QUASIREGULAR 写像の基礎

大竹 博巳

中西 敏浩

Topics in Complex Analysis 1996

はじめに

1928 年に等角写像の拡張として Grötzsch により導入された平面擬等角写像は近年 Riemann 面の等角構造の変形理論 (すなわち Teichmüller 空間論) と結びつき大成功を納めたが, その概念の高次元化は既に 1930 年代後半には Lavrent'ev らソビエト連邦の数学者によって開始されている. この高次元擬等角写像の研究は 20 年程の中断の時期を経た後の 1960 年代に入って再び Gehring, Väisälä らによる組織的な研究が行なわれ, Mostow の剛性定理の証明の道具などで有用性が認められるようになった. 一方, 単射であることを仮定しない形での高次元化である quasiregular 写像の研究も 1960 年代には Reshetnyak や Martio, Rickman, Väisälä らによって始められ, 1970 年代前半までに理論の基礎付けとなる論文が出揃った. (しかし 1983 年には当時フィンランド学派による曲線族のモジュラスを用いた方法が席巻していたことに反発し, より解析的な道具立てで研究ができるようにと Bojarski と Iwaniec が新たな基礎付けとなる論文を発表している.) その後 quasiregular 写像の研究は, 最近になって Rickman による Picard の定理や Nevanlinna の値分布論の拡張といった著しい成果を生み出し, 現在では非線形ポテンシャル論の刺激を受けながらさらに発展しているところにある.

しかしながら quasiregular 写像は我が国においては十分浸透しているとは言い難い状況にある. この報告集は, quasiregular 写像の紹介およびその研究の基礎資料となることを意図して, 平成 5 年度に開催された京都大学数理解析研究所・共同利用研究「Quasiregular 写像の研究」のメンバーであった大竹博巳と中西敏浩がその後も継続して作成してきた資料を編集したものである. 時間の関係で両人の資料をひとつにまとめることはせずに, ページ数・文献引用番号等を含めて独立した二部構成にした. 第一部では大竹が quasiregular 写像の基本的性質, すなわち非定値 quasiregular 写像はほとんどいたるところ微分可能であり, 向きを保ち, 零集合を零集合に写し, 開かつ離散であるという四つの性質の証明を与え, 第二部において中西は主に曲線族のモジュラスによる手法を用いた quasiregular 写像のフィンランド学派による研究の概要をまとめた. これらはいずれも quasiregular 写像論の基盤となる重要なものであり, quasiregular 写像の興味ある様々な現象がそこから導かれるのであるが, その準備の煩雑さのためにいくつかの書物では証明無しで引用されてきたものである. この資料によって少しでも多くの方々に quasiregular 写像についての興味をもっていただけることになったらと我々は願っている. 筆者達の力不足のためまた, 急いで作成したために誤りも多少あるかとも思われる. 何かお気づきの点があれば各筆者に御連絡いただければ幸いである.

ところで「Quasiregular 写像の研究」のメンバーであった毛利政行氏 (当時大阪大学工学部) が昨年急逝された. 研究集会開催の際には快くメンバーに加わっていただき, 多くの知識

を我々に提供してくださった彼の逝去は, 彼自身の研究生活においても, 日本の quasiregular 写像の研究においてもこれからという時期であったので, 無念という思いしか無い. 毛利氏の生前の御好誼に深く感謝を捧げたい.

最後に, この報告集の作成を勧めてくださった京都大学大学院理学研究科の谷口雅彦先生に感謝いたします.

大竹 博巳
京都教育大学 教育学部 数学科
〒612 京都市伏見区深草藤森町 1
e-mail:ohtake@wsml.kyokyo-u.ac.jp

中西 敏浩
静岡大学 理学部 数学教室
〒422 静岡市大谷 836
e-mail:nakanishi@sci.shizuoka.ac.jp

※本資料は, 平成八年度文部省科学研究費補助金基盤研究 (A)(1)「複素多様体と複素解析の研究」(課題番号 07304063, 代表者 静岡大学理学部 佐藤宏樹) による研究集会のために, その援助により作成されたものである.

第一部

QUASIREGULAR 写像の基本性質

大竹 博巳 (京都教育大学)

第一部目次

非定数 qusiregular(qr) 写像は四つの基本的性質

(1) ほとんどいたるところ微分可能である. (第 5 節参照)

(2) 向きを保つ. (第 8 節参照)

(3) 零集合を零集合に写す. (第 9 節参照)

(4) 開写像であり, 一点の逆像は孤立集合である. (第 11 節参照)

を持っていることが Reshetnyak により示されている. この性質は Vuorinen [21] 等では証明無しで引用されているので, ここでその証明の道筋を主に Reshetnyak [14] に従って'だいたい'確認しておこう[1]. なお [14] ではこの解説で述べたことよりも一般的な主張を示しているが, ここでは簡単のため, 一般化を意識的に避けて qr 写像に限定した主張のみ考察する.

予備知識としては, 行列と行列式・ルベーグ積分・バナッハ空間等のみを仮定しているだけであり, 大学四回生にも読んで頂けるように作成したつもりである.

記号と注意

先ず始めにこの解説の中で用いられる記号の説明をしておこう.

各成分が実数の (m,n) 型行列全体の成す集合を $M_{m,n}$ で表わす. 特に $\mathbb{R}^n = M_{n,1}$, つまり $\mathbb{R}^n$ の元は $(n,1)$ 型行列, 即ち縦ベクトルとみなす. (m,n) 型の行列 $A=(a_{ij})$ に対して

$$|A| := \sqrt{\operatorname{tr}{}^tAA} = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

と定義する. ここに ${}^tA$ は A の転置行列である. $(A,B)\mapsto \operatorname{tr}{}^tAB$ は実ベクトル空間 $M_{m,n}$ 上の内積の条件を満たすことが単純計算よりわかる. そこで $|\cdot|$ は $M_{m,n}$ 上のノルムになる. さらに Cauchy-Schwarz の不等式を用いると, (l,m) 型の行列 A と (m,n) 型の行列 B に対して $|AB|\le |A||B|$ が成り立つこともわかる. また行列 $A\in M_{m,n}$ に対して

$$\|A\| := \sup\{|Ax| \colon x\in\mathbb{R}^n, |x|\le 1\}$$

と定める. $\|\cdot\|$ もまた $M_{m,n}$ 上のノルムになる. 行列を直交行列を用いて標準化することにより

$$\|A\| \le |A| \le \sqrt{\operatorname{rank} A}\|A\|$$

[1] [14] は基本的に'たいへん'丁寧に書いてあるのですが, 証明に用いる重要な事実を証明なしで引用しているところもあります. そして残念なことですがこの解説でも証明を略した重要な道具があります.

がわかる. さらに $\mathbb{R}^n$ の可測部分集合 E 上の $M_{m,n}$-値写像 f について

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_E f(x)\,dx \Big| &\le \int_E |f(x)|\,dx \\
\Big\| \int_E f(x)\,dx \Big\| &\le \int_E \|f(x)\|\,dx
\end{aligned}
$$

が成立することを確かめることも難しくない. ただしここで dx は $\mathbb{R}^n$ 上の Lubesgue 測度に関する体積要素である. また通常通り

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,E} &:= \Big(\int_E |f(x)|^p\,dx \Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty \\
\|f\|_{\infty,E} &:= \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \colon x \in E\}
\end{aligned}
$$

と定める. $E = \mathbb{R}^n$ の場合には, 下添字を省略して, それぞれ $\|f\|_p$, $\|f\|_\infty$ と表わすこともある.

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| < r\}, \qquad S(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| = r\} \\
&Q(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_j - a_j| = r \quad (1 \le j \le n)\}
\end{aligned}
$$

とし, $B(a;r)$, $Q(a;r)$ の閉包をそれぞれ $\overline{B}(a;r)$, $\overline{Q}(a;r)$ とする. また $B(r) := B(0;r)$, $S(r) := S(0;r)$ と略記しさらに, 単位球 $B(1)$ を $\mathbb{B}$ と単位球面 $S(1)$ を $\mathbb{S}$ と略記する.

可測集合 A の n 次元 Lebesgue 測度を $|A|_n$ で表す. 誤解を生じないと思われる場合には, いかなる次元の Lebesgue 測度に関してかということを省略し, 単に $|A|$ と略記する. 特に $\mathbb{B}$ の n-次元 Lebesgue 測度を Ω_n, $\mathbb{S}$ の $(n-1)$-次元 Lebesgue 測度を ω_{n-1} で表す[2].

開集合 U と点 $a \in U$ に対して

$$
d_U(a) := \sup\{r > 0 \colon B(a;r) \subset U\}
$$

とおく. $U \ne \mathbb{R}^n$ の場合は $d_U(a) = \operatorname{dist}(a, \partial U)$ である.

