}.$$

よって (11.37) より (11.38) の左辺はすべての j について正である。同じ議論の繰り返しで $E_j^{(2)} = S(x_1^2, 2r_2) \cap f^{-1}C(a_j, \beta/p) \neq \emptyset$. これを続けていくと B の点の対 $(x_1, x_2) = (x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2), \ldots$ で $x_1^{m+1}, x_2^{m+1} \in S(x_1^m, 2r_m)$ かつ $r_{m+1} = \theta_1^2 |x_1^{m+1} - x_2^{m+1}| \leq r_m/2$ となるものが選べる。

$$\begin{aligned} |x_1^m - x_1| &\leq |x_1^1 - x_1^2| + |x_1^2 - x_1^3| + \cdots + |x_1^{m-1} - x_1^m| \\ &\leq 2(r_1 + r_2 + \cdots + r_{m-1}) \leq 2(1 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{m-1}) r_1 \\ &< 4r_1 \leq 2^{-2}(1 - |x_1|). \end{aligned}$$

これより必要ならば部分列をとって $x_1^m, x_2^m \to x_0 \in B$ としてよい。一方 x_1^m, x_2^m は $C(a_j, \beta/p), j = 1, \ldots, q$, の中の異なる球面に属するから

$$\sigma(f(x_1^m), f(x_2^m)) \geq \min_{i \neq j} \sigma(a_i, a_j) - 2\beta/p \geq (4 - 2/p)\beta \geq 10\beta/3.$$

これは f の連続性に反する。したがって

$$\tau(y_1, y_2) \leq c_2. \tag{11.39}$$

Case 2. ある k に対して $y_1 \in D(a_k, \beta/p), y_2 \notin D(a_k, \beta/p)$ が成立するとき。$y_1 \in D(a_k, \beta/p^2)$ または $y_2 \notin D(a_k, \beta)$ のとき y_1, y_2 は $D(a_k, \beta/p) \setminus \overline{D}(a_k, \beta/p^2)$ または $D(a_k, \beta) \setminus \overline{D}(a_k, \beta/p)$ で分離される。このとき Lemma 11.14 より (11.37) と同じ不等式

$$\nu(\overline{B}(x_1, r_1), C(a_k, \beta)) \geq \frac{d_n \log \theta_1}{K} (\log p)^{n-1}$$

が $r_1 = \theta_1^2 |x_1 - x_2|$ について成り立つ。また Lemma 11.13 より (11.38) を導いたのと同様にして

$$\nu(\overline{B}(x_1, 2r_1), C(a_j, \beta/p)) \geq \nu(\overline{B}(x_1, r_1), C(a_k, \beta)) - c_1 |\log \beta/p|^{n-1}.$$

よって Case 1 の議論を再び繰り返すことによって矛盾を生じる。したがって $y_1 \notin D(a_k, \beta/p^2), y_2 \in D(a_k, \beta)$ であり (11.28) より

$$\tau(y_1, y_2) \leq P + \log \frac{\log(p^2/\beta)}{\log 1/\beta} = c_3. \tag{11.40}$$

Case 3. $y_1, y_2 \notin U = \cup_j D(a_k, \beta/p)$ のとき。(11.19),(11.20) より

$$\tau(y_1, y_2) \leq 2\left(P + \log \frac{\log(p/\beta)}{\log 1/\beta}\right) + \frac{\pi}{2} Q = c_4. \tag{11.41}$$

いずれの場合でも $\rho(x_1, x_2) = \delta$ のとき $y_i = f(x_i), i = 1, 2,$ に対して

$$\tau(y_1, y_2) \leq c_1 = \max(c_2, c_3, c_4). \tag{11.42}$$

ここで c_2, c_3, c_4 は (11.39),(11.40),(11.41) における定数。よって $\rho(x_1, x_2) = \delta$ のときは

$$\tau(y_1, y_2) \le \left(\frac{c_1}{\delta}\right)\delta = (c_1 2^5 \theta_1^2)\delta \le \frac{1}{2}C\delta. \ (C = 2^6\theta_1^2)$$

