正則函数の単葉性条件と擬等角拡張性

須川 敏幸　（京都大学大学院・理学研究科）

は じ め に

本書の目的は大きく分けて2つある。1つは種々の平面領域の特徴付け、特に単連結領域の場合にそのリーマン写像の境界挙動などによって特徴づけることである。あるいは幾何学的・函数解析的な同値な条件など出来る限り色々な情報を集めた積もりである。一見異なるように思える同値な条件が多いほど、その概念は豊かで応用性の高いものであると考えられる。擬円板 (quasidisk) がいかに解析学において自然な対象であるか、本書から少しでも理解して頂ければ幸甚である。

もう1つの目的は単葉性条件についての結果を整理するということであった。正則函数の単葉性を保証する条件に関しては数多くの論文が発表されており、どれが何を一般化しているのか、あるいは相互の包含関係はどうなっているのか、または今後考えるべき問題は何か、ということが非常に分かりにくい状況になってきているのでそれについてきちんと統一的な解釈を与えることが出来ればと思い本書の執筆に取りかかった。しかし、現実には時間の制約もあり、筆者の怠慢もあって現実にはそれには到底及びもつかない状態となり、依然として筆者の頭の中ではそれらの数多くの結果が混沌とした状態で渦巻いている。今となってみれば自分が風車に挑もうとしたドンキホーテだったような気がしないではない。(何しろ単葉函数論に関する文献は膨大なものがあり、ありがたくも Bernardi [15] が 1981 年までの文献の資料をまとめているが、それだけでも 4,000 を越える文献がある。)

最初は証明も出来るだけ含めて、本資料だけである程度理解出来る内容にする積もりであったが、後半は時間の関係で証明を書いている余裕がなくなってしまった。また、いくつか取り上げたかった内容もあるのだが、時間の関係で割愛せざるを得なかった話題も多い。また、急いで書いたので誤りなども多々あることと思われる。もし何かお気づきになったら、筆者まで連絡頂ければ幸いである。色々心残りな点も多いが、読者のご寛恕を期待しつつ筆をおくことにしたい。

最後に、本書の執筆を勧めて下さった谷口雅彦氏に感謝すると同時に、本書の出来上がりが遅くなってご心配をおかけしたことをお詫びする次第である。

※ 本資料は、平成七年度文部省科学研究費補助金総合研究（A)「幾何学的複素解析の総合的研究」（代表者　名古屋大学大学院・多元数理科学研究科　大沢健夫）による研究集会のために、その補助により作成されたものである。

京都大学大学院　理学研究科　須川敏幸

目 次

第1章　平面領域の幾何学

この章ではまず準備として平面領域に関する幾何学的性質や等角写像の基本的性質について述べる。また、後に必要となる擬等角写像の定義や基本的性質についてもここで述べておく。なお、以下でよく用いられる記号であるが、上半平面を $\mathbb{H}$ で、そして単位円板を $\mathbb{D}$, あるいはより一般に半径 r の原点を中心とする円板を $\mathbb{D}_r$ で表すことにする。

いわゆる正則函数 (holomorphic function) と似た意味で用いられる言葉として、解析函数 (analytic function)、等角写像 (conformal mapping) などがあるが、本書では解析函数という言葉はあまり使わず、主に正則函数という言葉を用いる。また、等角写像と言う場合には（リーマン面として）正則＋同相という意味で用いることにする。（従って、像が無限遠点を含む場合には、極を持つ場合も許す。）　また、単葉函数 (univalent function) と言えば本来の意味は、単に「単射」という意味であるが、本書では（極を持たない）正則函数であることも仮定するものとする。また、必ずしも全射である必要はない。従って、

正則函数＝$\mathbb{C}$ への正則写像

有理型函数＝$\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像で恒等的に ∞ ではないもの

等角写像＝双正則写像

単葉函数＝単射な正則函数

という使い分けをする。（ただし、「単葉な有理型函数」などという言い方はする。）

1.1　リーマンの写像定理

本書では単に平面領域と言えば、リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の真部分領域を意味するものとする。従って適当な Möbius 変換を施すことによって常に複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とみなすことも出来るが、Möbius 不変でない量を扱う場合には注意が必要なこともある。また、以下では例えば平面領域 D の閉包 $\overline{D}$ や境界 ∂D と言う時は、これらは特に断らない限りリーマン球面で考えた閉包や境界を考えるものとする。

平面領域（または、一般にリーマン面）D が単連結であるとは、D の基本群が自明であることである。すなわち、D 内の任意の閉曲線が D 内で可縮であることである。平面領域の単連結性については、様々な同値な条件が知られているが、ここでは次の結果を知っていれば十分である。

定理 1.1.1 平面領域 D について次の条件は互いに同値である。

1. D は単連結.

2. 補集合 $\widehat{\mathbb{C}} - D$ は連結.

3. 境界 ∂D が連結.

さて、ここで単連結領域について最も基本的なリーマンの写像定理を述べておく。証明は複素函数論の標準的な教科書にはどれにも書いてあるので省略する。

定理 1.1.2 (リーマンの写像定理) 境界が *2* 点以上からなる単連結平面領域は単位円板と等角同値である。すなわち、任意の双曲的単連結平面領域 D に対して単位円板 $\mathbb{D}$ から D の上への等角写像が存在する。

D を単連結領域とし、$f : \mathbb{D} \to D$ を等角写像、すなわち単葉な $\mathbb{D}$ から D の上への正則写像であるとする。このような写像を D のリーマン写像と呼ぶ。D の 1 点 a が与えられた時、(a が有限点ならば)

$$f(0) = a, f'(0) > 0$$

を満たす D のリーマン写像は一意的に定まる。

リーマン球面上の Jordan 曲線の補集合の連結成分になっているような領域を Jordan 領域と呼ぶが、これについては次の Carathéodory の定理が基本的である。

定理 1.1.3 (Carathéodory の定理) *Jordan* 領域 D のリーマン写像 f は閉包まで同相写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}$ に一意的に拡張出来る。

これより一般に、ある Jordan 領域から別の Jordan 領域への等角写像が与えられれば、それは各々の閉包の同相写像に一意的に拡張できることが容易に分かる。

一般に平面上の多重連結領域の場合にも、同様に標準截線領域への等角写像の存在などが知られているが、ここではその理論には深く立ち入らないことにする。むしろ、ここでは次の意味での標準化の議論が役に立つであろう。一般に R, S をリーマン面としたときに、正則写像 $f : R \to S$ が被覆 (covering) であるとは、S の任意の点 y に対してその連結開近傍 V が存在して f を $f^{-1}(V)$ の各成分 U に制限した写像 $f|_U : U \to V$ が全単射、すなわち双正則になることを言う。(一般には、被覆は位相空間論の用語であるが、ここではこのように正則写像に限定して用いることにする。)

被覆 $f : R \to S$ に対して R からそれ自身への双正則写像 γ で $f \circ \gamma = f$ を満たすもの全体 Γ は合成に関して群をなすが、これは f の被覆変換群と呼ばれる。Γ はリーマン面 R に自由(つまり、単位元以外は固定点を持たない)かつ不連続に作用する。R 上の 2 点についてこの作用で移り合うことと、f で写像して S の同じ点に写ることとが同値であるときに、この被覆は正規 (normal) または Galois であると言う。

また特に、R が単連結であるとき、f は普遍被覆と呼ばれる。普遍被覆は常に正規であることに注意しておこう。普遍被覆と呼ばれるのは次の普遍性が成り立つためである。

命題 1.1.4 $\pi : \tilde{S} \to S$ を普遍被覆とする。$f : R \to S$ を任意の被覆とすると、ある被覆 $g : \tilde{S} \to R$ があって $\pi = f \circ g$ を満たす。

つまり、面 S の普遍被覆は S 上にあるあらゆる被覆の上にある被覆であり、その意味で“ いちばん上にある被覆である ”と言える。

また、位相空間論でよく知られていることであるが、“ 基本群の尻尾 ”を付けた空間を考えることにより、任意のリーマン面に対してその普遍被覆面が存在する。ここで重要となるのは、リーマンの写像定理を一般化した次の一意化定理である。証明は、標準的な複素函数論の教科書にはほとんど出ていないが、準備がたいへんなのでやはり省略する。興味のある読者はリーマン面の専門書を紐解いて頂きたい。

定理 1.1.5 (Koebe の一意化定理) 単連結リーマン面はリーマン球面、複素平面、または単位円板のいずれか１つに等角同値である。

この定理より、任意のリーマン面 R は上の標準的な 3 つの面のうちの 1 つ（X と書くことにする）を普遍被覆面として持つことが分かる。普遍被覆 $\pi : X \to R$ の被覆変換群を Γ とすると、Γ は X に自由かつ不連続に作用するわけであるが、逆に言えば任意のリーマン面は X の解析的自己同型群 $Aut(X)$ の部分群で X に自由かつ不連続に作用するもので X を割って得られるわけである。

さて、ここでよく知られているように $X = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ の解析的自己同型群はそれぞれ、$\mathrm{Möb} \cong PSL(2, \mathbb{C}), \mathrm{Aff}(2, \mathbb{C}), \mathrm{PSU}(1, 1) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ である。まず、Möbius 変換は常に不動点を持つことに注意すると、リーマン球面を普遍被覆面に持つようなリーマン面はリーマン球面に等角同値なものしかないことが分かる。また、アフィン変換も平行移動以外は有限平面に不動点を持つので、$Aut(\mathbb{C})$ の部分群で自由かつ不連続なものは可換群となり、従って $1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ のいずれかに同型なものしか有り得ないことが分かる。よって、複素平面 $\mathbb{C}$ を普遍被覆面に持つようなリーマン面は、それぞれの場合に従って、$\mathbb{C}$ 自身、1 点を抜いた平面 $\mathbb{C}^*$、または 1 次元複素トーラス（すなわち楕円曲線）しかないことが分かる。

これより言えることは、上に挙げた $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$, 複素トーラス以外は全て単位円板 $\mathbb{D}$ を普遍被覆面に持っているということである！　このような面を双曲的リーマン面と呼んでいる。双曲的と呼ばれる所以は、次のような双曲計量が自然に定義されるからである。

まず、単位円板 $\mathbb{D}$ には別名 Poincaré 計量とも呼ばれる双曲計量

$$\rho_{\mathbb{D}}(z) = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

が完備リーマン計量として入る。この計量の著しい特徴は次の定理が成り立つことである。

定理 1.1.6 (Schwarz-Pick の補題) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正則写像とすると、$f^*(\rho_{\mathbb{D}}) \leq \rho_{\mathbb{D}}$. 言い換えれば、次の不等式が成り立つ：

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$

[Proof] まず、$\alpha \in \mathbb{D}$ に対して $L_\alpha(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$ とおけば $L_\alpha \in Aut(\mathbb{D})$ であり、$L'_\alpha(0) = 1-|\alpha|^2$ であることが分かる。

z_0 を単位円板の任意の点とし $w_0 = f(z_0)$ とおく。そこで $g = {L_{w_0}}^{-1} \circ f \circ L_{z_0}$ を考えるとやはり $|g(z)| \leq 1$ で、しかも今度は $g(0) = 0$ となるから、Schwarz の補題により $|g'(0)| \leq 1$ を得る。あとは $g'(0) = (L'_{w_0}(0))^{-1} f'(z_0) L'_{z_0}(0)$ に注意すれば $z = z_0$ における求める不等式を得る。 □

これより直ちに次の系を得る。

系 1.1.7 双曲計量 $\rho_{\mathbb{D}}$ は $Aut(\mathbb{D})$ の引き戻しによる作用で不変である。

この系を用いると、任意の双曲的リーマン面 R について、普遍被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to R$ を通して $\mathbb{D}$ 上の双曲計量が R 上の計量 ρ_R に落ちてくることが分かる。これを R の双曲計量と呼ぶ。この時、やはり先の Schwarz-Pick の補題から次の双曲計量に関する縮小性原理が従うことが分かる。（この結果自体を Schwarz-Pick の補題と呼ぶこともある。）

系 1.1.8 f を双曲的リーマン面 R から双曲的リーマン面 S への正則写像とすると、R 上で $f^*(\rho_S) \leq \rho_R$ が成り立つ。等号が成立するのは $f : R \to S$ が被覆の場合のみである。

特にこの写像が包含写像の場合を考えれば、次の双曲計量の単調性原理が従う。

系 1.1.9 (双曲計量の単調性) D を双曲的平面領域とし、D_1 をその部分領域とする。この時 D_1 上で $\rho_D \leq \rho_{D_1}$ が成り立つ。ある点で等号が成り立つのは実は $D_1 = D$ の場合に限る。

R の双曲計量から自然に距離が誘導されるが、この距離を双曲距離と呼び、$d_R(p,q)$ のように表記することにする。すなわち、

$$d_R(p,q) = \inf_\alpha \int_\alpha \rho_R(z)|dz|$$

である。ただし、ここに下限は p, q を結ぶ全ての（長さ有限な）曲線 α にわたって取るものとする。よく知られているように、双曲的リーマン面は双曲距離に関して完備多様体になっている。もちろん、これらの距離についても単調性原理などが成り立つ。

1.2 領域における様々な距離

前節に述べた双曲距離以外にも、平面領域には様々な幾何学的に意味のある距離が入る。これについてこの節で概観しておこう。

1.2.1 ユークリッド距離

これは説明するまでもなく重要な距離である。ただし、無限遠点を含まない領域に限って定義される。通常は 2 点 z, w のユークリッド距離は $|z-w|$ の形で表される。念のため定義も書いておくと、$|z-w| = \sqrt{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}$ である。

1.2.2 球面距離

これもリーマン球面を考える上では基本的な距離である。定義を書いておくとリーマン球面上の 2 点 z, w に対して

$$d_S(z,w) = \begin{cases} \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} & z = \infty, w \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

とし、これを z, w の球面距離と言うことにする。

1.2.3 擬双曲距離

複素平面の真部分領域 D に対して $\delta_D(z) = \mathrm{dist}(z, \partial D) = \inf_{w \in \partial D} |z-w|$ と置く。D 上の連続なリーマン計量 $|dz|/\delta_D(z)$ を擬双曲計量 (quasi-hyperbolic metric) と呼び、これから誘導される距離を $k_D(z,w)$ と書くことにする。これは D 上の完備な距離になる。

この距離については $D \subset \mathbb{C}$ が本質的な仮定であることに注意しておこう。なぜなら、もし D が無限遠点を含んでいれば $\delta_D \equiv \delta_{D-\{\infty\}}$ となり、$D-\{\infty\}$ と D の区別が出来ないからである。

この距離は平面領域にのみ定義されるが、この距離と絶対定数により常に比較可能な Hahn 距離という等角不変な距離も知られている。これについては本書では本質的に必要としないのでこれ以上触れないが、詳しくは [48], [77], [47] などを参照されたい。

この距離の重要性は名前が示している通り双曲距離に近いということである。次の補題が定量的な情報を与えてくれる。

補題 1.2.1 任意の複素平面内の双曲的領域 D について $\rho_D(z) \leq \frac{1}{\delta_D(z)}$ $(z \in D)$ が成り立つ。

また、特に D が単連結領域の場合には

$$\frac{1}{4\delta_D(z)} \le \rho_D(z) \le \frac{1}{\delta_D(z)} \quad (z \in D) \tag{1.2.2}$$

が成り立つ。

[Proof] 証明は易しいので紹介しておこう。まず $a \in D$ に対して $r = \delta_D(a)$ とし、$B = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$ とする。$\rho_B(z) = \frac{r}{r^2-|z-a|^2}$ であることを注意しておこう。この時双曲計量の単調性原理から

$$\rho_D(a) \le \rho_B(a) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\delta_D(a)}$$

が得られ、これで前半が証明された。後半の証明には1.4節で証明されるKoebeの1/4定理(定理1.4.4)が必要となる。$f : \mathbb{D} \to D$ をリーマン写像で $f(0) = a$ なるものとすれば、この定理によると $f(\mathbb{D}) = D$ は a を中心とし半径 $r = |f'(0)|/4$ の円板 B を含む。従って、特に $r \le \delta_D(a)$ である。$f^*(\rho_D)(z) = \rho_D(f(z))|f'(z)| = \rho_{\mathbb{D}}(z)$ であることに注意すると、これより

$$\rho_D(a) = \rho_{\mathbb{D}}(0)|f'(0)|^{-1} = \frac{1}{4r} \ge \frac{1}{4\delta_D(a)}$$

となり、後半の主張が示された。 □

一般の領域についてはこの補題の後半は成り立たない。例えば、領域の境界が孤立点を持てば、そのような領域に対しては $\inf \rho_D(z)\delta_D(z) = 0$ となってしまう。$\inf \rho_D(z)\delta_D(z) > 0$ となるような領域は一様完全領域(uniformly perfect domain)と呼ばれる。

最後に擬双曲距離の簡単な下からの評価を与えておこう。

補題 1.2.2 ([42]) 擬双曲距離について次の下からの評価が成り立つ。

$$\log\left(\frac{|z_1-z_2|}{\delta_D(z_j)} + 1\right) \le k_D(z_1, z_2), \quad j = 1, 2. \tag{1.2.3}$$

[Proof] $\delta_D(z) \le \delta_D(z_j) + |z - z_j|$ より、2点を結ぶ任意の曲線 α について

$$\begin{aligned}\int_\alpha \frac{|dz|}{\delta_D(z)} &\ge \int_\alpha \frac{|dz|}{\delta_D(z_j) + |z-z_j|} \\ &\ge \int_{[z_1,z_2]} \frac{|dz|}{\delta_D(z_j) + |z-z_j|} = \log\left(\frac{|z_1-z_2|}{\delta_D(z_j)} + 1\right)\end{aligned}$$

□

ここで複素平面内の領域 D に対してこの補題の左辺の量を対称化した量を定義する。

$$j_D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{|z_1-z_2|}{\delta_D(z_1)} + 1\right)\left(\frac{|z_1-z_2|}{\delta_D(z_2)} + 1\right). \tag{1.2.4}$$

系 1.2.3 $k_D(z_1, z_2) \geq j_D(z_1, z_2)$

なお、一般に単連結領域の場合は $\frac{1}{4}k_D(z_1, z_2) \leq d_D(z_1, z_2) \leq k_D(z_1, z_2)$ であるわけだが、特に D が円板または半平面である場合には $d_D(z_1, z_2) \leq j_D(z_1, z_2)$ が成り立つ。この場合はどちらの量も直接計算できるので実際に確かめてみればよい。(cf. [38])　しかし、一般にこの補題の逆のタイプの不等式は成立しない。この逆のタイプの不等式が成立するような領域は特殊な性質を持つことが分かっており、それについては 3.8 節において詳しく述べられる。

1.2.4 Mazurkevich 距離

複素平面内の領域 D の 2 点 z, w について $\lambda_D(z, w)$ を D 内でこの 2 点を結ぶ曲線の (ユークリッド的) 長さの下限とする。明らかにこれは D 上の距離となり $\lambda_D(z, w) \geq |z - w|$ が成り立つが、この距離のことを Mazurkevich 距離と呼ぶ。この距離は領域の計量的性質を記述する上で重要である。

1.2.5 道直径距離

複素平面内の領域 D の 2 点 z, w について $\mu_D(z, w)$ を D 内でこの 2 点を結ぶ曲線の (ユークリッド的) 直径の下限とする。明らかにこれは D 上の距離となり、定義から $|z - w| \leq \mu_D(z, w) \leq \lambda_D(z, w)$ であることは明白であろう。この距離を D 上の道直径距離と呼ぶことにしよう。(筆者は他に呼び方を知らないので勝手にこのように呼んでいる。正確な名称をご存知の方がいらっしゃれば、筆者にご教示願いたい。)

最後の 2 つの距離は他の距離とは違って、道直径距離に関してはリーマン計量などから誘導される距離ではなく、また双方とも測地線のようなものも一般には存在しない。しかし、境界の形状に関する情報を比較的生の形で与えてくれるという点で領域の幾何学を知る上では重要な距離である。

1.3 Carathéodory 収束

この節では領域の列に関する収束性について論ずる。ここではもっとも重要と思われる Carathéodory 収束について述べるが、この名前を冠した収束性についても立場によって様々な（しかも、同値でない）定義があるが、ここでは Pommerenke [92] に従って次の定義を採用する。

定義 1.3.1 (Carathéodory 核) D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を点 a を含む平面領域の列とする。この

時、点 a に関する列 D_n の *Carathéodory* 核とは点 a 及び次の条件を満たす点 w 全体のなす集合である：

a と w を含むある領域 W が存在して十分大きな n に対して $W \subset D_n$ が成り立つ.

この定義だと、核が $\{a\}$ という 1 点のみになってしまうこともあり得るが、そうでない場合には必ず核は a を含む領域になる。

定義 1.3.2 (Carathéorory 核収束) 点 a を含む領域の列 $D_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ が領域 D に核収束するとは、D_n の任意の部分列が D を a に関する核として持つことである。

この核収束の概念の重要性は次の定理が成立することにある。

定理 1.3.3 (Carathéodory 核定理) $f_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ を単位円板上の単葉な正則函数の列で $f_n(0) = 0, f_n'(0) > 0$ を満たしているとする。$D_n = f_n(\mathbb{D})$ とするとき、函数列 f_n が $\mathbb{D}$ 上広義一様収束するための必要十分条件は像領域の列 D_n がその核 D に核収束し、しかも $D \neq \mathbb{C}$ となることである。また、この時極限函数 f は D のリーマン写像となる。

注意 1.3.4 もちろん D が *1* 点に縮退することもあるが、その時は f_n は定数函数 0 に収束していることになる。(D が *1* 点の場合、そこへの定値写像もここでは便宜上“ リーマン写像 ”と呼ぶことにしよう。)　また、D が $\mathbb{C}$ になることもある。最も簡単な例として $f_n(z) = nz$ を考えればよい。

1.4　Koebe の歪曲定理

この節では古典的な単位円板上の単葉函数に関する Koebe の歪曲定理について述べておく。この定理は単葉函数の増大度を知る上で最も基本的な結果である。

ターゲットは単位円板上の単葉函数なのであるが、基本となるのはいわゆる面積定理であり、これを導くためには補助的に単位円板の外部 $\mathbb{D}^*$ 上の函数のクラスを導入する必要がある。

クラス S は単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉函数 f で

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

の形の展開を持つもの全体とする。つまり、$f(0) = 0, f'(0) = 1$ という正規化条件を満たす単位円板上の単葉函数である。

次に Σ を単位円板の外部 $\mathbb{D}^* = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; |z| > 1\}$ 上の単葉な有理型函数 g で

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots$$

の形の展開を持つもの全体とする。

$f \in S$ として、$g(z) = 1/f(z^{-1})$ とおけば、

$$g(z) = z - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)z^{-1} + \cdots \tag{1.4.1}$$

となり $g \in \Sigma$ であることが分かるが、f は ∞ を値として取らなかったのだから、$g(z) \neq 0$ である。従って、S と Σ が 1 対 1 に対応するわけではない。クラスとしては Σ の方が若干広いことになる。なお、0 に値を取らないような Σ の元全体を Σ' と書くことにすると、S と Σ' とは 1 対 1 の対応がつく。

まず、S については以下のような様々な操作が可能であり、これにより例えば係数評価から函数の挙動についての情報などを引き出すことが出来るわけである。$S \ni f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ とすると、以下の操作で得られる函数は全て再び S に属する。

1. **共役**: $\overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \cdots$.
2. **回転**: $e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$.
3. **拡大**: $r^{-1} f(rz)$, $(0 < r < 1)$.
4. **Koebe 変換**:
$$\begin{aligned} K_\zeta f(z) &= \frac{f(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} \\ &= z + \frac{1}{2}\left\{(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta}\right\} z^2 + \cdots, \ (|\zeta| < 1). \end{aligned} \tag{1.4.2}$$
5. **合成**: g を $f(\mathbb{D})$ における単葉函数で $g(0) = 0, g'(0) = 1$ とするとき、$g \circ f$.
6. **除外点変換**: $\omega \in \mathbb{C} - f(\mathbb{D})$ に対して
$$\omega f(z)/(\omega - f(z)) = z + (a_2 + \frac{1}{\omega})z^2 + \cdots. \tag{1.4.3}$$
7. **n 乗根変換**: $f_n(z) = \{f(z^n)\}^{1/n} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \cdots$.