最後に以下で扱う Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n は 2 以上であると約束する.

---

[2] Ω_n と ω_{n-1} の具体的な値については数学辞典等をご覧下さい.

§.1 qr 写像の定義

$\mathbb{R}^n$ の x_j-方向の単位ベクトルを e_j, $\mathbb{R}^n$ から超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n\colon {}^t e_j x = 0\}$ への自然な射影を p_j とする. $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への連続写像 $f = {}^t(f_1, \dots, f_m)$ が ACL であるとは, U に含まれる任意の n-次元閉直方体 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_i \leq x_i \leq b_i\ (i = 1, \dots, n)\}$, 任意の $j = 1, \dots, n$, 任意の $k = 1, \dots, m$ およびほとんどすべての $x \in p_j(Q)$ に対して, 函数 $[a_j, b_j] \ni t \mapsto f_k(x + te_j)$ が絶対連続になることと定義する. $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が ACL-写像であるとき, ほとんどすべての $x \in U$ においてすべての第 1 階偏導函数 $\dfrac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$ が存在して, Borel 函数になることが知られている[3]. よって f の形式的微分

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

は U 上の $M_{m,n}$-値 Borel 写像になる. この形式的微分を $f'(x)$ で表す. 特に $m = n$ の場合には $J_f := \det f'$ とおく. もし $f' \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ であるならば[4], f は ACL^p-写像であるといい, $f \in \mathrm{ACL}^p(U, \mathbb{R}^m)$ と表す. $f \in \mathrm{ACL}^n(U, \mathbb{R}^n)$ であるならば, J_f は U 上で局所可積分である.

定義 1.1 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 U から $\mathbb{R}^n$ への ACL^n-写像 f は, 定数 $K \geq 1$ が存在して,

$$\|f'(x)\|^n \leq K J_f(x), \qquad \text{a.e. } x \in U \tag{1.1}$$

となるとき, **K-quasiregular** (**K-qr**) であるという[5].

$f \in L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ とする. $M_{m,n}$-値局所可積分写像 $g = (g_{ij})$ が任意の $\phi \in C_0^\infty(U)$ に対して[6]

$$\int_U g(x)\phi(x)\,dx = -\int_U f(x)\phi'(x)\,dx,$$

即ちすべての j, k に対して

$$\int_U g_{jk}(x)\phi(x)\,dx = -\int_U f_j(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_k}\,dx$$

---

[3] 例えば, Väisälä [20] 定理 26.4 参照

[4] この解説では写像の族を表わすのに, 性質・定義域・値域のすべてを書き込むこのような記法を用いる. ただし, 値域は文脈から明らかなとき省略されることが多い.

[5] 条件 (1.1) が成立するような定数 K の下限を $K_O(f)$ で表し, qr-写像 f の **outer dilatation** という. qr-写像の歪曲度は他にもあるが, この解説においては他の歪曲度を利用しないので省略する. 中西氏の解説や Vuorinen [21] もしくは Rickman [15] 等を御覧下さい.

[6] コンパクトな台を持つものは函数, つまり $\mathbb{R}$ への写像である場合しか考えていないので, 値域を省略する.

を満たすとき, g を f の**超函数の意味での微分**といい, やはり f' で表す. 超函数の意味での微分 f' が存在し, $f' \in L^p_{loc}(U, M_{m,n})$ となるような, $f \in L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ の集合を $W^{1,p}_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ で表す. 次の結果が知られている. 証明は Ahlfors [2] 28 頁補題 2 の証明または Väisälä [20] 定理 27.7 の証明を参照せよ.

定理 1.1 $\mathrm{ACL}^n(U, \mathbb{R}^m) = W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R}^m) \cap C^0(U)$ であり, 形式的微分と超函数の意味での微分は一致する.

従って qr 写像の定義 1.1 は以下のように言い替えることができる.

定義 1.2 写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ は次の 2 条件を満たすとき, K-quasiregular (K-qr) であるという.
(a) $f \in C^0(U) \cap W^{1,n}_{loc}(U)$,
(b) 定数 $K \geq 1$ を適当にとれば, ほとんどすべての $x \in U$ に対して $\|f'(x)\|^n \leq KJ_f(x)$.

§.2 平滑化

函数 $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{B})$ を条件

$$\phi \geq 0 \qquad \text{かつ} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1 \tag{2.1}$$

を満たすようなものとする. 例えばこのような函数 ϕ は,

$$\phi(x) := \begin{cases} c\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1/4}\right) & (|x| < 1/2), \\ 0 & (|x| \geq 1/2). \end{cases}$$

と定め, 係数 c を $\mathbb{B}$ 上での ϕ の積分が 1 になるように調節すれば得られる.

さて $\varepsilon > 0$ に対して

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおく. 明らかに, ϕ_ε は条件 (2.1) を満たす $C^\infty_0(B(\varepsilon))$ の元である. U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし, $U_\varepsilon := \{x \in U\colon d_U(x) > \varepsilon\}$ とおく. $f \in L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ と ϕ_ε とのたたみこみ

$$f * \phi_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)\,dy$$

は $x \in U_\varepsilon$ に対して定義され, 以下の性質を持っている.

命題 2.1 (a) $f * \phi_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon, \mathbb{R}^m)$. 特に

$$(f * \phi_\varepsilon)'(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi'_\varepsilon(x-y)\,dy$$

であり, さらに $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$ ならば,

$$(f * \phi_\varepsilon)'(x) = f' * \phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{B}} f'(x - \varepsilon y)\phi(y)\,dy.$$

(b) $f \in L^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ ならば

$$\|f * \phi_\varepsilon\|_{\infty, U_\varepsilon} \le \|f\|_{\infty, U}.$$

(c) $f \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$, ならば, U の任意のコンパクト部分集合 E に対して

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|f * \phi_\varepsilon - f\|_{p,E} = 0.$$

(d) $f \in C^0(U, \mathbb{R}^m)$ ならば, U の任意のコンパクト部分集合 E に対して

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|f * \phi_\varepsilon - f\|_{\infty,E} = 0.$$

$f * \phi_\varepsilon$ は f の ε-平滑化 (ε-**mollification**) と呼ばれる. 命題の証明は多くの参考文献に載っているので省略させて頂く[7].

§.3 Sobolev の定理

U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とする. $f \in W^{1,p}_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$, U の可測部分集合 E と $p \ge 1$ に対して

$$\|f\|_{1,p,E} := \|f\|_{1,E} + |E|^{1-1/p+1/n}\|f'\|_{p,E}$$

とおき,

$$W^{1,p}(U, \mathbb{R}^m) := \{f \in W^{1,p}_{loc}(U, \mathbb{R}^m) \colon \|f\|_{1,p,U} < \infty\}$$

と定める. $W^{1,p}(U, \mathbb{R}^m)$ が $\|\cdot\|_{1,p,U}$ をノルムとする Banach 空間になるのは容易にわかるであろう. ここでノルム $\|\cdot\|_{1,p,E}$ の定義に係数 $|E|^{1-1/p+1/n}$ を付けたのは, 相似変換に関して 2 項 $\|f\|_{1,E}$, $|E|^{1-1/p+1/n}\|f'\|_{p,E}$ の変化率を同じにするためである. 実際相似変換 $\sigma(x) := kOx + a$, $k > 0$, $O \in O(n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|f \circ \sigma\|_{1,\sigma^{-1}(E)} = k^{-n}\|f\|_{1,E}$, $|\sigma^{-1}(E)|^{1-1/p+1/n} = k^{-1+n/p-n}|E|^{1-1/p+1/n}$ および $\|(f\circ\sigma)'\|_{p,\sigma^{-1}(E)} = k^{1-n/p}\|f'\|_{p,E}$ となるから, $\|f\circ\sigma\|_{1,p,\sigma^{-1}(E)} = k^{-n}\|f\|_{1,p,E}$ が成立する.

---

[7] 例えば溝畑 [11] の補題 1.3 (27-28 頁) や伊藤 [7] の 第 24 節を参照下さい.

定理 3.1 **(Sobolev の積分表示)** D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域, $\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ なる函数としたとき, 任意の $f \in C^\infty(D, \mathbb{R}^m)$ に対して,

$$f(x) = \int_D \phi(y) f(y)\,dy + \int_D f'(y)\omega_\phi(x,y)\,dy, \qquad x \in D$$

と表わすことができる. ここに

$$\omega_\phi(x,y) := (x-y)\int_1^\infty \phi(x + t(y-x))t^{n-1}\,dt$$

である.