$\rho(x_1, x_2) < \delta$ のときは f は開写像ゆえ

$$\tau(y_1, y_2) \le \max_{\rho(x_1, x)=\delta} \tau(y_1, f(x)) \le \frac{1}{2}c\delta.$$

$\rho(x_1, x_2) > \delta$ のときは x_1 と x_2 とを結ぶ測地線上に順に点 $x_1 = z_1, z_2, ..., z_k, z_{k+1} = x_2$ を $\rho(z_i, z_{i+1}) = \delta,\ \rho(z_k, z_{k+1}) \le \delta$ をみたすようにとる。すると

$$\tau(y_1, y_2) \le \sum_{i=1}^{k} \tau(f(z_i), f(z_{i+1})) \le \frac{nc\delta}{2}.$$

ここで $\rho(x_1, x_2) > (n-1)\delta \ge \delta$ より $n\delta \le 2\rho(x_1, x_2)$. よって $\tau(y_1, y_2) \le C\rho(x_1, x_2)$. 以上のことから

$$\tau(f(x_1), f(x_2)) \le C\max(\rho(x_1, x_2), \delta).$$

11.43 Theorem 11.2 の証明. $a_q = \infty, \beta = s_0$ とし $Y = \overline{\mathbf{R}^n} \setminus \{a_1, ..., a_q\}$ の計量 τ を 11.18 のようにあたえる。[VU1988, p.8] より $q(\cdot,\cdot)$ を球面弦距離とすると

$$q(f(x), \infty) \le \sigma(f(x), \infty) \le \pi q(f(x), \infty),\ q(f(x), \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|f(x)|^2}} \tag{11.44}$$

これから $|f(x)| \le 1/\sigma(f(x), \infty)$ であり $f(x) \notin D(\infty, s_0)$ ならば

$$\log|f(x)| \le \log \pi/s_0 \le c_0' \log 1/s_0$$

と評価されるから $f(x) \in D(\infty, s_0)$ としてよい。このとき (11.44) より s_0 のみに依存する定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$c_1 \log\frac{1}{\sigma(f(x), \infty)} \le \log|f(x)| \le c_2 \log\frac{1}{\sigma(f(x), \infty)}.$$

もし $f(0) \in \overline{D}(\infty, s_0)$ ならば Theorem 11.23 と (11.19) により

$$\begin{aligned}\frac{\log|f(x)|}{\log|f(0)|} &\le \frac{c_2 \log 1/\sigma(f(x), \infty)}{c_1 \log 1/\sigma(f(0), \infty)} \le c_2 c_1^{-1} \exp(P + \tau(f(x), f(0))) \\ &\le c_2 c_1^{-1} e^P \exp(C(\rho(0, x) + \delta)) = c_2 c_1^{-1} e^{P+\delta C} 2^C (1-|x|)^{-C}.\end{aligned}$$

$c_0 = \max(c_0', c_2 c_1^{-1} e^{P+\delta C} 2^C)$ とおく。$f(0) \notin D(\infty, s_0)$ ならば $z \in C(\infty, s_0)$ を $\tau(f(0), f(x)) > \tau(z, f(x))$ となるように選べば (11.19) より

$$\begin{aligned}\frac{\log|f(x)|}{\log 1/s_0} &\le \frac{c_2 \log 1/\sigma(f(x), \infty)}{c_1 \log 1/\sigma(z, \infty)} \le c_2 c_1^{-1} e^P e^{\tau(f(x), z)} \\ &\le c_2 c_1^{-1} e^P e^{\tau(f(x), f(0))} \le c_0 (1-|x|)^{-C}.\end{aligned}$$

したがって
$$\log|f(x)| \leq C_0(-\log s_0 + \log^+|f(0)|)(1-|x|)^{-C}.$$
を得る。

11.45. Remarks (1) Theorem 11.2 でしめされたように、ある整数 q が存在して q 個の点を除外値にもつ非定数 qm 写像 $\mathbf{B}^n \to \overline{\mathbf{R}^n}$ は存在しない。このような整数の最小をと書き、これを Rickman 数と呼ぶ。$n=2$ のときは K によらず $p_0(2,K)=3$ であるが $n=3$ のとき $\lim_{K\to\infty} p_0(3,K)=\infty$ であることが知られている [RI1985].

