7 Poleckii-Väisälä の不等式

7.1. Notations. G を $\mathbf{R}^n$ の部分領域とする。以下において path $\alpha : I \to G$ と写像 $f : G \to \mathbf{R}^n$ が与えられたとき、その像 $f \circ \alpha$ の arclength でパラメトライズするという議論がもちいられる。それに必要な用語を説明する: $\alpha : I = [a, b] \to \mathbf{R}^n$ を rectifiable closed path とし、$s_\alpha : [a, b] \to [0, l(\alpha)]$ を α の弧長関数とする。ここで $l(\alpha)$ は α の弧長である。α^0 を α の正則表現、すなわち α を arclength でパラメトライズしたものする:

$$\alpha^0 \circ s_\alpha(t) = \alpha(t) \quad (t \in [a, b])$$

2つの path $\alpha : I \to G, \beta : J \to \mathbf{R}^n$ に対して $I \subset J$ で、$f \circ \alpha = \beta|_I$ となるとき $f \circ \alpha \subset \beta$ とかく。

$f : G \to \mathbf{R}^n$ が light mapping であるとは、各 $y \in fG$ の逆像 $f^{-1}(y)$ のすべての成分が 1 点のみからなるときにいう。とくに f が discrete ならば light mapping である。

7.2.Theorem.(Väisälä の不等式 [V1971]) $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像、Γ を G 内の曲線族、Γ' を $\mathbf{R}^n$ 内の曲線族、m を正整数とし、これらに対して次のことが成り立っているとする: 任意の path $\beta \in \Gamma', \beta : I \to \mathbf{R}^n$ に対して $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Gamma$ があって、$f \circ \alpha_i \subset \beta$ $(i = 1, ..., m)$ でかつ、$(x, t) \in G \times I$ に対し $\alpha_i(t) = x$ となる i は高々 $i(x, f)$ 個しかない。このとき次の不等式が成立する。

$$M(\Gamma') \leq \frac{K_I(f)}{m} M(\Gamma). \tag{7.3}$$

とくに、$\Gamma' = f\Gamma, m = 1$ に対して Theorem 7.1 の要請がみたされているので次の Corollary を得る。

7.3. Corollary.(Poleckii の不等式 [PO1970]) $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像、Γ を G 内の曲線族とすると

$$M(f\Gamma) \leq K_I(f) M(\Gamma). \tag{7.5}$$

この章の目的は Väisälä の不等式を証明することである。そのために長い準備をすることになる。

7.6. Lemma. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を light mapping、$\beta : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ を rectifiable closed path, $\alpha : I \to G$ を $f \circ \alpha \subset \beta$ となる path とする。このとき path $\alpha^* : s_\beta I \to G$ で

$$\alpha = \alpha^* \circ (s_\beta|_I) \tag{7.7}$$

をみたすものがただ一つ存在する。さらに $f \circ \alpha^* \subset \beta^0$ が成り立つ。

7.8. Definition. Lemma 7.6 における α^* を β に関する α の f-表現 (f-representation of α with respect to β) と呼ぶ [RI1993, p.40].

7.9. (Lemma 7.6 の証明) まず s_β は連続かつ単調非減少であり、$s_\beta(t_1) = s_\beta(t_2)$ が $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$, に対して成り立てば β は $[t_1, t_2]$ 上 constant であることに注意する。いま

$$\alpha^*(s) = \alpha(s_\beta^{-1}(s))$$

と定義したいが、$s \in s_\beta I$ に対して $s_\beta^{-1}(s)$ が 2 点 t_1, t_2 を含む場合が問題となる。しかし、このとき上の注意より $\beta(t) = \beta(t_1), (t_1 \le t \le t_2)$. $\alpha([t_1, t_2]) \subset f^{-1}\beta([t_1, t_2]) = f^{-1}\beta(t_1)$ で $f^{-1}\beta(t_1)$ の各成分は 1 点のみからなるから、$\alpha([t_1, t_2]) = \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ がいえる。したがって $\alpha(s_\beta^{-1}(s))$ は $s_\beta^{-1}(s)$ が 2 点以上含む場合も一意的に定まる。よって $\alpha^* : s_\beta I \to G$ で (7.6) をみたすものがただ一つ定まる。

次に α^* が連続であることをしめす。$\mathbf{R}^n$ の開集合 U の α による逆像 $\alpha^{-1}(U)$ の成分 J をかってに 1 つとる。J は I の部分開区間である。たとえば $J = (c, d)$ とすると、s_β の単調非増大性より、$s_\beta(c, d) \subset s_\beta(c, d) \cup [s_\beta(c), s_\beta(d)]$. もし $s_\beta(c) \in s_\beta(c, d)$ ならば、ある $t_0 \in (c, d)$ があって $s_\beta(t_0) = s_\beta(c)$. よって $s_\beta([c, t_0]) = s_\beta(c)$. このとき f の lightness を証明の前半部と同じように用いて $\alpha([c, t_0]) = \alpha(t_0) = \alpha(c)$ がいえ $c \in \alpha^{-1}U$ となり矛盾である。同様に $s_\beta(d) \in s_\beta(c, d)$ としても矛盾である。このことから $s_\beta(c, d) = s_\beta(c, d) \cup [s_\beta(c), s_\beta(d)]$. $I = [a_0, b_0]$ とするとき、$J = [a_0, c), (c, b_0], [a_0, b_0]$ $(a_0 < c < b_0)$ のような場合についても、やはり $s_\beta J$ が $s_\beta I$ の部分開区間であることがしめせる。以上により $s_\beta J$ は $s_\beta I$ の部分開集合となることがわかり、α^* は連続である。

最後に、$t \in I$ のとき $f(\alpha^*(s_\beta(t)) = f(\alpha(t)) = \beta(t) = \beta^0(s_\beta(t))$.

7.10. Definition (absolutely precontinuity). $f : G \to \mathbf{R}^n$ を light mapping、$\alpha : I \to G$ を closed path とする。もし $\beta = f \circ \alpha$ が rectifiable で、かつ β に関する α の f-表現 α^* が絶対連続であるとき、f は α上で absolutely precontinuous であるという。I が半開区間または開区間である path $\alpha : I \to G$ が与えられたときに f が α の任意の closed subpath 上で absolutely precontinuous であるとき f は α 上で absolutely precontinuous であるいう。

7.11. Lemma.(Poleckii の補題 [PO1970, Lemma 6]) $f : G \to \mathbf{R}^n$ を qr 写像、G_0 を $\overline{G_0} \subset G$ となる G の部分領域、Γ を G_0 内の closed path 全体からなる曲線族とする。f が α 上で absolutely precontinuous でないような $\beta = f \circ \alpha \in f\Gamma$ 全体からなる $f\Gamma$ の部分族を Γ_{*0} とおくとき $M(\Gamma_{*0}) = 0$.

7.12. Corollary [V1972, Lemma 2.6]) $f : G \to \mathbf{R}^n$ を qr 写像、Γ_0 を $\mathbf{R}^n$ 内の次のような性質を持つ path β 全体の族とする: β は non-rectifiable であるか、または G 内の path α で $f \circ \alpha \subset \beta$ かつ f が α 上で absolutely precontinuous でないものが存在する。このとき $M(\Gamma_0) = 0$.

Proof. G の相対コンパクトな部分領域による近似列 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots G_k \subset \cdots$, $(\overline{G_k} \subset G_{k+1})$ を一つとる。Γ_k を G_k 内の closed path で、その上で f が absolutely precontinuous でないもの全体からなる族とする。Poleckii の補題より $M(\Gamma_k) = 0$. さらに $\mathbf{R}^n$内の non-rectifiable path 全体からなる族 Γ_{non} は modulus 0 をもつ (Proposition 4.10). Γ_{non} と Γ_k $(k = 1, 2, ...)$ との和を Γ' とおくと $\Gamma' < \Gamma_0$ だから (4.3 参照) $M(\Gamma_0) = 0$.

Poleckii の補題 7.11 の証明は一苦労だから後回しにすることにして、まずこれを仮定したうえで Väisälä の不等式をしめそう。

(Theorem 7.2 の証明) Γ_0 を 7.12 の曲線族とし、$\Gamma_1 = \Gamma' \backslash \Gamma_0$ とおく。このとき $M(\Gamma_1) = M(\Gamma')$

である。よって次の不等式をしめせばよい。

$$M(\Gamma_1) \le \frac{K_I(f)}{m} M(\Gamma).$$

$E \subset G$ を $x \notin E$ ならば x で f は微分可能で $J(x,f) > 0$ をみたすような集合で、その measure $m(E) = 0$ であるようにとる (Theorem 6.4 (2))。さらに E は Borel 集合としてよい [ITO1963, 定理 7.4. の系, p. 37].$J(x,f) \neq 0$ のとき $i(x,f) = J(x,f)/|J(x,f)|$ なので ([RR1955, (68), p. 332]), $B_f \subset E$ である。

$\rho \in F(G)$ とする。ρ を用いて $\rho' \in F(\Gamma_1)$ を以下のように構成する:まず

$$\sigma(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)) & (x \in G \setminus E) \\ \infty & (x \in E) \end{cases}$$

を定める。σ は Borel 関数である。そして $\rho' : \mathbf{R}^n \to \dot{\mathbf{R}}$ を

$$\rho'(y) = \frac{1}{m} \sup \left\{ \sum_{x \in B} \sigma(x) : B \subset f^{-1}(y),\ \mathrm{card} B \le m \right\}$$

とおく。ただし、もし $y \notin fG$ ならば $\rho'(y) = 0$ とおく。$y \in fE$ ならば $\rho'(y) = \infty$ である。

$\rho' \in F(\Gamma_1)$ であることをしめそう。まず ρ' が Borel 関数であること証明する。G の部分領域による近似列 $G_i, \overline{G_i} \subset G_{i+1},\ G = \cup_{i=1}^{\infty} G_i,$ を一つとる。集合 A に対して、その特性関数を χ_A と書くことにして

(7.13) $$\rho_i = \chi_{\overline{G_i}} \rho,\ \sigma_i = \chi_{\overline{G_i}} \sigma,\ \rho'_i(y) = \frac{1}{m} \sup_B \sum_{x \in B} \sigma_i(x)$$

を定める (B は ρ' の定義と同じ集合上を動く)。$i \to \infty$ のとき $x \in G, y \in \mathbf{R}^n$ に対してそれぞれ単調増加で $\rho_i(x) \to \rho(x),\ \rho'_i(y) \to \rho'(y)$. さらに $y \notin f\overline{G_i}$ ならば $\rho'(y) = 0.$ $y \in f(\overline{G_i} \cap B_f)$ ならば $\rho'(y) = \infty$ である。ここで $f(\overline{G_i} \cap B_f)$ はコンパクト集合の像として閉集合である。従って、後は各 $y_0 \in f(\overline{G_i}) \setminus f(\overline{G_i} \cap B_f)$ の近傍があって、そこで ρ' が Borel 関数であることをしめせば十分である。$y_0 \notin fB_f$ ゆえ、$f^{-1}(y_0) \cap \overline{G_i}$ の点の disjoint な近傍 $U_1, ..., U_k$ を $\overline{U_j} \subset G$ かつ $f|_{\overline{U_j}}$ は単射であるように選ぶことができる。

(7.14) $$V_0 = \left(\cap_{j=1}^{k} fU_j \right) \setminus f\left(\overline{G_i} \setminus \cup_{j=1}^{k} U_j \right),$$