証明: x, $z \in D$ とすると

$$f(x) - f(z) = \int_0^1 \frac{df(z + \tau(x-z))}{d\tau}\,d\tau = \int_0^1 f'(z + \tau(x-z))(x-z)\,d\tau.$$

両辺に $\phi(z)$ を掛け, z に関し D 上で積分し, Fubini の定理を用いると

$$f(x) - \int_D \phi(y)f(y)\,dy = \int_0^1 d\tau \int_D \phi(z) f'(z + \tau(x-z))(x-z)\,dz.$$

右辺の積分に変数変換 $y = y(z) := z + \tau(x-z)$ を行う. この際 $\phi \in C_0^\infty(D)$ と $D \subset y^{-1}(D)$ に注意すれば, 右辺は

$$\int_0^1 d\tau \int_D \phi\Big(\frac{y - \tau x}{1-\tau}\Big)\frac{f'(y)(x-y)\,dy}{(1-\tau)^{n+1}}$$

と変形できる. 再び Fubini の定理を用いると

$$f(x) - \int_D \phi(y)f(y)\,dy = \int_D f'(y)(x-y)\,dy \int_0^1 \phi\Big(\frac{y-\tau x}{1-\tau}\Big)\frac{d\tau}{(1-\tau)^{n+1}}$$

となり, 再度変数変換 $t := 1/(1-\tau)$ を行なうことにより, 主張の式を得る. □

補題 3.1 定理 3.1 にある ω_ϕ は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \colon x \neq y\}$ 上において C^∞-級であり, 任意の x, $y \in D$ に対して

$$|\omega_\phi(x,y)| \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{diam}(D)^n \|\phi\|_{\infty,D} |x-y|^{1-n}$$

と評価される.

証明: 前半の主張は定義式からわかる．さて，変数変換により

$$\omega_\phi(x,y) = \frac{x-y}{|x-y|^n}\int_{|x-y|}^{\infty}\phi\Big(x+t\frac{y-x}{|y-x|}\Big)t^{n-1}\,dt.$$

を得るが，$t_0 \in (|x-y|,\infty)$ に対して $x+t_0(y-x)/|y-x| \in \partial D$ となったとすると，$t_0 = |x-(x+t_0(y-x)/|y-x|)| \le \mathrm{diam}(D)$ であり，$t \ge t_0$ ならば $x+t(y-x)/|y-x| \notin D$ となるので，

$$\begin{aligned}|\omega_\phi(x,y)| &\le |x-y|^{1-n}\int_{|x-y|}^{t_0}\Big|\phi\Big(x+t\frac{y-x}{|y-x|}\Big)\Big|t^{n-1}\,dt \\ &\le |x-y|^{1-n}\|\phi\|_{\infty,D}\int_0^{\mathrm{diam}(D)} t^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

ここから後半の主張の評価が得られる． □

次の系は Sobolev の積分表示に補題 3.1 を適用することにより得られる．

系 3.1 D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域とし，$\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ なる函数とすると，n, D および ϕ のみに依る正定数 $C(n,D,\phi)$ が存在して，任意の $f \in C^\infty(D,\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\Big|f(x) - \int_D \phi(y)f(y)\,dy\Big| \le C(n,D,\phi)\int_D |f'(y)||x-y|^{1-n}\,dy, \qquad x \in D$$

が成立する．

補題 3.2 E を $\mathbb{R}^n$ の測度有限な可測部分集合とし，$0 \le \alpha < n$ とすると，

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le \frac{n}{n-\alpha}\Omega_n^{\alpha/n}|E|^{1-\alpha/n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

証明: $|B(x;r)| = |E|$ が成立するような $r \ge 0$ をとると，

$$\begin{aligned}\int_E \frac{dy}{|x-y|^\alpha} &= \int_{E\cap B(x;r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} + \int_{E\setminus B(x;r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \\ &\le \int_{E\cap B(x;r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} + \frac{|E\setminus B(x;r)|}{r^\alpha} \\ &\le \int_{E\cap B(x;r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} + \int_{B(x;r)\setminus E} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \\ &= \int_{B(x;r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha}\end{aligned}$$

最後の積分を計算し，$\omega_{n-1} = n\Omega_n$ を用いると，主張が得られる． □

補題 3.3 U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とし, $1 \leq q \leq \infty$ とする. $g \in L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^m)$ が $L^q(U, \mathbb{R}^m)$ 内の有界列 $\{g_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の L^1-極限になっているならば, $g \in L^q(U, \mathbb{R}^m)$ であり,

$$\|g\|_{q,U} \leq \liminf_{\nu\to\infty} \|g_\nu\|_{q,U}.$$

証明: 結論は $|g|$, $|g_\nu|$ に関するものであるから $m = 1$ として良い. また $q = 1$ の場合には, 主張の下極限を極限とし, 不等号を等号として成立することが明らかであるから, $1 < q \leq \infty$ とする. $1 \leq p < \infty$ を $1/p + 1/q = 1$ で定める. $\|\phi\|_p \leq 1$ であるような $\phi \in C_0^\infty(U)$ に対して, $\|g_\nu - g\|_{1,U} \to 0$ と Hölder の不等式より

$$\left|\int_U g(x)\phi(x)\,dx\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left|\int_U g_\nu(x)\phi(x)\,dx\right| \leq \liminf_{\nu\to\infty}\|g_\nu\|_{q,U}.$$

$C_0^\infty(U)$ は $L_p(U, \mathbb{R})$ 内で稠密であるから,

$$\|g\|_{q,U} = \sup\left\{\left|\int_U g(x)\phi(x)\,dx\right| : \phi \in C_0^\infty(U), \|\phi\|_{p,U} \leq 1\right\}.$$

以上より補題は証明された. □

以下の定理 3.2 と 3.3 は Sobolev の埋蔵定理の特殊な場合である[8].

定理 3.2 D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域, $\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ なる函数, $1 \leq q \leq n$ としたとき, n, D, ϕ, q のみに依る正定数 $C_1(n, D, \phi, q)$ および $C_2(n, D, \phi, q)$ が存在して, 任意の $f \in W_n^1(D, \mathbb{R}^m)$ に対して

$$\left\|f - \int_D \phi(y)f(y)\,dy\right\|_{q,D} \leq C_1(n, D, \phi, q)\|f'\|_{n,D} \tag{3.1}$$

$$\|f\|_{q,D} \leq C_2(n, D, \phi, q)\|f\|_{1,n,D}, \tag{3.2}$$

が成立する.

[8]実は, この小冊子の範囲では, 定理 3.2 と 3.3 にあるような, 証明が容易である極めて特殊な場合のみを用いれば十分であることがわかったので, ここで証明を与えたのである. 一般的な Sobolev の埋蔵定理の証明はここで与えた証明より格段に面倒である. なお, ここに与えたような Sobolev 流の証明方法では定理の主張にある定数の最良な評価が得られないとのことである. 最良の定数をも決定することのできる証明方法や, Riemann 多様体上に埋蔵定理を拡張することについては Aubin [3] 等を御覧下さい.

証明： 主張 (3.2) は (3.1) から従うので, (3.1) のみ示す. また D は面積有限であるので, $q=n$ の場合を示せば十分である.

先ず f が C^∞-級の場合を考察する. Sobolev の積分表示の系 3.1, 補題 3.1, Hölder の不等式, 補題 3.2 および Fubini の定理を用いると

$$
\begin{aligned}
&\left\|f-\int_D \phi(y)f(y)\,dy\right\|_{n,D}^n \\
&\quad\le C_3(n,D,\phi)\int_D\left(\int_D |f'(y)||x-y|^{1-n}\,dy\right)^n dx \\
&\quad\le C_3(n,D,\phi)\int_D\left(\int_D |f'(y)|^n|x-y|^{1-n}\,dy\right)\left(\int_D |x-y|^{1-n}\,dy\right)^{n-1} dx \\
&\quad\le C_4(n,D,\phi)\int_D dx\int_D |f'(y)|^n|x-y|^{1-n}\,dy \\
&\quad= C_4(n,D,\phi)\int_D |f'(y)|^n\,dy\int_D |x-y|^{1-n}\,dx \\
&\quad\le C_5(n,D,\phi)\|f'\|_{n,D}^n.
\end{aligned}
$$

よって (3.1) が C^∞-級の f に対して成立する. なお, ここで定数 $C_5(n,D,\phi)$ には D の包含関係に合致した大小関係が成立する, 即ち $D\subset D'$ ならば $C_5(n,D,\phi)\le C_5(n,D',\phi)$ となることを注意しておく.