(2) 球 $B(x,2r)$ 上で定義された非負実数値関数 h に対して Harnack 型の不等式を成立とは、ある $\theta \geq 1$ があって

$$M(r,h,x) = \sup\{h(y) : y \in B(x,r)\} \leq \theta \inf\{h(y) : y \in B(x,r)\} \tag{11.46}$$

であるときにいう。$\mathbf{R}^n$ 上で定義された連続関数 u が Harnack 関数であるとは、ある $\theta \geq 1$ が存在して、任意の $x \in \mathbf{R}^n, r>0$ に対して $h = \pm u + a$ $(a \in \mathbf{R})$ の形の関数が $B(x,2r)$ で非負であるかぎり、与えられた θ で不等式 (11.46) が成り立つときにいう。$\mathbf{R}^n$ 上の qr 写像 f に対して $\log|f(x)-a|+b$ $(a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R})$ は Harnack 関数となる。Lewis [LEW1994] はこの事実をもちいて Rickman の定理に別証明を与えた。

参考文献

[SAK1937] Saks, S., *Theory of the integral*, Monog. Math., Warszawa, 1937.

[RR1955] Rado, T. and P. V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1955.

[FUG1957] Extremal length and functional completion, Acta Math. **98** (1957), 171–219.

[G1961] Gehring, F.W., Symmetrization of ring space, Trans. Amer. Math. Soc., **101** (1961), 499–519.

[HY1961] Hocking, J. G. and G. S. Young, Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

[G1962] Gehring, F.W., Rings and quasiconfomal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., 103(1962), 353–393.

[ITO1963] 伊藤　清三, 数学叢書 4. ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963.

[SER1964] Serrin, J., Local behavior of solutions of quasilinear equations, Acta Math. **111** (1964), 247–302.

[GV1965] Gehring, F.W. and J. Väisälä, The coefficients of quasiconformality of domains in space, Acta Math. 114(1965), 1-70.

[MIZ1965] 溝畑　茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

[AHL1966] Ahlfors, L. V., *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, 1966.

[V1966] Väisälä, J., Discrete open mappings on manifolds, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **392** (1966), 1–10.

[G1967] Gehring, F.W., Extension theorems for quasiconformal mappings in n−space, J. d'Analyse Math. **19** (1967), 149–169.

[R1967] Reshetnyak,Yu. G., On the stability of conformal mappings in multidimensional spaces (Russian), Sibirsk. Math. Z. **8**(1967), 91–114.

[ZO1967] Zorich, V.A., A theorem of M.A. Lavrent'ev on quasiconformal mappings in space (Russian), Math. Sb. **74** (1967), 417–433.

[R1968a] Reshetnyak,Yu. G., Set of singular points of solutions of certain non-linear elliptic equations (Russian), Sibirsk. Math. Z. **9**(1968), 354–367.

[R1968b] Reshetnyak,Yu. G., Index boundedness condition for mappings with bounded distortion (Russian), Sibirsk. Math. Z. **9**(1968), 368–374.

[R1968c] Reshetnyak,Yu. G., Mappings with bounded distortion as extremals of Dirichlet type integrals (Russian), Sibirsk. Math. Z. **9**(1968), 652–666.

[AGA1969] Agard, S., Angles and quasiconformal mappings in space, J. Analyse Math. **22** (1969), 177–200.

[MRV1969] Martio, O., S. Rickman, and J. Väisälä, Definitions for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **448** (1969), 1–40.