V を V_0 の y_0−成分とすると、V は連結で (1) $V \cap f(B_f \cap \overline{G_i}) = \emptyset$, (2) $f^{-1}V$ の成分で $\overline{G_i}$ と交わるものは有限個 (それぞれは $U_1, ..., U_k$ に含まれるように取れるから、実際は k 個) である。それらを $D_1, ..., D_k$ とする。(3) $f|_{D_j} : D_j \to V$ は同相写像である。$g_j = (f|_{D_j})^{-1}$ とおくと V 上で ρ' は具体的に

$$\rho'(y) = \frac{1}{m} \sup \left\{ \sum_{j \in J} \sigma_i(g_j(y)) : J \subset \{1, 2, ..., k\},\ \mathrm{card} J \le m \right\}$$

と表示できる。$\sigma_i \circ g_j$ は Borel 関数だから ρ'も Borel 関数となる。

次に $\beta \in \Gamma_1$ に対して

$$\int_\beta \rho' ds \geq 1$$

をしめす。仮定より $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Gamma$ で $f \circ \alpha_i \subset \beta$ かつ ($B_f \subset E$ だから) $x \in G \setminus E$, $t \in I_0 (= \beta$ の定義区間とおく) に対して

$$\operatorname{card}\{i : \alpha_i(t) = x\} \leq 1 \tag{7.15}$$

をみたすものが存在する。今 $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_m$ はすべて closed paths であるとしよう。そうでない場合は部分閉弧による近似を考えて、以下と同じように議論すればよい。$\beta^0 : s_\beta I_0 = [0, l(\beta)] \to \mathbf{R}^n$ を β の正則表現、$\alpha_i^* : I_i \to G$ を β に関する α_i の f-表現とする。$f \circ \alpha_i^* \subset \beta^0$ である。

$|(\beta^0)'(t)| = 1$ が a.e. $t \in [0, l(\beta)]$ について成立する。α を α_i の一つとする。f は α 上で absolutely precontinuous であったから α^* は絶対連続である。よってほとんどいたるところの $t \in I$ に対して $(\alpha^*)'(t)$ が存在する。このことより a.e. $t \in I$ に対して $\alpha^*(t) \in E$ であるか、そうでなければ

$$1 = |(\beta^0)'(t)| = |f'(\alpha^*(t))(\alpha^*)'(t)| \geq l(f'(\alpha^*(t))|(\alpha^*)'(t)|.$$

$x \in E$ のときは $\sigma(x) = \infty$ だから、いずれにせよ不等式

$$\sigma(\alpha^*(t)) \geq \rho(\alpha^*(t))|(\alpha^*)'(t)|$$

が成立する。したがって

$$1 \leq \int_\alpha \rho ds = \int_{\alpha^*} \rho ds = \int_I \rho(\alpha^*(t))|(\alpha^*)'(t)|dt \leq \int_I \sigma(\alpha^*(t))dt$$

$h_i(t) = \sigma(\alpha_i^*(t))\chi_{I_i}(t)$, $t \in [0, l(\beta)]$, そして $J(t) = \{i : t \in I_i\}$ とおく。各 $t \in [0, l(\beta)]$ に対して、$\beta^0(t) \in fE$ ならば $\rho'(\beta^0(t)) = \infty$、そうでなければ $\alpha_i^*(t), i \in J(t)$ は (7.15) より $f^{-1}(\beta^0(t))$ に含まれる互いに異なる点からなり、いずれにせよ

$$\rho'(\beta^0(t)) \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h_i(t).$$

したがって

$$\int_\beta \rho' ds = \int_0^{l(\beta)} \rho'(\beta^0(t))dt \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_0^{l(\beta)} h_i(t)dt = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_{I_i} \sigma(\alpha_i^*(t))dt \geq 1$$

以上により $\rho' \in F(\Gamma_1)$ であることがわかった。したがって

$$M(\Gamma_1) \leq \int \rho'^n dx \tag{7.16}$$

右辺の積分を評価する。再び G の exhaustion $\{G_i\}$ を考え ρ_i, σ' および ρ_i' を (7.13) で構成した関数とし、$y_0 \in f\overline{G_i} \setminus f(\overline{G_i} \cap B_f)$ に対して、y_0 を中心にもつ n-cube Q を (7.14) で定義した V_0 に含まれるようにとる。Q に対しても上で述べた V がもつ性質 (1),(2),(3) が成立する (ただし、今度は $D_1, ..., D_k$ を $f^{-1}Q$ の $\overline{G_i}$ と交わる成分とする)。$g_j = (f|D_j)^{-1} : Q \to D_j$ $(j = 1, ..., k)$, は同相写像である。$J_0 = \{1, 2, ..., k\}$ とし、$y \in Q$ に対して $J(y) \subset J_0$を以下がみたされるように定義する。

- $k \leq m$ ならば $J(y) = J_0$,
- $k > m$ ならば $j \in J(y)$, $j' \in J_0 \setminus J(y)$ に対して $\sigma_i(g_j(y)) \geq \sigma_i(g'_j(y))$ で、もし等式が成立するならば $j > j'$.

すると

$$\rho'_i(y) = \frac{1}{m} \sum_{j \in J(y)} \sigma_i(g_j(y)) \quad (y \in Q)$$

と表現できる。J が J_0 の部分集合全体を動くとき $Q_J = \{y \in Q : J(y) = J\}$ は disjoint な Borel 集合列である。Hölder の不等式と $f|_{D_j}$ が qc 写像となることより

$$\begin{aligned}\int_{Q_J} \rho'^n_i dx &\leq \frac{1}{m} \sum_{j \in J} \int_{Q_J} \sigma_i(g_j(y))^n dy \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j \in J} \int_{g_j Q_J} \frac{\rho_i(x)^n}{l(f'(x))^n} J(x,f) dx \\ &\leq \frac{K_I(f)}{m} \int_{f^{-1}Q_J} \rho_i^n dx\end{aligned}$$

これをすべての $J \subset J_0$ について加えると

$$\int_Q \rho'^n_i dx \leq \frac{K_I(f)}{m} \int_{f^{-1}Q} \rho_i^n dx$$

$y \notin f\overline{G_i}$ のときは $\rho'_i(y) = 0$ であり、上のような n−cubes の可算列で、互いに disjoint なものをとってきて、measure 0 の集合を除いて $f\overline{G_i} \setminus f(\overline{G_i} \cap B_f)$ を覆うことができる[4]. さらに $m(B_f) = 0$ だから $i \to \infty$ として得られる不等式と (7.16) から

$$\int \rho'^n_i dx \leq \frac{K_I(f)}{m} \int \rho_i^n dx$$

$\rho \in F(\Gamma)$ は任意だったから $M(\Gamma_1) \leq (K_I(f)/m) M(\Gamma)$ が成り立つ。(Theorem 7.2 の証明終了)

7.17. Väisälä の不等式の証明を完成させるための次の目標は Poleckii の補題 Lemma 7.11 をしめすことである。

$G \subset \mathbf{R}^n$ を領域とし、$f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 K−qr 写像とする。$V(\subset \overline{V} \subset G)$ をノーマル領域とし、$V^* = f(V)$ とおく。このとき $g_V : V^* \to \mathbf{R}^n$ を次のように定義する: $y \in V^*$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_1, ..., x_p\}$ のとき

$$g_V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{p} i(x_i, f) x_i$$

ここで $m = \sum_{i=1}^{p} i(x_i, f) = \mu(V, f)$ である。以下 g_V が ACL^n であることを証明する。

7.18. g_V は連続である。

[4] とくに $f\overline{G_i} \setminus f(\overline{G_i} \cap B_f)$ の有理点中心を中心にもち、半径も有理数であるような n−cubes の列を考えて Vitali の被覆定理を適用すればよい [YOS1976, §5.2]

Proof. $y_0 \in V^*$, $f^{-1}(y_0)\cap V = \{x_{01},...,x_{0p}\}$, $\epsilon > 0$ とする。2.8, 2.12(1) より r を十分小さくとれば $U_i = U(x_{0i}, f, r)$ は x_{0i} のノーマル近傍で、かつ $\overline{U_i}\cap\overline{U_j}$ $(i \neq j)$, $\mathrm{diam}(U_i) < \epsilon$ が成立する。すべての $y \in B(y_0, r)$ に対して $\mu(y, f, U_i) = i(x_{0i}, f)$. $m = \sum_{i=1}^{p} i(x_{0i}, f)$ だから $f^{-1}(y)\cap V$ はすべて $U_1 \cup \cdots \cup U_p$ に含まれ、おのおのの U_i には重複度を込めて $i(x_{0i}, f)$ 個の点が含まれる。よって

$$|g_V(y) - g_V(y_0)| \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{p} i(x_{0i}, f)\mathrm{diam}(U_i) < \epsilon.$$

したがって g_V は連続である。

7.19. 次に g_V が ACL であることを示す。V^* の各点の近傍において g_V が ACL であることをいえばよい。y_0 を V^* の任意の点とし、$f^{-1}(y_0)\cap\{x_1,...,x_q\}$ とする。次に $r_0 > 0$ を十分小さくとって $U(x_i, f.r_0)$, $(i = 1,...,q)$ が x_i のノーマル近傍となるようにする。$Q(=\overline{Q} \subset B(y_0, r_0))$ を $n-$closed cube とし、いま $Q = Q_0 \times J$ と表わす。ここで Q_0 は $n-1$ 次元 closed cube, $J = [a, b]$ は x_n 軸上の閉区間である。

$Q \subset int\tilde{Q}$ となる $n-$closed cube $\tilde{Q}$をとり、同じように $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0 \times \tilde{J}$ と表わす。このとき $J \subset int\tilde{J}$. Borel 集合 $A \subset \tilde{Q}_0$ に対して $\varphi(A) = m(V \cap f^{-1}(A \times \tilde{J})$ とおくと、φ は $\tilde{Q}_0$ の Borel 部分集合族上の完全加法的集合関数を定める。[RR1955, pp.204–209] より $\tilde{Q}_0$ のほとんどすべての点で upper derivative $\bar{\varphi}'(z) < \infty$ である。そのような z で Q_0 に属しているものに対して $J_z = \{z\} \times J$ とおく。次のことを証明しよう。

7.20. g_V は J_z 上で絶対連続である。

このことがいえると、x_n軸に平行なほとんどすべての線分 $(\subset Q_0)$ 上での g_V の絶対連続性がいえる。他の座標軸に平行な線分に関しても、同じ議論が適応できるので、g_V が ACL であることがわかる。7.20 を示すために一つの補題を準備する。

7.21. $h : J_z \to U = \cup_{i=1}^{q} U(x_i, f, x_0)$ は連続で $f \circ h$ が J_z 上の恒等写像になるものとする。このとき、h は絶対連続である。

Proof. $F_1 = [y_1, \overline{y}_1], ..., F_p = [y_p, \overline{y}_p]$ を J_z 上の disjoint な閉区間列とする。ここで $y_i = (z, t_i), \overline{y}_i = (z, \overline{t}_i)$ とおくとき

$$a \leq t_1 < \overline{t}_1 < t_2 < \cdots < \overline{t}_{p-1} < t_p < \overline{t}_p \leq b$$

であると仮定する。$F = F_1 \cup \cdots \cup F_p$ とおく。c を $H^*(x, f) < c$ $(x \in U)$ をみたす定数、k_0 を $1/k_0 < \mathrm{dist}(Q, \partial\tilde{Q})$ をみたす正整数とする。$k \geq k_0$ のとき

$$F_k = \{y \in F : 0 < r < 1/k \text{ ならば } L^*(h(y), f, r) \leq cl^*(h(y), f, r)\}$$

を定めると $F_k \subset F_{k+1}$ かつ $F = \cup_{k \geq k_0} F_k$. $y \mapsto L^*(h(y), f, r)$ は下半連続、$y \mapsto l^*(h(y), f, r)$ は連続ゆえ、各 F_k はコンパクトである。

η を任意の正数とし、$k > k_0$ を一つ固定する。このとき次の条件をみたす正数 δ が存在する:任意の $r \in (0, \delta)$ に対して、J_z の延長である直線上の開区間 $\Delta_1, ..., \Delta_l$ による F の被覆を