次に f が一般の場合を考察する. $a\in D$ とする. $0<t<1$ に対して, $\sigma_t(x):=t(x-a)+a$, $D(t):=\sigma_t(D)$ とおく. ここで D は凸であるから, $D(t)$ は D 内の凸領域である. $D(t_0)\supset \operatorname{supp}\phi$ となるような $t_0\in(0,1)$ をとり, $t\in[t_0,1)$ とする. そして $D_{\varepsilon(t)}\supset D(t)$ となるような $\varepsilon(t)>0$ をとる. f の $1/\nu$-平滑化, $\nu\ge 1/\varepsilon(t)$, を f_ν とすると, $f_\nu\in C^\infty(D(t))$, $\phi\in C_0^\infty(D(t))$, $\int_{D(t)}\phi(x)\,dx=1$ であるから, 前半の結果より

$$
\begin{aligned}
\left\|f_\nu-\int_D \phi(y)f_\nu(y)\,dy\right\|_{n,D(t)} &\le C_5(n,D(t),\phi)^{1/n}\|f'_\nu\|_{n,D(t)} \\
&\le C_5(n,D,\phi)^{1/n}\|f'_\nu\|_{n,D(t)}
\end{aligned}
$$

$\nu\to\infty$ としたとき, f'_ν は f' に $L^n(D(t))$-収束するので, $f_\nu-\int_{D(t)}\phi(y)f_\nu(y)\,dy$ は $L^n(D(t))$-有界列であり, $f-\int_{D(t)}\phi(y)f(y)\,dy$ に $L^1(D(t))$-収束するから, 補題 3.3 より

$$
\begin{aligned}
\left\|f-\int_D \phi(y)f(y)\,dy\right\|_{n,D(t)} &\le C_5(n,D,\phi)^{1/n}\|f'\|_{n,D(t)} \\
&\le C_5(n,D,\phi)^{1/n}\|f'\|_{n,D}
\end{aligned}
$$

$t\to 1$ とすることにより, (3.1) が得られる. □

系 3.2 D が $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域ならば, $W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m)$ は回帰的 Banach 空間である.

証明: 上の定理の (3.2) から線型写像 $\iota\colon W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto (f, f')$ は Banach 空間の直和 $L^2(D,\mathbb{R}^m) \oplus L^n(D, M_{m,n})$ の中への連続写像とみなせる. また Cauchy-Schwarz の不等式から, ι^{-1} も連続である. よって $W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m)$ と $L^2(D,\mathbb{R}^m) \oplus L^n(D, M_{m,n})$ の閉部分空間 $\iota(W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m))$ は Banach 空間として同型である. ところで $L^2(D,\mathbb{R}^m)$, $L^n(D, M_{m,n})$ は共に回帰的であるから, その直和も回帰的であり, さらにその閉部分空間も回帰的である. 故に $W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m)$ は回帰的 Banach 空間である. □

D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域, $\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ を満たす函数とする. $f \in W^{1,n}(D,\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\|f\|_\phi := \left|\int_D \phi(x) f(x)\,dx\right| + \|f'\|_{n,D}$$

と定めると, $\|\cdot\|_\phi$ が $W_n^1(D,\mathbb{R}^m)$ 上のセミノルムになることは明らかであるが, さらに定理 3.2 より次の系が従う.

系 3.3 $\|\cdot\|_\phi$ は $W_n^1(D,\mathbb{R}^m)$ 上に $\|\cdot\|_{1,n,D}$ と同値なノルムを定める.

定理 3.3 D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域, $\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ なる函数とし, $n < p \le \infty$ とすると, n と p にのみ依る正定数 $C(n,p)$ が存在して, 任意の $f \in W^{1,p}(D,\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\left\|f - \int_D \phi(y) f(y)\,dy\right\|_{\infty,D} \le C(n,p)\,\mathrm{diam}(D)^n |D|^{(p-n)/(np)} \|\phi\|_{\infty,D} \|f'\|_{p,D}$$

が成立する. 特に

$$\mathrm{osc}(f;D) \le 2C(n,p)\,\mathrm{diam}(D)^n |D|^{(p-n)/(np)} \|\phi\|_{\infty,D} \|f'\|_{p,D},$$

ここに $\mathrm{osc}(f;D) := \mathrm{ess\,sup}\{|f(x)-f(y)|\colon x,y \in D\}$ である.

証明は定理 3.2 の証明とほぼ同様であるので, 省略させて頂く.

系 3.4 D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界凸領域, $\phi \in C_0^\infty(D)$ を $\int_D \phi(x)\,dx = 1$ なる函数, $p \in (n,\infty]$, σ を相似変換とすると, n, D, ϕ および p のみに依り, σ に依らない正定数 $C(n,D,\phi,p)$ が存在して, 任意の $f \in W_p^1(\sigma(D),\mathbb{R}^m)$ に対して

$$\mathrm{osc}(f;\sigma(D)) \le C(n,D,\phi,p)\|\sigma'\|^{1-n/p}\|f'\|_{p,\sigma(D)}$$

が成立する.

証明： $\sigma(D)$ と $\phi_\sigma := |J_\sigma|^{-1}\phi\circ\sigma^{-1}$ に対して定理 3.3 を適用すれば良い． □

§.4 qr 写像の局所 Hölder 連続性

この節の目的は qr 写像の局所 Hölder 連続性に関する次の定理を示すことである．

定理 4.1 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, E を G 内のコンパクト集合とし, $M>0$ とする．もし K-qr 写像 $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ が $\int_G \|f'(x)\|^n\,dx \le M$ を満たすならば, G, E, n, K と M にのみ依り, f には依らない定数 $C=C(G,E,n,K,M)$ が存在して

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le C|x_1-x_2|^{1/K} \qquad (x_1,\, x_2\in E)$$

が成立する．

定理 4.1 の証明はこの節の最後に与える．次節において利用する次の系はこの定理 4.1 より直ちに従う．

系 4.1 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, E を G 内のコンパクト集合とし, $M>0$ とする．このとき $\int_G \|f'(x)\|^n\,dx \le M$ を満たす K-qr 写像 $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ から成る族は E 上同程度に一様連続である．

$\zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に直交する超平面 $\Pi_\zeta := \{x\in\mathbb{R}^n\colon {}^t\zeta x=0\}$ と線型写像 $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ に対して

$$\Delta_\zeta[A] := \frac{|A(\mathbb{B}\cap\Pi_\zeta)|_{n-1}}{|\mathbb{B}\cap\Pi_\zeta|_{n-1}}$$

とおく．定義から

$$\Delta_\zeta[A] \le \|A|_{\Pi_\zeta}\|^{n-1} \le \|A\|^{n-1} \tag{4.1}$$

が成立する．

定理 4.1 の証明には次の等周不等式およびそれに続く補題を用いる．

定理 4.2 (等周不等式) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $a\in U$ とする． $0<r<d_U(a)$ と $f\in W^{1,n}(U,\mathbb{R}^n)$ に対して

$$V(r,f) := \int_{B(a;r)} J_f(x)\,dx,$$
$$F(r,f) := \int_{S(a;r)} \Delta_{\zeta-a}[f'(\zeta)]\,d\zeta$$

とおくと, ほとんどすべての r に対して

$$V(r,f) \leq \frac{1}{n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}} F(r,f)^{n/(n-1)}$$

が成立する.

. 残念ではあるが, この等周不等式[9] の証明は省略させて頂く. Reshetnyak [13] を見て頂きたい.

補題 4.1 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $f \in W^{1,n}(U,\mathbb{R}^n)$ とする. このとき任意の $a \in U$ とほとんどすべての $0 < r < d_U(a)$ に対して

$$V(r,f) \leq \frac{r}{n} \int_{S(a;r)} \|f'(\zeta)\|^n \, d\zeta.$$

証明: 等周不等式と (4.1) より

$$V(r,f) \leq \frac{1}{n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}} \Big(\int_{S(a;r)} \|f'(\zeta)\|^{n-1} \, d\zeta \Big)^{n/(n-1)}.$$

一方 Hölder の不等式より

$$\int_{S(a;r)} \|f'(\zeta)\|^{n-1} \, d\zeta \leq \Big(\int_{S(a;r)} \|f'(\zeta)\|^n \, d\zeta \Big)^{(n-1)/n} \Big(\int_{S(a;r)} d\zeta \Big)^{1/n}.$$

以上ふたつの不等式より主張が得られる. □

補題 4.2 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ を K-qr 写像とし, $a \in G$ とする. このとき

$$v\colon (0, d_G(a)) \ni r \mapsto r^{-n/K} \int_{B(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx$$

は非減少函数である.

証明: v は絶対連続函数であり,

$$\begin{aligned} v'(r) &= -\frac{n}{K} r^{-n/K-1} \int_{B(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx + r^{-n/K} \int_{S(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx \\ &= n r^{-n/K-1} \Big(\frac{r}{n} \int_{S(a;r)} \|f'(\zeta)\|^n \, d\zeta - \frac{1}{K} \int_{B(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx \Big). \end{aligned}$$

ここで f が K-qr であること, 即ち $\|f'(x)\|^n \leq K J_f(x)$, と前補題より右辺は非負となるから, v は非減少である. □

[9] これを等周不等式というのは, f が微分同相写像であるのときの主張がいわゆる古典的な等周不等式になるからである.