ここで f の n 乗根変換 f_n については、α を 1 の n 乗根とするときに、$f_n(\alpha z) = \alpha f_n(z)$ が成り立つことが分かる。(逆に、これが成り立つとき、ある S の元の n 乗根変換になっていることも容易に分かる。) これに注意すれば、f_n は

$$f_n(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{nk+1} \tag{1.4.4}$$

の形の展開を持つことが分かる。

まず、次の Gronwall による面積定理から始める。

定理 1.4.1 (面積定理) $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ をクラス Σ に属する函数とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

が成り立つ。また、ここで等号が成立するのは $\mathbb{C} - g(\mathbb{D}^*)$ のルベーグ測度が 0 の時であり、またその時に限る。

[Proof] $r > 1$ に対して C_r を円周 $|z| = r$ の g による像とし、この解析曲線で囲まれた有界領域を E_r とする。すると Green の公式により

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(E_r) &= \frac{1}{2i}\iint_{E_r} d\bar{w} \wedge dw = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{in\theta} \right) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k r^{-k-1} e^{-i(k+1)\theta} \right) re^{i\theta} d\theta \\
&= \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \right)
\end{aligned}$$

を得る。従って、$r \to 1$ とすることにより

$$\mathrm{Area}(\mathbb{C} - g(\mathbb{D}^*)) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \right)$$

が分かり、このことから定理の主張を得る。 □

系 1.4.2 先の定理の仮定の下で、$|b_1| \leq 1$ を得る。ここで等号が成立するための必要十分条件は $g(z) = z + b_0 + b_1/z, \ (|b_1| = 1)$ であることである。

この系で等号が成立するような写像はよく知られているように、像の補集合が線分になっているようなもので、Joukowski 変換に代表される写像である。

次に $f \in S$ として、この 2 乗根変換をさらに (1.4.1) で変換すると $(f(1/z^2))^{-1/2} = z - (a_2/2)z^{-1} + \cdots \in \Sigma$ だから、この系を適用すると次の定理を得る。

定理 1.4.3 (Bieberbach の定理) $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ をクラス S に属する函数とすると $|a_2| \leq 2$ が成り立つ。ここで等号が成立するのは *Koebe* 函数 $K(z) = z/(1-z)^2$ の回転に限る。

この定理に関連して Bieberbach が $|a_n| \leq n$ と予想したわけだが、この予想への挑戦が単葉函数論の発展をもたらしたと言ってよい。この Bieberbach 予想に対しては数多くの研究がこれまでなされてきたが、de Branges により 1984 年に肯定的に解決された。証明に本質的に必要なのは以下で説明する Löwner の方法と、現在 de Branges 族と呼ばれているある特

殊函数の族を考えることである。短い証明が例えば Wen [103] にあるので、興味のある方はそちらを参照して頂きたい。

さらに、この定理の系として次の有名な定理が導かれる。

定理 1.4.4 (Koebe の 1/4 定理 (Koebe One-Quarter Theorem)) クラス S に属する単葉函数の像は常に円板 $|w| < 1/4$ を含む。

[Proof] $f \in S$ がある値 $\omega \in \mathbb{C}$ を取らないと仮定する。すると除外点変換 (1.4.3) を考えると、Bieberbach の定理から $|a_2 + \frac{1}{\omega}| \leq 2$ を得る。一方、やはり Bieberbach の定理より $|a_2| \leq 2$ であるから、

$$|1/\omega| \leq |a_2 + 1/\omega| + |a_2| \leq 4$$

となり、これより $|\omega| \geq 1/4$ を得る。これは除外値は円板 $|w| < 4$ の中にはないことを意味し、証明が完結した。 □

なお、Koebe 函数 $K(z) = z/(1-z)^2$ を考えるとこれは値 1/4 を取らないので、この定理は最良の結果と言える。もともと Koebe はある正の普遍定数があって S の元がその半径の円板を覆うことを示していたのだが、1/4 で成り立つことを示したのは Bieberbach である。

Bieberbach の定理に今度は Koebe 変換 (1.4.2) を使ってみると次の結果が分かる。

定理 1.4.5 $f \in S$ に対して

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leq 4 \tag{1.4.5}$$

が成り立つ。

この不等式を変形すると次の形になる。

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{1.4.6}$$

これを用いると次の歪曲定理が得られる。

定理 1.4.6 (Koebe の歪曲定理) $f \in S$ と $|z| = r < 1$ に対して次の評価が成り立つ。

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{1.4.7}$$

また、原点以外でどちらかの等号が成り立つ点が存在すれば、f は *Koebe* 函数の回転に限る。

[Proof] まず、不等式 (1.4.6) の実部に着目すれば、

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{1.4.8}$$

を得る。ここで $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|$ であることに注意すれば、

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

が分かる。そこで、これを r について積分してやれば求める不等式が得られる。

もし、(1.4.7) において原点以外の点 $z = r_0 e^{i\theta}$ で等号が成立したとすると、積分する前の段階で等号がその区間全体で成立していなければいけない。従って、(1.4.8) において特に $r = 0$ の近傍でいずれかの等式が恒等的に成り立つ。このことから特に $\mathrm{Re}\{e^{i\theta}f''(0)/f'(0))\} = \pm 4$ が成立しなければいけない。しかし、これは $|a_2| \geq 2$ を意味し、Bieberbach の定理より f は Koebe 函数の回転でなければならないことが分かる。 □

さらに、この歪曲定理を用いて次の増大度に関する評価が得られる。

定理 1.4.7 (増大度定理) $f \in S$ と $|z| = r < 1$ に対して次の評価が成り立つ。

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}. \tag{1.4.9}$$

また、原点以外で等号が成立する点があれば、f は *Koebe* 函数の回転に限る。

[Proof] まず左辺の不等号から示す。$f(z) = \int_0^r f'(te^{i\theta})e^{i\theta}dt$ と歪曲定理から、

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(te^{i\theta})|dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

となる。

左辺の不等号はそう単純には従わない。まず $r/(1+r)^2 < 1/4$ だから $|f(z)| \geq 1/4$ の時は何も証明すべきことはない。従って、$|f(z)| < 1/4$ と仮定してよい。すると Koebe 1/4 定理から 0 と $f(z)$ を結ぶ線分は f の像に含まれる。従ってその線分の逆像を C とすれば、C は 0 と z を結ぶ単位円板内の解析弧となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \int_{[0,f(z)]}|dw| = \int_C |f'(\zeta)||d\zeta| \geq \int_C \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3}|d\zeta| \\ &\geq \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}\end{aligned}$$

を得る。等号成立条件については見やすいであろう。 □

この増大度定理から函数族 S の局所一様有界性が言えるので、S が正規族をなすことが分かったことになる。一方、Hurwitz の定理によれば、単葉函数の広義一様極限は定数または単葉であるが、クラス S に関しては正規化条件から定数には収束し得ない。従って、極限函数もつねに S に属することが分かり、S が広義一様収束の位相に関してコンパクトになっていることも分かったことになる。

1.5　Schwarz 微分と Nehari-Kraus の定理

ここで Schwarz 微分（level 1, level 2）の定義と基本的性質について触れておく。Schwarz 微分と単葉性条件との関係については以下の章でもっと深く考察することにして、ここでは基本的な Osgood の定理と Nehari-Kraus の定理についてのみ述べておく。

まず平面領域上の非定数有理型函数 f に対してその微分の対数微分 T_f 及び（いわゆる）Schwarz 微分 S_f をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
T_f &= \frac{f''}{f'} \\
S_f &= \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \\
&= (T_f)' - \frac{1}{2}{T_f}^2
\end{aligned}
$$

により定義する。（これらは吉田正章氏による解説 [104] には、“ やさしい Schwarz 微分 ”、“ ふつうの Schwarz 微分 ”として紹介されている。）　これらの作用素には次のような変換則がある。

補題 1.5.1

$$T_{f\circ g} = (T_f \circ g)g' + T_g \tag{1.5.1}$$

$$S_{f\circ g} = (S_f \circ g)(g')^2 + S_g \tag{1.5.2}$$

[Proof] (1.5.1) は $\log(f\circ g)' = \log f' \circ g + \log g$ を微分すれば直ちに得られる。(1.5.2) についても (1.5.1) を定義式に用いれば簡単に導ける。 □

また、これらの微分作用素の核については次のことが容易に分かる。

補題 1.5.2 平面領域上の非定数有理型函数 f について次のことが成り立つ。

(1)　$T_f = 0 \Leftrightarrow f$ は *1* 次函数,

(2)　$S_f = 0 \Leftrightarrow f$ は *Möbius* 変換.

この変換則から期待されるように、これらは領域上の函数と見るよりも、それぞれ1次微分、2次微分と見た方が理解しやすい。つまり、便宜上 $T_f(z)dz,\ S_f(z)dz^2$ と考えた方が統一的に理解出来ることが多い。

例えば、これらを作用させた時の局所的な性質について次のことが分かる。

補題 1.5.3 点 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ の近傍で定義された非定数有理型函数 f について次のことが成り立つ。

(1) $T_f(z)dz$ が点 $z=a$ で正則 $\Leftrightarrow$ f が $z=a$ で正則で局所単葉.

(2) $S_f(z)dz^2$ が点 $z=a$ で正則 $\Leftrightarrow$ f が $z=a$ で局所単葉.

ただし、ここで $a=\infty$ の場合に f が ∞ で正則というのは、$z=\infty$ の近傍で $f(z)=cz(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots)$ と展開出来るということである。

このように、T_f については無限遠点がやや特殊な役割を果たしているため、Möbius 不変な量を扱う上ではやや不便であるが、例えば最初から $\mathbb{C}$ に値を取ることが分かっている函数などを扱うにはこちらの方が函数の生の情報を残している分だけ扱い易いという利点もある。

さて、ここで $p \in \mathbb{R}$ として双曲的領域 D 上の函数 φ について次のノルムを定義する。

$$\|\varphi\|_{p,D} = \sup_{z\in D} |\varphi(z)|\rho_D(z)^{-p}$$

特に p が整数の場合が重要なので、以下では p は整数とし、平面領域 D 上の正則 p 次微分でこのノルムが有限なもの全体を $B_p(D)$ と書くことにすると、これは明らかにこのノルムに関して複素バナッハ空間となっている。(実際には、任意の双曲的リーマン面 R について、φ をその上の正則 p 次微分とすれば $|\varphi|\rho_R{}^{-p}$ は R 上の函数と見なせるから、その sup ノルムをやはり $\|\varphi\|_{p,R}$ と表せば、これが有限となるような R 上の正則 p 次微分全体は複素バナッハ空間をなす。) また、これらのノルムについてはやはり単調性原理が成り立つことに注意すべきである。

補題 1.5.4 (ノルムの単調性原理) $D_1 \subset D$ であれば、非負整数 p に対して $\|\varphi\|_{p,D_1} \le \|\varphi\|_{p,D}$ が成り立つ。

[Proof] これは双曲計量の単調性原理 (補題 1.1.9) から明らかである。 □

上に示唆したように、f に対して T_f, S_f はそれぞれ領域上の1次、2次微分とみなされるので、それぞれ $\|T_f\|_{1,D}, \|S_f\|_{2,D}$ を考えることが自然であろう。特に $D=\mathbb{D}$ の場合にはこの上の正規化された単葉函数 f については (1.4.6) が成立しており、T_f の1次函数に関する不変性に注意すれば、この評価から容易に次の結果を得る。

定理 1.5.5 f が単位円板上の単葉函数とすると $\|T_f\|_{1,\mathbb{D}} \le 6$ が成り立つ。また、*Koebe* 函数を考えればこのノルムがちょうど *6* になるので、この評価は最良である。

これと同様にして Schwarz 微分に関しても次の定理が得られるのであるが、これはもともと Kraus [65] によって示されていたのだが長い間忘れ去られていたようで、その後 Nehari [79] によって再発見された。従って、現在この 2 人の名を冠して定理に名が付けられている。

定理 1.5.6 (Nehari-Kraus の定理) f が単位円板上の単葉函数とすると $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 6$ が成り立つ。また、やはり *Koebe* 函数を考えれば、この評価が最良である。

[Proof] やはり正規化によって最初から $f \in S$ と仮定してよい。さらに、$|S_f|{\rho_{\mathbb{D}}}^{-2}$ の $Aut(\mathbb{D})$-不変性から、この $z = 0$ での値が 6 以下であることが示されればよい。つまり、$|S_f(0)| \leq 6$ が言えればよい。ここで $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ とすると、$S_f(0) = 6(a_3 - {a_2}^2)$ であり f を (1.4.1) で Σ の元に変換すれば面積定理より $|{a_2}^2 - a_3| \leq 1$ だったから、このことから主張を得る。 □

これらの 2 つの定理は Schwarz 微分のノルムが単葉性と密接に関係していることを示唆しているが、実際に 4 章においてこの関係についてさらに詳細に調べることにしたい。

1.6　従属性 (subordination)

易しい概念であるが、単葉函数論において有用な従属性 (subordination) について若干触れておくことにする。

単位円板上の正則函数 f, g について、f が g に従属するとは、ある正則函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\varphi(0) = 0$ なるものが存在して $f = g \circ \varphi$ となることとし、記号で $f \prec g$ で表すことにする。特に φ としては Möbius 変換 $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ が取れる時には f と g は同値であると言い $f \sim g$ と書くことにする。

一般に $f \prec g$ ならば $f(0) = g(0)$ かつ $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ であるが、特に g が単葉函数であるときには、$f \prec g$ であるための必要十分条件は $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ かつ $f(0) = g(0)$ であることに注意する。($\varphi = g^{-1} \circ f$ に取れる。)

命題 1.6.1 (Lindelöf の原理) $f \prec g$ とすると $0 \leq r < 1$ に対して次のことが成り立つ。

$$f(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r) \tag{1.6.1}$$

$$\max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq r} |g(z)| \tag{1.6.2}$$

また、(*1.6.2*) においてある $0 < r < 1$ について等号が成立するならば、実は $f \sim g$ である。

[Proof] (1.6.1) については、Schwarz の補題 $|\varphi(z)| \leq |z|$ から直ちに従い、 (1.6.2) は (1.6.1) から従う。最後の主張は g が定数でなければ $\max_{|z|\leq r} |g(z)|$ が r について狭義単調増加であることと Schwarz の補題の等号成立条件から明らかである。 □

系 1.6.2 $f \prec g$ かつ $g \prec f$ であれば、実は $f \sim g$ である。

さらに、次の Littlewood による結果も重要である。

命題 1.6.3

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|g'(z)| \tag{1.6.3}$$

特に $|f'(0)| \le |g'(0)|$ である。また、(*1.6.3*) においてある $0<r<1$ において等号が成立すれば $f \sim g$ である。この結論は $g'(0) \neq 0$ であれば $r=0$ の場合にも成り立つ。

[Proof] Schwarz-Pick の補題より $(1-|z|^2)|\varphi'(z)| \le 1-|\varphi(z)|^2$ であるから、

$$(1-|z|^2)|f'(z)| = (1-|z|^2)|\varphi'(z)||g'(\varphi(z))| \le (1-|\varphi(z)|^2)|g'(\varphi(z))|$$

が従い、さらに $|\varphi(z)| \le |z|$ に注意すれば (1.6.3) を得る。また、後半の主張は先の定理の時と同様に示される。 □

1.7　正の実数部分を持つ正則函数

ここでは単葉函数論において重要なわき役を演ずる正の実数部分を持つ正則函数についてまとめておく。以下では次のように正規化された函数族を考えることにする。

函数のクラス P を単位円板から右半平面 $H^+ = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z > 0\}$ への正則函数 p で $p(0)=1$ を満たすもの全体として定める。

単位円板上の正規化された単葉函数族の中で Koebe 函数が様々な場面で極値函数としての役割を果たしていたのに対応して、このクラスの中で極値的な役割を果たす函数として容易に思いつくのは、単位円板を右半平面に等角に写像する 1 次分数変換 $h_1(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1+2z+2z^2+2z^3+\cdots$ である。p を単位円板上の正則函数とすると、定義から直ちに分かるように $p \in P$ であるための必要十分条件は p が h_1 に従属していることである。$|z|=r<1$ とすると $\frac{1-r}{1+r} \le |h_1(z)| \le \frac{1+r}{1-r}$, $|{h_1}'(z)| \le \frac{2}{(1-r)^2}$ であるから、$p \in P$ ならば $p \prec h_1$ かつ $1/p \prec h_1$ という事実を用いれば (1.6.1), (1.6.3) から容易に次の増大度に関する定理を得る。

命題 1.7.1 $p \in P$ とすると任意の $|z|=r<1$ について次の評価が成立する。

$$\frac{1-r}{1+r} \le |p(z)| \le \frac{1+r}{1-r} \tag{1.7.1}$$

$$|p'(z)| \le \frac{2}{(1-r)^2} \tag{1.7.2}$$

また、ある $z \neq 0$ においていずれかの等式が成立すれば $p \sim h_1$ でなければならない。

この主張から、クラス P も広義一様収束の位相でコンパクトであることが分かることに注意しておこう。(もちろん、このこと自体はそもそも H^+ が単位円板と等角同値なのだから、Montel の定理から明らかとも言える。)

さて、このクラス P の重要性はこの集合が函数の和に関して凸集合になっていることである。すなわち、$p_j \in P$ とし $s_j \in [0,1]$ が $\sum_j s_j = 1$ を満たしていれば $p = \sum_j s_j p_j$ はやはり P に属する。添字 j を連続的に動かして確率測度で積分しても同様の結果が得られるが、特に μ を $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 上の確率測度とし、$h_\zeta(z) = \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \in P$ とするとき、$p = \int_{\mathbb{T}} h_\zeta d\mu(\zeta)$, すなわち $p(z) = \int_{\mathbb{T}} h_\zeta(z) d\mu(\zeta)$ とおけばやはり $p \in P$ となる。実は、任意の P の元はこのような積分表示を持つという主張が次の Helgrotz の定理 (1911) である。

定理 1.7.2 (Herglotz の定理) 任意の $p \in P$ に対して単位円周上の *Borel* 確率測度 μ が存在して

$$p(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) \tag{1.7.3}$$

の形で表される。

[Proof] まず、$u(z) = \mathrm{Re}\ p(z)$ と置けばこれは(正値)調和函数で $u(0) = 1$ になることに注意する。調和函数に関する Poisson の公式を複素化した Schwarz の表現公式より

$$p(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{r\zeta+z}{r\zeta-z} u(r\zeta) \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

が $|z| < r < 1$ に対して成り立つ。そこで $d\mu_r(\zeta) = u(r\zeta)\frac{d\zeta}{i\zeta}$ を確率測度とみなせば、$\mathbb{T}$ 上の確率測度のなす空間は弱収束に関してコンパクトであるから $r \to 1$ としたときに μ_r の収束部分列が取れる。その極限を μ とすれば、求める式が得られる。 □

注意 1.7.3 実は函数 h_ζ はコンパクト凸集合 P の端点(*extreme point*)になっていることが分かり、そのこととコンパクト凸集合の任意の点は端点全体からなる集合の閉凸包に含まれるという *Krein-Mil'man* の定理からこの定理を説明することも出来る。

ここで $h_\zeta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\theta} z^n$ であることに注意すると $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ としたとき、Herglotz の公式で係数比較を行って

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(\theta)$$

であることが分かる。これより特に次の結果を得る。

系 1.7.4 (Carathéodory の補題) $p(z) = 1 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \cdots \in P$ について $|c_n| \le 2\ \ (n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ。

注意 1.7.5 この系である n で等号が成立しても $p \sim h_\zeta$ かどうかは分からない。これについては例えば *[92]* を参照のこと。

1.8　擬等角写像

この節では平面擬等角写像の基本的事項についてまとめておく。証明を始めると、それだけで 1 冊の本になってしまうので、ここでは証明は与えないことにする。興味のある読者は Ahlfors-Bers [4] Ahlfors [2], Lehto-Virtanen [72] を参照して頂きたい。邦書には専門書はないが、谷口-今吉 [59] に基本事項が証明も含めて解説されている。

擬等角写像には同値な定義がいくつかあるが、ここでは擬等角写像の基本的性質について分かれば十分なので、それには深入りしないことにする。ただ、定義をしないわけにはいかないので、次の定義を採用しておくことにしよう。

$K \geq 1$ を定数とする。複素平面内の領域 D から D' への向きを保つ同相写像 f が K-擬等角であるとは、f が超函数の意味での局所 2 乗可積分な 1 階導函数を持ち、それに対して

$$|f_{\bar{z}}| \leq \frac{K-1}{K+1}|f_z|$$

が D 上でほとんど至るところ成立することと定義する。

また、ある K に対して K-擬等角であるような写像を単に擬等角写像であると呼ぶ。

擬等角写像 f については実はほとんど至るところ $f_z \neq 0$ であることが分かり、このことから $f_{\bar{z}}/f_z$ がほとんど至るところ定義可能であることが分かる。これを f の Beltrami 係数と呼び $\mu[f]$ と書くことにする。従って、その L^∞-ノルムに関して $\|\mu[f]\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$ である。

また、f が等角写像の時は $\mu[f] = 0$ であり、これは 1-擬等角写像ともみなせる。

擬等角写像に関しては、次の基本的性質が成り立つ。

命題 1.8.1

1. f_1, f_2 をそれぞれ K_1, K_2-擬等角写像とすると、その合成は K_1K_2-擬等角写像である。
2. f が K-擬等角写像とすると、その逆写像も K-擬等角写像である。
3. f が 1-擬等角ならば、実は f は等角写像である。
4. D からの擬等角写像 f, g についてもし $\mu[f] = \mu[g]$ *a.e.* ならば、$f \circ g^{-1}$ は等角写像である。

これらのことから、特に K-擬等角性は等角不変な概念であることが分かる。故に、擬等角写像はリーマン面の間の写像についても同様に定義できることが分かる。特にリーマン球面上の擬等角写像も意味を持つことになるが、これについては次の定理が最も基本的である。

定理 1.8.2 (可測リーマン写像定理 [4]) 任意の $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})_1 = \{\mu \in L^\infty(\mathbb{C}); \|\mu\|_\infty < 1\}$ に対して *Beltrami* 方程式