(1) $m_1(\Delta_j) = 2r,\ j = 1, 2, ..., l.$
(2) Δ_j の中心
(3) F_k の各点は高々 2 つの Δ_j に含まれる。
(4) $lr < m_1(F_k) + \eta$
をみたすようにとれる。次に t を任意の正数とし、$\alpha = \min_{1\le i\le p-1} |y_{i+1} - \overline{y}_i|$ とおく。$r > 0$ を $r < \min(\delta, 1/k, \alpha/2)$ かつ (一様連続性より) $y, y' \in J_z, |y - y'| < 2r$ ならば $|h(y) - h(y')| < t/(2c)$ となるように選ぶ。$u_j = h(y_j), U_j = U(u_j, f, r), L_j^* = L^*(u_j, f, r), (j = 1, ..., l)$ とおく。$y_j \in F_k$ と $r < 1/k$ により $L_j^* \le cl_j^*$. 一方 $l_j^* \le \mathrm{diam}(h\Delta_j) < t/(2c)$ だから $\mathrm{diam}(U_j) \le 2L_j^* \le 2cl_j^* < t$. $h(\Delta_j) \subset U_j$ だから、

$$\Lambda_1^t(hF_k) \le \sum_{j=1}^{l} \mathrm{diam}(U_j) \le 2c \sum_{j=1}^{l} l_j^*$$

Hölder の不等式より

$$\Lambda_1^t(hF_k)^n \le 2^n c^n l^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{l} (l_j^*)^n \right)$$

$lr < m_1(F_k) + \eta < m_1(F) + \eta$ と $\Omega_n (l_j^*)^n \le m(U_j)$ から

$$\Lambda_1^t(hF_k)^n \le \frac{2^n c^n (m_1(F) + \eta)^{n-1} \sum_{j=1}^{l} m(U_j)}{\Omega_n r^{n-1}}.$$

$B = B^{n-1}(z, r)$ とおくと、各 U_j は $V \cap f^{-1}(B \times \tilde{J})$ に含まれる。上の (3) と $r < \alpha/2$ より、どの点も 3 つ以上の異なる U_j に含まれることはないから

$$\Lambda_1^t(hF_k)^n \le \frac{C(m_1(F) + \eta)^{n-1} \varphi(B)}{m(B)}, \quad C = 2^{n+1} c^n \Omega_{n-1}/\Omega_n.$$

従ってまず $r \to 0$ として、次に $\eta \to 0$、次に $t \to 0$ そして最後に $k \to \infty$ として

$$\Lambda_1^t(hF_k)^n \le C\bar{\varphi}'(z) m_1(F)^{n-1}.$$

$\sum_{i=1}^{p} |h(\overline{y}_i) - h(y_i)| \le \Lambda_1^t(hF_k)$ だから J_z 上で　h は絶対連続である。

最後に g_V は ACL^n であることをしめす。$y \in V' = V^* \setminus f(V \cap B_f)$ とし $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_m\}$ とおく。$r > 0$ を十分小さくとって $V_j = U(x_j, f, r)(\subset V)$ とおいたとき $f|_{V_j}$ が同相であるようにする。そして $h_j = (f|_{V_j})^{-1} : B^n(y, r) \to V_j$ とおく。このとき

$$g_V(y) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} h_j(y).$$

これから V' に含まれる disjoint な open $n-$cube の列 Q_iで、それらの閉包は V' を覆い、$f^{-1}Q_j \cap V$ がちょうど m 個の成分 $D_{ij}, j = 1, ..., m,$ からなり、さらに f は $K-$qc 逆写像 $h_{ij} : Q_i \to D_{ij}$ を与えるようなものが存在する。Hölder の不等式をもちいると a.e. $y \in Q_i$ に対して

$$\left| \frac{\partial g_V}{\partial x_k}(y) \right|^n \ \le \ |(g_V)'(y)|^n \le \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |h'_{ij}(y)| \right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|h'_{ij}(y)|}{m}\right)^n\right)\left(\sum_{j=1}^{m}1\right)^{n-1} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|h'_{ij}(y)|^n \\
&\le \frac{K}{m}\sum_{j=1}^{m}J(y,h_{ij}).
\end{aligned}
$$

$m(B_f)=0$ だから

$$
\begin{aligned}
\int_{V^*}\left|\frac{\partial g_V}{\partial x_k}(y)\right|^n dx &= \sum_i \int_{Q_i}\left|\frac{\partial g_V}{\partial x_k}(y)\right|^n dx \\
&\le \frac{K}{m}\sum_{i,j}\int_{Q_i}J(y,h_{ij})dx \\
&= \frac{K}{m}\sum_{i,j}m(h_{ij}Q_i) = \frac{K}{m}\sum_i m(f^{-1}Q_i\cap V) \\
&\le \frac{K}{m}m(V)<\infty
\end{aligned}
$$

以上により $g_V\in \mathrm{ACL}^n$ がしめせた。

7.22. さて G を $\overline{G_0}\subset G$ となる G の部分領域、Γ を G_0 内の closed path 全体からなる曲線族とする。$\Gamma_*=f\Gamma$ から不都合な path たちを特徴付けて、さらにそれらが modulus 0 の曲線族をなすことをしめす。まず

$$\Gamma_{*a}=\{\beta\in\Gamma_*:\beta \text{ は rectifiable でない }\}$$

とおくと、Proposition 4.7 より $M(\Gamma_{*a})=0$.

$\beta=f\circ\alpha\in\Gamma_*\setminus\Gamma_{*a}$ ならば β に関する α の f-表現 α^* を考えることができる。Γ_* の部分族を以下のように定める。

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{*b} &= \{\beta\in\Gamma_*:\alpha^* \text{ は } [0,l(\beta)]\setminus\alpha^{*-1}(B_f) \text{ で rectifiable でない }\} \\
\Gamma_{*c} &= \{\beta\in\Gamma_*: m_1(\alpha^{*-1}(B_f))>0\}
\end{aligned}
$$

$M(\Gamma_{*b})=0$ をしめす。disjoint な open $n-$cube の列 $\{Q_j\}$ と、Q_j より少し大きい open $n-$cube からなる列 $\{Q'_j\}$ を

$$\overline{Q_j}\subset Q'_j\subset G_0\setminus B_f,\ \ G_0\setminus B_f=\cup_j\overline{Q_j},\ \ m(Q'_j)<2m(Q_j),$$

さらに $f|_{Q'_j}$ が同相写像となるようにとる。$G_0\setminus B_f$ の Whitney 分解 ([ST1970, p. 16]) の細分をもちいることによって、このような $\{Q_j\}$ の存在がしめせる。$h_j=(f|_{Q'_j})^{-1}$ は K-qc 写像である。各 j と $y\in fQ_j$ に対して

$$L_j(y)=\limsup_{|x|\to 0}\frac{|h_j(y+x)-h_j(y)|}{|x|}$$

は Borel 関数で y において h_j が微分可能ならば $L_j(y)=|Dh_j(y)|$ をみたす。 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $\rho=\sup_j L_j\chi_{fQ_j}$ を定義する。$A_j=\{y\in fQ_j:h_j \text{ は } y \text{ で微分可能 }\}$ とおくと (Theorem 6.4 (2))

より $m(fQ_j)=m(A_j)$ だから

$$(7.23)\qquad \int \rho^n dx \le \sum_j \int_{fQ_j} L_j^n dx = \sum_j \int_{A_j} |Dh_j(y)|^n dx$$

$$\le K \sum_j \int_{A_j} J(y,h_j)dx \le K \sum_j m(Q_j) \le m(G_0)$$

$\Gamma_*^{(j)}$ を $f(Q_j')$ に含まれる path で、その上で h_j が絶対連続でないもの全体からなる族とする。Fuglede の定理 4.25 より $M(\cup_j \Gamma_*^{(j)}) \le \sum_j M(\Gamma_*^{(j)})=0$ である。

$\Gamma_{*d}=\cup_j\Gamma_*^{(j)}$ によって minorize される Γ_* の極大部分曲線族

とおくと $M(\Gamma_{*d})=0$. β を $\Gamma_{*b}\setminus\Gamma_{*d}$ の任意の path とする。$[0,l(\beta)]\setminus\alpha^{*-1}(B_f)$ は $[0,l(\beta)$ の開部分集合で、その成分である区間をさらに細分して、$[0,l(\beta)]\setminus\alpha^{*-1}(B_f)=\cup_{k=1}^\infty[a_k,b_k]$、$\beta^0[a_k,b_k]$ はある $fQ_j'(k)$ に含まれるようにすると

$$(7.24)\qquad \int_{a_k}^{b_k}\alpha^*(s)ds \le \int_{a_k}^{b_k} L_{j(k)}(\beta^0(s))ds \le \int_{\beta^0|[a_k,b_k]} \rho ds.$$

仮定より α^* は $\cup_k[a_k,b_k]$ で rectifiable でないから、(7.24) より

$$\int_\beta \rho ds = \infty$$

したがって、各正整数 ν に対して $\rho/\nu \in F(\Gamma_{*b}\setminus\Gamma_{*d})$. (2.23) から $M(\Gamma_{*b}\setminus\Gamma_{*d})=0.M(\Gamma_{*d})=0$ だったから $M(\Gamma_{*b})=0$ である。

次に $M(\Gamma_{*c})=0$ をしめす。正整数 k に対して

$$\Gamma_{*c,k}=\{\beta\in\Gamma_* : m_1\{s:\alpha^*(s)\in B_f\}>1/k\}$$

とおくと $\Gamma_{*c}=\cup_{k=1}^\infty\Gamma_{*c,k}$ だから、各 k に対して $M(\Gamma_{*c,k})=0$ をしめせばよい。fB_f は measure 0 だから (Theorem 6.4.(4))、任意の $\epsilon>0$ に対して fB_f を含む開集合 G_ϵ で $m(G_\epsilon)<\epsilon$ となるものをとる。G_ϵ の特性関数を χ 、$\rho_\epsilon=k\chi$ とおくと $\rho_\epsilon\in F(\Gamma_{*c,k})$ で

$$\int \rho_\epsilon^n dx = k^n\epsilon.$$

$\epsilon\to 0$ として $M(\Gamma_{*c,k})=0$

証明の最終段階に進む前にもう 2 つ補題を用意する。

7.25. Notation. $\gamma: I\to \mathbf{R}^n$ を path とする。
(1) $U\subset I$ を開部分集合とするとき、γ が U 上で rectifiable であるとは、γ が U の各成分 (それは開区間または半開区間) 上で rectifiable で、かつ各成分上ごとに計った γ の長さの和が有限であるときにいう。

(2) γ を rectifiable であるとし、I が開区間または半開区間ならば $\tilde{\gamma}$ を γ の closed extension、I が閉区間ならば $\tilde{\gamma}=\gamma$とする。$s_{\tilde{\gamma}}: I \to [0, l(\gamma)]$ を弧長関数とする。I の Borel 部分集合 B に対して

$$l(\gamma, B) = m_1(s_{\tilde{\gamma}} B)$$

とおく。

7.26. Lemma. $\gamma_1 : I = [a,b] \to \mathbf{R}^n$ を rectifiable path、$B \subset I$ を $l(\gamma_1, B) = 0$ である閉集合とする。$\gamma_2 : I = [0, l] \to \mathbf{R}^n$ を $I \setminus B$ で rectifiable な path で $t \in B$ ならば $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ であるものとする。このとき γ_2 は rectifiable で $l(\gamma_2, B) = 0$.