補題 4.3 (Morrey の補題) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f \in W^{1,n}(U, \mathbb{R}^n) \cap C^0(U)$ とする．もしある正定数 $\alpha \le 1$, M, δ が存在して，$\overline{B}(a;r) \subset U$ かつ $0 < r \le \delta$ であるような任意の球 $B(a;r)$ に対して

$$\int_{B(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx \le M r^{n\alpha}$$

となるならば，n と α のみに依る定数 $C(n,\alpha)$ が存在して，任意の $a \in U$ と $0 < r < \frac{1}{3}\min\{\delta, d_U(a)\}$ に対して

$$\sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \colon x_1,\, x_2 \in B(a,r)\} \le C(n,\alpha) M^{1/n} r^{\alpha}$$

が成立する．

証明： $a \in U$, $0 < r < d := \frac{1}{3}\min\{\delta, d_U(a)\}$ を任意に固定する．先ず始めに f が C^∞-級の場合を示そう．$x \in B(a;r)$ とする．Sobolev の積分表示の系 2.2 を f と $B(a;r)$ に適用し，$B(a;r) \subset B(x;2r) \subset B(a;3r) \subset U$ を用いると，

$$|f(x) - C_1(f,a,r)| \le \sqrt{n} C_2(n) \int_{B(x;2r)} \|f'(y)\| |x-y|^{1-n} \, dy$$

が得られる．さて

$$v(t) := \int_{B(x;t)} \|f'(y)\| \, dy$$

とおくと，v は絶対連続であり，

$$v'(t) = \int_{S(x;t)} \|f'(\zeta)\| \, d\zeta.$$

また Hölder の不等式と仮定から

$$\begin{aligned} v(t) &\le \Big(\int_{B(x;t)} \|f'(y)\|^n \, dy \Big)^{1/n} \Omega_n^{(n-1)/n} t^{n-1} \\ &\le (\Omega_n^{n-1} M)^{1/n} t^{\alpha+n-1}. \end{aligned}$$

そこで Fubini の定理と部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int_{B(x;2r)} \|f'(y)\| |x-y|^{1-n} \, dy &= \int_0^{2r} v'(t) t^{1-n} \, dt \\ &= [v(t) t^{1-n}]_0^{2r} + (n-1) \int_0^{2r} v(t) t^{-n} \, dt \\ &\le C_3(n,\alpha) M^{1/n} r^{\alpha}. \end{aligned}$$

T よって $x_1, x_2 \in B(a;r)$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &\leq |f(x_1)-c(f)|+|f(x_2)-c(f)|\\ &\leq C_4(n,\alpha)M^{1/n}r^\alpha\end{aligned}$$

が得られた.

次に f が一般の場合を扱おう. $\overline{B}(a;3r)\subset U_\varepsilon$ となるよう $\varepsilon>0$ を十分小さくとると, f の ε-平滑化 $f_\varepsilon := f*\phi_\varepsilon$ について, 命題 2.1 より

$$\|f'_\varepsilon(x)\| \leq \int_{\mathbb{B}} \|f'(x-\varepsilon y)\|\phi(y)\,dy$$

であるので, $\overline{B}(b;t)\subset U_\varepsilon$, $t\leq\delta$ とすると, Hölder の不等式と Fubini の定理を用いて

$$\begin{aligned}\int_{B(b;t)}\|f'_\varepsilon(x)\|^n\,dx &\leq \int_{B(b;t)}\left(\int_{\mathbb{B}}\|f'(x-\varepsilon y)\|\phi(y)\,dy\right)^n dx\\ &\leq \int_{B(b;t)}\int_{\mathbb{B}}\|f'(x-\varepsilon y)\|^n\phi(y)\,dy\left(\int_{\mathbb{B}}\phi(y)\,dy\right)^{n-1}dx\\ &= \int_{\mathbb{B}}\phi(y)\,dy\int_{B(b;t)}\|f'(x-\varepsilon y)\|^n\,dx\\ &= \int_{\mathbb{B}}\phi(y)\,dy\int_{B(b-\varepsilon y;t)}\|f'(x)\|^n\,dx \leq Mr^{n\alpha}\end{aligned}$$

を得る. そこで前半の C^∞-級写像に対する結果より

$$|f_\varepsilon(x_1)-f_\varepsilon(x_2)| \leq C_4(n,\alpha)M^{1/n}r^\alpha \qquad x_1,\,x_2\in B(a,r)$$

がわかる. 補題の主張は $\varepsilon\to 0$ の極限をとることにより得られる. □

補題 4.4 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, E を G のコンパクト部分集合とする. このとき G と E のみに依る定数 $C(G,E)$ が存在して, 任意の $x,\,y\in E$ は長さが $C(G,E)|x-y|$ 以下であるような G 内の曲線で結ぶことができる.

証明: 先ず $d := \operatorname{dist}(E,\partial G)$ としたとき, $|x-y|<d$ なる 2 点 $x,\,y\in E$ に対しては, 線分 $[x,y]\subset G$ で結ぶことができることを注意しておく.

さて結論を否定すると, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $x_n,\,y_n\in E$ を選び, この 2 点を結ぶ G 内のどの曲線の長さも $n|x_n-y_n|$ より長くなるようにできる. このとき先に述べたことより, $|x_n-y_n|\geq d$ である. 部分列をとることにより $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ はそれぞれ $x,\,y\in E$ に収束しているとして良い. しかし $x,\,y$ を G 内で結ぶ長さ有限の曲線 γ をひとつとると,

十分大きな n に対して $|x_n - x| < d$, $|y_n - y| < d$ となるので, x_n と y_n は G 内の曲線 $[y_n, y]\gamma[x, x_n]$ で結ぶことができる. すると

$$
\begin{aligned}
|\gamma| &= |[y_n, y]\gamma[x, x_n]| - |[y_n, y]| - |[x, x_n]| \\
&\geq n|x_n - y_n| - |y_n - y| - |x - x_n| \\
&\geq (n-2)d \to \infty \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となって, 矛盾が生じる. □

定理 4.1 の証明: $E \subset D_1$, $\overline{D}_1 \subset D_2$, $\overline{D}_2 \subset G$ であるような有界領域 D_1 と D_2 を一組とり, $\delta_1 = \delta_1(G, E) := \mathrm{dist}(D_1, \partial D_2)$, $\delta_2 = \delta_2(G, E) := \mathrm{dist}(D_2, \partial G)$ とする. このとき $a \in D_2$, $0 < r \leq \delta_2$ ならば, 補題 4.2 より

$$
\begin{aligned}
\int_{B(a;r)} \|f'(x)\|^n \, dx &\leq \left(\frac{r}{\delta_2}\right)^{n/K} \int_{B(a;\delta_2)} \|f'(x)\|^n \, dx \\
&\leq C_1(G, E, n, K) M r^{n/K}
\end{aligned}
$$

となるから, Morrey の補題を用いると, $a \in D_2$ と $0 < r < \frac{1}{3}\min\{\delta_2, d_{D_2}(a)\}$ に対して

$$
|f(x) - f(x')| \leq C_2(G, E, n, K, M) r^{1/K} \qquad (x,\, x' \in B(a; r))
$$

を得る. 特に x_1, $x_2 \in D_1$, $|x_1 - x_2| < \delta_3 = \delta_3(E, G) := \frac{1}{3}\min\{\delta_2, \mathrm{dist}(D_1, \partial D_2)\}$ に対して,

$$
|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_2(G, E, n, K, M)|x_1 - x_2|^{1/K}
$$

が成り立つ.

さて $x, y \in E$ とする. 補題 4.3 にある長さが $C(D_1, E)|x - y|$ 以下の D_1 内の曲線 γ をひとつ選び固定する. このとき $|\gamma| \leq C_3(G, E) := C(D_1, E)\,\mathrm{diam}(E)$ であるから, 自然数 $m = m(G, E)$ をとり, γ を δ_3 以下の長さの曲線に m 等分することができる. こうしてできる分点を $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$ とすると

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \sum_{j=1}^{m} |f(x_{j-1}) - f(x_j)| \\
&\leq C_2(G, E, n, K, M) \sum_{j=1}^{m} |x_{j-1} - x_j|^{1/K} \\
&\leq C_4(G, E, n, K, M) \Big(\sum_{j=1}^{m} |x_{j-1} - x_j| \Big)^{1/K} \\
&\leq C_4(G, E, n, K, M) |\gamma|^{1/K} \\
&\leq C_5(G, E, n, K, M) |x - y|^{1/K}
\end{aligned}
$$

よって定理の主張が証明できた. □

§.5 qr 写像の微分可能性

G を $\mathbb{R}^n$ の領域とし, $a \in G$ とする. 写像 $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ は, 適当な (m,n) 型行列 A をとれば, a の近くにおいて

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(|x-a|) \tag{5.1}$$

と近似できるとき, a で (全) 微分可能であるといい, 行列 A を a における f の微分と呼ぶ. このとき a における f のすべての偏微分係数が存在し, 行列 A は形式的微分 $f'(a)$ に等しい.