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

を満たす擬等角写像 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ で $0,1,\infty$ を固定するものが、ただ一つ存在する。

この定理によって保証される $0,1,\infty$ を固定する $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})_1$ に対する Beltrami 方程式の解となっている擬等角写像を w^μ と書くことにすると、実はこの解の μ に関する依存性は非常に良いことが知られている。（Beltrami 方程式は一様楕円型偏微分方程式なので、正則性は一般論から知られていることであるが、今の場合はもっと具体的方法によっても分かる。）

このことが Teichmüller 空間が自然な複素構造を持っていることを証明するのに非常な重要な意味を持ってくるのであるが、これについては専門書を見て頂きたい。

Beltrami 方程式の解の依存性については、ここでは以下のような形で述べておくことにする。（もっと強い形の結果も成り立つが、それについては例えば [4] を参照のこと。）

命題 1.8.3 $L^\infty(\mathbb{C})_1\times\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像 $(\mu,z)\mapsto w^\mu(z)$ は連続であり、z を固定すれば μ については正則写像となっている。

また、擬等角写像のもう一つの重要性はある種の完備性である。一般に滑らかな写像がある函数に一様収束していても、その函数が滑らかかどうかは分からないが、擬等角写像についてはこの擬等角性が保たれるという著しい性質があるのである。

定理 1.8.4 $K\geq 1$ を定数とする。固定された *3* 点を動かさないようなリーマン球面からそれ自身への K-擬等角写像全体のなす函数族は（球面距離に関する）一様収束位相についてコンパクトである。

この定理が特に単葉函数の擬等角拡張の議論においてキーになってくる。また、次の形の収束定理も重要である。

定理 1.8.5 (Ahlfors-Bers [4]) $k\in[0,1)$ を定数として *Beltrami* 係数の列 $\mu_n\in L^\infty(\mathbb{C})$ が $\|\mu_n\|_\infty\leq k$ を満たしており、さらに μ_n が各点ごとに μ に収束しているとする。この時 w^{μ_n} は w^μ に球面距離に関して一様収束する。

最後に可測リーマン写像定理から出てくる結果として上半平面や単位円板の場合の写像定理が得られることを注意しておこう。

定理 1.8.6 $\mu\in L^\infty(\mathbb{H})_1$ とする。これを下半平面 $\mathbb{H}^*$ には $\overline{\mu(\bar z)}$ によって拡張して得られる *Beltrami* 係数を $\hat\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$ と表すことにする。すると $w=w^{\hat\mu}$ は上半平面を上半平面に全射に写す擬等角写像になっている。

[Proof] $\hat w(z)=\overline{w(\bar z)}$ と定めるとこれはやはり正規化された擬等角写像で Beltrami 係数を計算すると、$\mu[\hat w]=\overline{\hat\mu(\bar z)}=\hat\mu(z)$ であることが分かるので、$w^{\hat\mu}$ の一意性から $\hat w=w$ であることが分かる。すなわち、$w(\bar z)=\overline{w(z)}$ である。これは実数を実数に写すことを意味しており、w は向きを保つ写像であったことから上半平面は上半平面に写されることが分かる。 □

系 1.8.7 任意の $\mu \in L^\infty(\mathbb{D})_1$ に対してある擬等角写像 w で $w(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ かつ $\mathbb{D}$ 上では $\mu[w] = \mu$ を満たし、$\|\mu[w]\|_\infty = \|\mu\|_\infty$ であるようなものが存在する。

第2章　単葉性を導く基本原理

この章では平面領域上の正則函数が単葉であるための十分条件について、その基本となる原理についていくつか述べることにしたい。

正則函数 $f(z)$ が点 z_0 の近傍で単葉であるための必要十分条件は $f'(z_0) \neq 0$ であることはよく知られている。これは正則函数に限らず、一般に微分可能な写像についてもその Jacobian が消えていないという条件で局所的な単射性が保証されるわけだが、大域的な単射性については、単に微分可能写像とした場合には非常に困難な場合が多い。（ただ、以下に述べる Ahlfors の原理は純粋に位相的な結果であり、必ずしも正則写像に限らない単射性条件も存在はしている。）　以下に述べるように種々の単葉性条件があるというのは、正則函数の持つ剛性の一つの現れであろうと考えられる。

2.1　差分商による直接的方法

まず、適用範囲の広い一般原理を説明する前に、簡単な興味深い単射性条件を紹介しておくことにしよう。

まず $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ の形の展開を持つ $\mathbb{D}$ 上の正則函数が与えられているとする。これについて次のような結果がある。

定理 2.1.1 (小堀 (1932)) $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ならば f は単葉である。

注意 2.1.2 実はこの時 f は星状（*3* 章参照）になっていることが分かる。

[Proof] 相異なる 2 点 $z, w \in \mathbb{D}$ を取り次の差分商を考える。

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1})$$

従って、もし $f(z) = f(w)$ であるとするならば、

$$1 = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}) \right| < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$$

となり、これは仮定に反する。よって f は単葉である。　□

同様にすれば、$\mathbb{D}^*$ 上の (∞ 以外には極を持たない) 正則函数 $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ についても次の形の結果が得られる。

定理 2.1.3 (尾崎 [89]) $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leq 1$ ならば、g は $\mathbb{D}^*$ 上単葉である。

この場合興味深いのは、単葉ならば面積定理から $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ が従うことであり、上の条件と形が似ていることである。しかも、係数が非負の場合には、上の条件は単葉であるための必要十分条件になっている！

定理 2.1.4 (尾崎 [89]) もし全ての n について $b_n \geq 0$ ならば、$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ $(|z| > 1)$ が $\mathbb{D}^*$ 上単葉であるための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \leq 1$ が成り立つことである。

[Proof] 十分性は言えているので、必要性を示す。g が単葉だとすると、特に実数 $x > 1$ について $g'(x) \neq 0$ である。すなわち、$1 - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{-n-1} \neq 0$ である。この左辺は x が十分大きいところでは正であり、それがずっと 0 にならないわけだから、左辺の連続性から常に正でなければいけない。よって $x \to 1$ として必要性が出る。 □

この証明で興味深いところは、この必要条件の証明では $g'(x) \neq 0$ が $x > 1$ で成り立つことしか用いていないことである。つまり、この条件自体が単葉性と同値な条件になっているわけである。

なお、S に関しても対応する結果がある。証明は同様なので省略するが主張だけは述べておくことにしよう。

定理 2.1.5 (尾崎 [89]) 単位円板上の正則函数 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ について各係数が $a_n \leq 0$ であるとする。この時、f が単葉であるための必要十分条件は $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ であり、従ってこの時は星状になる。

2.2 偏角の原理

ここでは正則写像について、ある点の逆像の個数を直接的に積分によって表現するという偏角の原理について述べておく。この一つの応用として単葉性を保証するのに有用な原理の一つである、Darboux の定理について触れておく。この定理自身は像領域が Jordan 領域の場合にしか述べられていないが、原理としては非常に単純で応用範囲も広く拡張性もある。まず、Darboux の定理を述べる前に偏角の原理を述べておこう。

定理 2.2.1 (偏角の原理) 滑らかな $Jordan$ 曲線 C を境界に持つ閉領域 $\overline{D}$ の近傍で有理型な函数 f がさらに C 上では零点も極も持たないと仮定する。この時、D に含まれる f の零点、極の（重複度を込めた）個数をそれぞれ N, P とする時、

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{f(C)} d\arg w \tag{2.2.1}$$

が成り立つ。ただし、ここで曲線 $f(C)$ と書いた時には、C によってパラメトライズされた曲線とみなし、例えば同じ道を何重にも回るとすればその分だけ積分するものと約束する。

特に f が D において正則ならば、境界曲線 C の f による像の 0 の周りでの回転数が D の内部にある零点の個数を表すことになる。

定理 2.2.2 (Darboux の定理) $Jordan$ 領域 D_0 上の有理型函数 f がその閉包まで連続に拡張出来て、しかも境界 ∂D_0 上では単射になっているとする。この時もし、$f(\overline{D_0}) \neq \widehat{\mathbb{C}}$ であれば、実は f は $\overline{D_0}$ 上でも単射である。

この定理は例えば [101], [75] 等に載っているが、∂D_0 は長さ有限で、なおかつ f は $\overline{D_0}$ の近傍で正則というかなり強い仮定の下で述べられており、このような一般的な形で述べられた本は少ないようである。(少なくとも、筆者は知らない。) そこで、便利のために証明を与えておこう。

[Proof] まず D_0 のリーマン写像 $\varphi : \mathbb{D} \to D_0$ を考えると、これは Carathéodory の定理により同相写像 $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D_0}$ に拡張できるから、f の代わりに $g = f \circ \varphi$ を考えてもこれは同じ仮定を満たすことが分かる。また、像の方も仮定により適当なメビウス変換で写すことにより、$\infty \notin g(\overline{\mathbb{D}})$ と仮定して一般性を失わない。$g(\overline{\mathbb{D}})$ はリーマン球面内の閉集合であるから、特にコンパクトであり従って有界であることに注意しておこう。また、g は $\mathbb{D}$ 上で正則な函数となる。

さて、仮定より g は $C = \partial\mathbb{D}$ 上で単射であるから、その像 $\Gamma = g(C)$ は (有界な)Jordan 曲線になる。そこでその内部を D として $a \in \mathbb{C} - \bar{D}$ とする。$r \nearrow 1$ とするとき、$g(re^{i\theta})$ は一様に $g(e^{i\theta})$ に収束するから r を十分 1 に近づければ a はやはり $g(C_r)$ の外側に位置することが分かる。ただし、ここに $C_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$ とする。従って、これより $g(C_r)$ の a の周りの回転数は 0 であり、ゆえに偏角の原理を用いて $\mathbb{D}$ 内には値 a を取る点が存在しないことが分かる。よって $g(\mathbb{D}) \subset \overline{D}$ が証明された。

今度は D のリーマン写像を $\psi : \mathbb{D} \to D$ とするとやはりこれは同相写像 $\psi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}$ に拡張されるが、さらに $h = \psi^{-1} \circ g$ とおけば、これは $\overline{\mathbb{D}}$ から $\overline{\mathbb{D}}$ への連続写像で、内部では正則、周上では円周を円周に写す同相写像になっていることが分かる。しかし、明らかにこのような函数は Schwarz の鏡像原理を用いれば $Aut(\mathbb{D})$ の元に限ることが容易に分かる。よって、このことから $h,$ 従って f が等角写像であることが証明されたことになる。 $\square$

注意 2.2.3 この定理で“ $f(\overline{D_0}) \neq \widehat{\mathbb{C}}$ ”の仮定は必要である。例えば、$D_0 = H^+$（右半平面）として写像 $f(z) = z^5$ を考えれば、この写像は境界である虚軸を向きを保ったまま虚軸に単射に写しているが、明らかにこの写像自体は H^+ 上で単射ではない。

なお、この Darboux の定理の Jordan 曲線でない場合への拡張については [10] を参照して頂きたい。

2.3 能代-Warschawski の定理

この節では能代 (1934) [84] および Warschawski(1935) [102] により独立に得られた非常にシンプルな定理について述べておく。（特別な場合として D が単位円板の場合には Alexander(1915) [6] が、半平面の場合には Wolf(1934) が証明している。）

定理 2.3.1 (能代-Warschawski の定理) f を複素平面内の凸領域 D 上の非定数正則函数で、ある実定数 α に対して

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha} f'(z)\right\} \geq 0 \tag{2.3.1}$$

が任意の $z \in D$ に対して成立しているとすると、f は D 上で単葉である。

[Proof] まず、ある 1 点で (2.3.1) が等号成立しているとすると、最大値の原理から f' は D 上で定数でなければならないからこの場合自明である。従って、(2.3.1) はつねに真に不等号が成立しているとしてよい。$z_1, z_2 \in D$ を相異なる 2 点とするとこの 2 点を結ぶ線分 $[z_1, z_2]$ は仮定から D に含まれる。従って、

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1))dt$$

であるが、これより

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq |z_2 - z_1| \int_0^1 \mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha} f'(z_1 + t(z_2 - z_1))\right\} dt > 0$$

となり、特に $f(z_1) \neq f(z_2)$ が分かる。 □

この定理において D が凸領域というのが本質的である。実際、複素平面内の領域 D についてこの定理の主張が成り立つことと、D が凸であることとが同値であることを Herzog-Piranian [56], Tims [100] が証明している。

能代-Warschawski の定理の最も典型的な応用は近接凸函数の単葉性の証明であるが、これについては定理 3.5.1 を参照して頂きたい。

また、高次導函数の条件に置き換えて p 葉性が導き出せるという結果も知られているが、これについては例えば Goodman [45] を参照して頂きたい。

能代-Warschawski の定理と同様の方法により次のような結果も得られる。その前に少し記号を用意しておこう。$\lambda_D(z,w)$ を 2 点 $z, w \in D$ の Mazurkevich 距離として (1.2 節参照)、その 2 点のユークリッド距離との比の上限を

$$\lambda(D) = \sup_{z,w\in D} \frac{\lambda_D(z,w)}{|z-w|}$$

と定義する。

定理 2.3.2 (Rogozhin(1969)) 複素平面内の領域 D 上で定義された正則函数 f が 0 でないある複素数 a に対して条件

$$|f'(z) - a| < |a|/\lambda(D) \tag{2.3.2}$$

を満たすとすると、f は D 上で単葉である。

[Proof] 相異なる 2 点 z_1, z_2 を取り、この 2 点を結ぶ曲線 C で長さ ℓ が $\lambda_D(z_1,z_2)$ に十分近いものを取っておく。 すると

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq |a||z_2 - z_1| - \int_C |f'(z) - a||dz| > |a||z_2 - z_1| \left(1 - \frac{\ell}{\lambda(D)|z_2 - z_1|}\right)$$

となり、この最右辺はいくらでも 0 に近い値が取れるのに対し、2 番目の不等号は（z_1, z_2 を固定する限り）ある一定値は差が出るので結果的に $|f(z_2) - f(z_1)| > 0$ が従い単葉性が示される。 □

この定理は f に関する条件がかなりきつくなってはいるものの、D に関しては例えば単連結でなくても良いわけで、そういう点でかなり一般性のある結果である。例えば、円環領域を考えると $|f'(z) - a| < \frac{2}{\pi}|a|$ によって単葉性が従うことになる。

2.4　微分方程式の比較定理による方法

ここでは微分方程式 $2w'' + \varphi w = 0$ の解の挙動（具体的には零点分布）に関する知識を正則函数の単射性に利用しようという基本的には Nehari によるアイデアを解説する。もっとも、この節では専らこの形の微分方程式のみに着目することにし、それを具体的に正則函数の単葉性に応用する方法については 4 章で詳しく述べることにしたい。

この節での主結果は次の定理である。（実数値函数しか扱わない場合は、古典的な Sturm-Liovilleの比較定理と呼ばれるものであるが、複素数値なので証明には若干違った議論が必要となる。）

定理 2.4.1 (比較定理) 区間 $I = (-1, 1)$ 上の連続函数 $A(t) \geq 0$ が次の条件を満たしているとする。

（*A1*）　ある正値函数 $q \in C^2(I)$ で微分不等式 $2q'' + Aq \leq 0$ を満たすものが存在する。

この時、I 上で $\mathrm{Re}\,\varphi \leq A$ を満たす任意の複素数値連続函数 φ に対して次の方程式

$$2w'' + \varphi w = 0. \tag{2.4.1}$$

の自明でない解 w は I 上に高々*1*個しか零点を持たない。

注意 2.4.2 以下の証明から分かるように、φ に関する条件は、「ある実定数 α があって、$\mathrm{Re}\quad e^{i\alpha}\varphi \leq A$」でも構わない。

[Proof] 結論を否定して微分方程式 (2.4.1) が自明でない解 w で I 上の 2 点 t_1, t_2 $(-1 < t_1 < t_2 < 1)$ で零になるものが存在したとする。(2.4.1) の両辺に $\bar{w}$ を掛けると $\varphi|w|^2 = -2w''\bar{w}$ だからこれを積分して

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi|w|^2 dt = -2\int_{t_1}^{t_2} w''\bar{w}dt = 2\int_{t_1}^{t_2} |w'|^2 dt \tag{2.4.2}$$

を得る。特にこの実部を取ることにより

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\,\varphi|w|^2 dt = 2\int_{t_1}^{t_2} |w'|^2 dt \tag{2.4.3}$$

を得る。

ここで一般に恒等的には 0 でない 1 回連続的微分可能な実数値函数 u で $u(t_1) = u(t_2) = 0$ を満たすものを取ると、$\int_{t_1}^{t_2}(u' - uq'/q)^2 dt > 0$ であるから、これより

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (u')^2 dt &> \int_{t_1}^{t_2} \left[2uu'\frac{q'}{q} - u^2\left(\frac{q'}{q}\right)^2\right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[(u^2)'\frac{q'}{q} - u^2\left(\frac{q'}{q}\right)^2\right] dt \\
&= \left[u^2\frac{q'}{q}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[u^2\left(\frac{q'}{q}\right)' + u^2\left(\frac{q'}{q}\right)^2\right] dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} u^2\frac{q''}{q}dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{A}{2}u^2 dt
\end{aligned}$$

という計算が出来る。そこで、u としては w の実部、虚部をそれぞれ考えて足し合わせれば最終的に次の不等式を得る。

$$2\int_{t_1}^{t_2} |w'|^2 dt > \int_{t_1}^{t_2} A|w|^2 dt. \tag{2.4.4}$$

ここで仮定より $\mathrm{Re}\,\varphi \le A$ だったから、これと (2.4.3) と (2.4.4) とを合わせて矛盾を得る。□

この微分方程式で w'' の前に係数 2 が付けてあるのは Schwarz 微分との関係で便宜的に付けているものであるので、もちろん本質的に重要なわけではない。

なお、この A に関する条件 (A1) であるが、例えば境界値問題（Dirichlet 問題）の一般論から容易に分かるように、次の一見より強い仮定：

(A2) ある正値函数 $q \in C^2(I)$ で微分方程式 $2q'' + Aq = 0$ を満たすものが存在する。

とも同値である。また、これは最小固有値に関する次の条件とも同値となる。

(A3) 任意の $-1 < t_1 < t_2 < 1$ に対して境界値問題 $y(t_1) = y(t_2) = 0, 2y'' + \lambda Ay = 0$ on (t_1, t_2) が自明でない解を持つような λ の最小値が 1 以上である。

また、これも一般論から分かるように次の Hardy 型不等式が成立することとも同値である。(作用素 $y \mapsto y''$ は 1 次元の Laplacian であることに注意せよ。)

(A4) 任意の $-1 < t_1 < t_2 < 1$ を固定するとき、条件 $y(t_1) = y(t_2) = 0$ を満たす恒等的に 0 ではない実数値連続函数について

$$\frac{2\int_{t_1}^{t_2}(y')^2dt}{\int_{t_1}^{t_2}Ay^2dt} \ge 1$$

が常に成り立つ。

実際に単葉性を導くにはさらに双曲距離に関する不変性を保証するための条件が必要になり、その条件も満足するような具体的な函数 A については 4.1 節において具体的に見ていくことにする。

2.5　Ahlfors の原理

これは球面特有の次の事実に着目した方法である。

補題 2.5.1 リーマン球面からそれ自身への連続写像が局所同相であれば、実は大域的に同相である。

つまり、球面から球面への写像は単射でなければ、“ どこかに皺が寄る ”ということである。この原理を使って Ahlfors はある種の良い条件を満たす例えば単位円板上の局所単葉な

正則函数を単位円板の外部にもやはり局所単葉に延ばせることを示し、そのことから結果的に単葉性を導き出した。実際にはいきなりリーマン球面全体に局所単葉に延ばすことは困難なので、少し小さい半径の円板で折り返して局所同相な擬等角写像（従って上の原理から全体で同相な擬等角写像）に拡張し、“ 良い条件 ”からその変形率 K が一様に取れることを見てやれば、後は擬等角写像のコンパクト性 (定理 1.8.4) からその極限もやはり擬等角であることが分かり、従って元々の写像そのものも単射であったことが分かる、という寸法である。この方法の利点は、構成の方法から分かるように、擬等角写像に直接拡張してしまう、ということなので結果的には単に単葉だというよりももっと強いことが証明出来るということである。

具体的な適用例は 4.1 節をご覧になって頂きたい。

なお、読者の便利のためこの原理の証明を与えておく。(以下の証明は一般にコンパクト単連結位相多様体、例えば n 次元球面としても適用出来る。)

[Proof] $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ を局所同相な連続写像とする。特に f は開写像であるからその像は開集合である。一方、$\widehat{\mathbb{C}}$ はコンパクトだからその像もコンパクト、すなわち閉集合である。よって f の像は開かつ閉となり球面の連結性からこれは球面全体でなければならない。すなわち、f は全射である。

次に q を球面内の任意の 1 点とする。するとこの逆像 $f^{-1}(q)$ はやはり f の局所同相性から有限集合でなければならない。逆像を $\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$ とすると f の局所同相性から q の連結開近傍 V を十分小さく取れば、$f^{-1}(V)$ の p_j を含む成分を U_j としたとき、制限した写像 $f:U_j\to V$ が各 j に対して同相であるように出来る。$f^{-1}(V)$ が U_j 以外に成分 W を持っていたとしよう。すると $q\notin f(W)$ であるから $V\cap\partial f(W)\neq\emptyset$ でなければならない。そこで $b\in V\cap\partial f(W)$ とすると取り方から W 内の点列 a_n で $f(a_n)\to b$ となるものが存在する。コンパクト性から必要なら部分列を取ることによって a_n 自身もある点 a に収束するとしてよい。すると f の連続性から $f(a)=b$ となるが、f はこの点でも局所同相だから a の十分小さい連結開近傍 U を取れば $f:U\to f(U)$ が同相になり、かつ $f(U)\subset V$ となるように出来る。すると U は連結で $U\cap W\neq\emptyset$ だから W の取り方から $U\subset W$ でなければならないがこれより b は $f(W)$ の内部の点でなければならないことが分かり $\partial f(W)$ から取ってきたことに反する。よって、このような W はもともと存在しなかったことが分かる。(これは単に f の properness からの帰結であると言ってもよい。)

以上の考察から $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ が被覆であることが分かった。一方、$\widehat{\mathbb{C}}$ は単連結であるから定理 1.1.4 から f は同相写像であることが分かる。 □

2.6 Löwner の方法

以上までの方法が比較的単純だったのに比べて、この Löwner の方法は非常に深く他の方法では手に負えないような単葉函数までも扱うことが出来る。もっとも、この方法の定式化そのものが一目で分かるというようなな代物ではないので、これを使いこなすにはある種の職人的な熟練が必要となる。また、函数の擬等角拡張性までも保証する方法ではないので、擬等角拡張性まで含めて議論したい場合にはあまり適当な方法ではないかもしれない。

なお、Löwner の方法は、原理だけから言えば要するに 1 階微分方程式の解の一意性を単葉性に用いるのが基本アイデアである。そのことを念頭に置いて読めば、理解しやすいかもしれない。なお、以下では Pommerenke [92] を参考にした。

まず、次のような領域の族 $G(t)$ $(0 \le t \le \infty)$ が与えられたしよう。

(1) 各 $G(t)$ は複素平面内の単連結領域で $G(\infty) = \mathbb{C}$,

(2) $s < t$ ならば $0 \in G(s) \subsetneqq G(t)$,

(3) $t_n \to t_0$ ならば Carathéodory の意味で $G(t_n) \to G(t_0)$.