[R1969] Reshetnyak,Yu. G., Extremal properties of mappings with bounded distortion s (Russian), Sibirsk. Math. Z. **10**(1969), 1300–1310.

[ZIE1969] Ziemer, W. P., Extremal length and p−capacity, Michigan. Math. J. **16**(1969), 43–51.

[KIM1970] Kimel'fel'd, B. N., Homogeneous regions on the conformal sphere (Russian), Mat. Zametki **8** (1970), 321–328.

[MRV1970] Martio, O., S. Rickman, and J. Väisälä, Distortion and singularities of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**465** (1970), 1–13.

[M1970] Martio, O., A capacity inequality for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **474** (1970), 1–18.

[MAZ1970] Maz'ya, V. G., On the continuity at boundary point of the solution of quasilinear elliptic equations (Russian), Vestnik Leningrad. Univ., **25**(1970), No.13, 42-55.

[NAK1970] Näkki, R., Boundary behavior of quasiconformal mappings in n–space, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **484** (1970), 1–50.

[PO1970] Poleckiĭ, E. A., The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings,(Russian), Mat. Sbornik **83** (1970), 261–272 - Math. USSR Sbornik **12** (1970), 260–270.

[ZO1970] Zorich, V. A., Isolated singularities of mappings with bounded distortion (Russian), Math. Sb. **81** (1970), 634–638.

[ST1970] Stein, E. M., **Singular Integrals and Differentiabilitiy Properties of Functions**, Princeton Univ. Press, 1970.

[LEW1971] Lewis, L. G., Quasiconformal mappings and Royden algebras in space, Trans. Amer. Math. Soc., **158** (1971), 481–492.

[MRV1971] Martio, O., S. Rickman, and J. Väisälä, Topological and metric properties of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **488** (1971), 1–31.

[SRE1971] Srebro, U., Conformal capacity and quasiconformal mappings in $\mathbf{R}^n$, Israel J. Math. 9 (1971), 93–110.

[V1971] Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math. Vol.**229**, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1971.

[MRI1972] Martio, O. and S. Rickman, Boundary behavior of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **507** (1972), 1–17.

[V1972] Väisälä, J., Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **509** (1972), 1–14.

[G1973] Gehring, F. W., The L^p-integrability of the partial derivatives of quasiconformal mapping, Acta Math. **130** (1973), 265–277.

[LF1973] Lelong-Ferrand, J., Étude d'une classe d'application liée à des homomorphismes d'algébres de fonctions, et généralisant les quasi conformes, Duke Math. J. **40** (1973), 163–186.

[MRI1973] Martio, O. and S. Rickman, Measure properties of the branch set and its images of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I **541** (1973), 1–16.

[RI1973] Rickman, S., Path lifting for discrete open mappings, Duke Math. J., **40** (1973), 187–191.

[LV1973] Lehto, O., and Virtanen, K., *Quasiconformal Mappings in the Plane* (Second Edition), Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen **126**, Springer-Verlag, 1973.

[CA1974] Caraman, P., *n−dimensional quasiconformal(QCf) mappings*, Editura Academiei Române, Bucharest, Abacus Press, Tunbridge Wells Haessner Publishing, Inc., Newfoundland, New Jersey, 1974.

[M1974] Martio, O., On the integrability of the derivative of a quasiregular mapping, Math. Scand. **35** (1974), 43–48.

[RE1974] Reimann, H. M., Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, Comment. Math. Helvet. **49** (1974), 260–276.

[M1975] Martio, O., Equicontinuity theorem with an application to variational integrals, Duke Math. J., **42** (1975), 569–581.

[MSR1975a] Martio, O. and U. Srebro, Periodic quasimeromorphic mappings, J. Analyse Math. **28** (1975), 20–40.

[MSR1975b] Martio, O. and U. Srebro, Automorphic quasimeromorphic mapping in $\mathbf{R}^n$, Acta Math. **135** (1975), 221–247.