この節では qr 写像 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ がほとんどすべての $a \in G$ において微分可能であることを示す.

$0 < h < d := d_G(a)$ なる h に対して

$$f_h\colon \mathbb{B} = B(1) \ni x \mapsto \frac{f(a+hx)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}^m$$

とおく. $0 < r \leq 1$ と連続な f に対して, 式 (5.1) と

$$\lim_{h\to+0} \|f_h - f'(a)\|_{\infty, B(r)} = 0$$

が成立することは同値である. また $f \in W^{1,n}_{loc}(G, \mathbb{R}^m)$ のとき, $f_h \in W^{1,n}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m)$ である.

補題 5.1 $f \in W^{1,n}_{loc}(G, \mathbb{R}^m) \cap C^0(G)$ であるならば, ほとんどすべての $a \in G$ に対して

$$\lim_{h\to+0} \|f_h - f'(a)\|_{1,n,\mathbb{B}} = 0$$

証明: $m = 1$ の場合のみを示せば十分である. 先ずほとんどすべての $a \in G$ は f' の L^n-Lebesgue 点である, 即ちほとんどすべての $a \in G$ に対して

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to+0} \int_{\mathbb{B}} |f'(a+hx) - f'(a)|^n \, dx \\ &\qquad = \lim_{h\to+0} \frac{\Omega_n}{|B(a;h)|} \int_{B(a;h)} |f'(x) - f'(a)|^n \, dx = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

が成立することを注意しておく (溝畑 [11] 補題 1.1 または Rudin [16] 定理 7.7 の証明参照[10]). 以下点 a において式 (5.2) が成り立っているとする.

$$R_h(x) := f_h(x) - f'(a)x$$

とおくと, $R'_h(x) = f'(a+hx) - f'(a)$ であるから, (5.2) は

$$\lim_{h\to+0} \|R'_h\|_{n,\mathbb{B}} = 0 \tag{5.3}$$

と言い替えることができる. さて $\int_{\mathbb{B}} \phi(x)\,dx = 1$ であるような函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{B})$ をひとつ固定する. Sobolev の定理 3.1 の系 3.3 によって, $\|\cdot\|_{1,n,\mathbb{B}}$ と $\|\cdot\|_\phi$ とは同値なノルムであったから, (5.3) を考慮すると補題の証明のためには

$$\lim_{h\to+0} \int_{\mathbb{B}} R_h(x)\phi(x)\,dx = 0$$

を示したら良い.

$$F(h) := \int_{\mathbb{B}} f(a+hx)\phi(x)\,dx = \frac{1}{h^n}\int_G f(x)\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\,dx$$

とおく. 定義から $F \in C^0([0,d)) \cap C^\infty((0,d))$ である. $h^nF(h)$ を h について微分すると

$$\begin{aligned}
h^nF'(h) + nh^{n-1}F(h) &= -\frac{1}{h^2}\int_G f(x)\phi'\Big(\frac{x-a}{h}\Big)(x-a)\,dx \\
&= -\frac{1}{h}\int_G f(x)\Big[\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\Big]'(x-a)\,dx \\
&= \frac{1}{h}\int_G \mathrm{tr}\,[f(x)(x-a)]'\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{h}\int_G f'(x)(x-a)\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\,dx + \frac{n}{h}\int_G f(x)\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\,dx
\end{aligned}$$

であるから,

$$F'(h) = \frac{1}{h^n}\int_G f'(x)\frac{x-a}{h}\phi\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\,dx = \int_{\mathbb{B}} f'(a+hx)x\phi(x)\,dx.$$

そこで平均値の定理と Hölder の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{B}} R_h(x)\phi(x)\,dx\Big| &= \Big|\frac{F(h)-F(0)}{h} - F'(0)\Big| \\
&= |F'(\theta h) - F'(0)| \\
&\le \|\phi\|_\infty \int_{\mathbb{B}} |f'(a+\theta hx) - f'(a)|\,dx \\
&\le |\mathbb{B}|^{(n-1)/n}\|\phi\|_\infty \|R'_{\theta h}\|_{n,\mathbb{B}} \to 0 \qquad (h \to +0)
\end{aligned}$$

これで補題を示すことができた. □

---

[10] これらは異なった方法によって証明しています.

定理 5.1 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ を K-qr 写像 とすると, ほとんどすべての $a \in G$ において f は微分可能であり, 微分は $f'(a)$ に等しい.

証明: 補題 5.1 を考慮すれば, $a \in G$ を

$$\lim_{h \to +0} \|f_h - f'(a)\|_{1,n,\mathbb{B}} = 0 \tag{5.4}$$

が成立するような点であると仮定して,

$$\lim_{h \to +0} \|f_h - f'(a)\|_{\infty,B(1/2)} = 0 \tag{5.5}$$

を示せば良い.

さて (5.4) より

$$\lim_{h \to +0} \|f_h - f'(a)\|_{1,\mathbb{B}} = 0 \tag{5.6}$$

であり, またある正定数 M に対して, $0 < h \leq d/2$ ならば $\|f_h\|_{1,n,\mathbb{B}} \leq M$ となるので,

$$\int_{\mathbb{B}} \|f'_h(x)\|^n \, dx \leq \int_{\mathbb{B}} |f'_h(x)|^n \, dx \leq |\mathbb{B}|^{-n} \|f_h\|^n_{1,n,\mathbb{B}} \leq |\mathbb{B}|^{-n} M^n.$$

さらに f_h は K-qr 写像と相似変換との合成であるから K-qr 写像になり, そこで定理 4.1 の系 4.1 より族 $\{f_h\colon 0 < h \leq d/2\}$ は $B(0;1/2)$ 上同程度に一様連続であることがわかる. このことと (5.6) より (5.5) は従う. □

§.6 写像度

$\mathbb{R}^n$ 内の有界領域 D, $\overline{D}$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 f および点 $a \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ より成る 3 つ組 (a, f, D) 全体の成す集合を T^n で表すものとする. この節では, 任意の $(a, f, D) \in T^n$ に対して**写像度 (mapping degree)**[11] と呼ばれる整数 $\mu(a, f, D)$ を定義し, その性質について調べる.

T^n の元 (a, f, D) のうち

- f の D への制限 $f|_D$ は C^∞-級
- $f^{-1}(a) \cap D$ は有限集合
- 各 $x \in f^{-1}(a) \cap D$ において, $J_f(x) \neq 0$

の 3 条件を満たすものの成す部分集合を T^n_{reg} で表す. そして $(a, f, D) \in T^n_{reg}$ に対しては, その写像度 $\mu(a, f, D)$ を

$$\mu(a, f, D) := \sum_{x \in f^{-1}(a) \cap D} \operatorname{sgn} J_f(x)$$

により定義する.

[11] topological degree ともいう

$(a, f_0, D), (a, f_1, D) \in T^n$ が T^n **の元としてホモトープ**であるとは, f_0 と f_1 とを結ぶ ∂D, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ に関する制限ホモトピー, 即ち連続写像 $H\colon \overline{D} \times I \to \mathbb{R}^n$ で $H(\cdot, 0) = f_0$, $H(\cdot, 1) = f_1$ かつ $H(\partial D \times I) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ を満たすものが存在することと定める. この T^n の元としてのホモトープの定義が T^n 上に同値関係を導くことは明らかであろう.

補題 6.1 $(a, f, D) \in T^n$ とし, $d := \mathrm{dist}(a, f(\partial D))$ とおく. 連続写像 $g\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ が $\|f - g\|_{\infty, \overline{D}} < d$ を満たすならば, $(a, g, D) \in T^n$ でありかつ, (a, g, D) は (a, f, D) と T^n の元としてホモトープになる.

証明： 実際 f と g とを結ぶホモトピー $H(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x)$ は $H(\partial D \times I) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ を満たす. ここから特に $a \notin g(\partial D)$. よって $(a, g, D) \in T^n$ であり, (a, f, D) と (a, g, D) とは T^n の元としてホモトープである. □

以下のふたつの補題の証明は次の節で与える.