例 2.6.1 J を無限遠点に伸びる *Jordan* 弧であるとし、$\alpha : [0, \infty) \to J \subset \mathbb{C}$ をそのパラメトリゼーションとする。つまり α は連続かつ単射であるとし、$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$ であるとする。この時、$G(t) := \mathbb{C} - \alpha([t, \infty))$ とすれば、これは上の条件 *(1), (2), (3)* を満足する。

さて、この時各 $G(t)$ のリーマン写像 $f_t : \mathbb{D} \to G(t)$ で $f_t(0) = 0, {f_t}'(0) > 0$ となるものを取る $(t \in [0, \infty))$。ここで $a_1(t) = {f_t}'(0)$ とおくことにしよう。$s < t < \infty$ ならば $f_s \prec f_t$ だから特に $a_1(s) < a_1(t)$ が成り立つ。また、さらに条件 (3) より a_1 は連続で $t \to \infty$ のとき $a_1(t) \to \infty$ が成り立つ。そこで、パラメータを $a_1(t) = e^{t'}$ で変換して $t'_0 \le t' \le \infty$ を考えても本質的に変わらないと考えられる。さらに必要なら相似変換すれば最初から $t'_0 = 0$ と仮定して一般性を失わないであろう。

従って、以下ではさらに次の条件を課すものとし、このようなものを Löwner 鎖と呼ぶことにする。

(4) f_t は $\mathbb{D}$ で単葉で，$f_t(z) = e^t z + a_2(t) z^2 + \cdots$ （すなわち，$e^{-t} f_t \in S$.）

また構成法から明らかに

(5) $0 \le s \le t < \infty \Rightarrow f_s \prec f_t$

が成り立つ。

以下の証明では仮定 (4), (5) のみを用いて議論を進める。

$s \le t$ ならば $f_s \prec f_t$ だから $\varphi_{t,s} = {f_t}^{-1} \circ f_s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ と定めると、これは単葉函数で

$\varphi_{t,s}(0) = 0, {\varphi_{t,s}}'(0) = e^{s-t}$ となり次の半群性を持つ。

$$0 \le s \le t \le u < \infty \Rightarrow \varphi_{u,t} \circ \varphi_{t,s} = \varphi_{u,s}. \tag{2.6.1}$$

もちろん作り方から明らかに

$$0 \le s \le t < \infty \Rightarrow f_s = f_t \circ \varphi_{t,s} \tag{2.6.2}$$

である。

　さて、$f(z,t) = f_t(z)$ を幾何学的に解釈してみると、これは初期領域 $G(0)$ のリーマン写像を流れ (flow) により外側に押し流していくような感じになっている。従って、何かの微分方程式の積分曲線を与えていると考えるのは極めて自然なことである。そこで、以下ではどのような微分方程式を満たしているのかを見ていくことにしよう。

　それには、まず素朴に考えて $\partial_t f(z,t)$ を計算することから始めよう。(2.6.2) より $s < t$ として $\varphi_{t,s} = \varphi$ と略記すれば、

$$\begin{aligned}\frac{f_s(z) - f_t(z)}{s-t} &= \frac{f_t(\varphi(z)) - f_t(z)}{s-t} \\ &= \frac{\varphi(z) - z}{s-t}\frac{f_t(\varphi(z)) - f_t(z)}{\varphi(z) - z}\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

である。ここで $s \to t$ としたときもし $\varphi(z) \to z$ であることが分かれば、最後の式の 2 番目の項は明らかに ${f_t}'(z)$ に収束するから、問題は最後の式の 1 番目の項の極限を計算することにある。

　いずれにしても、$\varphi(z) - z$ の挙動を調べることが重要になる。そこでやや天下り的だが次の函数を考えてみよう。

$$q_{t,s}(z) = q(z,t,s) = \frac{z - \varphi_{t,s}(z)}{z + \varphi_{t,s}(z)} = \frac{1 - \varphi_{t,s}(z)/z}{1 + \varphi_{t,s}(z)/z}, \quad (s < t). \tag{2.6.4}$$

すると $|\varphi(z)/z| < 1$ であるから $q_{t,s} : \mathbb{D} \to H^+$ であることが分かる。また、$q_{t,s}(0) = \frac{1-e^{s-t}}{1+e^{s-t}} = \tanh((t-s)/2)$ である。そこで新たに $p_{t,s} = \coth((t-s)/2) q_{t,s}$ を考えれば $p_{t,s} \in P$ となる。従って定理 1.7.1 より

$$|p_{t,s}(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

が成り立つ。これを用いると、(2.6.4) より

$$|\varphi(z) - z| \le 2|z||q_{t,s}(z)| \le 2|z| \tanh((t-s)/2) \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{2.6.5}$$

を得る。これより $s \to t$ の時 $\varphi(z) \to z$ が成り立つことが分かる。

しかし、これだけではまだ情報が足りないので、もう少し考察する必要がある。まず $\varphi = \varphi_{t,s}$ であるが、これは $\mathbb{D}$ からそれ自身への正則函数とみなせば、Schwarz-Pick の補題 (定理1.1.6) から

$$\frac{1}{1-|z|^2} \geq \frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \geq |\varphi'(z)| \tag{2.6.6}$$

が成り立つことに注意しておく。f_t については $e^{-t}f_t \in S$ であることに気がつけば Koebe の歪曲定理などにより次の評価が成立することに注意しておこう：

$$e^t \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f_t(z)| \leq e^t \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{2.6.7}$$

$$e^t \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f_t{}'(z)| \leq e^t \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{2.6.8}$$

準備が出来たところで、次の基本となる評価式を証明しておこう。

命題 2.6.2 $0 \leq s \leq t \leq u < \infty,\ |z| < 1$ について次が成立する。

$$|\varphi_{u,t}(z) - \varphi_{u,s}(z)| \leq 2\tanh((t-s)/2)\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{2.6.9}$$

$$|f_t(z) - f_s(z)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s). \tag{2.6.10}$$

従って、特に $\varphi_{u,t}(z)$ や $f_t(z)$ は t について絶対連続になっている。

[Proof] まず、半群性 (2.6.1) に注意すると $\varphi_{t,s}(z) = \varphi$ と略記して

$$\begin{aligned}\varphi_{u,t}(z) - \varphi_{u,s}(z) &= \varphi_{u,t}(z) - \varphi_{u,t}(\varphi) \\ &= \int_{\varphi}^{z} \varphi_{u,t}{}'(\zeta) d\zeta\end{aligned}$$

を得る。従って、ここで (2.6.6) から $|\zeta| \leq r := |z|$ に対して $|\varphi_{u,t}{}'(\zeta)| \leq \frac{1}{1-r^2}$ であることに注意し、さらに (2.6.5) を用いることにより次のように評価することが出来る。

$$\begin{aligned}|\varphi_{u,t}(z) - \varphi_{u,s}(z)| &\leq |z-\varphi|\frac{1}{1-r^2} \\ &\leq 2\tanh((t-s)/2) r \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{1-r^2},\end{aligned}$$

故に最初の不等式が出てきた。

次の評価もやはり関係式 (2.6.2) と $f_t{}'$ の評価式 (2.6.8) を用いて同様の評価を行えばよい。
□

注意 2.6.3 ここまでは仮定（*4*），（*5*）のみを用いて議論してきたわけだが、ここで出てきた評価を用いれば、逆に最初に仮定（*4*），（*5*）のみを満たす単葉函数族 f_t が与えられた時に $G(t) = f_t(\mathbb{D})$ $(0 \le t < \infty)$, $G(\infty) = \mathbb{C}$ と置けば、これが性質（*1*），（*2*），（*3*）を持つことは *Carathéodory* の核収束定理などを用いれば容易に分かる。従って、*Löwner* 鎖と言えば（*4*），（*5*）のみを満足する単葉函数族であると定義しても良いわけである。

さて、準備が整ってきたところでいよいよ $(\varphi_{t,s}(z) - z)/(s-t)$ の極限値を求める努力をしてみよう。まず、命題 2.6.2 により z を固定すれば $f(z,t) = f_t(z)$ は t について絶対連続である。よって測度 0 の集合を除いては $\partial_t f(z,t) =: \dot{f}(z,t)$ が存在する。測度 0 集合の可算和はやはり測度 0 であることに注意すると、$[0,\infty)$ 内の適当な測度 0 集合 E を取ればその点以外の任意の t について $\dot{f}(1/k,t)$ が 2 以上の任意の自然数 k について存在するように出来る。

今度は $t \in [0,\infty) - E$ を固定しよう。点 s を t に十分近いところで考えると函数族 $(f_t - f_s)/(t-s)$ は (2.6.10) により正規族をなすことが分かる。従って、任意の数列 $s_n \to t$ を考えれば、さらにその適当な部分列 s'_n を取ることによって正則函数 $(f_t - f_{s'_n})/(t-s'_n)$ はある正則函数に $\mathbb{D}$ 上で広義一様収束するが、その極限函数の $1/k$ での値は $\dot{f}(1/k,t)$ に一致しなければならない。$1/k$ は $\mathbb{D}$ 内に集積点を持つのでこのことから極限函数は一意的に定まる。故に $s \to t$ とするとき $(f_t - f_s)/(t-s)$ はある正則函数に $\mathbb{D}$ 上で広義一様収束することが分かる。(この部分はいわゆる Vitali の定理の証明をしていることになる。)　その極限函数をやはり $\dot{f}(\cdot,t)$ と書くことにすれば、これは各 $t \in [0,\infty) - E$ について正則函数で、またその t と任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して $\partial_t f(z,t)$ が存在することが分かった。また、可測函数の極限で書かれるので $\dot{f}(z,t)$ は 2 変数可測函数になっていることも注意しておこう。

では後は、具体的に $\dot{f}(z,t)$ の形を求めることが残された問題となる。ここで $p_{t,s}(z)$ の定義式を見直してみると、次のようにも表記出来ることに気づく。

$$p_{t,s}(z) = \frac{-(t-s)/2}{\tanh((t-s)/2)} \frac{\varphi_{t,s}(z) - z}{t-s} \frac{2}{\varphi_{t,s}(z) + z}. \tag{2.6.11}$$

ここで (2.6.3) を見れば分かるように $t \in [0,\infty) - E$ に対してはやはり $(\varphi_{t,s} - z)/(t-s)$ も広義一様にある正則函数 ψ_t に収束するので、このことから $p_{t,s}$ もある $p_t \in P$ に広義一様収束することが分かり、しかも (2.6.11) で $s \to t$ とすると

$$p_t(z) = \psi_t(z)/z \tag{2.6.12}$$

であることが分かる。従って、(2.6.3) より最終的に

$$\dot{f}(z,t) = z{f_t}'(z)p_t(z) \tag{2.6.13}$$

を得る。ここでこの式から $p_t(z) = p(z,t)$ も 2 変数について可測であることに注意しておこう。

注意 2.6.4 この微分方程式の幾何学的な意味は次のようなものである。まず $p_t \in P$ という主張を別の表現をしてみれば、

$$|\arg \dot{f}(z,t) - \arg z f'(z,t)| = |\arg p_t(z)| < \frac{\pi}{2}$$

ということであり、これは $f(\mathbb{D}_r)$ の境界点においては速度ベクトル $\dot{f}(z,t)$ がこの領域の外側を向いているということを意味している。従って、領域が本当に広がっていくという現象を記述している方程式と考えられる。

さて、(2.6.13) は偏微分方程式であるから、この方程式そのものを扱うのはたいへん難しい。そこで、今度は $\dot{\varphi}_{t,s}(z) := \partial_t \varphi_{t,s}(z)$ を計算してみよう。それには (2.6.2) より $f(z,s) = f(\varphi_{t,s}(z), t)$ だから、この両辺を t で偏微分してみればよい。すると、$0 = f'(\varphi_{t,s}(z),t)\dot{\varphi}_{t,s}(z) + \dot{f}(\varphi_{t,s}(z),t)$ を得るから、これと (2.6.13) から

$$f'(\varphi_{t,s}(z),t)\dot{\varphi}_{t,s}(z) = -\dot{f}(\varphi_{t,s}(z),t) = -\varphi_{t,s}(z) f'(\varphi_{t,s}(z),t) p_t(\varphi_{t,s}(z))$$

を得る。$f' \neq 0$ だからこれより結局

$$\dot{\varphi}_{t,s}(z) = -\varphi_{t,s}(z) p_t(\varphi_{t,s}(z)) \tag{2.6.14}$$

であることが分かった。注目すべきは、この式が t についての常微分方程式になっていることである！　これら (2.6.13) や (2.6.14) を Löwner の微分方程式と呼ぶ。

さらに、実は $\varphi_{t,s}$ から $f_t(z)$ が決定出来ることに注意しておこう。これを言うにはもう少し考察が必要である。まず、$e^{t-s}\varphi_{t,s} \in S$ であることに注意すると増大度定理から

$$e^{s-t}\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |\varphi_{t,s}(z)| \leq e^{s-t}\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2.6.15}$$

が得られる。また、$|z| \leq r_0$ とすれば (2.6.7) から $|e^{-t}f_t(z) - z| \leq \frac{2r_0}{(1-r_0)^2} =: K_0$ であるから、最大値の原理から

$$|f_t(z) - e^t z| \leq \frac{e^t K_0 |z|^2}{{r_0}^2} \tag{2.6.16}$$

が従う。よって、$s \leq t,\ |z| \leq r_0$ とすればこの不等式と (2.6.15) より

$$\begin{aligned}|f_s(z) - e^t\varphi_{t,s}(z)| &= |f_t(\varphi_{t,s}(z)) - e^t\varphi_{t,s}(z)| \\ &\leq \frac{e^t K_0}{{r_0}^2}|\varphi_{t,s}(z)|^2 \leq \frac{e^{2s-t}K_0}{{r_0}^2}\frac{|z|^2}{(1-|z|)^4}\end{aligned}$$

が得られる。従って、この式で $t \to \infty$ とすれば広義一様に

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t \varphi_{t,s}(z) \tag{2.6.17}$$

が成り立つことが分かる。故に、この式により f_t が復元出来ることが分かる。これらの事実は次の Löwner の定理の後半にどのような方法が適当かを示唆している。前半の主張は既にこれまで示した通りである。

定理 2.6.5 (Löwner の定理) 函数 $f(z,t)=f_t(z)$ が *Löwner* 鎖であるための必要十分条件はある正定数 r_0, K_0 があって次の *2* つの条件を満たすことである。

(i) 函数 $f(z,t)$ は任意の $t\in[0,\infty)$ に対して $|z|<r_0$ 上で正則であり $f(z,t)=f_t(z)=e^tz+\cdots$ という展開を持つ。また各 $|z|<r_0$ に対しては t について絶対連続で、しかも

$$|f(z,t)|\le K_0e^t \quad (|z|<r_0, t\ge 0) \tag{2.6.18}$$

を満たす。

(ii) $\mathbb{D}\times[0,\infty)$ 上の可測函数 $p(z,t)$ で各 t について $p_t=p(\cdot,t)$ は正則かつ $\mathrm{Re}\,p_t\ge 0$ なるものがあって、ほとんど全ての t について

$$\dot{f}(z,t)=zf'(z,t)p(z,t) \quad (|z|<r_0, t\ge 0) \tag{2.6.19}$$

が成り立つ。

従って、特にこの定理では f_t が $\mathbb{D}$ まで解析接続出来てしかもそれが単葉になっている、ということまで主張している。もちろん、この定理で本質的に重要なのはこれから証明する単射性を主張する後半の部分である。まず、その前に微分方程式の初期値問題に関する解の存在と一意性についての結果をこの方程式に即して述べておくことにしよう。扱う微分方程式は $f(z,t)$ ではなくて、むしろ (s を固定した時の)$\varphi_{t,s}(z)$ である。(2.6.14) を参照して頂ければどのような微分方程式を考えるべきかは自ずと明らかである。

定理 2.6.6 $t\in[0,\infty)$ について可測な函数 $p(z,t)=p_t(z)$ で $p_t\in P$ であるものが与えられているとする。この時 $s\in[0,\infty)$ に対して次の微分方程式を考える。

$$\frac{dw}{dt}=-wp(w,t) \quad a.e.\ \ on\ [s,\infty). \tag{2.6.20}$$

このとき、各 $z\in\mathbb{D}$ に対してこの微分方程式の $[s,\infty)$ 上の絶対連続解で初期条件 $w(s)=z$ を満たすものが一意的に存在する。これを $\varphi_{t,s}(z)=\varphi(z,t,s)$ と書くことにすれば $\varphi_{t,s}$ は $\mathbb{D}$ 上単葉な正則函数であり、

$$f(z,s):=\lim_{t\to\infty}e^t\varphi_{t,s}(z) \tag{2.6.21}$$

が $\mathbb{D}$ 上局所一様に存在してしかもこれが (*2.6.19*) を満足する *Löwner* 鎖を与える。

逆に $f(z,t)=f_t(z)$ が *Löwner* 鎖で $\varphi_{t,s}$ を ${f_t}^{-1}\circ f_s$ によって定めるとこれは $[s,\infty)$ 上ほとんど全ての t に対して方程式 (*2.6.20*) を満足し、(*2.6.21*) の関係式が成り立つ。

[Proof] 後半部分は既に見てきた通りなので、前半のみを証明する。解の局所的な存在については常微分方程式の一般論から従う事実であるが、$[s,\infty)$ 全体まで解が延びることを示すには、方程式の形の特殊性を利用しなければならない。考えている方程式は $(\log w)'=-p(w,\cdot)$ とも書けるから、これを積分方程式の形に直せば

$$w(t)=z\exp\left(-\int_s^t p(w(\tau),\tau)d\tau\right) \tag{2.6.22}$$

となる。よって次の Picard-Lindelöf による逐次代入法を用いるのが適当であることが分かる。

$r \in (0,1)$ として $z \in \mathbb{D}_r$ とし、$s \in [0,\infty)$ としておく。まず $w_0 \equiv 0$ に取り、以下は帰納的に $t \in [s,\infty)$ に対して

$$w_{n+1}(t) = z \exp\left[-\int_s^t p(w_n(\tau),\tau)d\tau\right] \quad (n = 0,1,\dots) \tag{2.6.23}$$

と定義していく。ここでまずクラス P については局所一様有界だったから ((1.7.1) 参照) 被積分函数は可積分であることに注意しておく。次に Re $p > 0$ であるから $|w_n(t)| < r < 1$ であることに注意する。よって、上の定義はちゃんと意味を持つ。

今 Re $a \geq 0$, Re $b \geq 0$ ならば $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$ であることに注意すると $n \geq 1$ に対して次の評価式を得る。

$$\begin{aligned}|w_{n+1}(t) - w_n(t)| &\leq |z|\left|\int_s^t p(w_n(\tau),\tau) - p(w_{n-1}(\tau),\tau)d\tau\right| \\ &\leq |z|\int_s^t \int_{w_{n-1}(\tau)}^{w_n(\tau)} |p_\tau{}'(\zeta)||d\zeta|d\tau \\ &\leq \frac{2|z|}{(1-r)^2}\int_s^t |w_n(\tau) - w_{n-1}(\tau)|d\tau\end{aligned}$$

ただし、ここで (1.7.2) を用いた。この評価を逐次用いて結局次の評価を得る。

$$|w_{n+1}(t) - w_n(t)| \leq \frac{2^n|z|^{n+1}(t-s)^n}{(1-r)^{2n}n!}.$$

故に $\lim_{n\to\infty} w_n(t)$ が $\mathbb{D} \times [s,\infty)$ 上で広義一様に収束することが分かる。この極限函数を $w(t) = \varphi_{t,s}(z) = \varphi(z,t,s)$ と書くことにすると作り方から $|\varphi_{t,s}(z)| \leq |z|$ であり、また z について正則である。また、(2.6.23) において $n \to \infty$ とすれば Lebesgue の有界収束定理から

$$\varphi_{t,s}(z) = z \exp\left[-\int_s^t p(\varphi_{\tau,s}(z),\tau)d\tau\right] \tag{2.6.24}$$

を得る。この形から $\varphi(z,t,s)$ は t について絶対連続であることが分かり微分方程式 (2.6.20) 及び初期条件 $w(s) = z$ を満足することが分かる。

次に解の一意性であるが、他にも同じ初期条件を満たす解 ν が存在したとすると、$(\log w(t))' = -p(w,t)$ の実部を考えれば分かるように $|\nu(t)| \leq |\nu(s)|$ $(s \leq t)$ が成り立つ。これに注意してさらに

$$\frac{d}{dt}(w-\nu) = wp_t(w) - \nu p_t(\nu)$$

を考えると、命題 1.7.1 から容易に分かるように t によらない正定数 K に対して $|(w-\nu)'(t)| \leq K|w(t)-\nu(t)|$ が成り立つ。そこで $t_0 > s$ を任意に取り、$M = \max_{s\leq t\leq t_0}|w(t)-\nu(t)|$ と置けば、上の式を積分することによって任意の $t \in [s,t_0]$ に対して

$$|w(t) - \nu(t)| \leq K\int_s^t |w(\tau) - \mu(\tau)|d\tau \leq MK(t-s)$$

という評価を得る。これをもう一度用いれば

$$|w(t)-\nu(t)| \le K\int_s^t MK(\tau-s)d\tau = MK^2\frac{(t-s)^2}{2}$$

を得るが、同様の操作を繰り返せば任意の自然数 n に対して

$$|w(t)-\nu(t)| \le M\frac{(K(t-s))^n}{n!} \quad (s \le t \le t_0)$$

が成り立つことが分かる。$n\to\infty$ とすれば分かるように、これより $[s,t_0]$ 上で $w\equiv\nu$ を得る。t_0 は任意だったから、これより一意性が従う。

一意性から特に $0\le s\le\tau\le t$ に対して

$$\varphi(z,t,s)=\varphi(\varphi(z,\tau,s),t,\tau) \tag{2.6.25}$$

が成り立つことが分かる。実際、両辺とも t の函数として微分方程式 (2.6.20) を満たし $t=\tau$ において同じ初期値を持つからである。

次に $\varphi_{t,s}$ の単葉性であるが、これはやはり解の一意性から明らかであろう。つまり、$\varphi_{t,s}(z)=\varphi_{t,s}(z')$ とすれば、これは t についての微分方程式の解が t で一致したということを意味しており、解の一意性の議論を今度は負の向きに辿っていけば、最終的に $z=z'$ でなければならないことが結論出来る。

最後に (2.6.21) が成り立つことを見よう。まず、(2.6.24) より

$$e^{t-s}\varphi_{t,s}(z)=z\exp\left[\int_s^t(1-p(\varphi_{\tau,s}(z),\tau))d\tau\right]=z+\cdots \tag{2.6.26}$$

であるからこれはクラス S に属する。よって増大度定理により

$$e^{\tau-s}|\varphi_{\tau,s}(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad (|z|<1, s\le\tau)$$