[RI1975] S. Rickman, A path lifting construction for discrete open mappings with application to quasimeromorphic mappings, Duke Math. J. **43** (1975), 797–809.

[G1976] Gehring, F.W., A remark on domains quasiconformally equivalent to a ball, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **2**(1976), 147–155.

[GPA1976] Gehring, F. W., and B.P. Palka, Quasiconformally homogeneous domains, J. Analyse Math. **30** (1976), 172–199.

[RI1976a] Rickman, S., On the value distributioon of quasimeromorphic maps, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **2** (1976), 447–466.

[RI1976b] Rickman, S., A quasimeromorphic mapping with given deficiencies in dimension three, Symposia Mathematica XVIII, 535–543, Instituto Nazionale di Alta Mathematica, Roma, Convegno del Marzo 1974, Academic Press, 1976.

[VU1976] Vuorinen, M., Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n−space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes **11** (1976), 1–44.

[YOS1976] 吉田　耕作, 測度と積分,　岩波講座基礎数学,　岩波書店, 1976

[MSR1977] Martio, O. and U. Srebro, On the existence of automorphic quasimeromorphic mapping in $\mathbf{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **3** (1977), 123–130.

[VU1977] Vuorinen, M., On the Iversen-Tsuji theorem for quasiregular mappings, Math. Scand. **41** (1977), 90–98.

[MSAR1979] Martio, O., and J. Sarvas, Injectivity theorems in plane and space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**4** (1978/79), 383–401.

[MSR1978] Martio, O. and U. Srebro, Universal radius of injectivity for locally quasiconformal mappings, Israel J. Math., **29** (1978), 17–23.

[RI1978a] Rickman, S., Properties of the counting function of a quasiregular mapping, Proc. of the First Finnish-Polish Summer School in Complex Analysis at Podlesice, 1977, part II, 1–10, University of Łódź, Łódź, 1978.

[GO1979] Gehring, F. W. and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasihyperbolic metric, J. Analyse Math. **30** (1979), 50–74.

[MSR1979] Martio, O. and U. Srebro, On the local behavior of quasiregular maps and and branched covering maps, J. Analyse Math. **36** (1979), 198–212.

[MATRI1979] Mattila, P. and S. Rickman, Averages of the counting function of a quasiregular mappings, Acta Math., **143** (1979), 273–305.

[RI1980a] Rickman, S., On the number of omitted values of entire quasiregular mappings, J. d'Analyse Math., **37** (1980), 100–117.

[RI1980b] Rickman, S., Asymptotic values and angular limits of quasiregular mappings of a ball, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math., **5** (1980), 185–196.

[V1980] Väisälä, J., A survey of quasiregular mappings in $\mathbf{R}^n$, Proc. 1978 Internat. Congr. Math. (Helsinki, Finland), Academia Scientiarum Fennica, Helsinki, 1980.

[VU1980] Vuorinen, M., On the boundary behavior of locally $K-$quasiconformal mappings in space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **5** (1980), 79–95.

[RI1981a] Rickman, S., A defect relation for quasimeromorphic mappings, Ann. of Math. **114** (1981), 165–191.

[T1981] Tukia, P., A quasiconformal group not isometric to a Möbius group, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **6** (1981), 149–160.

[GLM1982] Grandlund, S., P. Lindqvist and O. Martio, F-harmonic measure in space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **7** (1982), 233–247.

[MIN1982] Miniowitz, R., Normal families of quasimeromorphic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., **84** (1982), 35–43.

[VU1982] Vuorinen, M., On the Harnack constant and boundary behavior of Harnack functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **7** (1982), 259–277.

[BORI1983] Bojarski, B. and T. Iwaniec, Analytic foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbf{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**8** (1983), 257–324.

[RI1983a] Rickman, S., Value distribution of quasiregular mappings, Springer Lecture Notes in Math. **981**, Springer-Verlag, New York, 1983, pp.220–245.