Proof. 任意の正数 ϵ に対して B を次の条件をみたす閉区間 $[t_i, \bar{t_i}]$, $i = 1, ..., m,$ で覆う。

$$\{t_i, \bar{t_i}\} \subset B, \quad \bar{t_i} < t_{i+1}, \text{ かつ } \sum_{i=1}^{m} l(\gamma_1, [t_i, \bar{t_i}]) < \epsilon$$

$\{t_1, \bar{t_1}, ..., t_m, \bar{t_m}\}$ を含むの任意の分割

$$\tau : a = s_1 < s_2 < ... < s_N = b$$

をとる。ここで、もしある s_k が $[t_i, \bar{t_i}]$ の内点ならば、区間列 $J = \{[t_i, \bar{t_i}]\}_1^m$ から $[t_i, \bar{t_i}]$ を取り除いて、かわりに $[t_i, \bar{t_i'}], [t_i', \bar{t_i}]$ を付け加える。ここで

$$\bar{t_i'} = \sup\{t \in B : t \leq s_k\}, \quad t_i' = \inf\{t \in B : t \geq s_k\}.$$

B は閉集合だから $\bar{t_i'}, t_i' \in B$. すべての s_k についてこのような区間のとりかえを行なってできる新しい区間列を改めて $J = \{[t_i, \bar{t_i}]\}_1^m$ と書き、また τ に $\bar{t_i'}, t_i'$ を付け加えてできる細分も改めて

$$\tau : a = s_1 < s_2 < ... < s_N = b$$

とおく。すると各 $[s_k, s_{k+1}]$ は J に含まれるか、または $(s_k, s_{k+1}) \subset I \setminus B$ をみたすかのいずれかである。J_1 を前者のような区間の集合、$J_2 = J \setminus J_1$ とおく。折れ線の長さの和による近似を考えると

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma_2, \tau) &= \sum_{J_1} |\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k+1})| + \sum_{J_2} |\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k+1})| \\
&= \sum_{J_1} |\gamma_1(s_k) - \gamma_1(s_{k+1})| + \sum_{J_2} |\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{m} l(\gamma_1, [t_i, \bar{t_i}]) + l(\gamma_2, I \setminus B) \\
&< \epsilon + l(\gamma_2, I \setminus B).
\end{aligned}$$

ϵ は任意ゆえ $\sigma(\gamma_2, \tau) \leq l(\gamma_2, I \setminus B)$. I の分割 τ についての上限をとると $l(\gamma_2) = l(\gamma_2, I \setminus B) < \infty$ となり γ_2 は rectifiable となる。すると $E \to l(\gamma_2, E)$ は I の Borel 集合族上の完全加法的測度となるから ([SAK1937, Chap. IV, §8])、$l(\gamma_2, B) = l(\gamma_2) - l(\gamma_2, I \setminus B) = 0$

7.27. Lemma. $\gamma : I = [a,b] \to \mathbf{R}^n$ を一つの path、B を I に含まれる閉集合、$E \subset I$ を $\bar{E} \subset E \cup B$ かつ $E \cap B = \emptyset$ をみたす集合とする。もし γ が $I \setminus (E \cup B)$ で rectifiable で各 $t \in I \setminus B$ に対して t の近傍 V で V 上 γ は rectifiable かつ $l(\gamma, V) = l(\gamma, V \setminus E)$ をみたすものが存在するならば γ は $I \setminus B$で rectifiable で $l(\gamma, I \setminus B) = l(\gamma, I \setminus (E \cup B))$.

Proof. まず $\overline{E \cup B} = \overline{E} \cup B = E \cup B$ より $E \cup B$が閉集合であることに注意する。$l(\gamma, I \setminus B) \geq l(\gamma, I \setminus (E \cup B))$ は明らかだから逆向きの不等式をしめす。

$I \setminus B = \cup_\mu I_\mu$ (I の開部分区間の disjoint 和) と表わす。γ が各 I_μ 上で rectifiable となる。なぜならば、任意に $\epsilon > 0$ を与えたとき、分割の目が十分小さい $\bar{I}_\mu$ の分割

$$\tau_\mu : t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$$

をとると $|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| < \epsilon$, $|\gamma(t_{N-1}) - \gamma(t_N)| < \epsilon$ かつ $i = 1, \dots, N-2$ について

$$l(\gamma, [t_i, t_{i+1}]) = l(\gamma, [t_i, t_{i+1}] \setminus E)$$

をみたすようにとれる (すなわち $[t_i, t_{i+1}]$, $(2 \leq i \leq N-2)$ は補題の主張にあるような近傍 V に含まれるようにとっているのである。) このとき

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma, \tau_\mu) &= \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{i=1}^{N-2} l(\gamma, [t_i, t_{i+1}]) \\
&= 2\epsilon + \sum_{i=1}^{N-2} l(\gamma, [t_i, t_{i+1}] \setminus E) \\
&\leq 2\epsilon + l(\gamma, I_\mu \setminus E).
\end{aligned}$$

これから γ は I_μ 上 rectifiable で $\epsilon \to 0$ として $l(\gamma, I_\mu) \leq l(\gamma, I_\mu \setminus E)$. これを μ について和をとって $l(\gamma, I \setminus B) \leq l(\gamma, I \setminus (E \cup B))$. 仮定より $l(\gamma, I \setminus (E \cup B)) < \infty$ だから γ は $I \setminus B$ 上で rectifiable である。

正整数 k に対して $B_k = \{x \in B_f \cap G_0 : i(x, f) = k\}$ とおく。$B_f \cap G_0 = \cup_{k \geq 2} B_k$ である。$\beta = f \circ \alpha \in \Gamma_* \setminus \Gamma_{*a}$ に対して $E(B_k, \alpha^*) = \{s : \alpha^*(s) \in B_k\}$ とおく (ここで α^* は β に関する α の f-表現)。このとき modulus 0 の部分族を除くすべての Γ_* の path β に対して、$I = [0, l(\beta)]$ とおくとき

(Φ_m) α^* は $I \setminus \cup_{k > i} E(B_k, \alpha^*)$ 上で rectifiable である;

(Ψ_m) α^* は $I \setminus \cup_{k > i} E(B_k, \alpha^*)$ で絶対連続、すなわち、$E \subset I \setminus \cup_{k > i} E(B_k, \alpha^*)$ が $m_1(E) = 0$ をみたせば $l(\alpha^*, E) = 0$

であることを m についての帰納法でしめす。

$m=1$ のときは modulus 0 の部分族 $\Gamma_{*a}\cup\Gamma_{*b}$ を除くすべての Γ_* の path に対して (Φ_1) が成立。さらに modulus 0 の部分族 Γ_{*d}を除いた残りの Γ_* の path に対して $[0,l(\beta)]\setminus\alpha^{*-1}(B_f)=\cup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$ を $M(\Gamma_{*b}=0$ をしめしたときにもちいた分割とすると $\beta^0[a_k,b_k]$ は、ある $fQ'_{j(k)}$ に含まれ、その上で $h_{j(k)}$ が絶対連続である。よって $E\subset I\setminus\alpha^{*-1}B_f$ が $m_1(E)=0$ をみたせば

$$l(\alpha^*|_{[a_k,b_k]},E\cap[a_k,b_k])=l(h_{j(k)}\circ\beta^0|_{[a_k,b_k]},E\cap[a_k,b_k])=0$$

である。これから $l(\alpha^*,E\cap[0,l(\beta)])=0$. したがって (Ψ_1) も成立。

B_m ををみたす高々可算個のノーマル領域 $\{V_\mu\}$ で覆う。このとき 7.17 で構成した $g_\mu=g_{V_\mu}$ は $V_\mu^*=fV_\mu$ 上で ACL^n である。V_μ^* に含まれる path でその上で g_μ が絶対連続でないようなもの全体を $\Gamma_{*m\mu}$ とおくと Fuglede の定理 4.25 より $M(\Gamma_{*\mu})=0$ である。したがって $\cup_{m,\mu}\Gamma_{*m\mu}<\Gamma_{*e}$ をみたす Γ_* の極大部分曲線族 Γ_{*e} をとると $M(\Gamma_{*e})=0$.

$$\Gamma_{*0}=\Gamma_{*a}\cup\Gamma_{*b}\cup\Gamma_{*c}\cup\Gamma_{*d}\cup\Gamma_{*e}$$

とおく。$M(\Gamma_{*0})=0$ である。

今、(Φ_{m-1}) と (Ψ_{m-1}), $(m\geq 2)$ とが成立したとする。$\beta\in\Gamma_*\setminus\Gamma_{*0}$ とする。仮定より α^* は $I\setminus\cup_{k>m-1}E(B_k,\alpha^*)$ 上 rectifiable である。ここで $I=[0,l(\beta)]$. もし $s\in E(B_m,\alpha^*)$ ならば、$\alpha^*(s)\in V_\mu$ であるとすると $\alpha^*(s)$ のノーマル近傍 U を $U\subset V_\mu$ となるようにとる。そして s を含む I の開部分区間 V を $\alpha^*(\bar{V})\subset U$ となるようにとる。ここで肝心なのは、$t\in V$ のとき $U\cap f^{-1}\beta^0(t)=\{x_1,x_2,...,x_a\}$ とすると、$i(\alpha^*(s),f)=m=\sum_{i=1}^{t}i(x_i,f)$ だから

$$V\cap\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*)=\emptyset$$

が成り立つことである。このことから $V\cap\cup_{k>m-1}E(B_k,\alpha^*)=V\cap E(B_m,\alpha^*)$.

$\alpha^*|_{\bar{V}}$ は (Φ_{m-1}) より $\bar{V}\setminus\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*)$ で rectifiable であり、g_μ の定義より

$$g_\mu\circ\beta^0(s)=\alpha^*(s)\quad(s\in E(B_m,\alpha^*))$$

である。$\beta\in\Gamma_{*b}$ より $l(g_\mu\circ\beta^0|_{\bar{V}},\bar{V}\cap E(B_m,\alpha^*))=0$. よって Lemma 7.26 より $\alpha^*|_{\bar{V}}$ (したがって $\alpha^*|_V$) は rectifiable で $l(\alpha^*,V)=l(\alpha^*,V\setminus\cup_{k>m-1}E(B_k,\alpha^*))$. すると α^* に対して $B=\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*)$, $E=E(B_m,\alpha^*)$ として Lemma 7.27 を適用すると α^* は $I\setminus\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*)$ で rectifiable で (Φ_m) が成立。さらに $l(\alpha^*,\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*))=l(\alpha^*,\cup_{k>m-1}E(B_k,\alpha^*))$, すなわち

$$l(\alpha^*,E(B_m,\alpha^*))=0. \tag{7.28}$$

$E\subset I\setminus\cup_{k>m}E(B_k,\alpha^*)$ が $m_1(E)=0$ ならば

$$E=(E\cap E(B_m,\alpha^*))\cup(E\cap(I\setminus\cup_{k>m-1}E(B_k,\alpha^*)))=E_1\cup E_2$$

と分解すると (Ψ_{m-1}) と (7.29) より $l(\alpha^*,E_1)=l(\alpha^*,E_2)=l(\alpha^*,E)=0$ よって (Ψ_m) も成立。

G_0 はコンパクトだから、ある $M>0$ が存在して $x \in G_0$ に対して一様に $i(x,f)<M$である。したがって $\cup_{k>M} E(B_k,\alpha^*)=\emptyset$. これから $\beta = f\circ\alpha \in \Gamma_* \setminus \Gamma_{*0}$ ならば α^* は絶対連続である。すなわち f は α 上で absolutely precontinuous である。(Poleclkii の補題 7.11 の証明終り)

7.30. Poleckii-Väisälä の不等式の応用 Poleckii-Väisälä の不等式をもちいて qr 写像の性質をいくか導いてみよう。ここでは局所同相でない qr 写像が、その分岐集合に rectifiable な path を含めば、その dilatation が 2 以上であることと、コンデンサーの容量不等式について述べる。

7.31. Theorem.([M1970],[PO1970])
$f: G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像とし、$B_m = \{x \in G : i(x,f)=m\}$ とおく。もし B_m に含まれる non-constant rectifiable path γ が存在すれば $K_I(f) \geq m$.