が成り立つ。一方、$|\varphi_{\tau,s}(z)|\le|z|$ でもあったから $|z|\le r$ とすると (1.7.2) を用いて

$$|p_\tau(\varphi)-1| = \left|\int_0^\varphi p'_\tau(\zeta)d\zeta\right| \le \frac{2|\varphi|}{(1-r)^2} \le \frac{2r}{(1-r)^4}e^{s-\tau}.$$

が導けるが、この右辺は τ について $[s,\infty)$ 上可積分であるから、(2.6.26) の指数函数の中の積分が $t\to\infty$ の時 (z について広義一様に）収束することが分かる。よって (2.6.21) の存在が証明された。さらに (2.6.25) から $0\le s\le\tau<\infty$ に対して

$$f_s(z)=\lim_{t\to\infty}e^t\varphi(z,t,s)=f(\varphi(z,\tau,s),\tau)$$

であることが分かる。すなわち、$f_s \prec f_\tau$ であり、これは f_t が Löwner 鎖であることを意味する。特に s について $f_s(z)$ は絶対連続になっている。この式を τ について偏微分すれば (2.6.20) を用いて (2.6.19) が得られる。 □

では、最後にこれを用いて定理 2.6.5 の証明を与えておこう。まず、f_t の展開式から分かるように、ほとんどすべての t について $p(0,t)=1$ つまり $p_t \in P$ が成り立つことに注意しておく。

函数 $f(z,t)=f_t(z)$ が定理の中の条件 (i), (ii) を満足しているとする。この時定理 2.6.6 に従って $\varphi_{t,s}(z)$ を構成する。また、これにより定まる Löwner 鎖を $g_t\ \ (0 \le t)$ としよう。

まず、$f'(z,t)$ が 2 変数に関して連続であることに注意しておこう。実際、円 C を z を含み円板 $\mathbb{D}_{r_0}$ にも含まれるようなものとすれば、Cauchy の積分公式から

$$f'(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

と表示出来るが、これと条件 (i) による函数 f の局所一様有界性を用いれば後は Lebesgue の収束定理から 2 変数に関する連続性が従う。

次に、$|z|<r_0$ に対してまず $f(\varphi_{t,s}(z),t)=f(z,s)$ であることが見たいので、この左辺を t で偏微分してみよう。$\varphi_{t,s}(z)=\varphi$ などと略記すると、

$$\begin{aligned}\frac{f(\hat{\varphi},\hat{t})-f(\varphi,t)}{\hat{t}-t}&=\frac{f(\hat{\varphi},\hat{t})-f(\varphi,\hat{t})}{\hat{t}-t}+\frac{f(\varphi,\hat{t})-f(\varphi,t)}{\hat{t}-t}\\&=\frac{\hat{\varphi}-\varphi}{\hat{t}-t}\int_0^1 f_{\hat{t}}'(\varphi+\tau(\hat{\varphi}-\varphi))d\tau+\frac{f(\varphi,\hat{t})-f(\varphi,t)}{\hat{t}-t}\end{aligned}$$

となるから、ここで $\hat{t}\to t$ としてみると、この第 2 項は $\dot{f}(\varphi,t)$ に収束する。一方、第 1 項の φ の差分商の部分は $\dot{\varphi}_{t,s}(z)$ に収束する。また $f'(z,t)$ の 2 変数に関する連続性から第 1 項の積分の部分は $f'(\varphi,t)$ に収束することが分かるので、次のように計算が出来る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi_{t,s}(z),t)&=f'(\varphi_{t,s}(z),t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{t,s}(z)+\dot{f}(\varphi_{t,s}(z),t)\\&=f'(\varphi_{t,s}(z),t)\dot{\varphi}_{t,s}(z)+\varphi_{t,s}(z)f'(\varphi_{t,s}(z),t)p(\varphi_{t,s}(z),t)\equiv 0.\end{aligned}$$

$f(\varphi_{t,s}(z),t)$ は t について絶対連続であり、しかも $t=s$ の時はこの値は $f(z,s)$ となるから上の等式はこの値が t によらず一定値 $f(z,s)$ となることを意味している。すなわち (2.6.2) が成立することが分かった。よって、$|z|<r_0$ に対して定理 2.6.5 に入る直前に行った計算を思い出すと、まず仮定の (2.6.18) から (2.6.16) が同様に導けるので、(2.6.21) すなわち $e^t\varphi_{t,s}(z)\to f_s(z)$ であることが分かる。一方、定理 2.6.6 によれば、この左辺は g_t に一致しなければならないのだから、これによって f_s は単位円板全体での単葉函数族 g_t に解析接続出来ることも分かり、証明が完了した。 □

なお、この Löwner 鎖というのは非常に特殊な状況でしか起こり得ない、つまりある特殊な単連結領域についてしか適用できないのではないか、と思われる方もいるかもしれない。

しかし、実はいかなる平面内の単連結領域もこの Löwner 鎖によって複素平面に繋げることが出来るのである。最後に証明なしでこの事実を述べておこう。（証明自体はそれほど難しくはないが、本筋とは離れるのでここでは割愛させて頂く。興味のある読者は Pommerenke [92] を参照されたい。）

定理 2.6.7 任意の $f \in S$ に対してある *Löwner* 鎖 f_t $(0 \le t < \infty)$ で $f_0 = f$ なるものが存在する。

2.7 Grunsky,Goluzin の不等式

この章の最後に、単葉性の必要十分条件を与えるある意味で究極的な結果である Grunsky の不等式及びそれに関連して Goluzin の不等式を述べておくことにする。ただし、必要十分条件というのがしばしばそうであるように、必ずしも検証が容易な条件ではないので、単葉性を知るためには便利というわけではないが、単葉函数に関する深い情報を与える条件なのでそういう点で重要である。ただ、Grunsky の不等式というのは、証明を見て頂ければ分かるように、Bieberbach の面積定理の拡張であり、単葉函数に関する情報というのは結局のところ面積による評価くらいしかないのか？という気もしないではない。

なお、この節の内容は単葉函数論において非常に重要な結果ではあるが、本書の以下の内容には直接あまり関係しないので、目にちらつきを感じる人はスキップされてもあまり問題はないであろう。

まず Grunsky の不等式を紹介する前に、Faber 多項式について触れておこう。

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{2.7.1}$$

を $z = \infty$ の近傍で正則な函数とする。無限遠点では局所単葉だから、ある正数 $R \ge 1$ が存在して $|z| > R$ において単葉である。そこで、$w \in \mathbb{C}$ に対して $\log(g(\zeta) - w)/\zeta$ を考えるとこの函数は $\zeta = \infty$ の近傍で正則であり、無限遠点では値 0 を取る。従って、無限遠点の近傍では

$$\log \frac{g(\zeta) - w}{\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varPhi_n(w) \zeta^{-n} \tag{2.7.2}$$

の形に Laurent 展開出来る。これを ζ について微分すると

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta) - w} = \frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \varPhi_n(w) \zeta^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varPhi_n(w) \zeta^{-(n+1)} \tag{2.7.3}$$

を得る。ただし、ここに $\varPhi_0(z) \equiv 1$ と置いた。同様にして (2.7.2) を w について微分すると

$$\frac{1}{g(\zeta) - w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} {\varPhi_n}'(w) \zeta^{-n} \tag{2.7.4}$$

も得られることも注意しておこう。(2.7.3) で分母を払ってさらに ζ を両辺に掛けてから (2.7.1) を代入して計算すると、

$$\begin{aligned}\zeta-\sum_{n=1}^{\infty} nb_n\zeta^{-n} &= \left(\zeta+(b_0-w)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^{-n}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(w)\zeta^{-n}\right)\\ &= \zeta+(b_0-w)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^{-n}+[\zeta+(b_0-w)]\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(w)\zeta^{-n}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k+l=n,k,l\geq 1} b_k\Phi_l(w)\zeta^{-n}\end{aligned}$$

となる。そこで ζ の展開係数を比較して $\Phi_1(w)=w-b_0$ 及び

$$-nb_n=b_n+\Phi_{n+1}+(b_0-w)\Phi_n+\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n-\nu}\Phi_\nu, \quad (n=1,2,\dots)$$

を得る。これより、次の漸化式を得る。

$$\Phi_{n+1}(w)=(w-b_0)\Phi_n(w)-\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n-\nu}\Phi_\nu(w)-(n+1)b_n \ \ (n=1,2,\dots).$$

従って帰納的に Φ_n は次数 n の多項式であることが分かり、$\Phi_n(w)=(w-b_0)^n-nb_1(w-b_0)^{n-2}+\cdots$ の形であることが示される。Φ_n を g の n 次 Faber 多項式と呼ぶ。実際に最初の何項かを漸化式を用いて計算してみると、

$$\begin{aligned}&\Phi_0=1,\\ &\Phi_1=w-b_0,\\ &\Phi_2=(w-b_0)^2-2b_1=w^2-2b_0w+({b_0}^2-2b_1),\\ &\Phi_3=(w-b_0)^3-3b_1(w-b_0)-3b_2=w^3-3b_0w^2+(3{b_0}^2-3b_1)w+({b_0}^3+3b_1b_0-3b_2),\\ &\Phi_4=(w-b_0)^4-4b_1(w-b_0)^2-4b_2(w-b_0)+(2{b_1}^2-4b_3)\end{aligned}$$

となる。

次に Grunsky 係数について述べる。2 変数函数 $G(z,\zeta)=(g(z)-g(\zeta))/(z-\zeta)$ を考える。$z=\zeta$ に於いてはこの値を $g'(z)$ によって定義すればこの函数は 2 変数函数として正則である。実際、無限遠点の近傍ではこの函数は級数展開

$$\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sum_{j=0}^{n-1} z^{j-n}\zeta^{-j-1}$$

を持つので、この点に於いて値 1 を取る正則函数となっている。また、特に $D(R)=\{|z|>R\}$ では g は単葉だったので、この函数は $D(R)\times D(R)$ 上で値 0 を取らない。ここで $D(R)\times D(R)$

が単連結領域であることに注意すると、$\log[(g(z)-g(\zeta))/(z-\zeta)]$ の一価な分枝で無限遠点において値 0 を取るものが取れる。この函数を 2 変数について級数展開して

$$\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -\sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-k}\zeta^{-l} \tag{2.7.5}$$

のように書くことにしよう。この式は少なくとも $|z|>R, |\zeta|>R$ の範囲では意味を持つ。（なお、z や ζ について 0 乗の項を持たないことは、上記の $G(z,\zeta)$ の展開を見れば明らかであろう。）　この時の係数 $\{b_{kl}\}$ $(k,l=1,2,\dots)$ を g の Grunsky 係数と呼ぶ。

定義から明らかに $G(z,\zeta)=G(\zeta,z)$ なので、$b_{kl}=b_{lk}$ である。これ以上の情報を得るには、先ほどの Faber 多項式との関連を見てやればよい。(2.7.2) に $w=g(z)$ を代入してみると、

$$\begin{aligned}\log\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z} &= \log\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta} - \log(1-\frac{z}{\zeta})\\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Phi_k(g(z))\zeta^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\Phi_k(g(z))-z^k\right]\zeta^{-k}\end{aligned}$$

という式が得られる。これと、もともとの (2.7.5) の展開式を ζ の係数について比較してみると

$$\Phi_k(g(z)) = z^k + k\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-l} \quad (|z|>R) \tag{2.7.6}$$

を得る。これにより、Faber 多項式に関する知識から Grunsky 係数に関する情報が引き出せる。例えば、(2.7.6) に $k=1$ を適用してみると

$$g(z)-b_0 = z + \sum_{l=1}^{\infty} b_{1l} z^{-l}$$

であるから、これより $b_{1k}=b_k (k=1,2,\dots)$ であることが分かる。

では、とりあえず記号についての説明が終わったところで Grunsky の不等式の主張を述べることにしよう。

定理 2.7.1 (Grunsky の不等式 (強形)) $g(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ を $z=\infty$ の近傍で正則な函数とする。この時、g が単位円板の外部にまで単葉に解析接続される（すなわち、$g\in\Sigma$）であるための必要十分条件は、任意の $\lambda_k\in\mathbb{C}$ $(k=1,2,\dots)$ に対して次の不等式が成立することである。

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\lambda_l\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k}. \tag{2.7.7}$$

証明に入る前に、この不等式から得られることを色々見ていくことにしよう。まず、この不等式において、$\lambda_m = 1, \lambda_l = 0 (l \neq m)$ とすれば、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_{km}|^2 \leq \frac{1}{m} \tag{2.7.8}$$

を得る。$b_{k1} = b_k$ であったことを思い出せば、$m = 1$ の場合はとりもなおさず、面積定理 (定理 1.4.1) であることに注意しよう。また、これより単独の項について見てやれば、少なくとも次の評価が出来ることが分かる。

$$|b_{kl}| \leq \frac{1}{\sqrt{kl}} \leq 1 \tag{2.7.9}$$

次に、この不等式は形からして、ある作用素の有界性を表現しているように見える。実際、そうであることを見てみよう。まず、(2.7.7) において λ_l として $\sqrt{l} z_l$ を代入すれば、次の不等式に書き換えられる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{kl} b_{kl} z_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2. \tag{2.7.10}$$

$\ell^2(\mathbb{C})$ の元 $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して $w_k = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{kl} b_{kl} z_l \ (k = 1, 2, \ldots)$ として $w = (w_k)$ を対応させる作用素 B とすれば、この不等式はまさしく $\|Bz\|_2 \leq \|z\|_2$ であることを意味している。つまり、B の $\ell^2(\mathbb{C})$ から $\ell^2(\mathbb{C})$ への作用素ノルムが 1 以下ということである。この作用素 $B : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ のことを g に対する Grunsky 作用素と呼ぶ。（ここで (2.7.9) より $\sum |\sqrt{kl} b_{kl} z_l|^2 \leq \sum |z_l|^2 = \|z\|_2 < \infty$ であることから w_k が定義可能であることにも注意せよ。）

$\ell^2(\mathbb{C})$ の標準的なエルミート内積を $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \bar{w}_k$ と書くことにしよう。すると、$|\langle Bz, w \rangle| \leq \|Bz\|_2 \|w\|_2 \leq \|z\|_2 \|w\|_2$ であるから、これを再び作用素の言葉で書き直せば

$$\left| \sum_{k,l=1}^{\infty} \sqrt{kl} b_{kl} z_k \bar{w}_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2$$

となる。そこで、再びこの式に $z_k = \lambda_k/\sqrt{k},\ w_k = \bar{\mu}_k/\sqrt{k}$ を代入してみると次の不等式を得る。

$$\left| \sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl} \lambda_k \mu_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu_k|^2}{k}. \tag{2.7.11}$$

従って、特に $\mu_k = \lambda_k$ とすれば、次の系を得る。

系 2.7.2 (Grunsky の不等式 (弱形)) $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \in \Sigma$ とすると、任意の $\lambda_k \in \mathbb{C}$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\left| \sum_{k,l=1}^{\infty} b_{kl} \lambda_k \lambda_l \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k}. \tag{2.7.12}$$

この不等式は、実は Grunsky の不等式のオリジナルな形である。しかし、先ほどの作用素としてのこの不等式の意味合いは $|\langle Bz, \bar{z} \rangle| \leq \|z\|_2{}^2$ だったわけで、実は (複素) 対称行列の一般論からこの条件は $\|B\| \leq 1$ を包含するそうなのだが、筆者はまだ証明を follow していない。興味のある読者は例えば Pommerenke [92] の §3.6 を参照して頂きたい。なお、この不等式 (2.7.12) は左辺の二重級数の絶対収束性までは主張していないことに注意してほしい。

さて、では Grunsky の不等式の証明に入ろう。まず、Grunsky の不等式が成立すれば (2.7.9) より (2.7.5) が $|z| > 1, |\zeta| > 1$ において絶対収束することが分かる。よって、$G(z, \zeta)$ は $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ において 2 変数正則函数である。特に、このことから g が $g(z) = g(\zeta)$ となる異なる 2 点 z, ζ を持つことは有り得ないことが分かる。故に、$g \in \Sigma$ であることが分かる。今度は条件の必要性であるが、標準的な方法によって不等式 (2.7.7) は λ_k が有限項で終わっている場合に帰着出来る。よって、次の補題が証明されればよいことになる。

補題 2.7.3 $g \in \Sigma$ であると仮定する。この時、次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{l=1}^{m} b_{kl} \lambda_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k}. \tag{2.7.13}$$

ここで全てが 0 ではないような λ_k の組に対して等号が成立するための必要十分条件は $\mathbb{C} - g(\mathbb{D}^*)$ の面積が 0 であることである。

注意 2.7.4 一方、*Grunsky* の不等式の一般の場合について等号成立条件はあまりよく分かっていないようである。ただし、E の測度が *0* であればやはり等号が成立することは後に述べる系 *2.7.5* を参照のこと。

[Proof] 次の多項式

$$h(w) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \Phi_k(w)$$

を考える。今 $\varphi = h \circ g$ とおけば、(2.7.6) より

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-l} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}$$

となる。ただし、ここに $d_k = \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_l$ と置いた。ここで $r > 1$ に対して円周 $C_r : |z| = r$ の g による像 $g(C_r)$ の内部を U_r と書くことにする。すると Stokes の定理により、

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{1}{\pi}\text{Area } h(U_r) = \frac{1}{\pi}\iint_{U_r}|h'(w)|^2 dudv = \frac{1}{2\pi i}\iint_{U_r} d\bar{h}\wedge dh\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{g(C_r)}\bar{h}dh = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\bar{\varphi}d\varphi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\varphi(z)}\varphi'(z)zd\theta \quad (z = re^{i\theta})\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{\lambda}_k}{k}\bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty}\bar{d}_k\bar{z}^{-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty}kd_k z^{-k}\right)d\theta\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}r^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty}k|d_k|^2 r^{-2k}\end{aligned}$$

を得る。(ただし、Area $h(U_r)$ は幾何学的意味が分かりやすいように書いただけで、厳密な意味での面積ではない。敢えて言えば、これは重なっている部分はその重なった分だけ測った面積ということになる。) よって、$r \to 1$ とすれば最終的に

$$\frac{1}{\pi}\iint_E |h'(w)|^2 d\Omega = \sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}k|d_k|^2 \tag{2.7.14}$$

を得る。ただし、ここに $E = \mathbb{C} - g(\mathbb{D}^*)$ であり、$d\Omega$ は 2 次元 Lebesgue 測度である。従って、最後の主張もこのことから明らかである。 □

ここで、Grunsky 作用素 $B : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ がユニタリーであるための条件について言及しておこう。ここで B がユニタリーとは任意の $z \in \ell^2(\mathbb{C})$ に対して $\|Bz\|_2 = \|z\|_2$ が成立することであるが、これは良く知られているように条件 $BB^* = B^*B = I$ と同値である。ここに B^* は B の共役作用素である。この条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty} kb_{kj}\bar{b}_{kl} = \delta_{jl}/l \tag{2.7.15}$$

が任意の j, l について成り立つことである。(ただし、ここに δ_{jl} は Kronecker のデルタである。)

定理 2.7.5 $g \in \Sigma$ についてその *Grunsky* 作用素 B がユニタリーであるための必要十分条件は $E = \mathbb{C} - g(\mathbb{D}^*)$ の *2* 次元 *Lebesgue* 測度が 0 であることである。

[Proof] まず E の測度が 0 であるとすると、(2.7.13) において λ_j, λ_l 以外は全て 0 として次の

等式

$$|\lambda_j|^2 \sum_{k=1}^{\infty} k|b_{kj}|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\lambda_j \bar{\lambda}_l \sum_{k=1}^{\infty} k b_{kj} \bar{b}_{kl}\right] + |\lambda_l|^2 \sum_{k=1}^{\infty} k|b_{kl}|^2$$
$$= \frac{|\lambda_j|^2}{j} + \frac{|\lambda_l|^2}{l}$$

を得る。この式から (2.7.15) が出てくることは明らかであろう。逆に (2.7.15) が成り立てば、この上の式が出てくるのは明らかで、すると補題 2.7.3 から E の測度が 0 であることが従う。
□

続いて今度は Goluzin の不等式について述べておこう。この不等式は元々は Goluzin(1947) によって変分法を用いて証明されたが、実は Grunsky の不等式から容易に導き出せる。

定理 2.7.6 (Goluzin の不等式) $g \in \Sigma$ と任意の $z_\nu \in \mathbb{D}^*, \gamma_\nu \in \mathbb{C}\ \ (\nu = 1, \dots, n)$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\left| \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\mu \gamma_\nu \log \frac{g(z_\mu) - g(z_\nu)}{z_\mu - z_\nu} \right| \le \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu \log \frac{1}{1 - (z_\mu \bar{z}_\nu)^{-1}}. \tag{2.7.16}$$

[Proof] Grunsky の不等式に $\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu {z_\nu}^{-k}\ \ (k = 1, 2, \dots)$ を代入してみればよい。実際、

$$\sum_{\mu,\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \log \frac{g(z_\mu) - g(z_\nu)}{z_\mu - z_\nu} = -\sum_{k,l} \sum_{\mu,\nu} b_{kl} \gamma_\mu \gamma_\nu {z_\mu}^{-k} {z_\nu}^{-l}$$
$$= -\sum_{k,l} b_{k,l} \lambda_k \lambda_l.$$

であるから、この式の絶対値は (2.7.7) を用いて

$$\le \sum_k \frac{1}{k} |\lambda_k|^2 = \sum_k \frac{1}{k} \sum_{\mu,\nu} \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu {z_\mu}^{-k} \bar{z}_\nu^{-k}$$
$$= \sum_{\mu,\nu} \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu \log \frac{1}{1 - (z_\mu \bar{z}_\nu)^{-1}}$$

と評価でき、所期の不等式が得られた。 □

なお、Goluzin の不等式から Grunsky の不等式が導けることも分かる。こちらは、やや煩雑な計算を必要とするのでここでは証明は省略するが、興味のある読者は Pommerenke [92] を参照して頂きたい。また、Goluzin の不等式から逆に函数 g の単葉性が導けることも明らかである。ただ、単葉性を示すのに Goluzin の不等式を示すというのはやや非現実的ではある。

最後に、Goluzin の不等式から得られるいくつかの結果を紹介しておこう。（このように Goluzin の不等式は様々な幾何学的な情報を含んだ式であると言える。）

まず $n=1$ の場合を考えると

$$|\log g'(z)| \leq \log \frac{1}{1-|z|^{-2}} \quad (z \in \mathbb{D}^*) \tag{2.7.17}$$

を得る。また、$n=2$ で $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$ とすると

$$\left|\log \frac{g'(z)g'(\zeta)(z-\zeta)^2}{(g(z)-g(\zeta))^2}\right| \leq \log \frac{|z\bar{\zeta}-1|^2}{(|z|^2-1)(|\zeta|^2-1)} \quad (z,\zeta \in \mathbb{D}^*) \tag{2.7.18}$$

を得る。

また、今度は $f \in S$ に対して Goluzin の不等式を応用することを考えてみよう。$g(\zeta) = 1/\sqrt{f(\zeta^{-2})}$ $(|\zeta| > 1)$ とすると、g は奇函数だから (2.7.18) において $\zeta = -z$ として

$$\left|2\log \frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right| \leq 2\log \frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1} \quad (|\zeta| > 1)$$