[RI1984a] Rickman, S., Quasiregular mappings and metrics on the $n-$sphere with punctures, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 136–148.

[GLM1985] Grandlund, S., P. Lindqvist and O. Martio, Phragmén-Lindelöf's and Lindelöf's theorems, Ark. Mat. **23** (1985), 103–128.

[GM1985] Gehring, F. W. and O. Martio, Lipschitz classes and quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**10** (1985), 203–219.

[RI1985] Rickman, S., The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three, Acta Math. **154** (1985) 195–242.

[VU1985] Vuorinen, M., Conformal invariants and quasiregular mappings, J. Analyse Math. **45** (1985), 69–115.

[T1986] Tukia, P., On quasiconformal groups, J. Analyse Math., **46** (1986), 318–345.

[LIN1986] Lindqvist, P., On the quasiregularityb of a limit mapping, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**11** (1986), 155–159.

[MVUO1987] Martio, O. and M. Vuorinen, Whitney cubes, $p-$capacity, and Minkowski content, Expo. Math. **5** (1987), 17–40.

[SEM1987] Semenov,V.I., An integral representation of the trace on the sphere of a class of vector fields and uniform stability estimates of quasiconformal mappings of the ball (Russian), Mat. Sib. **133** (1987), 238–253.

[MV1988] Martio, O. and J. Väisälä, Global L^p-integrability of the derivative of a quasiconformal mapping, Complex Variables **9**, (1988), 309–319.

[RI1988a] Rickman, S., Topics in the Theory of Quasiregular Mappings, in *Conformal Geometry* (R. S. Kulkarni and U. Pinkall (eds.)), Aspect of Math. **E 15**, Vieweg, 1988. 147–189.

[VU1988] Vuorinen, M. *Conformal Geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math. **1319**, Springer-Verlag, 1988.

[R1989] Reshetnyak,Yu. G.,*Space mappings with bounded distortion*, Transl. of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., **73** ,1989.

[VU1989] Vuorinen, M., On Picard's theorem for entire quasiregular mappings, Proc. Amer. Math. Soc., **107** (1989), 383–394.

[HR1990] Heinonen, J. and J. Rossi, Lindelöf's theorem for normal quasimeromorphic mappings, Mich. Math. J. **37** (1990), 219–226.

[JAR1990] Järvi, P., On the behavior of quasiregular mappings in the neighborhood of an isolated singularity, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **15** (1990), 341–353.

[ASTK1991] Astala, K. and P. Koskela, Quasiconformal mappings and global integrability of the derivative, J. Analyse Math. **57** (1991), 203–220.

[IMA1991] Iwaniec, T. and G. Martin, Quasiconformal mappings and capacity, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 101–121.

[SS1991] Smith, W. and D. A. Stegenga, Exponential integrability of the quasihyperbolic metric on Hölder domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.**16** (1991), 344–359.

[I1992] Iwaniec, T., p–harmonic tensors and quasiregular mappings, Ann. of Math.**136** (1992), 651–685.

[AVV1993] Anderson, G.D., M.K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, Inequalities for quasiconformal mappings in space, Pacific J. Math., **60** (1993), 1–18.

[HR1993] Heinonen, J. and J. Rossi, Remarks on the value distribution of quasimeromorphic mappings, Complex Variables, **21** (1993), 231–242.

[IMA1993] Iwaniec, T. and Martin, G., Quasiregular mappings in even dimensions, Acta Math. **170** (1993), 29–81.

[RI1993] Rickman, S., *Quasiregular Mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **26** Springer-Verlag, 1993.

[ST1993] Staple, S. G., Global integrability of the Jacobian and quasiconformal maps, Michigan Math. J. **40** (1993), 433–444.

[AST1994] Astala, K., Area distortion of quasiconformal mappings, Acta Math. **173** (1994), 37–60.

[LEW1994] Lewis, John L., Picard's theorem and Rickman's theorem by way of Harnack inequality, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994) 199–206.