Proof. $x \in G$ と $t>0$ $(B(x,t)\subset G)$, に対して、6.11 のように $L(x,f,t), l(x,f,t), H(x,f) = \limsup_{t\to 0} L(x,f,t)/l(x,f,t)$ を定める。まず $i(x,f)=m$ ならば $t_0>0$ が存在して $t<t_0$ ならば、t によらないある定数 C_1 と $a=(m/K_I(f))^{1/(n-1)}$ に対して

$$l(x,f,t) < C_1 t^a \tag{7.32}$$

であることをしめす。$r_0>0$ を $V=U(x,f,r_0)$ が x のノーマル近傍となるようにとる。$t_0 = \inf\{|x-y| : y \in \partial V\}$ とおく。$0<t<t_0$ とし ring domain $R_* = B(f(x),r_0)\setminus \overline{B}(f(x),r)$ を定める (ここで $r=l(x,f,t)$).$f|_V$ は proper 写像 (すなわち $B(f(x),r_0)$ のコンパクト部分集合 K に対して $(f|_V)^{-1}K$ は V のコンパクト部分集合) となるから $R=(f|_V)^{-1}R_*$ も ring domain となる。$R_1 = B(x,t_0)\setminus \overline{B}(x,t)$ とおく。曲線族を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Delta(S^{n-1}(x,t_0), S^{n-1}(x,t); R_1), \quad \Gamma = \Delta(C_0, \partial V; R) \quad (C_0 = (f|_V)^{-1}(S^{n-1}(f(x),r)))\\
\Gamma_* &= \Delta(S^{n-1}(f(x),r_0), S^{n-1}(f(x),r); R_*)
\end{aligned}$$

path $\beta \in \Gamma_*$ を任意にとる。今 $\beta(0) \in S^{n-1}(f(x),r)$, $\beta(1) \in S^{n-1}(f(x),r_0)$ であるとしよう。$f^{-1}\beta(0)\cap V = \{x_1,...,x_k\} \subset C_0$ とおくと $\sum_{i=1}^k i(x_i,f)=m$ である。Theorem 5.4 をもちいて $\beta|_{[0,1)}$ の極大 f-lifting $\alpha_1,...,\alpha_m$, $\alpha_j:[0,c_j)\to G$ を得る。常に $\alpha_j(t)\in R\subset V$ だから Lemma 5.5 における $t\to c_j$ のとき $\alpha_j(t)\to\partial G$ というケースは起こらない。したがって $c_j=1$ で $t\to 1$ のとき $\alpha_j(t)$ は ∂V の点に収束し、このことより $\alpha_j \in \Gamma$ がわかる。Väisälä の不等式と $\Gamma > \Gamma_1$ であることから

$$\begin{aligned}
\omega_{n-1}\left(\log\frac{t_0}{t}\right)^{1-n} &= M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma)\\
&\leq \frac{m}{K_I(f)} M(\Gamma_*) = \frac{m\omega_{n-1}}{K_I(f)}\left(\log\frac{r_0}{r}\right)^{1-n}
\end{aligned}$$

これより

$$r = l(x,f,t) \leq r_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^a$$

よって (7.32) がしめされた。

[MRV1971, Theorem 4.5] より各 $x \in G$ に対して n と $i(x,f)K_O(f)$ のみに依存する定数 C_2 があって

$$H(x,f) < C_2.$$

$x \in B_m$ であるときは C_2 は x にも依らない。このとき十分小さい $t > 0$ に対して

$$L(x,f,t) < H(x,f)l(x,f,t) < C_1C_2t^a. \tag{7.33}$$

もし $K_I(f) < m$ ならば $a > 1$ となるので (7.33) より、f は $x \in B_m$ で微分可能で $Df(x) = 0$ (零行列)。 $\gamma : [0,l] \to G$ を弧長でパラメトライズされた rectifiable な path とすると

$$f(\gamma(s)) = \int_0^s Df(\gamma(s))\gamma'(s)ds + f(\gamma(0)) = f(\gamma(0)) \quad (s > 0)$$

すなわち $f \circ \gamma$ は constant path である。このことは f の discreteness に矛盾する。(Theorem 7.31 の証明終り)

7.34. Martio の予想 $n \geq 3$ のとき $f : G \to \mathbf{R}^n$ が qr 写像で $K_I(f) < 2$ ならば f は局所同相であるか?

7.35. コンデンサーとその容量 $\mathbf{R}^n$ の開部分集合 A と A に含まれるコンパクト集合 C との組 $E = (A,C)$ をコンデンサーと呼ぶ。コンデンサー $E = (A,C)$ の容量 cap$E$ を

$$\mathrm{cap}E = \inf\left\{\int |\nabla u|dx : u \in C_0^\infty(A), u(x) \geq 1 \text{ for } x \in C\right\} \tag{7.36}$$

で定義する。ここで ∇u は u の gradient

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Γ_E を path $\beta : [a,b) \to A$ で $\beta(a) \in C$, $\beta(t) \to \partial A \cup \{\infty\}$ をみたすもの全体とすると、Ziemer の結果 [KIM1970, 3.8]([RI1993, Proposition 10.2] も参照) より

$$\mathrm{cap}E = M(\Gamma_E)$$

が成り立つ。2つのコンデンサー $E_1 = (A_1,C_1), E_2 = (A_2,C_2)$ に対し、$A_1 \subset A_2, C_2 \subset C_1$ ならば $\mathrm{cap}E_1 \geq \mathrm{cap}E_2$. また $0 < a < b$ のとき

$$\mathrm{cap}(B^n(b), \overline{B^n}(a)) = \omega_{n-1}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{1-n}$$

である。

7.37. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像、$E = (A,C)$ を A が G に含まれるコンデンサーとすると $fE = (fA, fC)$ もコンデンサーになる。C 上の f の minimal multiplicity $M(f,C)$ を

$$M(f,C) = \inf_{y \in fC} \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap C} i(x,f)$$

で定義する。このとき次の不等式が成り立つ。

7.38. Capacity Inequality [V1972, Theorem 3.17] $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像、$E = (A, C)$ を A が G に含まれるコンデンサーとすると

$$\mathrm{cap} fE \leq \frac{K_I(f)}{M(f,C)} \mathrm{cap} E. \tag{7.39}$$

Proof. $\Gamma = \Gamma_E, \Gamma' = \Gamma_{fE}$ とおく。$\beta : [a,b) \to fA$ を Γ' に属する path とする。$m = M(f,C)$ とおいて $f^{-1}(\beta(a))$ の中から点 $x_1, ..., x_k$ を $\sum_{i=1}^k i(x_i, f) \geq m$ となるように選ぶ。path-lifting theorem 5.4 より $x_1, ..., x_k$ のどれかの点を始点にもつ m 個の β の極大 $f|_A$−liftings $\alpha_j : [a, c_j) \to G,\ j = 1, ..., m,$ をとる。Lemma 5.5 より $t \to c_j$ のとき $\alpha_j(t) \to \partial A \cup \infty$ となるから $\alpha_j \in \Gamma$, よって Theorem 7.2 の条件がみたされる。したがって (7.39) を得る。

7.40. 曲線族の modulus の qr 写像による変化に関するその他の不等式. [V1971, 3.8, 3.9] まず例から始めよう。$\mathbf{R}^2$ と複素平面 $\mathbf{C}$ を同一視する。Q を長方形 $\{z : 0 < \mathrm{Re} z < 1, 0 \leq \mathrm{Im} z < 2\pi m\}$ とし $f(z) = e^z$ とおく。f は正則写像だからもちろん qr 写像で fQ は annulus $B^2(e) \setminus \overline{B^2}$ である。Γ を Q の上辺と下辺をを結ぶ虚軸に平行な線分からなる族とする。このとき

$$M(f\Gamma) = 1/(2\pi m^2) = M(\Gamma)/m$$

であるが、ここで Theorem 7.2 の仮定はみたされていないことに注意する。すなわち Γ の曲線と $f\Gamma$ の曲線との対応は 1 対 1 である。そこで closed path $\alpha : [a,b] \to G$ に対して写像 f が α 上を m 周するということを $\beta = f \circ \alpha$ が rectifiable で、β^0 を β の正則表現とするとき α の β に関する f-表現 α^* について

(1) $\beta^0(t + jc/m) = \beta^0(t)\ \ (j = 1, ..., m-1)$, かつ

(2) $\alpha^*(t + jc/m) \neq \alpha^*(t),\ \ (0 \leq t < t + jc/m, j = 1, ..., m-1)$

が成り立つことで定義する。このとき上の例は以下に述べる不等式が sharp であることをしめしている。

7.41.Theorem. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像、Γ を G 内の曲線族、m を正整数とし、f は Γ の各 path 上を m 周するとする。このとき次の不等式が成り立つ:

$$M(\Gamma') \leq \frac{K_I(f)}{m} M(\Gamma).$$

Proof. Theorem 7.2 の証明と同じ記号を使う。ここでは、$\beta = f \circ \alpha$ に対して

$$\int_\beta \rho' ds \geq 1$$

をしめすのに次のようにする。$h = l(\beta)/c$ とおくと

$$\int_\beta \rho' ds = m \int_0^h \rho'(\beta^0(t)) dt.$$

$0<t<h$ のとき $\alpha^*(t), \alpha^*(t+h), ..., \alpha^*(t+(m-1)h)$ は $f^{-1}(\beta^0(t))$ の互いに相異なる点で

$$\rho'(\beta^0(t)) > \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma(\alpha^*(t+jh)) \quad (t \in (0,h))$$

が成り立つ。ほとんどいたるところの $t \in [0, l(\beta)]$ に対して $\sigma(\alpha^*(t)) \geq \rho(\alpha^*(t))|(\alpha^*)'(t)|$ だから

$$\int_\beta \rho' ds = \sum_{j=0}^{m-1}\int_0^h \rho(\alpha^*(t+jh))|(\alpha^*)'(t+jh)|dt = \int_\alpha \rho ds \geq 1.$$

残りは Theorem 7.2 の証明と同様である。

8 歪曲定理と Zorich の定理

8.1.Theorem. (Schwarz の補題の quasiregular version) $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ を qr 写像で $f(0) = 0$ をみたすものとするとき、各 $x \in \mathbf{B}^n$ に対して

$$|f(x)| \le \varphi_{n,K}(|x|) \le \lambda^{1-\alpha}|x|^\alpha \quad (K = K_I(f), \alpha = K^{1/(1-n)}). \tag{8.2}$$

Proof. f は非定数としてよい。$x \in \mathbf{B}^n$ に対して $J[0, x]$ を 0 と x を結ぶ双曲的測地線分とする。このときコンデンサー $E = (\mathbf{B}^n, J[0, x])$ に対して (4.19) より

$$\mathrm{cap} fE = \mathrm{cap}(f\mathbf{B}^n, fJ[0,x]) \ge \mathrm{cap}(\mathbf{B}^n, fJ[0,x]) \ge \gamma_n(1/|f(x)|).$$

一方 capacity inequality (7.39) より $\mathrm{cap} fE \le K_I(f)\mathrm{cap}E = K_I(f)\gamma_n(1/|x|)$. すなわち

$$\gamma_n(1/|f(x)|) \le K_I(f)\gamma_n(1/|x|).$$

これより (8.2) がしたがう。

8.3.Theorem.(qr 写像の局所 Hölder 連続性) f を $\mathbf{R}^n$ の部分領域 G で定義された有界 qr 写像、$F \subset G$ をコンパクト部分集合とする。$\alpha = K_I(f)^{1/(1-n)}, C = \lambda_n^{1-\alpha}\mathrm{dist}(F, \partial G)^{-\alpha}\mathrm{diam}(fG)$ とおくと