を得る。これを f の結果に読み直すと次の結果を得る。

命題 2.7.7 (Grunsky(1932)) $f \in S$ に対して次の評価式が成り立つ。

$$\left|\log \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1) \tag{2.7.19}$$

系 2.7.8 $f \in S$ に対して次の評価式が成り立つ。

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1) \tag{2.7.20}$$

他にも色々応用があるが、それについては単葉函数論の専門書を見て頂きたい。あるいは、自分で色々具体的に数値を入れてみて形を見てみるのも良いであろう。

第3章　様々な領域のクラスとその特徴付け

古典数学では、滑らかなカテゴリーで考えれば大体話が済むと考えられてきたが、現代数学では必ずしも滑らかとは限らないものに対してもその研究の鉾先が向けられてきつつある。例えばフラクタルなど自己相似的な構造を持つものなどがその例であるが、平面領域に於いても滑らかなもののみが重要というわけではない。滑らかではなくても、様々な函数論的に、あるいはその他微分方程式論など様々な見地から考えて（境界が滑らかとは限らない）意味のある領域が数多く知られている。邦書ではそれらについてまとまった解説書が見当たらないので、この資料において少しでもそのような領域の紹介が出来ればと思いこの章を設けた。

この章では様々な領域（主に単連結領域を考える）について、その領域の持つ性質と様々な特徴付けについて考える。特にそのリーマン写像によってその領域がどのように特徴づけられるかを見ていくことにしたい。ただ、最初から証明をやっていると大変な量になるので、証明は主に比較的最近出た専門書である Pommerenke [95] を参照して頂きたい。

ただ、スペースや時間の都合により Smirnov 領域、Lavrentiev 領域、有界回転領域 (domain with bounded boundary rotation)、漸近的等角領域などについて述べることが出来なかった。これらについてもやはり Pommerenke [95] を参照して頂きたい。

以下では特に断らない限り、扱う領域 D はリーマン球面内の単連結領域とし、$f:\mathbb{D}\to D$ をそのリーマン写像であるとする。必要に応じて適当な正規化を行うが、何も断らない限り任意のリーマン写像であると思ってよい。単葉性も含めて議論したい場合もあるので、単葉とは限らない単位円板上の正規化された函数族を A と表記することにする。つまり、A は単位円板上の正則函数 f で展開式 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ を持つものとする。

3.1　滑らかな領域

まずは古典的に重要と思われる滑らかな境界を持つ領域について簡単に考察しておくことにしよう。まずリーマン球面内の Jordan 曲線 C が C^n 級 $(n=1,2,\ldots,\infty,\omega)$ であるとは、適当なパラメトリゼーション $\gamma:\mathbb{T}\to C$ があって、これが C^n 級でかつ $\gamma'\neq 0$ であることを言う。(ここに $\mathbb{T}$ は単位円周を表す。) また、C^n 級 Jordan 曲線を境界に持つ単連結領域を C^n 領域と呼ぶ。このようなパラメトリゼーションのうちで、特にあるリーマン写像の境界

値になっているようなものを等角なパラメトリゼーションと呼ぶことにする。これはある意味で標準的 (canonical) なパラメータであると考えられるので、出来ればこのようなパラメトリゼーションが所期の良い性質を持つことが望ましい。D が Jordan 領域であれば、少なくとも Carathéodory の定理によってリーマン写像は境界まで同相に拡張できることはあらかじめ留意しておくべきであろう。

3.1.1 C^ω 領域

これはいわゆる実解析的曲線を境界に持つということで、このような Jordan 曲線は通常、解析曲線と呼ばれる。このような境界を持つ Jordan 領域 D の写像函数による特徴付けは極めて単純である。

命題 3.1.1 単連結領域 D が解析曲線 C を境界に持つための必要十分条件は、ある $r > 1$ があって、リーマン写像 $f : \mathbb{D} \to D$ が $\mathbb{D}_r$ まで等角に拡張出来ることである。

[Proof] まず、十分性は明らかである。よって、必要性を示せばよい。まず、$\gamma : \mathbb{T} \to C$ を実解析的とすると、単位円周を γ が級数展開出来るような有限個の円板で覆うことができるので、γ は $\mathbb{T}$ の近傍で等角であると仮定してよい。すると、$h = \gamma \circ f$ は十分 1 に近い $r < 1$ に対して $\{r < |z| < 1\}$ 上で等角で、さらに $|z| \to 1$ の時 $|h(z)| \to 1$ となるから、Schwarz の鏡像原理により h は $r < |z| < 1/r$ にまで等角に拡張出来る。従って、f 自身も $\gamma^{-1} \circ h$ によって $|z| < 1/r$ にまで等角に拡張できたことになる。 □

3.1.2 C^1 領域

次いで易しいと考えられる C^1 領域 D について考える。次の定理が基本的である。

定理 3.1.2 (Lindelöf, cf. Pommerenke [95]) D を *Jordan* 領域とし、$f : \mathbb{D} \to D$ をリーマン写像とする。D の境界 C が C^1 級であるための必要十分条件は $\arg f'$ が $\overline{\mathbb{D}}$ に連続拡張出来ることである。また、この時この連続拡張された境界値を $\tau = \arg f'$ と書くことにすると、次の表現が得られる。

$$\log f'(z) = \log |f'(0)| + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \tau(\zeta) \frac{d\zeta}{i\zeta} \tag{3.1.1}$$

[Proof] まず条件の必要性を証明する。C を C^1 級の Jordan 曲線とし、$\gamma : \mathbb{T} \to C$ をその C^1 パラメトリゼーションとする。Carathéodory の定理 (定理 1.1.3) よりリーマン写像 f は閉包までの同相写像 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}$ に拡張出来ることに注意しておく。同相写像 h を $\gamma^{-1} \circ f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

で定義する。必要ならば γ の向きを変えて h は向きを保つ写像と仮定してよい。$\zeta_0 \in \mathbb{T}$ に対して $\omega_0 = h(\zeta_0)$ 等と書くことにして ζ を例えば時計回りに ζ_0 に近づけるとすると、

$$\arg(f(\zeta) - f(\zeta_0)) = \arg(\gamma(\omega) - \gamma(\omega_0)) \to \arg\gamma'(\omega_0) + \arg\omega_0 - \frac{\pi}{2}$$

となる。この極限は形から分かるように（多価函数かもしれないが）局所的には ζ_0 の連続函数である。これを（2π を法として考えて）$\beta(\zeta_0)$ で表すことにしよう。

次に、函数

$$g_n(z) = \log\frac{f(e^{i/n}z) - f(z)}{(e^{i/n} - 1)z} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と置けば、これは $\mathbb{D}$ 上で正則となり、また $\overline{D}$ 上で連続になる。よって Schwarz の表現公式より

$$g_n(z) = \mathrm{Re}\ \ g_n(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\mathrm{Im}\ \ g_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\ \ (z \in \mathbb{D})$$

を得る。ここで $n \to \infty$ とすれば

$$\mathrm{Im}\ \ g_n(\zeta) = \arg\left[f(e^{i/n}\zeta) - f(\zeta)\right] - \arg\zeta - \arg(e^{i/n} - 1) \to \beta(\zeta) - \arg\zeta - \frac{\pi}{2}$$

で、この収束は実は一様であることが証明出来る。また、g_n は１価函数だから、その極限も１価函数であることに注意せよ。従って、$n \to \infty$ とすれば、(3.1.1) が得られる。(やや準備を必要とするので一様収束性ここでは述べられない。単に (3.1.1) を出すだけなら Lebesgue の収束定理が使える状況にあればよいわけで、そのためには例えば g_n が有界くらいが言えればよい。これは例えば、$\gamma \in C^2$ ならば比較的簡単に従う。)

この (3.1.1) が証明出来てしまえば、$\arg f'(z)$ はこの式の虚数部分であるので、これは通常の Poisson 積分の境界での連続性の議論に持ち込める。境界値が連続なので、$\overline{\mathbb{D}}$ でも連続になっていることがよく知られた事実から分かる。 □

注意 3.1.3 境界が C^1 級曲線であっても、f' 自体が単位円板の閉包まで連続に拡張出来るとは限らない。例えば、$|h| \le \pi/2$ なる $\mathbb{D}$ 上の正則函数で $\mathrm{Im}\,h$ は $\overline{\mathbb{D}}$ に連続拡張出来るが、$\mathrm{Re}\,h$ が $\overline{\mathbb{D}}$ には決して連続拡張出来ないものを取る。そこで $f' = e^h$ なる $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を考えればこれは能代-*Warschawski* の定理（定理 *2.3*）により単葉で、上の定理により C^1 級の境界を持ち、しかも $-\pi/2 < \log|f'| < \pi/2$ であるにもかかわらず、f' は $\overline{\mathbb{D}}$ には連続拡張出来ない例となっている。

3.1.3 Dini の意味で滑らかな境界を持つ領域

では、どのような条件があれば f' が $\overline{\mathbb{D}}$ まで連続に拡張出来るであろうか。その十分条件として境界曲線が Dini の意味で滑らかであればよいことが知られている。ここで、境界曲線が

Dini の意味で滑らかとは、C^1 級であり、さらにその C^1 パラメトリーゼーション $\gamma : \mathbb{T} \to \partial D$ で γ' が Dini 連続であるものが取れることである。ここで連結集合 $A \subset \mathbb{C}$ 上の函数 $\varphi : A \to \mathbb{C}$ が Dini 連続であるとは、

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, \varphi, A) = \sup_{z_1, z_2 \in A, |z_1 - z_2| \leq \delta} |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \tag{3.1.2}$$

とした時にある正数 $a > 0$ が存在して $\int_0^a \omega(t) \frac{dt}{t} < \infty$ となることである。ここで、ω について $\omega(0) = 0$ は自明であるが、さらに A が凸集合である場合には $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ であるから、$\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$ が任意の自然数 n について成り立つことに注意しておこう。$\mathbb{T}$ は凸ではないが、凸に近い性質を持っているのでこれと同様の評価が成り立つことは明らかであろう。例えば、φ が $\mathbb{D}$ 上正則で $\overline{\mathbb{D}}$ 上連続とすれば、$\delta \leq \pi/2$ について

$$\omega(\delta, \varphi, \mathbb{T}) \leq \omega(\delta, \varphi, \overline{\mathbb{D}}) \leq 3\omega(\delta, \varphi, \mathbb{T})$$

が成り立つ。

ここで、補助的に Dini 連続函数 φ と $0 < \delta < \pi$ について

$$\omega^*(\delta) := \omega^*(\delta, \varphi, A) = \int_0^\delta \omega(t) \frac{dt}{t} + \delta \int_\delta^\pi \omega(t) \frac{dt}{t^2} \tag{3.1.3}$$

と定義する。ここで χ_δ を区間 $[\delta, \pi]$ に対する定義函数 (特性函数) とすれば、

$$\delta \int_\delta^\pi \omega(t) \frac{dt}{t^2} = \int_0^\pi \chi_\delta(t) \frac{\delta}{t} \frac{\omega(t)}{t} dt$$

と書くことができ、この被積分函数は可積分函数 $\frac{\omega(t)}{t}$ で上から押さえられており、各点ごとには 0 に収束するので Lebesgue の被圧収束定理により $\delta \to 0$ の時 0 に収束する。一方、$\int_0^\delta \omega(t) \frac{dt}{t}$ が 0 に収束するのは可積分性から明らかなので、これより

$$\lim_{\delta \to 0} \omega^*(\delta) = 0$$

であることが分かる。

連続度を測る量 ω を使えば次の有用な命題が示せる。

命題 3.1.4 (Pommerenke [92] Proposition 3.4) $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ を *Dini* 連続函数であるとすると

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{3.1.4}$$

により定義される $\mathbb{D}$ 上の正則函数は $\overline{\mathbb{D}}$ まで連続に拡張される。さらに

$$|g'(z)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{\omega(1-r)}{1-r} + 2\pi \int_{1-r}^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq 2\pi \frac{\omega^*(1-r)}{1-r} \tag{3.1.5}$$

が任意の $|z| \leq r < 1$ について成り立つ。また、$z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ に対して

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq 20\omega^*(\delta) \quad (|z_1 - z_2| \leq \delta < 1) \tag{3.1.6}$$

が成り立つ。

3.1.4 $C^{n,\alpha}$ 級領域

境界曲線のパラメトリゼーション $\gamma : \mathbb{T} \to C = \partial D$ が C^n 級 $(n \geq 1)$ に取れてしかも $\gamma'(\zeta) \neq 0$ かつ $\gamma^{(n)}$ が α 次 $(0 < \alpha \leq 1)$Hölder 連続になっているような領域を $C^{n,\alpha}$ 級領域と呼ぶことにする。単に C^n 級領域ではあまり適当な評価が出来ないのだが、このクラスは滑らかさがうまく遺伝してくれる。まず φ が α 次 Hölder 連続だとすると、$\omega(\delta) = O(\delta^\alpha)$ となるが、これに対して $0 < \alpha < 1$ の時は $\omega^*(\delta) = O(\delta^\alpha)$ となり、$\alpha = 1$ の時は $\omega^*(\delta) = O(\delta \log 1/\delta)$ となることが容易に分かる。この事実と、表現公式 (3.1.1) 及び上の命題を用いれば次の結果を証明出来る。

定理 3.1.5 (Kellog-Warschawski) $f : \mathbb{D} \to D$ を $C^{n,\alpha}$ 級領域 $(n = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha \leq 1)$ のリーマン写像とする。この時 $f^{(n)}$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上 α 次 *Hölder* 連続に拡張できる。

系 3.1.6 (Warschawski の定理) D を C^∞ 級領域とすれば、そのリーマン写像 $f : \mathbb{D} \to D$ は閉包まで C^∞ 級に拡張出来る。

3.1.5 その他の境界挙動

この節の最後に単位円板上の等角写像、あるいは一般に正則函数の境界挙動について補足的情報を書いておくことにする。まず、次の定理は基本的である。

定理 3.1.7 (Hardy-Littlewood [49]) 正則函数 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が $\overline{\mathbb{D}}$ 上の α 次 *Hölder* 連続函数に拡張出来るための必要十分条件は $g'(z) = O((1 - |z|)^{\alpha - 1}) \quad (|z| \to 1)$ である。

一方、境界函数が Zygmund クラスに入る為の必要十分条件というのも綺麗な形で書ける。ここで函数 $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ が Zygmund クラス Λ^* に入るとは、ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $t \in \mathbb{R}$ と $h > 0$ に対して

$$|\varphi(e^{i(t+h)}) - 2\varphi(e^{it}) + \varphi(e^{i(t-h)})| \leq Ch$$

が成り立つことである。このような函数は少なくとも $\omega(\delta, \varphi, \mathbb{T}) = O(\delta \log 1/\delta)$ の滑らかさを持っていることが知られている。

定理 3.1.8 (Zygmund [106]) g を単位円板内で正則、その閉包で連続な函数とする。この時 $g|_{\mathbb{T}}$ が *Zygmund* クラスに属するための必要十分条件は $g''(z) = O((1 - |z|)^{-1})$ が成り立つことである。

また、Jordan 領域の境界が長さ有限であるための条件も知られている。

定理 3.1.9 (F. Riesz(1916)) D を複素平面内の *Jordan* 領域とし、$f : \mathbb{D} \to D$ をその写像函数とする。この時その境界曲線が長さ有限であるための必要十分条件は $f' \in H^1$ である。ここに H^1 は単位円板上の *Hardy* 族を表す。

最後に f 自体は境界まで Hölder 連続に拡張出来ても、必ずしも f の挙動自体は良くないという極端な例があることを述べておこう。Belov [14] の結果によれば、任意の $\alpha < 1/2$ に対して単位円板の閉包まで α 次 Hölder 連続な正則函数で、境界 $\mathbb{T}$ への制限が Peano 曲線 (すなわち、連続曲線で像が $\mathbb{C}$ 全体を覆い尽くすもの) であるものが存在する。このような例はある $0 < \alpha < 1/2$ については既に Salem-Zygmund [96] により知られていたようである。また、$\alpha > 1/2$ ではこのようなことは決して起こり得ないことも [96] には書かれている。

3.2　凸領域

この節ではまず直観的にも非常に分かりやすい凸領域について、その写像函数による特徴付けを与える。まず複素平面内の領域 D が凸 (convex) であるとは、任意の D 内の 2 点に対してその 2 点を結ぶ線分がすっぽりと D に含まれるということである。また、単位円板上の単葉函数で像領域が凸になるものを、凸函数と呼ぶことにする。(実函数論での凸性とは異なることに注意せよ。)

また、$f(0) = 0, f'(0) = 1$ の形に正規化されている凸函数全体のなすクラスを記号 C で表すことにする。

凸領域であるための必要条件について考えるために、まず最初は境界が滑らかな場合について考えてみる。この場合 D が凸であるための必要十分条件は、境界における接ベクトルの角度が単調に変化することである。これを式で書けば、f が単葉と最初から仮定した上で、

$$\frac{d}{d\theta} \arg \frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) \geq 0$$

である。この左辺を計算すると、

$$= \frac{d}{d\theta} \mathrm{Im} \log \left[i f'(e^{i\theta}) e^{i\theta} \right] = \mathrm{Re} \left[1 + \frac{e^{i\theta} f''(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right]$$

となる。つまり、これが（単葉性を仮定した場合の）境界が十分滑らかな場合の凸であるための必要十分条件である。一般の凸領域を考えるために、まず次の補題が成立することに注意しよう。

補題 3.2.1 $f \in S$ が凸であるための必要十分条件は任意の $r \in (0, 1)$ に対して $f(\mathbb{D}_r)$ が凸領域であることである。

[Proof] まず、十分性は明らかである。必要性を証明する。$r \in (0,1)$ として $z_0, z_1 \in \mathbb{D}_r$ であるとする。$t \in (0,1)$ に対して $(1-t)f(z_0) + tf(z_1) \in f(\mathbb{D}_r)$ が言えればよい。そこで、$g(z) = (1-t)f(z_0 z/r) + tf(z_1 z/r) \ \ (z \in \mathbb{D})$ とすれば、これは $\mathbb{D}$ 上正則で $g(0) = 0$ が成り立ち、D の凸性から $g(z) \in D$ である。よって、$g \prec f$ であることが言え、従ってある $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ があって $\varphi(0) = 0, g = f \circ \varphi$ である。ここで Schwarz の補題から $|\varphi(z)| < |z| \quad (z \neq 0)$ が言える。特に $w = \varphi(r)$ とおけば $w \in \mathbb{D}_r$ となるが、一方 $f(w) = g(r) = (1-t)f(z_0) + tf(z_1)$ だから、これで主張が示された。 □

この補題から、次の特徴付けが得られる。

定理 3.2.2 $f \in A$ が凸であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right\} > 0 \tag{3.2.1}$$

が任意の $z \in \mathbb{D}$ について成り立つ、すなわち、$zf''(z)/f'(z) + 1 \in P$ であることである。

[Proof] 実際に (3.2.1) において等号が成立しないことは、調和函数の最大値の原理から分かる。よって必要性は上の補題から明らか。あと、唯一示されていないことは、(3.2.1) が成り立てば、その函数が単葉になる、という事実である。まず $r \in (0,1)$ に対して曲線 $C_r = f(\partial\mathbb{D}_r)$ を考えると、この曲線の傾きが単調に増加していることを (3.2.1) は意味しており、しかもその傾きの変化の総和は

$$\int_1^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\left\{\arg \frac{d}{d\theta} f(re^{i\theta})\right\} d\theta = \mathrm{Re} \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \frac{dz}{iz} = 2\pi$$

だから、実際にはこの曲線は原点の回りを高々 1 周しかしないことが分かる。このことから C_r は Jordan 曲線で f は $|z| = r$ 上で単射であることが分かる。故に、Darboux の定理により $|z| < r$ において単射である。r は任意だったから、f は $\mathbb{D}$ 上で単射であることが分かる。□

注意 3.2.3 なお、凸領域は帯領域を除いては常に *Jordan* 領域である。単位円板を帯領域に等角に写す写像 $f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z} \in S$ は従って、しばしば凸函数のクラスの中では極値的な役割を果たす。

3.3　星状領域

次に星状領域について考える。複素平面内の領域 D が点 $a \in D$ に関して星状 (starlike) であるとは、点 a から出た光が D の任意の点に届くということである。正確に言えば、任意の $z \in D$ に対して線分 $[a, z]$ が D にすっぽり入るということである。また、ある点に関して星状になる領域を単に星状であるという。

この意味では、凸領域は任意の点について星状であると言う言い方も出来る。特に凸領域は星状である。また、単位円板上の単葉函数で像領域が星状になるものを星状函数と呼び、特に $f \in S$ であって $f(\mathbb{D})$ が 0 に関して星状であるもの全体のなすクラスを S^* と表記することにする。上の注意より、$C \subset S^* \subset S \subset A$ である。（なお、星状領域は Jordan 領域とは限らない。相当複雑な境界を持つ領域でも星状でありうる。）

$f \in S$ が星状であるための条件を求めるために、やはり最初に $D = f(\mathbb{D})$ の境界が十分滑らかと仮定してみよう。すると、D が 0 に関して星状であるための必要十分条件は、$\arg f(e^{i\theta})$ が θ について単調増加であることである。すなわち、

$$\frac{d}{d\theta}\arg f(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}\ \frac{e^{i\theta}f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})} \geq 0$$

である。この条件が実は内部の条件として星状であるための必要十分条件を与えることが、凸領域の場合と同様に次の補題から分かる。

補題 3.3.1 $f \in S$ が星状であるための必要十分条件は任意の $r \in (0,1)$ に対して $f(\mathbb{D}_r)$ が星状であることである。

[Proof] 十分性はやはり明らかだから、必要性を示す。$z_0 \in \mathbb{D}_r$ を任意に取る。$t \in (0,1)$ に対して $tf(z_0)$ が $f(\mathbb{D}_r)$ に属することを言えばよい。ここで $g(z) = tf(z_0 z/r)$ $(z \in \mathbb{D})$ とおけば、やはり $f(\mathbb{D})$ が 0 に関して星状だから、$g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$ である。$g(0) = 0$ に注意すれば、これは $g \prec f$ を意味する。すなわち、ある正則函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\varphi(0) = 0$ なるものが存在して、$g = f \circ \varphi$ となる。Schwarz の補題から $z \neq 0$ に対しては $|\varphi(z)| < |z|$ が成り立つから、特に $\varphi(r) \in \mathbb{D}_r$ が言える。一方、$tf(z_0) = g(r) = f(\varphi(r))$ だから、これは $tf(z_0) \in f(\mathbb{D}_r)$ を意味する。 □

これより、最終的に次の特徴付けを得る。

定理 3.3.2 $f \in A$ が星状であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \tag{3.3.1}$$

が任意の $z \in \mathbb{D}$ について成り立つ、つまり $zf'(z)/f(z) \in P$ であることである。

[Proof] 必要性はほとんど示されており、唯一示されていないのは真に不等号が成り立つことであるが、これも凸の場合と同様、最大値の原理から明らか。

十分性についても、f の単葉性が示されれば他は明らか。$r \in (0,1)$ に対して曲線 $C_r = f(\partial\mathbb{D}_r)$ とすると、(3.3.1) はこの曲線の偏角が真に増加することを意味しており、しかもその