補題 6.2 $(a, f_0, D), (a, f_1, D) \in T^n_{\mathrm{reg}}$ が T^n の元としてホモトープであるならば,

$$\mu(a, f_0, D) = \mu(a, f_1, D).$$

補題 6.3 任意の $(a, f, D) \in T^n$ に対して列 $\{(a, f_\nu, D)\}_{\nu=1}^{\infty} \subset T^n_{\mathrm{reg}}$ で f_ν が f に $\overline{D}$ 上一様収束するものが存在する.

さて (a, f, D) を T^n の任意の元としよう. $\{(a, f_\nu, D)\}_{\nu=1}^{\infty}$ を補題 6.3 にあるような列として, (a, f, D) の写像度 $\mu(a, f, D)$ を

$$\mu(a, f, D) := \lim_{\nu \to \infty} \mu(a, f_\nu, D)$$

により定める. ここで右辺の極限が収束して, 極限値が列 $\{(a, f_\nu, D)\}$ の選び方に依らないことおよび, T^n_{reg} の元に対して二通りの定義の結果が一致することは上の三補題よりわかる. 後の議論において利用する写像度の性質を示しておこう.

性質 6.1 $(a, f_0, D), (a, f_1, D) \in T^n$ が T^n の元としてホモトープであるならば,

$$\mu(a, f_0, D) = \mu(a, f_1, D).$$

この性質は定義と補題 6.1 と 6.2 より明らかである.

性質 6.2 $(a, f, D) \in T^n$ とし, $D_1, \ldots, D_m$ を D の互いに素な部分領域とする. もし $f^{-1}(a) \cap D \subset \cup_{j=1}^m D_j$ であるならば,

$$\mu(a, f, D) = \sum_{j=1}^{m} \mu(a, f, D_j) \tag{6.1}$$

証明: 先ず $(a, f, D) \in T^n_{reg}$ ならば, (6.1) が成立するのは写像度の定義から明らかであることを注意しておく.

さて $(a, f, D) \in T^n$ とすると, $\operatorname{dist}(a, f(\overline{D} \setminus \cup D_j) > 0$ である. そこで補題 6.3 にある列 $\{(a, f_\nu, D)\}_{\nu=1}^\infty \subset T^n_{reg}$ をとると, $\|f_\nu - f\|_{\infty, \overline{D}} < \operatorname{dist}(a, f(\overline{D} \setminus \cup D_j))$ を満たすような十分大きな ν に対しては $f_\nu^{-1}(a) \cap D \subset \cup_{j=1}^m D_j$ となる. 特に $(a, f_\nu, D_j) \in T^n_{reg}$ であり, (6.1) が f_ν に対して成立する. そこで $\nu \to \infty$ として, 結論が従う. □

性質 6.3 A を非退化な Affine 写像とすると, 任意の有界領域 D に対して

$$\mu(a, A, D) = \begin{cases} 0 & (a \notin A(\overline{D})), \\ \operatorname{sgn} \det A' & (a \in A(D)). \end{cases}$$

この性質は定義より明らかである.

性質 6.4 $(a, f, D) \in T^n$ かつ $a \notin f(D)$ ならば, $\mu(a, f, D) = 0$.

証明: $(a, f, D) \in T^n_{reg}$ ならば主張は定義から直ちに従う. 一般の $(a, f, D) \in T^n$ に対しては, 補題 6.3 にある T^n_{reg} 内の列 $\{(a, f_\nu, D)\}_{\nu=1}^\infty$ をとると, 十分大きな ν に対しては $a \notin f_\nu(\overline{D})$ となるので, $\mu(a, f, D) = \lim_{\nu \to \infty} \mu(a, f_\nu, D) = 0$. □

性質 6.5 D を $\mathbb{R}^n$ の有界領域, $f \colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とすると, 函数 $y \mapsto \mu(y, f, D)$ は $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ の各連結成分上で定値である.

証明: 先ず最初に $(a, f, D) \in T^n$ とすると, 任意の $b \in \mathbb{R}^n$ に対して $(a+b, f+b, D) \in T^n$ であり,

$$\mu(a + b, f + b, D) = \mu(a, f, D) \tag{6.2}$$

であることを注意しておく. 実際 $(a, f, D) \in T^n_{reg}$ ならば $(a + b, f + b, D) \in T^n_{reg}$ であり, 定義から (6.2) が成立する. そして一般の $(a, f, D) \in T^n$ に対しては補題 6.3 にある列を考えて極限をとれば良い.

さて $|a'-a| < \mathrm{dist}(a, f(\partial D))$ なる a' に対して, 補題 6.1 より $(a, f+a-a', D) \in T^n$ は (a, f, D) と T^n の元としてホモトープとなるから, 性質 6.1 と (6.2) を用いると

$$\mu(a, f, D) = \mu(a, f+a-a', D) = \mu(a', f, D).$$

よって函数 : $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D) \ni y \to \mu(y, f, D) \in \mathbb{Z}$ は局所定値になり, ここから主張が従う. □

§.7 補題 6.2 と 6.3 の証明

$\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ 上の C^∞-級 $(n-1)$ 次微分形式 θ_a を

$$\theta_a(x) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x_j - a_j}{|x-a|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

により定める[12]. 単純計算により $d\theta_a$ は閉微分つまり $d\theta_a = 0$ が成り立つことがわかる.

$(a, f, D) \in T^n_{\mathrm{reg}}$ とし, $A := f^{-1}(a) \cap \overline{D}$ とおく. T^n_{reg} の定義より A は D 内の有限点集合である. θ_a の f による引き戻し $f^*\theta_a$ は $D \setminus A$ 上の C^∞-級 $(n-1)$ 次微分形式であり, $d(f^*\theta_a) = f^*(d\theta_a) = 0$ が成立している.

補題 7.1 $\phi \in C_0^\infty(D)$ を A のある近傍上で恒等的に 1 に等しい函数とすると,

$$\int_{D\setminus A} d\phi \wedge f^*\theta_a = -\omega_{n-1}\mu(a, f, D) \tag{7.1}$$

証明: 先ず最初に式 (7.1) の左辺が ϕ の選び方に依らないことを示そう. ϕ_1, ϕ_2 を共に補題の仮定を満たすような函数とすると, $\phi_1 - \phi_2 \in C_0^\infty(D \setminus A)$ であるので, $d(f^*\theta_a) = 0$ と Stokes の定理を用いると

$$\begin{aligned}\int_{D\setminus A} d\phi_1 \wedge f^*\theta_a - \int_{D\setminus A} d\phi_2 \wedge f^*\theta_a &= \int_{D\setminus A} d(\phi_1 - \phi_2) \wedge f^*\theta_a \\ &= \int_{D\setminus A} d((\phi_1 - \phi_2) f^*\theta_a) = 0\end{aligned}$$

故に式 (7.1) の左辺は ϕ の選び方に依らない.

[12] ここで dx_j の上に付いている $\widehat{\ }$ は除外記号である. 即ち dx_j を除いた残りの $(n-1)$ 個の dx_k についての外積を表わしている.

$A = \emptyset$ の場合には, $\phi = 0$ とすることにより, 式 (7.1) が成立することがわかる. そこで $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $m \geq 1$, とする. 各 p_k において $J_f(p_k) \neq 0$ であるから, 十分小さい $\delta > 0$ をとると, $B(p_k; \delta)$ が互いに素かつ $\overline{B}(p_k; \delta) \subset D$ であり, f の $B(p_k; \delta)$ への制限が C^∞-級の微分同相写像となるようにできる. さらに $\varepsilon > 0$ を $B(a; \varepsilon) \subset \cap_{k=1}^m f(B(p_k; \delta))$ であるようにとる. $\eta_0 \in C_0^\infty([0, \varepsilon))$ を 0 の近傍上で恒等的に 1 に等しいような函数とし, $\eta(x) := \eta_0(|x - a|)$ とすると, $\eta \in C_0^\infty(B(a; \varepsilon))$ であって

$$d\eta(x) = \sum_{j=1}^n \eta_0'(|x-a|) \frac{x_j - a_j}{|x-a|} \, dx_j$$

$$d\eta \wedge \theta_a = \eta_0'(|x-a|)|x-a|^{1-n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

また $\phi_k \in C_0^\infty(B(p_k; \delta))$ を $\phi_k := \eta \circ (f|_{B(p_k;\delta)})$ で定めると, $B(p_k; \delta)$ 上で

$$d\phi_k \wedge f^*\theta_a = d(f^*\eta) \wedge f^*\theta_a = f^*(d\eta) \wedge f^*\theta_a = f^*(d\eta \wedge \theta_a)$$

そこで $\phi := \sum_{k=1}^m \phi_k$ とおくと, $\phi \in C_0^\infty(D)$ は補題の仮定を満たし,

$$\begin{aligned}
\int_{D \setminus A} d\phi \wedge f^*\theta_a &= \sum_{k=1}^m \int_{B(p_k;\delta)} d\phi_k \wedge f^*\theta_a \\
&= \sum_{k=1}^m \int_{B(p_k;\delta)} f^*(d\eta \wedge \theta_a) = \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn} J_f(p_k) \int_{f(B(p_k;\delta))} d\eta \wedge \theta_a \\
&= \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn} J_f(p_k) \int_{B(a;\varepsilon)} d\eta \wedge \theta_a = \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn} J_f(p_k) \omega_{n-1} \int_0^\varepsilon \eta_0'(r) \, dr \\
&= -\omega_{n-1} \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn} J_f(p_k) = -\omega_{n-1} \mu(a, f, D).
\end{aligned}$$

故に (7.1) が成立する. □

補題 7.2 $(a, f_0, D), (a, f_1, D) \in T^n_{\mathrm{reg}}$ が T^n の元としてホモトープであるとき, これらを結ぶ ∂D, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ に関する制限ホモトピーの中に C^∞-級のものが存在する.