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha \quad (x \in F, y \in G). \tag{8.4}$$

ここで指数 α は最良である。

Proof. $r = \mathrm{dist}(F, \partial G)$ とおく。まず $|x - y| < r$ と仮定する。$g : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ を

$$g(z) = \frac{f(x + rz) - f(x)}{\mathrm{diam}(fG)}$$

で定めると $g(0) = 0, K_I(g) \le K_I(f)$ である。よって (8.2) により

$$|g(z)| \le \lambda^{1-\alpha}|z|^\alpha.$$

$z = (y - z)/r$ を代入して (8.4) を得る。$|x - y| \ge r$ のときは $\lambda_n^{1-\alpha} > 1$ ゆえ

$$|f(x) - f(y)| \le \mathrm{diam}(fG) \le r^{-\alpha}\mathrm{diam}(fG)|x - y|^\alpha \le C|x - y|^\alpha.$$

よって (8.4) が示された。$f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ を $f(x) = x|x|^{\alpha-1}$ で定めると (6.6 の例) $\alpha = K_I(f)^{1/(1-n)}$ で、かつ $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x|^\alpha$ ゆえに指数 α は最良である。

8.5. Theorem. qr 写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が $\alpha = K_I(f)^{1/(1-n)}$ とおくときに $\lim_{x\to\infty} |x|^{-\alpha}|f(x)| = 0$ をみたすならば f は定数写像である。

Proof. $|f(x)| \le |x|^{-\alpha}\epsilon(|x|)$ とかく。仮定より $R \to +\infty$ のとき $\epsilon(R) \to 0$. $x \in \mathbf{R}^n$ を任意に一つ固定し $|x| < R$ とする。Theorem 8.3 を $G = \mathbf{B}^n(R), F = \{0\}$ として適用すると $|f(x) - f(0)| \le C|x|^\alpha$. ここで

$$C = \lambda_n^{1-\alpha}\mathrm{dist}(F, \partial G)^{-\alpha}\mathrm{diam}(fG) = 2\lambda_n^{1-\alpha}\epsilon(R)$$

となるから $R \to +\infty$ として $f(x) = f(0)$ を得る。よって f は定数である。

注意 6.6 の例 $f(x) = x|x|^{\alpha-1}$ より Theorem 8.5 の条件 $\lim_{x\to\infty}|x|^{-\alpha}|f(x)| = 0$ を「$|x|^{-\alpha}|f(x)|$ が有界である」という条件に置き換えることはできない。

8.6. Corollary. (qr 写像に対する Liouville の定理) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が有界 qr 写像ならば f は定数である。

8.7. 3 次元以上の空間で定義される qr 写像の性質で、複素平面上の正則写像の場合とは顕著に異なるものがいくつかある。その一つが Zorich の定理である。複素平面上には $f(z) = e^z$ のように局所同相であるが $\mathbb{C}$ 上では 1 対 1 でない整関数が存在する。しかし Zorich の定理によると、3 次元以上では局所同相な qr 写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ はかならず同相写像になる。

8.8. Definition. (相対弧状連結性) $Q \subset \overline{\mathbf{R}^n}$ が相対弧状連結 (relatively arcwise connected) であるとは $\overline{Q}$ の各点 p と p の任意の近傍 V に対して p の近傍 U で $U \subset V$ かつ $U \cap Q$ が連結となるものが存在するときにいう。

8.9. Lemma. G を $\overline{\mathbf{R}^n}$ の部分領域とする。$f : G \to \overline{\mathbf{R}^n}$ を局所同相写像、$Q \subset \overline{\mathbf{R}^n}$ を連結、単連結かつ局所弧状連結な集合とする。P を $f^{-1}Q$ の成分で $\overline{P} \subset G$ となるものとする。このとき f は P を Q 上に同相に写す。さらに Q が相対弧状連結ならば f は $\overline{P}$ を $\overline{Q}$ 上に同相に写す。

Proof. Q は単連結だから f が P から Q への被覆写像であることを示せばよい。仮定より Q は弧状連結である。$x_0 \in P$ を固定し、$y \in Q$ を任意の点とするとき、$f(x_0)$ と y を結ぶ Q 内の path の lift の終点 x は $f(x) = y$ をみたすから $fP = Q$ である。

$y \in Q$ とする。$\overline{P} \subset G$ ゆえ $P \cap f^{-1}(y)$ は有限集合であり、$P \cap f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$ とおく。お互いに disjoint な x_i の近傍 U_i $(i = 1, ..., k)$ を $U_i \subset G$ かつ $f|_{U_i}$ が単射となるようにとる。$F = \overline{P}\setminus(U_1 \cup \cdots \cup U_k)$ はコンパクトで $y \notin fF$. y の近傍 V を $Q \cap V$ が連結で $V \subset (\cap_{i=1}^k fU_i)\setminus fF$ となるようにとるとは $P \cap f^{-1}V$ ちょうど k 個の成分 $D_1, ..., D_k$ からなり、それぞれ $U_1, ..., U_k$ に含まれる。f は各 D_i を $Q \cap V$ 上に同相に写す。よって f は P から Q への被覆写像を与える。

つぎに Q は相対弧状連結であるとする。$fP = Q$ と $\overline{P}$ がコンパクトであるから $f\overline{P} = \overline{Q}$ は明らかなので、任意の $y \in \overline{Q}$ に対して $f^{-1}(y) \cap \overline{P}$ が 1 点のみからなることを示せばよい。

y の近傍の列 $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ を $V_j \cap Q$ は連結で $\{y\} = \cap_{j=1}^\infty V_j$ となるようにとる。各 $j \ge 1$ に対しもちろん $\overline{P} \cap f^{-1}(y)$ の各点は $f^{-1}V_j$ の内点だから $\overline{P} \cap f^{-1}(y) \subset \overline{P \cap f^{-1}V_j}$, よって $\overline{P} \cap f^{-1}(y) \subset \cap_{j=1}^\infty \overline{P \cap f^{-1}V_j}$. 一方

$$\overline{P \cap f^{-1}V_{j+1}} \subset \overline{P} \cap \overline{f^{-1}V_{j+1}} \subset \overline{P} \cap f^{-1}\overline{V_{j+1}} \subset \overline{P} \cap f^{-1}V_j$$

これより

$$\cap_{j=1}^{\infty}\overline{P\cap f^{-1}V_{j+1}}\subset\cap_{j=1}^{\infty}\overline{P}\cap f^{-1}V_j=\overline{P}\cap f^{-1}(y).$$

ゆえに $\cap_{j=1}^{\infty}\overline{P\cap f^{-1}V_j}=\overline{P}\cap f^{-1}(y)$.

$A_j=P\cap f^{-1}V_j$ とおく。上で $\cap_{j=1}^{\infty}\overline{A_j}=\overline{P}\cap f^{-1}(y)$ を示した。 $f|_P:P\to Q$ は同相写像だから A_j は連結である。すると $\overline{A_1}\supset\overline{A_2}\supset\cdots$ はコンパクト集合の減少列ゆえ $\overline{P}\cap f^{-1}(y)$ は空でない連結集合。 $f^{-1}(y)$ は discrete だから $\overline{P}\cap f^{-1}(y)$ は点集合である。

8.10. Lemma.[ZO1967] $G\subset\overline{\mathbf{R}^n}$ を領域とし $f:G\to\overline{\mathbf{R}^n}$ を局所同相写像とする。集合 $A,B\subset G$ は $A\cap B\neq\emptyset$ をみたすとする。もし $f|_A,f|_B$ が同相写像で、$fA\cap fB$ が連結集合ならば f は $A\cup B$ で単射である。

[RI1988a, Lemma 6.4] では $f|_A,f|_B$ が単射であることのみを仮定しているが、これは誤りである。たとえば $\mathbf{R}^2=\mathbb{C}$ において $A=\{x:0\leq x\leq 1\},B=\{x+2\pi i:0\leq x<1\}\cup\{1\}$ とおくと $f|_A,f|_B$ は単射で $fA\cap fB=\{e^x:0\leq x\leq 1\}$ は連結であるが $f|_{A\cup B}$ はで単射でない。

(Lemma 8.10 の証明.) $f(A\cup B)=fA\cap fB$ をいえばよい。なぜなら $f|_A,f|_B$ の単射性より問題となるのは $a\in A,b\in B$ があって $f(a)=f(b)$ となるときであり、上の等式がいえれば $f(a)=f(b)=f(c)$ となる $c\in A\cap B$ が見つかることにより、ふたたび $f|_A,f|_B$ の単射性より $a=b=c$ となるからである。

$C=fA\cap fB$ とおく。明らかに $f(A\cup B)\subset C$ であり、 $f|_A,f|_B$ の単射性より C において $E=f(A\cap B),F=C\setminus E$ はそれぞれ

$$E=\{y\in C:\mathrm{card}((A\cup B)\cap f^{-1}(y))=1\},\quad F=\{y\in C:\mathrm{card}((A\cup B)\cap f^{-1}(y))=2\}$$

で特徴付けられる。

$E\cap\overline{F}=\emptyset$ をしめす。$y=f(x)\in E\cap\overline{F}$ $(x\in A\cap B)$ とする。x の G における近傍 U を $f|_U:U\to V=fU$ が同相写像となるように選ぶ。仮定より $y'\in F\cup V$ が存在し、$f|_A,f|_B$ は同相写像だから $(f|_A)^{-1}(y'),(f|_B)^{-1}(y')\in f^{-1}(y)\cap U$. $y'\in F$ より $(f|_A)^{-1}(y')\neq(f|_B)^{-1}(y')$ だから $f|_U$ が単射であることに反する。よって $E\cap\overline{F}=\emptyset$.

次に $F\cap\overline{E}=\emptyset$ をしめす。$y=f(a)=f(b)\in F\cap\overline{E}$ $(a\in A,b\in B)$ とする。$a\neq b$ ゆえ a,b それぞれの近傍 U_a,U_b と y の近傍 V を $U_a\cap U_b=\emptyset$ かつ $f|_{U_a}:U_a\to V,f|_{U_b}:U_b\to V$ が同相であるように選べる。$f|_A,f|_B$ は同相写像だから $y'\in E\cup V$ を $(f|_A)^{-1}(y')\in U_a\cap A,(f|_B)^{-1}(y')\in U_b\cap B$ となるようにとれる。これは $y'\in E$ の仮定に反する。よって $F\cap\overline{E}=\emptyset$ も成り立つ。C の連結性と $A\cap B\neq\emptyset$ より $f(A\cup B)=C$.