増加量の総和は定理 3.2.2 の証明と同様、2π であることが分かるので、やはり C_r は Jordan 曲線であることが分かり、再び Darboux の定理により $\mathbb{D}_r$ における f の単葉性が分かる。□

さて、ここで $f \in A$ に対して $g = zf'$ と置いてみると、

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \tag{3.3.2}$$

であることが分かる。(一方、f は g を用いれば $f(z) = \int_0^z \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ によって表すこともできる。) 従って、定理 3.2.2、3.3.2 から次の興味深い結果が得られる。この原理を用いれば、凸函数に関する結果を星状函数に関する結果に読み換えること（あるいはその逆）も出来る。

定理 3.3.3 $f \in A$ に対して $g = zf' \in A$ とおくと、f が凸であるための必要十分条件は g が星状であることである。

注意 3.3.4 同様に $g \in \Sigma$ についても、g が凸、星状であることの定義をそれぞれ $\widehat{\mathbb{C}} - g(\mathbb{D}^*)$ が凸、星状であることにより定義して、上記と形式的には同様な特徴付けを得ることも出来る。詳細については例えば、*[10]* を参照のこと。

3.4 螺旋状領域

星状領域と同様にして光が対数螺旋のように進む時に全ての点が中心点から照らされるような領域を螺旋状領域 (spiral-like domain) と呼ぶ。正確には次のように定義される。複素平面内の領域 D が (0 を中心として)α-螺旋状領域 ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) であるとは、任意の $z \in D$ と $t \geq 0$ に対して $ze^{-\lambda t} \in D$ となることである。ただし、ここに $\lambda = e^{i\alpha}$ とする。特に $\alpha = 0$ の場合が星状領域となる。また、$f \in A$ が α-螺旋状であるとは、$f \in S$ であって、かつ $f(\mathbb{D})$ が 0 を中心とした α-螺旋状領域であることと定める。

螺旋状函数についても、これまでと同様の特徴付けが知られている。

定理 3.4.1 $f \in A$ が螺旋状であるための必要十分条件は任意の $z \in \mathbb{D}$ について

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{e^{i\alpha} f(z)} > 0 \tag{3.4.1}$$

が成り立つことである。

[Proof] ここでは Pommerenke [92] に従って Löwner の方法を用いて証明してみよう。（もちろん、もっと簡単に示すことも出来る。） $a = \tan\alpha$ とおいて、

$$f_t(z) = e^{(1+ia)t} f(e^{-iat}z) = e^t z + \cdots$$

と定めると、これは Löwner 鎖になることが計算により容易に分かる。特に f が単葉であることが従う。また $f \prec f_t \prec e^{(1+ia)t}f$ であるから、これより α-螺旋状であることも分かる。□

一般に原点を漸近的に安定な特異点とするような微分方程式の積分曲線に沿って“ 星状 ”である、という概念も定義出来る。これについては Brickman [17] が定式化しており、しかも微分方程式の解の一意性を用いたスマートな単葉性の証明も与えている。ここには定義と結果のみ書いておくことにしよう。(なお、この定理自身はもっと古く Kas'yanyuk が証明していたらしいが、Brickman はそれとは独立に別の方法で証明したとのことである [10]。)

定義 3.4.2 (Brickman) f を単位円板上で正則、$f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ であるものとする。また、$\varPhi$ は $f(\mathbb{D})$ 上で正則かつ $\varPhi(0) = 0, \mathrm{Re}\,\varPhi'(0) > 0$ とする。この時、f が $\varPhi$ 状（$\varPhi$-*like*）であるというのを

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\varPhi(f(z))}\right\} > 0$$

であることとする。

定義 3.4.3 (Brickman) Ω を 0 を含む領域とし、$\varPhi$ を Ω 上で正則かつ $\varPhi(0) = 0, \mathrm{Re}\,\varPhi'(0) > 0$ を満たす函数とする。この時、Ω が $\varPhi$ 状領域であるとは、任意の $a \in \Omega$ に対して次の微分方程式の初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\varPhi(w), \qquad w(0) = a$$

が $t \in [0, \infty)$ について解くことが出来て（これは $w(t) \in \Omega$ であることも意味する）、しかも $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$ であることとする。

定理 3.4.4 (Kas'yanyuk [63]-Brickman [17]) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が $\varPhi$ 状ならば、f は単葉であり $f(\mathbb{D})$ は $\varPhi$ 状である。逆に Ω が $\varPhi$ 状であれば、その写像函数で 0 を固定するものは $\varPhi$ 状となる。

3.5　近接凸領域

この節では Kaplan [62] によって導入された重要な函数のクラスについて述べる。単位円板上の正則函数 f が近接凸 (close-to-convex, 適当な訳語を知らないので本書ではこのような用語を用いることにする) であるとは、ある凸函数 g があって、

$$\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0 \tag{3.5.1}$$

が任意の $z \in \mathbb{D}$ について成り立つことであるとする。(一応、単葉性は定義には入れない。) 特にクラス A に属するような近接凸函数全体のなすクラスを K と書くことにする。さらに、

上の定義 3.5.1 において g がクラス C の中から取れるものからなる K の部分クラスを K_0 で表すことにする。

また、$\alpha \in [0,1]$ に対してある凸函数 g が存在して任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$\arg\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| \leq \frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.5.2}$$

を満たす函数 f を α-近接凸函数と呼び、このような函数全体のなすクラスを $K(\alpha)$ で表すことにする。従って、特に $K(0) = C, K(1) = K$ となる。

なお、任意の星状函数は近接凸であることに注意しておこう。実際、$f \in S^*$ であるとすると、定理 3.3.3 によりある $g \in C$ が存在して $f = zg'$ と書けるが、この g に対して

$$\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{g'(z)} = \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$$

である。

さて、近接凸函数は実際には単葉になる。これは能代-Warschawski の定理から直ちに分かることである。

定理 3.5.1 任意の近接凸函数は単葉である。

[Proof] $f \in K$ とすると、ある凸函数 g があって、(3.5.1) が成り立つ。$D = g(\mathbb{D})$ とおけばこれは仮定より凸領域である。そこで $h = f \circ g^{-1} : D \to \mathbb{C}$ と定めると、$h' \circ g = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ であるから、$\mathrm{Re}\, h' > 0$ となり、能代-Warschawski の定理 (定理 2.3.1) により h 従って、f の単葉性が従う。 □

ゆえに、今までの包含関係をまとめると、

$$C \subset S^* \subset K_0 \subset K \subset S \subset A$$

となる。

さて、上記の近接凸函数の定義は非常に分かりにくいという印象が強いように思われる。補助的な写像 g を持ち出さずに f のみの性質によって特徴づける、あるいはもっと幾何学的に特徴づけることは出来ないだろうか？　これについては、やはり Kaplan が一つの解答を与えている。

定理 3.5.2 (Kaplan の定理) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を正則かつ局所単葉であるとする。この時 f が近接凸であるための必要十分条件は

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} d\theta > -\pi, \quad (z = re^{i\theta}) \tag{3.5.3}$$

が任意の $r \in (0,1)$ と実数 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ について成り立つことである。

直観的なイメージとしては、曲線 $f(\partial\mathbb{D}_r)$ が角度 π 以上でヘアピンカーブを描いて戻ってくることはない、ということである。

証明は少々煩雑なのでここでは省略する。興味のある読者は例えば、Duren [31] を参照されたい。

例 3.5.3 (一方向について凸な領域) 例として凸函数 $g(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{arctanh}(z)$ を考えると、単葉性を保証する一つの条件として

$$\mathrm{Re}\left\{(1-z^2)f'(z)\right\} \geq 0 \tag{3.5.4}$$

が得られる。実はこの条件は像領域が虚軸方向に凸、つまり *2* 点 $z_1, z_2 \in D$ が同じ実部を持てば線分 $[z_1, z_2]$ がすっぽりその領域 D に含まれるという条件になっていることが分かる。詳細については、例えば *[51]* や *Goodman [45]* を参照して頂きたい。

最後に Lewandowski によって証明された興味深い幾何学的な特徴付けを紹介しておこう。

定理 3.5.4 ([73], [74]) $f \in S$ が近接凸であるための必要十分条件は閉半直線の族で端点を除いたものが *disjoint* であるようなものが存在して、$\mathbb{C} - f(\mathbb{D})$ がその和集合で書けることである。

注意 3.5.5 α-近接凸函数についても同様の特徴付けが得られる。この場合はやはり *disjoint* な半直線の族でしかもその半直線に関して対称で端点を頂点とする開き角 $(1-\alpha)\pi$ の扇形（*sector*）が $f(\mathbb{D})$ と交わらないように取れる。このような像領域はいわゆる扇形条件（*cone condition*）を満たすものになっており、ポテンシャル論的にも意味があると思われる。

上記のような補集合が disjoint な線分の和集合で書けるような領域はもともとは 1936 年に Biernacki により導入された概念で、（強い意味での）直線的到達可能領域 (linearly accessible domain) と呼ばれる。

これに関連して Casey [21] が linearly accessible smoothly な函数のクラスを導入している。これは近接凸函数でさらに定義に出てくる凸函数 g が $g(\mathbb{D})$ の境界曲線が連続な偏角を持つもの (boundary with a continuously turning tangent) として定義される。（この概念については Pommerenke [95] を参照のこと。）Casey はこの論文においてこのような函数 f については T_f および S_f が擬等角拡張を持つような函数の列 f_n によって $T_{f_n} \to T_f$ および $S_{f_n} \to S_f$ と出来ることを証明している。（収束の意味はそれぞれ $B_1(\mathbb{D}), B_2(\mathbb{D})$ のノルムで考えている。）

これは Teichmüller 空間の言葉で言い換えれば、T_f, S_f が普遍 Teichmüller 空間の Becker model および Bers model の閉包にそれぞれ含まれていることを意味している。

3.6　１次連結領域

ここでは局所連結性を計量的評価も込めて強めた概念である１次連結領域について解説する。まず、位相空間 X の部分集合 E が局所連結 (locally connected) であるとは、E の任意の点 p とその近傍 U に対して、U に含まれる p の近傍 V で $E\cap V$ が連結になるものが取れることを言う。また、さらに X が距離空間である場合に E が一様局所連結 (uniformly locally connected) であるとは、任意の正数 ε に対してある正数 η が存在して任意の 2 点 $x,y\in E$ で $d(x,y)<\eta$ であるものについてはその 2 点を含む連続体 $A\subset E$ でその直径が $\mathrm{diam}(A)<\varepsilon$ であるものが取れることとする。

この一様局所連結の概念をさらに強めたのが１次連結性である。距離空間 X の部分集合 E が (定数 $C\geq 1$ で) １次連結 (linearly connected) であるとは、任意の 2 点 $x,y\in E$ で $d(x,y)<r$ なるものについてその 2 点を含む曲線 $A\subset E$ でその直径が $\mathrm{diam}(A)<Cr$ となるものがあることを言う。すなわち、距離 d に関する E における道直径距離を $\hat{d}_E(x,y)$ と書くことにすると、これは任意の $x,y\in E$ について

$$\hat{d}_E(x,y)\leq Cd(x,y)$$

が成り立つことと同じである。

複素平面内の１次連結領域については、例えば [78], [105] などにおいて研究されている。また、1.2 節の記号を用いれば、D が定数 C の１次連結領域であるための必要十分条件は $\mu_D(z_1,z_2)\leq C|z_1-z_2|$ であることに注意しておこう。さらに、条件を言い換えておくと、これはある定数 $C'\geq 1$ があって、任意の $a\in\mathbb{C}$ と $r>0$ に対して $B(a,r)\cap D$ の任意の 2 点が $B(a,C'r)\cap D$ 内の曲線で結べる、という条件と同値である。（ここに、$B(a,r)$ は a を中心とする半径 r のユークリッド円板である。）

ここでは単連結１次連結領域のリーマン写像について成り立つ性質について紹介しておこう。

定理 3.6.1 (Pommerenke [95]) $f:\mathbb{D}\to D$ を１次連結領域のリーマン写像とすると、この写像は $f:\overline{\mathbb{D}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ に連続拡張出来る。また、ある定数 $\beta<2, M>0$ が存在して

$$|f'(\rho\zeta)|\geq\frac{1}{8}|f'(r\zeta)|\left(\frac{1-\rho}{1-r}\right)^{\beta-1}\quad \zeta\in\mathbb{T}, 0\leq r\leq\rho<1, \tag{3.6.1}$$

および

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\geq M\delta_D(f(z))\left(\frac{|\zeta_1-\zeta_2|}{1-|z|}\right)^{\beta}\quad \zeta_1,\zeta_2\in I(z),\ \ z\in\mathbb{D} \tag{3.6.2}$$

が成り立つ。ただし、ここに $I(re^{it})=\{e^{i\theta};|\theta-t|\leq\pi(1-r)\}$ とする。

注意 3.6.2 この最後の評価から、$\mathbb{T}$ 上での逆 *Hölder* 条件 $|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)| \geq M'|\zeta_1-\zeta_2|^\beta$ が従うことが分かる。

また、次の Jordan 領域の特徴付けを用いれば、有界な１次連結領域は常に Jordan 領域になっていることも分かる。

定理 3.6.3 (Newman [83], Chap.VI, Theorems 14.1 and 16.2) *2* 点以上からなる境界を持つ単連結平面領域が *Jordan* 領域であるための必要十分条件は、それが球面距離に関して一様局所連結であることである。

系 3.6.4 任意の有界な単連結１次連結領域は *Jordan* 領域である。

最後に近接凸函数との関連について言及しておこう。

定理 3.6.5 (cf. Pommerenke [95]) $\alpha \in [0,1)$ に対して α-近接凸函数 f の像領域 $f(\mathbb{D})$ は１次連結領域である。

[Proof] 仮定よりある凸函数 $g:\mathbb{D}\to D'$ が存在して $\varphi = f\circ g^{-1}: D' \to D = f(\mathbb{D})$ とおいたとき、$|\arg\varphi'(v)| \leq \alpha\pi/2$ となる。よって、任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ に対して $v_j = g(z_j), w_j = f(z_j)$ とすれば、

$$\frac{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)}{v_2-v_1} = \int_0^1 \varphi'(v_1+t(v_2-v_1))dt = \int_0^1 e^{i\arg\varphi'}|\varphi'|dt$$

であり、この評価から

$$\frac{|w_2-w_1|}{|v_2-v_1|} \geq \mathrm{Re}\,\frac{f(z_2)-f(z_1)}{v_2-v_1} \geq \cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^1 |\varphi'|dt \geq \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{|v_2-v_1|}\ell(C)$$

を得る。ここに C は v_1, v_2 を D 内で結ぶ曲線 $\varphi([v_1,v_2])$ であり、$\ell(C)$ はそのユークリッド的長さである。この評価式より、$M = 1/\cos(\alpha\pi/2)$ とおけば、$M|w_2-w_1| \geq \lambda_D(w_1,w_2) \geq \mu_D(w_1,w_2)$ である。すなわち、D は定数 M の１次連結領域である。 □

注意 3.6.6 証明から分かるように実際にはもっと強いことが言えている。*2.3* 節での記号を用いれば、$\lambda(D) \leq 1/\cos(\alpha\pi/2)$ となっているわけである。

3.7 John 領域

今度は１次連結性とはある意味で双対的な性質を持つ John 領域について述べることにしよう。平面領域 D が (定数 C の)John 領域であるとは、任意の $a \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して $D - \overline{B(a,r)}$ の任意の 2 点が $D - \overline{B(a,r/C)}$ 内の曲線で結べることである。ここでもう少し概念を掴んで頂くために定義の同値な言い換えをしておこう。

補題 3.7.1 複素平面内の領域 D が（定数 C の）*John* 領域であるための必要十分条件は、ある定数 C' があって任意の D の切断（*cross cut*）γ に対して（つまり、γ は D 内の *Jordan* 開弧で両端点が D の境界のある点に収束しているようなものである）

$$\min\{\mathrm{diam}(D_1), \mathrm{diam}(D_2)\} \le C'\mathrm{diam}(\gamma)$$

が成り立つことである。ただし、ここに D_1, D_2 は $D-\gamma$ の *2* つの成分であるとする。

[Proof]

まず D が定数 C の John 領域であるとする。γ を D の任意の切断とし、その直径を $\mathrm{diam}\gamma = d$ とする。この時簡単な平面幾何からある点 $a \in \mathbb{C}$ があって、$\gamma \subset \overline{B(a, d/\sqrt{3})}$ であることが分かる。(“ 最悪の ”ケースは γ が正三角形のような形の時である。）ここでもし $D_j - \overline{B(a, Cd/\sqrt{3})}$ がともに空でないとすると、それぞれから 1 点ずつ取ってそれを z_j とすると、これらは John 領域の定義に従えば、$D - \overline{B(a, d/\sqrt{3})}$ の中の曲線で結べるはずであるが、これは z_1, z_2 が $D-\gamma$ の違う成分に属することに反する。よって、どちらかの j については $D_j \subset \overline{B(a, Cd/\sqrt{3})}$ でなければならず、特に $\mathrm{diam}D_j \le 2Cd/\sqrt{3}$ であることが分かる。よって、$C' = 2C/\sqrt{3}$ として後半の主張が成り立つ。

逆に後半の主張が成り立っていると仮定しよう。任意に $a \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ を選ぶ。$D - \overline{B(a, r)}$ から任意に 2 点 z_1, z_2 を取る。そこで $D' := D - \overline{B(a, r/3C')}$ 内のいかなる曲線でもこの 2 点を結ぶことが出来なかったとしよう。つまり、z_j が D' の異なる連結成分 D'_j に属するとする。この時、円周 $\partial B(a, r/3C')$ に含まれるある開円弧 γ が D の切断になっていることに注意しておこう。D'_j を含む $D-\gamma$ の成分を D_j と書くことにする。すると、各 $j = 1, 2$ に対して

$$\mathrm{diam}D_j \ge \mathrm{dist}(z_j, B(a, r/3C)) \ge |z_j - a| - r/3C'$$

だから、これより

$$\begin{aligned}\min_{j=1,2} |z_j - a| - r/3C' &\le \min_{j=1,2} \mathrm{diam}D'_j \le \min_{j=1,2} \mathrm{diam}D_j \\ &\le C'\mathrm{diam}\gamma \le C' \cdot 2r/3C' = 2r/3\end{aligned}$$

であることが分かるから、さらに変形して

$$\min_{j=1,2} |z_j - a| \le 2r/3 + r/3C' \le r$$

を得る。これはある j について $z_j \in \overline{B(a, r)}$ であることを意味し、z_j の取り方に矛盾する。故に 2 点 z_1, z_2 は D' 内の曲線で結べることが分かり、従って $C = 3C'$ として前半の主張が成り立つことが分かった。 □

ここではいくつかの有界単連結 John 領域の特徴付けについて紹介しておくことにする。

定理 3.7.2 (Pommerenke [95]) $f : \mathbb{D} \to D$ を有界単連結領域 D のリーマン写像とする。また、$\delta_D(f(0))/\mathrm{diam}(D) \geq c$ であるとする。この時、次の条件は互いに同値である。

1. D は定数 C の *John* 領域。

2. ある定数 $M_1 > 0$ があって、$\mathrm{diam} f(B(z)) \leq M_1 \delta_D(f(z))$ が任意の $z \in \mathbb{D}$ について成り立つ。

3. ある定数 $\alpha \in (0, 1]$ と $M_2 > 0$ があって、任意の $z \in \mathbb{D}$ と $\zeta \in \mathbb{D} \cap B(z)$ に対して次の式が成り立つ。
$$|f'(\zeta)| \leq M_2 |f'(\zeta)| \left(\frac{1 - |\zeta|}{1 - |z|} \right)^{\alpha - 1}.$$

4. ある定数 $\beta > 0$ が存在して、任意の弧 $A \subset I \subset \mathbb{T}$ に対して
$$\ell(A) \leq \beta \ell(I) \Rightarrow \mathrm{diam} f(A) \leq \frac{1}{2} \mathrm{diam} f(I)$$
が成り立つ。

5. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある定数 $\delta > 0$ が存在して、任意の弧 $A \subset I \subset \mathbb{T}$ に対して
$$\ell(A) \leq \delta \ell(I) \Rightarrow \mathrm{diam} f(A) \leq \varepsilon \mathrm{diam} f(I)$$
が成り立つ。

ただし、ここに
$$B(re^{it}) = \{\rho e^{i\theta}; r \leq \rho \leq 1, |\theta - t| \leq \pi(1 - r)\} \quad (0 \leq r < 1)$$
$$I(re^{it}) = \mathbb{T} \cap B(re^{it}) = \{e^{i\theta}; |\theta - t| \leq \pi(1 - r)\}$$
であるとする。また、ここで定数 $M_1, M_2, \beta, \delta(\varepsilon)$ は c, C にしかよらない定数である。

注意 3.7.3 いずれにしても、ちょっと分かりにくい特徴付けではある。大雑把に言えば、有界な *Jordan* 領域が *John* 領域であるための必要十分条件は、外に突き出したカスプを持たない、ということである。同様に、1次連結であるための必要十分条件は内側に食い込んだカスプを持たないということである。一般の場合も、おおよそこのような領域のイメージを持って頂ければ十分であろう。

なお、*John* 領域は有界単連結であっても *Jordan* 領域とは限らない。例えば、スリットを抜いたような領域を考えればよい。具体的には $\mathbb{D} - (-1, 0]$ などを考えてみよ。

3.8　擬円板

この節では、Teichmüller 空間論などでも非常に重要な役割を果たす擬円板について述べることにしよう。これについては、Gehring による包括的な論説 [38] があり、証明もある程度なされているので詳細についてはそちらを参照して頂きたい。また、[40] もその後の発展や、高次元の場合への一般化についての記述や膨大な参考文献リストもあり、非常に参考になるであろう。

この節では、擬円板についての特徴付けについてほとんど証明なしで概観を述べるにとどめる。（なお、以下では定数の定量的評価に関するコメントはないが、特に断らない限りは互いに他の領域定数によって評価出来ると考えて頂いて差し支えない。）

まず、リーマン球面の擬等角写像による単位円板の像は擬円板 (quasidisk) と呼ばれる。従って、特に擬円板は Jordan 領域である。（特に、K-擬等角写像による円板の像になっているときに、K-擬円板と呼ぶ。）　このようなものが幾何学的に特徴づけられるのか？と一見思いがちだが、実はこのような領域の特徴付けは数多くあり、様々な数学的対象と結びついて非常に興味深い。例えば、擬円板の境界は擬円周 (quasicircle) と呼ばれるが、これについては Ahlfors [1] が明快な特徴付けを与えている。