証明: $H \colon \overline{D} \times I \to \mathbb{R}^n$ を (a, f_0, D) と (a, f_1, D) とを結ぶ ∂D, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ に関する (連続な) 制限ホモトピーとする. $H(\partial D \times I)$ は a を含まないコンパクト集合であるから, $d := \operatorname{dist}(a, H(\partial D \times I)) > 0$ である. Tietze の拡張定理を用いて H を $\mathbb{R}^{n+1}$ へ連続拡張し, さらにそれを平滑化することによって, $\|\Psi - H\|_{\infty, \overline{D} \times I} \leq d/3$ を満たすような $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ が構成できる. $(x, t) \in \overline{D} \times I$ に対して

$$\tilde{H}(x, t) := \Psi(x, t) + (1-t)[H(x, 0) - \Psi(x, 0)] + t[H(x, 1) - \Psi(x, 1)]$$

とおくと, $\tilde{H}$ は C^∞-級であり, $\tilde{H}(\cdot,0) = H(\cdot,0) = f_0$ かつ $\tilde{H}(\cdot,1) = f_1$. さらに $(x,t) \in \partial D \times I$ に対して

$$\begin{aligned}|\tilde{H}(x,t) - H(x,t)| &\leq |\tilde{H}(x,t) - \Psi(x,t)| + |\Psi(x,t) - H(x,t)| \\ &\leq (1-t)|H(x,0) - \Psi(x,0)| + t|H(x,1) - \Psi(x,1)| + |\Psi(x,t) - H(x,t)| \\ &\leq (1-t)d/3 + td/3 + d/3 = 2d/3\end{aligned}$$

であるから,

$$|a - \tilde{H}(x,t)| \geq |a - H(x,t)| - |H(x,t) - \tilde{H}(x,t)| \geq d - 2d/3 > 0.$$

以上より $\tilde{H}$ が求めるホモトピーである. □

補題 7.3 D を有界領域とし, $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ を $f|_D$ が C^∞-級であるような連続写像とすると, ほとんどすべての $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ に対して $(y,f,D) \in T^n_{reg}$.

証明: $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{D})$ ならば, $(y,f,D) \in T^n_{reg}$ となることは定義から明らかである. 一方 $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ かつ $(y,f,D) \notin T^n_{reg}$ とすると, 有界閉集合 $Y := f^{-1}(y) \cap \overline{D} \subset D$ は無限集合であるかまたは y が f の臨界値になる. もし Y が無限集合ならば, その集積点 q が存在し, $q \in Y$ は f の臨界点になるから, やはり $y = f(q)$ は f の臨界値になる. Sard の定理より臨界値の集合は零集合であるから, ほとんどすべての $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ に対して $(y,f,D) \in T^n_{reg}$ となる. □

補題 6.2 の証明: 上の補題 7.2 より (a,f_0,D) と (a,f_1,D) とを結ぶ ∂D, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ に関する制限ホモトピー H は C^∞-級であるとして良い. $f_t := H(\cdot,t)$ とおく. 集合 $\{(x,t) \in \overline{D} \times I\colon H(x,t) = a\}$ はコンパクトであるので, 自然な射影 : $\overline{D} \times I \to \overline{D}$ によるこの集合の像 $A = \cup_{t \in I} f_t^{-1}(a)$ もコンパクトになる. 仮定 $a \notin H(\partial D \times I) = \cup_{t\in I} f_t(\partial D)$ より, $A \subset D$ である. $\phi \in C_0^\infty(D)$ を A のある開近傍 U 上で恒等的に 1 に等しいような函数とし, $P := H((\overline{D} \setminus U) \times I)$ とすると, P はコンパクトであり, $a \notin P$. そこで $d := \mathrm{dist}(a,P) > 0$ とおくと, 各 $(y,t) \in B(a;d) \times I$ に対して $(\overline{D} \setminus U) \cap f_t^{-1}(y) = \emptyset$. よって $(y,f_t,D) \in T^n$ でありかつ, $d\phi \wedge f_t^* \theta_y$ は $C_0^\infty(D)$ 係数の n 次微分形式になる.

$$\mu^*\colon B(a;d) \times I \ni (y,t) \mapsto -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_D d\phi \wedge f_t^* \theta_y$$

とおく. $t \in I$ を固定すると, 補題 7.3 よりほとんどすべての $y \in B(a;d)$ に対して $(y,f_t,D) \in T^n_{reg}$ となり, このとき補題 7.1 より

$$\mu^*(y,t) = \mu(y,f_t,D) \in \mathbb{Z} \tag{7.2}$$

となるが, $\mu^*(\cdot,t)$ は連続であるので, 特に $\mu^*(a,t) \in \mathbb{Z}$ となる. つまり $\mu^*(a,\cdot)$ は I から $\mathbb{Z}$ への函数であるが, 連続でもあるので, 定数函数になる. そこで特に $\mu^*(a,0) = \mu^*(a,1)$. このことと (7.2) より補題 6.2 の主張が従う. □

補題 6.3 の証明: $\{h_\nu\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n\}_{\nu=1}^{\infty}$ を D 上 C^∞-級かつ $\overline{D}$ 上で f を一様近似するような連続函数の列とする. $a \notin f(\partial D)$ であるから, 最初の有限項を捨てることにより, $a \notin h_\nu(\partial D)$ として良い. 補題 7.3 より, $|y_\nu - a| < 1/\nu$ かつ $(y_\nu, h_\nu, D) \in T^n_{\mathrm{reg}}$ を満たす y_ν が存在する. $f_\nu := h_\nu - y_\nu + a$ とおくとき, $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が求める函数列である. □

§.8 qr 写像は向きを保つ

G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域とする. 連続写像 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ は, G の任意の相対コンパクト部分領域 D と任意の $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ に対して $\mu(y, f, D) \geq 1$ となるとき, **向きを保つ**という. この節の目的は次の定理を示すことである.

定理 8.1 qr 写像は向きを保つ.

補題 8.1 U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ とすると, U の任意の可測部分集合 E に対して $f(E)$ も可測であり,

$$|f(E)| \leq \int_E |J_f(x)|\, dx.$$

証明: $P := \{x \in U\colon J_f(x) \neq 0\}$ とおくと, P は開集合であり, Sard の定理より $f(U \setminus P)$ は零集合である. さて 各 $x \in P$ に対して 適当な正数 $d(x)$ を選べば, f の球 $B(x; 2d(x))$ への制限は微分同相写像になる. このとき Lindelöf の被覆定理より, P 内の可算個点 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ を選んで, $\{B(x_\nu; d(x_\nu))\}_{\nu=1}^{\infty}$ が P の開被覆になるようにできる.

$$E_0 := E \setminus P, \qquad E_{\nu+1} := E \cap B(x_{\nu+1}; d(x_{\nu+1})) \setminus \cup_{j=1}^{\nu} E_j$$

とおくと, $\{E_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ は互いに素な可測集合であり, $\cup_{\nu=0}^{\infty} E_\nu = E$. さらに被覆の作り方より $f(E_\nu)$, $\nu \geq 1$, は可測であり, $|f(E_0)| \leq |f(U \setminus P)| = 0$ であるから, $f(E_0)$ も可測である. よって $f(E) = \cup_{\nu=0}^{\infty} f(E_\nu)$ は可測になる. そこで良く知られた微分同相写像についての変数変換を用いると

$$|f(E)| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |f(E_\nu)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{E_\nu} |J_f(x)|\, dx = \int_E |J_f(x)|\, dx$$

となる. □

補題 8.2 U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とし, $f \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R}^n) \cap C^0(U)$ は U 上ほとんどいたる所で $J_f \geq 0$ を満たしているとする. このとき $\overline{D} \subset U$ となるような任意の $(a, f, D) \in T^n$ に対して $\mu(a, f, D) \geq 0$.