8.11. Theorem. $n\geq 3$ のとき、次の性質をもつ n と K のみに依存する定数 $\psi(n,K)$ $(0<\psi(n,K)<1)$ が存在する: $f:\mathbf{B}^n\to\mathbf{R}^n$ が局所同相 K-qr 写像ならば f は $\mathbf{B}^n(\psi(n,K))$ で単射である。

8.12. Remark. $n=2$ のときは $\mathbf{R}^2=\mathbb{C}$ 上の正則関数列 $f_j(z)=\exp(jz)$, $(j=1,2,...)$ を考えると Theroem 8.11 は成立しないことがわかる。

8.13. Corollary. $n \geq 3$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を K-qr 写像、$x_0 \in G \setminus B_f$ とするとき f は $\mathbf{B}^n(x_0, r), r = \psi(n, K)\mathrm{dist}(x_0, B_f \cup \partial G)$, で単射である。

8.14. Corollary. (Zorich の定理 [ZO1967]) $n \geq 3$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を局所同相 qr 写像とするとき、f は同相写像である。

(Theorem 8.11 の証明.) $f(0) = 0$ と仮定してよい。$r_0 = \sup\{r : \overline{U}(0, f, r) \subset \mathbf{B}^n\}$ $(\overline{U}(0, f, r) = \overline{U(0, f, r)})$ を定める。$r \in (0, r_0)$ とし、$l^* = l^*(0, f, r), L^* = L^*(0, f, r)$ とおく (これらの notation については (6.12) を参照)。Lemma 8.9 より f は $\overline{U}(0, f, r)$ を $\overline{\mathbf{B}^n(r)}$ に同相に写す。よって f は $\mathbf{B}^n(l^*)$ で単射である。証明は l^* の下限を見つけることによって完成する。

$l = l(0, f, l^*)$ とおく。もし $l < r$ ならば $A = U(0, f, r) \setminus \overline{U}(0, f, l)$ は ring で、f は A を spherical ring $\mathbf{B}^n(r) \setminus \overline{\mathbf{B}^n(l)}$ に同相に写す。A の二つの境界成分はともに $S^{n-1}(l^*)$ と交わるから (4.21) より n のみに依存する定数 $a_n = \tau_n(1) > 0$ があって $\mathrm{cap}A \geq a_n$. Capacity Inequality 7.38 を応用して

$$a_n \leq \mathrm{cap}A \leq K\mathrm{cap}fA = K\omega_{n-1}\left(\log \frac{r}{l}\right)^{1-n}.$$

よって $\alpha(n, K) = \exp[(\omega_{n-1}/Ka_n)^{1/(1-n)}]$ とおくと

$$\frac{r}{l} \leq \alpha(n, K). \tag{8.15}$$

$\alpha(n, K) \geq 1$ だからこれはもちろん $r = l$ のときも正しい。ここまで Figure 8.1 参照。

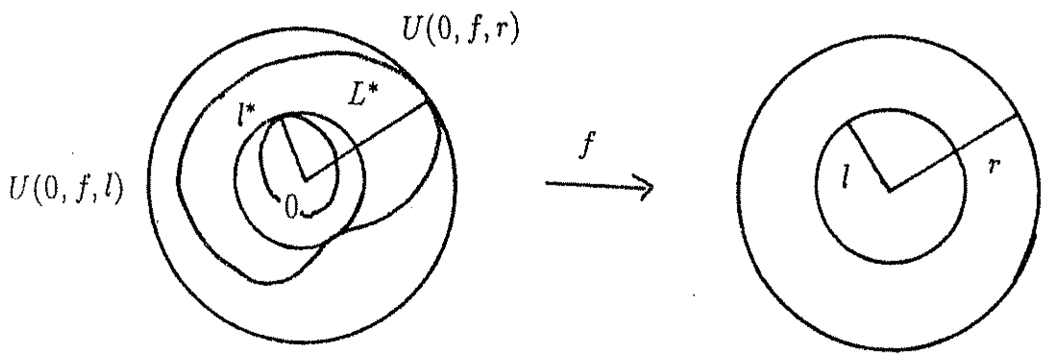

Figure 8.1

$x_0 \in \partial U(0, f, r)$ を $|x_0| = L^*$ をみたす点とし、$y_0 = f(x_0)$ とおく。$|y_0| = r$ である。$t \in (r, r + l), \varphi \in (0, \pi]$ に対して

$$C(t, \varphi) = \{y : |y - y_0| = t, (y - y_0, y_0) > |y_0| t \cos \varphi\}$$

を定める。(ただし (u,v) は u と v との内積を表わす。) これは球面 $S^{n-1}(y_0,t)$ 上の $z_t=(r-t)y_0/|y_0|$ を中心とする spherical cap ($\varphi=\pi$ のときは punctured sphere) である。

f は $U(0,f,r)$ を同相に写していたから、$U(0,f,r)\cap f^{-1}(z_t)$ は一点からなり、その点を z_t^* とかく。$|z_t|<l$ より $z_t^*\in U(0,f,r)\subset \mathbf{B}^n(l^*)$。$C^*(t,\varphi)$ を $f^{-1}C(t,\varphi)$ の z_t^*-成分とする。f が $C^*(t,\varphi)$ を $C(t,\varphi)$ 上に同相に写すような $\varphi\in(0,\pi]$ の集合の上限を φ_t とおく。各 $t\in(r,r+l)$ に対して

$$C^*(t,\varphi_t)\cap S^{n-1}(L^*)\neq\emptyset$$

であることをしめす。もし $C^*(t,\varphi_t)$ と $S^{n-1}(L^*)$ とが交わらないとすると $C^*(t,\varphi_t)\subset\mathbf{B}^n(L^*)$ である。ここで $n\geq 3$ だから $C(t,\varphi_t)$ は相対弧状連結。Lemma 8.9 より f は $\overline{C^*}(t,\varphi_t)$ を上 $\overline{C}(t,\varphi_t)$ に同相に写す。

f は局所同相で、コンパクト集合 $\overline{C^*}(t,\varphi_t)$ 上で単射だから、十分小さい $\delta>0$ をとれば f は $\overline{C^*}(t,\varphi_t)$ の δ-近傍で同相となる。すると φ_t の選び方より $\varphi_t=\pi$. したがって $\overline{C^*}(t,\varphi_t)$ は位相的球面である。$\overline{C^*}(t,\varphi_t)$ の補空間の有界成分 D は $\mathbf{B}^n(L^*)$ に含まれる。f は開写像だから $\partial fD\subset f\overline{C^*}(t,\varphi_t)=S^{n-1}(y_0,t)$. よって D は $f^{-1}\mathbf{B}^n(y_0,t)$ の 1 つの成分である。Lemma 8.9 より f は $\overline{D}$ を $\overline{\mathbf{B}^n}(y_0,t)$ 上に同相に写す。$z_t^*\in\overline{D}\cap\overline{U}(0,f,r)$ かつ $\overline{\mathbf{B}^n}(y_0,t)\cap\overline{\mathbf{B}^n}(r)$ は連結だから Lemma 8.10 よりは $\overline{D}\cup\overline{U}(0,f,r)$ で単射である。

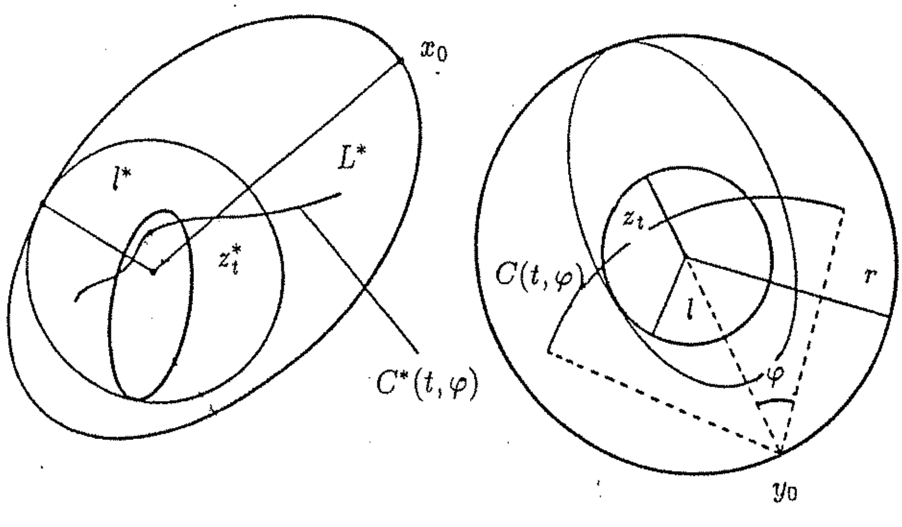

Figure 8.2

$y_0\in fD=\mathbf{B}^n(y_0,t)$ だから $f(x')=y_0$ となる $x'\in D$ が存在するが、$x_0\in\overline{U}(0,f,r)$ および $f|_{\overline{D}\cup\overline{U}(0,f,r)}$ の単射性より $x'=x_0\in D$. しかし $D\subset\mathbf{B}^n(L^*)$ だったから、このことは $|x_0|=L^*$ に矛盾。以上のことから、各 $t\in(r,r+l)$ に対して $C^*(t,\varphi_t)\cap S^{n-1}(L^*)\neq\emptyset$ がわかった。

$t\in(r,r+l)$ に対して $x_t^*\in C^*(t,\varphi_t)\cap S^{n-1}(L^*)$ を 1 つ選ぶ。Γ_t を $C^*(t,\varphi_t)$ で x_t^* と z_t^* とを結ぶ path 全体からなる族とし $\Gamma=\cup_{r<t<r+l}\Gamma_t$ とおく。$z_t^*<l^*$ より Γ は $\Delta(S^{n-1}(L^*),S^{n-1}(l^*);\mathbf{B}^n(L^*)\setminus\overline{\mathbf{B}^n(l^*)})$ によって minorize される。したがって

$$M(\Gamma)\leq\omega_{n-1}\left(\log\frac{L^*}{l^*}\right)^{1-n}. \tag{8.16}$$

一方 Theorem 4.29 より、ある n のみに依存する定数 c_n があって

$$M(f\Gamma) \geq c_n \log(1 + \frac{l}{r}). \tag{8.17}$$

(8.15), (8.16) と (8.17) および $M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma)$ により、$l^* \leq \varphi(n, K)L^*$. ここで

$$\varphi(n, K) = \exp[-\left(\frac{c_n}{K\omega_{n-1}} \log(1 + \frac{1}{\alpha(n, K)})\right)^{1/(1-n)}].$$

$r \to r_0$ のとき $L^* \to 1$ だから $l^* \geq \varphi(n, K)$.

9 Quasiregular 写像の収束定理

9.1. この章では $\mathbf{R}^n$ の領域 G で定義された dilatation が一様な qr 写像の列 f^ν , $\nu = 1, 2, ...$, が写像 f に G の各コンパクト部分集合上一様に収束するとき、f も quasiregular 写像であることを証明する。qc 写像についての対応する結果は [V1971, §§19-21, §37] にある。

9.2. Theorem $\mathbf{R}^n$ の領域 G で定義された K_ν−quasiregular 写像 f^ν , $\nu = 1, 2, ...$, が写像 f に G の各コンパクト部分集合上一様に収束し、かつ $\liminf K_\nu < \infty$ ならば、f は quasiregular 写像で、その dilatation K は $K \le \liminf K_\nu$ をみたす。

上の定理の証明にはいくつかの段階が必要である。次の補題からスタートする。

9.3. Lemma $g = (g_1, ..., g_n)$ が $ACL^n(G) = C^0(G) \cap W^1_{n,loc}(G)$ に属し、さらに G 内にコンパクトな台 (support) をもつとき、g の Jacobian に対して

$$\int_G J(g_1, ..., g_n)dm = 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{9.4}$$

ここで $J(g_1, ..., g_n) = J_g$ は g の Jacobian.

Proof. Friedrichs の軟化子との convolution による近似を考えることにより、$g = (g_1, ..., g_n)$ が $C_0^\infty(G)$ として (9.4) の成立をみればよい。部分積分により

$$\int_G J(g_1, ..., g_n)dm = -\int_G g_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial \Delta_{1j}}{\partial x_1} dm.$$

ここで Δ_{ij} は $J(g_1, ..., g_n)$ の (i, j) 余因子。代数的計算からわかるように $\sum_{j=1}^n \partial\Delta_{1j}/\partial x_1 = 0$。

9.5. Lemma. $g = (g_1, ..., g_n)$ が $ACL^n(G)$ に属し、$\zeta \in C_0^\infty(G)$ であるとき、

$$\int_G J(g_1, ..., g_{j-1}, \zeta g_j, g_{j+1}, ..., g_n)dm = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Proof. (9.4) の証明と同じである。

9.6. Corllary. 9.5 と同じ設定のもとで

$$\int_G \zeta J(g)dm = -\int_G g_j J(g_1, ..., g_{j-1}, \zeta, g_{j+1}, ..., g_n)dm, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

9.7. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $|A|$ はこれまでも使っていたように A を $\mathbf{R}^n$ 上の線形変換とみたときの作用素ノルムをあらわす。一方

$$\|A\| = (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2)^{1/2}$$

とおく。このとき、

$$|A|^2 \le \|A\|^2 = trace A^t A \le n|A|^2. \tag{9.8}$$

これから、qr 写像 f の outer dilatation が K_O ならば、a.e. の点で $\|Df(x)\|^n \le n^{n/2} K_O J(x,f)$ である。

9.8. Lemma (Mikljukov の不等式) f は G 上の K−qr 写像とすると

$$\int_G \varphi^n J(f)dm \le n^{n(n+1)/2} K^{n-1} \int_G |f|^n |\nabla\varphi|^n dm$$

が任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して成立する。

Proof. (9.6) において $\zeta = \varphi^n$ を代入すると

$$\int_G \varphi^n J(f)dm = -n \int_G \varphi^{n-1} f_1 J(\varphi, f_2, ..., f_n)dm, \ f = (f_1, f_2, ..., f_n)$$

後の (9.21) より

$$|J(\varphi, f_2, ..., f_n)| \le |\nabla\varphi| \cdot \|Df\|^{n-1}$$

が G 上 a.e. の点で成立する。Hölder の不等式より

$$\int_G \varphi^n J(f)dm \le n \left(\int_G |f_1|^n |\nabla\varphi|^n dm\right)^{1/n} \left(\int_G \varphi^n \|Df\|^n dm\right)^{(n-1)/n}$$

$|f_1|^n \le |f|^n$ および $\|Df\|^n \le n^{n/2} K J(f)$ より

$$\int_G \varphi^n J(f)dm \le n^{n(n+1)/2} K^{n-1} \int_G |f|^n |\nabla\varphi|^n dm$$

9.9. $f^\nu = (f_1^\nu, ..., f_n^\nu)$ を G 上の K_ν−qr 写像とし $\lim K_\nu = K$ とする。さらに f^ν は $f : G \to \mathbf{R}^n$ に各コンパクト集合上一様収束しているとする。任意の cube Q, $\overline{Q} \subset G$ に対して $\varphi \in C_0^\infty(G)$ を $\varphi \ge 0$ かつ $\varphi|_Q = 1$ となるようにとると Mikljukov の不等式より

$$\int_Q \|Df^\nu\|^n dm \le n^{n/2} K_\nu \int_Q J(f^\nu)dm \le K_\nu \int_G \varphi^n J(f^\nu)dm \tag{9.10}$$

$$\le c_n K_\nu^n \int_G |f^\nu|^n |\nabla\varphi|^n dm \le c_n K_\nu^n (\sup_\nu \max_{\mathrm{supp}\varphi} |f^\nu|^n) \int_G |\nabla\varphi|^n dm < M_Q$$

ここで $c_n = n^{n(n+2)/2}$, M_Q は ν に依存しない定数である。このことより

9.11. Lemma. $f \in ACL^n(G)$

Proof. $f \in W_n^1(Q)$ が各 cube Q, $\overline{Q} \subset G$ に対していえればよい。まず f^ν は f に $\overline{Q}$ 上一様収束することと (9.10) により f^ν のノルムの一様有界性、すなわち ν に依存しない定数 M_Q' によって

$\|f^\nu\|_{W_n^1(Q)} < M'_Q$ となることがわかる。$W_n^1(Q)$ の共役空間 $W_n^1(Q)'$ の稠密な部分空間 X があって $L \in X$ ならば $v_0, v_1, ..., v_n \in C_0^\infty(Q) \subset L^p(Q)$ $(p = n/(n-1))$ が存在して

$$L(g) = \langle g, v_0\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \partial g/\partial x_i, v_i\rangle \quad (g \in W_n^1(Q)).$$

このとき

$$L(f^\nu) = \langle f^\nu, v_0\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \partial f^\nu/\partial x_i, v_i\rangle = \langle f^\nu, v_0\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle f^\nu, \partial v_i/\partial x_i\rangle$$

は $\langle f, v_0\rangle - \sum_{i=1}^n \langle f, \partial v_i/\partial x_i\rangle = L(f)$ に収束する。$W_n^1(Q)$ は回帰的 (reflexive) だから f^ν の弱収束極限として $f \in W_n^1(Q)$.

9.13. Lemma $\varphi \in C_0^\infty$ に対して

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_G \varphi^n J(f^\nu)dm = \int_G \varphi^n J(f)dm.$$

Proof. 各 $k = 1, ..., n$ に対して $\nu \to \infty$ のとき

$$(9.14) \qquad \int_G \varphi^n J(f_1^\nu, ..., f_k^\nu, f_{k+1}, ..., f_n)dm - \int_G \varphi^n J(f_1^\nu, ..., f_{k-1}^\nu, f_k, ..., f_n)dm$$

$$= -n \int_G \varphi^{n-1}(f_k^\nu - f_k) J(f_1^\nu, ..., f_{k-1}^\nu, \varphi, f_{k+1}, ..., f_n)dm$$

が 0 に収束することをしめせばよい。

$$\left|\int_G \varphi^{n-1}(f_k^\nu - f_k)J(f_1^\nu, ..., f_{k-1}^\nu, \varphi, f_{k+1}, ..., f_n)dm\right|$$

$$\le \sup_D |f_k^\nu - f_k| \int_G \varphi^{n-1}\left|J(f_1^\nu, ..., f_{k-1}^\nu, \varphi, f_{k+1}, ..., f_n)\right| dm$$

$$\le n \sup_D |f_k^\nu - f_k| \|\varphi f_1^\nu\|_{W_n^1(D)} \cdots \|\varphi\|_{W_n^1(D)} \cdots \|\varphi f_n\|_{W_n^1(D)}$$

$$\le n \sup_D |f_k^\nu - f_k| \|\varphi\|_{W_n^1(D)} M_D^{(n-1)/n}$$

ここで D は suppφ を含む G の相対コンパクトな領域で M_D は (9.10) から定まる ν に依らない定数である。このことから (9.14) は 0 に収束する。

9.15. Lemma (1) $n \ge 2, x \ge 0$ のとき $x^n + n - 1 \ge nx$。(2) $a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t \ge 0$ のとき

$$(a_1^2 + \cdots + a_t^2)^{n/2} + (n-1)(b_1^2 + \cdots + b_t^2)^{n/2} \ge n(b_1^2 + \cdots + b_t^2)^{(n-2)/2}(a_1b_1 + \cdots a_tb_t)$$

Proof. (1) は容易。(2) 両辺は n 次の同次式だから $b_1^2 + \cdots + b_t^2 = 1$ としてよい。Schwarz の不等式より $a_1b_1 + \cdots + a_tb_t \le \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_t^2}$. $x = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_t^2}$ を (1) の不等式に代入すればよい。

9.16. ここで $\|Df\|^n \leq n^{n/2}KJ_f(x)$ が G の a.e. の点で成立することをしめす。すると $|Df| \leq n^{n/2}KJ_f(x)$ より、dilatation の値はともかく、すくなくとも極限写像 f は qr-写像であることがわかる。任意に cube $Q \subset \overline{Q} \subset G$ を選ぶ。$\varphi \in C_0^\infty(G)$ を $\varphi|_Q = 1,\ 0 \leq \varphi \leq 1$ をみたすようにとる。すると 9.15 の不等式 (2) から

$$\int_Q \|Df^\nu\|^n dm \geq \int_Q \|Df\|^n dm + n\sum_{j=1}^n \int_Q \|Df\|^{n-2}\nabla f_j \cdot \nabla(f_j^\nu - f_j)dm.$$

(9.10) の評価から適当な弱収束列を選んで

$$\int_Q \|Df^\nu\|^n dm \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_Q \|Df^\nu\|^n dm \tag{9.17}$$

ここで (9.13) から

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_Q \|Df^\nu\|^n dm \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_G \varphi^n \|Df^\nu\|^n dm \tag{9.18}$$

$$\leq \liminf_{\nu\to\infty} n^{n/2}K_\nu \int_G \varphi^n J(f^\nu)dm \leq \liminf_{\nu\to\infty} n^{n/2}K_\nu \int_G \varphi^n J(f)dm.$$

(9.17) と (9.18) より

$$\int_Q \|Df\|^n dm \leq \liminf_{\nu\to\infty} n^{n/2}K_\nu \int_G \varphi^n J(f)dm.$$

φ は任意だから Legesgue の有界収束定理から

$$\int_Q \|Df\|^n dm \leq \liminf_{\nu\to\infty} K_\nu \int_Q J(f)dm.$$

Q は任意、したがって $\|Df\|^n \leq n^{n/2}KJ_f(x)$ が a.e. の点で成立する。

最後に、極限写像 f が K−qr 写像であることをしめす。すでに f が qr 写像であることはわかっている。もし f が定数写像ならば問題はない。もし定数写像でないとすると f の分岐集合 B_f の n 次元測度は 0 だから $D \setminus B_f$ の a.e. の点で f の dilatation が K 以下であることをしめせばよい。したがって問題は局所的なものとなる。$x_0 \in G \setminus B_f$ とすると x_0 の近傍 U で $\overline{U}$ 上 f は同相写像となるものがとれる。$\overline{U}$ 上 f^ν は f に一様収束している。よってある ν_0 が存在して $\nu \geq \nu_0$ ならば $f(x) \notin f^\nu(\partial U)$ かつ $\mu(f(x_0), f^\nu, U) = 1$. $W = B^n(f(x_0), r)$ を $\overline{W}$ が $f^\nu(\partial U)$ $(\nu \geq \nu_0)$ と disjoint となるようにとる。必要なら ν_0 をもっと大きくとって $f^\nu(x_0) \in W$ であるとしてよい。$(f^\nu)^{-1}(W)$ の U に含まれる成分 D^ν は Lemma 2.5 よりノーマル領域である。このとき $\mu(y, f^\nu, D^\nu)$ は $y \in W$ について定数、したがって 1 である。$x_0 \in U_0$, $\overline{U_0} \subset \cap_{\nu \geq \nu_0} D^\nu$ となる x_0 の開近傍 U_0 がとれる。すると f^ν は U_0 上単射、すなわち qc 写像である。よって [V1971, §37] より $f|U_0$ は qc 写像で $K_I(f|U_0) = \liminf K_I(f^\nu|U_0)$, $K_O(f|U_0) = \liminf K_O(f^\nu|U_0)$ がなりたつ。

9.19. 上の証明の最後の部分は Väisälä の本 [V1971] の結果を援用したが、そこで使われているのは Theorem 6.6 を同相写像に適応して得られる qc 写像の定義と ring の modulus のある意味での連続性である。Theorem 9.2 は最初 1967 年に Yu. G. Reshetnyak によって証明された [R1968c].

ここでは P. Lindqvist による証明 [LIN1986] を採用した。最後に Theorem 9.8 の証明において仮定した事実について証明を与える。

9.20. (Hadamard の不等式) A を n 次行列とすると、次の不等式が成立する。

$$|\det A|^2 \le \prod_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2\right)$$

ここで等号成立は相異なる行がたがいに直交するベクトルである場合に限る。

Proof. $S = A^t A$ (A^t は A の転値行列) とおくと、S の対角成分 $s_{\mu\mu} = \sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2$. S は正値対称行列だから

$$|\det A|^2 = \det S \le \prod_{\mu=1}^{n} s_{\mu\mu} = \prod_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2\right)$$

等号成立は S が対角行列であるとき、すなわち相異なる行がたがいに直交するベクトルである場合に限る。

9.21. Corollary A が n 次行列で $n \ge 2$ のとき

$$|\det A|^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{1\nu}|^2\right)||A||^{n-1}$$

Proof.

$$|\det A|^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{1\nu}|^2\right)\left(\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2\right)^{n-1} \le \left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{1\nu}|^2\right)||A||^{n-1}$$