定理 3.8.1 (Ahlfors の 3 点性 (three point property)) リーマン球面内の *Jordan* 曲線 J が擬円周であるための必要十分条件は、ある定数 $c>0$ が存在して任意の $z_1, z_2 \in J-\{\infty\}$ に対して

$$\min_{j=1,2} \operatorname{diam}(J_j) \le c|z_1 - z_2| \tag{3.8.1}$$

が成り立つことである。ただし、ここに J_1, J_2 は $J-\{z_1, z_2\}$ の *2* つの成分を表すものとする。

あるいは、次の形の特徴付けも理解を深めるのに役に立つかもしれない。

定理 3.8.2 (cf. Pommerenke [92] p.286) リーマン球面内の *Jordan* 曲線 J が擬円周であるための必要十分条件は、ある定数 $d>0$ が存在して任意の相異なる *4* 点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in J$ で J 上にこの順で並んでいるものに対してその非調和比の絶対値が d 以上である、すなわち式で書けば

$$\left|\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}\right| \ge d$$

が成り立つことである。

（円周上に順番に並んだ 4 点の非調和比は常に 1 以上になっていることを考えると、これは非常に自然な特徴付けであると思われる。）

次に、等角貼り合わせ (conformal welding) や擬対称函数との関係に関する古典的結果について述べておこう。単位円周からそれ自身への向きを保つ自己同相写像 $h:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ が擬対

称 (quasisymmetric) であるとは、ある定数 $C > 0$ が存在して任意の区間 $I \subset \mathbb{T}$ で長さ π 以下のものに対して

$$\ell(h(I^*)) \leq C\ell(h(I))$$

が成り立つことを言う。ここで I^* は I と同じ中心を持ち長さが I の長さの 2 倍であるような $\mathbb{T}$ の部分区間である。これは、Möbius 変換で $\mathbb{T}$ を拡大実数直線 $\hat{\mathbb{R}}$ に写して考え、さらに無限遠点を固定するものを考えれば、$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ となるが、これがいわゆる Ahlfors の M-条件 (M-condition) を満たす函数ということと同値である。すなわち、ある定数 $M \geq 1$ が存在して任意の $x \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ に対して

$$\frac{1}{M} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M$$

が成立するということである。（このような函数も擬対称函数と呼ばれる。）$\mathbb{T}$ の擬対称函数全体のなす集合を $Q(\mathbb{T})$ と表すことにする。この擬対称写像については次の結果が基本的である。

定理 3.8.3 (Beurling-Ahlfors [16]) 向きを保つ同相写像 $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像に拡張出来るための必要十分条件は h が擬対称写像であることである。

証明には Beurling-Ahlfors 拡張と呼ばれる方法を用いる。具体的な式もそれほど難しくはないが、ここでは触れないことにする。詳しくは論文 [16] 及び Lehto の教科書 [70] などを見て頂きたい。また、等角不変な意味でもっと良い拡張が Douady-Earle により得られている。これについては [30] を参照のこと。

系 3.8.4 単位円周上の擬対称写像全体 $Q(\mathbb{T})$ は写像の合成に関して群をなす。

さて、次に向き付けられた *Jordan* 曲線 J が与えられた時にこれに対して決まる貼り合わせ写像 (welding homeomorphism) を定義しよう。まず $\mathbb{C} - J$ は 2 個の Jordan 領域からなるが、J に対して左側にあるもの、右側にあるものをそれぞれ D_1, D_2 としたとき、それぞれのリーマン写像を $f_1 : \mathbb{D} \to D_1, f_2 : \mathbb{D}^* \to D_2$ としよう（ただし、f_2 に関してはここでは単位円板の外部 $\mathbb{D}^*$ からの等角写像を採用していることに注意せよ）。Carathéodory の定理からこれらはそれぞれ同相写像 $f_1 : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D_1}, f_2 : \overline{\mathbb{D}^*} \to \overline{D_2}$ に拡張出来るが、そこで $h_J := f_1{}^{-1} \circ f_2$ とすると、これは向きを保つ同相写像になる。これは $\mathbb{T}$ の Möbius 変換を除いては一意的に定まる。(逆に、Jordan 曲線は貼り合わせ写像 h によって単位円板とその外部を貼り合わせて複素構造を入れた時に得られる円周の像と考えられる。)

定理 3.8.5 (Ahlfors [1]) *Jordan* 曲線 J が擬円周であるための必要十分条件はその貼り合わせ写像 h_J が擬対称であることである。

[Proof] 記号は上の定義におけるものとして、証明を始めよう。

まず J が擬円周であるとすれば、D_1, D_2 ともに擬円板だから後で示す系 3.8.7 からリーマン写像 f_j は $\widehat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像 F_j に拡張出来る。よって、貼り合わせ写像 h_J は $\widehat{\mathbb{C}}$ 全体に $F_1^{-1} \circ F_2$ によって擬等角写像に拡張出来る。よって h_J は擬対称である。

逆に h_J が擬対称だとするとこれは $\widehat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像 H に拡張出来るから、写像 F を

$$F(z) = \begin{cases} f_1(H(z)), & (z \in \overline{\mathbb{D}}) \\ f_2(z) & (z \in \mathbb{D}^*) \end{cases}$$

により定めれば、これは境界上でうまく貼り合うので $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像となる。明らかに $J = F(\mathbb{T})$ だから J は擬円周である。 □

さて次の結果は定量的結果というよりは、定性的結果だがしばしば用いられる有用な擬円板の特徴付けである。

定理 3.8.6 (擬等角鏡映) D が K-擬円板ならば、D に関する K^2-擬等角鏡映が存在する。逆に *Jordan* 領域 D に関して K-擬等角鏡映が存在すれば D は K-擬円板である。ただし、ここに $\psi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が *Jordan* 領域 D に関する K-擬等角鏡映であるとは、$\psi(\bar{z})$ が K-擬等角写像で $\psi \circ \psi = \mathrm{id}$ であり、$\psi|_{\partial D} = \mathrm{id}_{\partial D}, \psi(D) \cap D = \emptyset$ を満たすものとする。

[Proof] まず D を K-擬円板とするとある擬等角写像 g で $g(\mathbb{H}) = D$ となるものがある。そこで $\sigma(z) = \bar{z}$ として $\psi = g \circ \sigma \circ g^{-1}$ とすれば、これが D に関する K^2-擬等角鏡映になる。

逆に ψ を D に関する K-擬等角鏡映とし、$f : \mathbb{D} \to D$ をリーマン写像とすると、

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & |z| \leq 1 \\ \psi(f(1/\bar{z})), & |z| \geq 1 \end{cases}$$

によって g を定めればこれは K-擬等角写像となり $D = g(\mathbb{D})$ であることが分かる。 □

この証明からさらに次の形の特徴付けも得られる。

系 3.8.7 単連結平面領域 D が K-擬円板であれば、リーマン写像 $f : \mathbb{D} \to D$ は K^2-擬等角写像 $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に拡張出来る。逆にリーマン写像 $f : \mathbb{D} \to D$ が K-擬等角写像に拡張出来れば、D は K-擬円板である。

[Proof] 後半は自明だから前半のみ示そう。D が K-擬円板とすると、定理 3.8.6 から D に関する K^2-擬等角鏡映 ψ が存在する。そこで円周に関する通常の鏡映を σ とすれば（つまり、$\sigma(z) = 1/\bar{z}$ とすれば）、リーマン写像 f を $\mathbb{D}^*$ には $\psi \circ f \circ \sigma$ によって拡張すればよいことが分かり、このように拡張した写像は構成の仕方から分かるように K^2-擬等角写像である。□

次に、擬円板の計量的な特徴付けを述べることにしよう。幾何学的にはこの条件が最もcheckしやすいように筆者には思われる。

定理 3.8.8 (Gehring [37]) 単連結平面領域が擬円板であるための必要十分条件は、1次連結な *John* 領域であることである。

さて、今度はMartio-Sarvas [76] によって定義された一様領域 (uniform domain) の概念を紹介しよう。これは $\mathbb{R}^n$ の部分領域についても同様に議論できるが、ここでは2次元の場合に限定して考える。

定義 3.8.9 (一様領域) 複素平面の部分領域 D が一様であるとは、ある定数 $a, b > 0$ が存在して次の性質が成り立つことを言う。任意の *2* 点 z_1, z_2 に対してこの *2* 点を結ぶ曲線 α で

$$\ell(\alpha) \le a|z_1 - z_2| \tag{3.8.2}$$

$$\min_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \le b\delta_D(z) \quad (\forall z \in \alpha) \tag{3.8.3}$$

であるものが存在する。ただし、ここに α_j は $\alpha - \{z\}$ の成分で z_j を端点に持つものとし、$\ell(\alpha)$ は曲線のユークリッド長さを表すものとする。

このような領域は擬双曲距離を用いると次のような領域として特徴づけることが出来る。

定理 3.8.10 (Gehring-Osgood [41]) 複素平面の真部分領域 D が一様であるための必要十分条件はある定数 $c, d > 0$ が存在して $k_D(z_1, z_2) \le cj_D(z_1, z_2) + d$ が任意の $z_1, z_2 \in D$ について成り立つことである。ただし、ここに k_D, j_D は *1.2* 節で定義した量である。

しかし、実は次のことが成り立つ。

定理 3.8.11 (Martio-Sarvas [76]) 複素平面内の単連結領域が擬円板であるための必要十分条件はそれが一様であることである。

正則函数の単葉性に関しては擬円板はやはり著しい性質を持つ。例えば円板の場合には後に述べるNehariの定理 (定理4.1.5) によって単位円板上の非定数正則函数 f が $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \le 2$ を満たすならば f は単葉であることが分かるが、同様の性質により擬円板が特徴づけられることがAhlfors [1] 及びGehring [37] によって示された。これはTeichmüller空間の言葉を使って言えば、単位円板上の単葉函数のSchwarz微分全体のなす集合 $S(1)$ の $B_2(\mathbb{D})$ における内部が普遍Teichmüller空間 $T(1)$ に一致するという事実に他ならない。(Ahlforsが示したのは $T(1)$ が開集合であることで、Gehringはさらに $S(1)$ の内部が連結であることを証明した。関連する定義などについてはGehring [37] やLehto [70] を参照のこと。)

定理 3.8.12 (Schwarz 微分性) 単連結平面領域 D が擬円板であるための必要十分条件はある定数 $a > 0$ で次の性質を満たすものが存在することである：D 上の非定数有理型函数が $\|S_f\|_{2,D} \leq a$ を満たせば実は f は D 上で単葉である。

同様の結果が f' の対数微分についても成り立つ。

定理 3.8.13 (対数微分性) 複素平面内の単連結領域 D が擬円板であるための必要十分条件はある定数 $a > 0$ で次の性質を満たすものが存在することである：D 上の非定数正則函数 f が $\|T_f\|_{1,D} \leq a$ を満たせば、実は f は D 上で単葉である。

この条件の必要性は Martio-Sarvas [76] によって示されていたが、十分性は Astala-Gehring [9] によってようやく証明された。

単葉性に関しては少し毛色は違うが、次のような特徴付けもある。その前に用語を説明しておくと、$L \geq 1$ を定数として複素平面内の領域 D から $\mathbb{C}$ への写像が L-擬等長写像 (L-quasiisometry) であるとは、任意の $z_1, z_2 \in D$ に対して

$$\frac{1}{L}|z_1 - z_2| \leq |f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \tag{3.8.4}$$

が成り立つことを言う。また、f が局所 L-擬等長写像であるとは、任意の $M > L$ に対して各点 $z_0 \in D$ の近傍 U があって、$f|_U$ が M-擬等長写像になっていることを言う。

定理 3.8.14 (Gehring [39], Martio-Sarvas [76]) 複素平面内の単連結領域 D が擬円板であるための必要十分条件はある定数 $L \geq 1$ があって、D 上の任意の局所 L-擬等長写像が常に D 上単射になることである。

今度は函数の拡張性で擬円板を特徴付けることを考えてみよう。一般に $\mathcal{F}$ という函数のクラスについて領域が $\mathcal{F}$ について拡張性を持つとは、D 上でのその函数のクラス $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ の元が常に $\mathcal{F}(\mathbb{R}^\in)$ のある元に拡張できることを言う。

まず BMO という函数のクラスを考える。複素平面内の領域 D 上の局所可積分函数 u に対して

$$\|u\|_{BMO(D)} = \sup_B \frac{1}{m(B)} \int_B |u - u_B| dm \tag{3.8.5}$$

と定義する。ただし、ここに m は 2 次元 Lebesgue 測度であり、上の sup は $\overline{B} \subset D$ なる全ての円板 B についてとる。また、u_B は B 上での平均である。すなわち、$u_B = \frac{1}{m(B)} \iint_B u dm$ である。これを BMO ノルムと呼び、これが有限になるような D 上の函数のクラスを $BMO(D)$ で表すことにする。BMO 函数については後藤氏による論説 [46] が参考になる。

定理 3.8.15 (Jones [60]) 平面領域 D が BMO 拡張性を持つための必要十分条件は D が一様領域であることである。

注意 3.8.16 この結果は一般次元でも成立する。

系 3.8.17 (BMO 拡張性) 単連結平面領域が擬円板であるための必要十分条件は BMO 拡張性を持つことである。

次にソボレフ空間を考えよう。$u \in L^p(D)$ に対して

$$\|u\|_{W_p^1(D)} = \left(\iint_D |u|^p dm\right)^{1/p} + \left(\iint_D |\nabla u|^p dm\right)^{1/p}$$

と定義する。ただし、ここに ∇ は超函数の意味での勾配 (gradient) である。このノルムが有限なもの全体を $W_p^1(D)$ と書くことにすると、これはバナッハ空間となる。

定理 3.8.18 (Jones [61], cf. [53]) 有限連結な有界領域 D が W_2^1 拡張性を持つならば D は一様である。逆に D が一様領域ならば任意の $p \geq 1$ について D は W_p^1 拡張性を持つ。

ここで数字 2 は L^2 空間の 2 というよりは、複素平面の (実) 次元の 2 という意味合いが強いようである。高次元も含めた一般の領域のソボレフ拡張性については他にも、例えば [54], [55] などを参照せよ。

系 3.8.19 (Gol'dstein-Vodop'janov [44]) 有界な単連結領域 D が擬円板であるための必要十分条件は W_2^1 拡張性を持つことである。

そのほかにも、様々な特徴付けが [38] 及び [40] には紹介されているが、きりがないのでとりあえずこの辺りまでとしておく。

第4章　種々の単葉性条件

この章ではこれまでの結果を援用しつつ、種々の単葉性条件について述べる。特に Nehari [79] に始まる Schwarz 微分に関連する単葉性条件に焦点を当てて調べてみる。それだけでも膨大な研究結果があり、また様々な観点での一般化もされており、種々の方法が用いられている。本当はこれらの諸結果の相互関係を調べることが本書を執筆するにあたっての一つの目標でもあったわけだが、時間の関係で結局諸結果の羅列に終わってしまったのは若干心残りである。

4.1　Nehari-Ahlfors-Weill の単葉性条件

まず単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則函数 φ が与えられたときの Schwarz 微分方程式

$$S_f = \varphi \tag{4.1.1}$$

と第 2.4 節で扱った 2 階の線型常微分方程式

$$2w'' + \varphi w = 0. \tag{4.1.2}$$

との関係について述べておこう。

方程式 (4.1.2) の 2 つの 1 次独立解を v_1, v_2 として、それを縦に並べたベクトルを $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ と書くことにする。すると

$$\mathbf{v}'' = -\frac{1}{2}\varphi\mathbf{v} \tag{4.1.3}$$

であるから、Wronskian $W = \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ は微分すれば $W' = \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}'') = 0$ となり従って W は定数である。最初から適当に正規化しておいて $W \equiv -1$ と仮定してよい。また、これより特に $\mathbf{v}$ はゼロベクトルを値には取らないから、正則写像 $\mathbf{v} : D \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ と思うことも出来る。ここで $\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{(0,0)\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を 1 次元射影空間への標準射影とすると (すなわち $\pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1/z_2$ である)、$f = \pi \circ \mathbf{v}$ としたとき、$f' = \det(\mathbf{v}', \mathbf{v})/{v_2}^2 = 1/{v_2}^2$ より $T_f = -2{v_2}'/v_2$ である。これを用いれば容易に $S_f = \varphi$ を得る。

逆に f が (4.1.1) の解だったとすると、補題 1.5.3 から f は局所単葉な有理型函数でなければならない。よって、f' は f の極以外のところでは 0 でないから (局所的には)$(f')^{-1/2}$ の正

則な分枝が取れる。一方、f の極では、常に1位の極であるはずだから、やはり $(f')^{-1/2}$ は正則な分枝が取れる。D は単連結だったから、結局 $(f')^{-1/2}$ の正則な大域的な分枝が取れることになり、その一つを v_2 とおくと、これは計算により (4.1.2) の解であることが分かる。一方、第1.5節に述べた基本事項から分かるように $S_{1/f} = S_f$ だから、$(1/f)' = f'/f^2$ の $-1/2$ 乗の分枝 $v_1 := v_2 f$ もまた (4.1.2) の解になる。故に f は v_1/v_2 として (4.1.2) の1次独立な解の比で表されることが分かった。

次に解の変換則について見ておこう。

補題 4.1.1 (解の変換則) 微分方程式 *(4.1.2)* の解を w とし $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ とすると、$v = (w \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{-1/2}$ は微分方程式

$$2v'' + \gamma^*(\varphi)v = 0. \tag{4.1.4}$$

の解になっている。ただし、ここに $\gamma^*(\varphi) = (\varphi \circ \gamma) \cdot (\gamma')^2$ とする。

注意 4.1.2 この事実は φ があるリーマン面上の *2* 次微分の普遍被覆による持ち上げ（*lift*）だとしたときに、改めて微分方程式（*4.1.2*）をそのリーマン面上の微分方程式と考え直した時、その解がそのリーマン面の標準束 κ の $-1/2$ 乗への切断（*section*）と考えられることを示唆している。

さて、ここまで準備が出来たところでまずは次の Ahlfors-Weill の定理を証明しよう。まず、少しだけ記号を用意しておく。$\varphi \in B_2(\mathbb{D})$ に対して $\sigma(\varphi) \in L^\infty(\mathbb{C})$ を次のように定義する。

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho_{\mathbb{D}^*}(z)^{-2}\varphi(1/\bar{z})\bar{z}^{-4}, & z \in \mathbb{D}^* \\ 0, & z \in \mathbb{D}. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

定義から明らかに σ は有界線型作用素であり、$\|\sigma(\varphi)\|_\infty = \frac{1}{2}\|\varphi\|_{2,\mathbb{D}}$ であることに注意しておこう。

定理 4.1.3 (Ahlfors-Weill [5]) 単位円板上の非定数有理型函数 f が $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \le k < 2$ を満たせば、実は f は $\widehat{\mathbb{C}}$ の $K := \frac{1+k}{1-k}$-擬等角写像 F で $\mu[F] = \sigma(S_f)$ なるものに拡張出来ることが分かり、特に f は単葉となる。

注意 4.1.4 ここでこの写像 $\sigma : B_2(\mathbb{D})_2 \to L^\infty(\mathbb{C})_1$ は *Ahlfors-Weill* 切断と呼ばれているもので、*Teichmüller* 空間論では非常に重要な役割を果たす。

この結果と単葉函数のコンパクト性 (Hurwitz の定理) により次の定理も容易に従う。ただ、次の定理はこの証明の後にもっと一般的な形でもう一度証明する (定理 4.1.7)。

系 4.1.5 (Nehari の定理 [79]**)** 単位円板上の非定数有理型函数 f が $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 2$ を満たせば、実は f は単位円板上で単葉である。

[Proof] では Ahlfors-Weill の定理の証明を行おう。原論文とは若干方法は違うが、本質的には同じことである。（原論文には一部 gap があるように筆者には思える。）$\varphi = S_f$ とおけば、$\varphi \in B_2(\mathbb{D})$ であり仮定から $\|\varphi\|_{2,\mathbb{D}} \leq k < 2$ である。上で述べたことから、この φ に対して (4.1.2) の単位円板上の 1 次独立な 2 つの解 v_1, v_2 を選んで $f = v_1/v_2$ とすることが出来た。そこで、任意の $0 < r < 1$ に対して次のように写像を定義しよう。$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ として

$$g_r(z) = \begin{cases} \mathbf{v}(z), & |z| \leq r \\ \mathbf{v}(r^2/\bar{z}) + (z - r^2/\bar{z})\mathbf{v}'(r^2/\bar{z}), & |z| \geq r, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

さらに $F_r(z) = \pi(g_r(z))$ とする。すると $|z| > r$ 上では

$$\begin{aligned} \partial g_r &= \mathbf{v}', \\ \bar{\partial} g_r &= -\frac{r^2}{\bar{z}^2}\mathbf{v}' + \frac{r^2}{\bar{z}^2}\mathbf{v}' - (z - r^2/\bar{z})\frac{r^2}{\bar{z}^2}\mathbf{v}'' \\ &= (z - r^2/\bar{z})\frac{r^2}{\bar{z}^2}\frac{\varphi}{2}\mathbf{v} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

である。従って形式的に計算して

$$\mu[F_r] = \det(\bar{\partial} g_r, g_r)/\det(\partial g_r, g_r) = -\frac{1}{2}\left(\frac{|z|^2 - r^2}{r}\right)^2 \varphi\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)\left(\frac{-r^2}{\bar{z}^2}\right)^2$$

を得る。明らかに各点ごとには $\mu[F_r] \to \sigma(\varphi) \quad (r \to 1)$ であり、形から $\psi_r(z) = \overline{\varphi(r^2/\bar{z})}$ $(-r^2/\bar{z}^2)^2 \in B_2(\mathbb{D}^*)$ とおけば、$\|\mu[F_r]\|_\infty = \|\psi_r\|_{2,\widehat{\mathbb{C}}-\overline{\mathbb{D}_r}} = \|\varphi\|_{2,\mathbb{D}_r} \leq \|\varphi\|_{2,\mathbb{D}} \leq k$ が成り立つ。(ここで単調性原理 (補題 1.5.4) を用いた。) また、この計算から分かるように F_r は $\mathbb{D}_r$ の内部と外部で各々局所微分同相写像になっており、さらに境界 $\partial\mathbb{D}_r$ においては元々の (4.1.6) の形が Taylor 展開の 1 次までを取った形になっているので 1 階までの導函数が一致しており、従って境界でも C^1 級で局所単葉であることが分かる (あるいは、直接微分した形の式 (4.1.7) を見ても明らかである)。従って、Ahlfors の原理 (補題 2.5.1) によって各 F_r は大域的に同相写像である。従って、特に K-擬等角写像であり、構成の仕方から原点の近傍では $F_r = f$ なので、定理 1.8.4 によって $r \to 1$ のとき (適当な部分列を取れば) これはある K-擬等角写像 F に収束するはずだが、定理 1.8.5 によって $\mu[F] = \sigma(\varphi)$ でなければならない。よって、これにて完全に定理が証明された。 □

次に Nehari の定理をより一般的な形で証明しよう。

定理 4.1.6 (Nehari [80]) 区間 $I = (-1, 1)$ 上の連続函数で次の条件

$(A1)$ ある正値函数 $q \in C^2(I)$ で微分不等式 $2q'' + Aq \leq 0$ を満たすものが存在する。

（従ってこれと同値な条件 $(A2), (A3), (A4)$, (*2.4*) 節参照）を満たし、さらに

(B) $A(r)(1 - r^2)^2$ は $r \in (0, 1)$ について非増加である。

(C) $A(-r) = A(r) \quad (0 < r < 1)$

という条件を満たすとする。この時、単位円板上の非定数有理型函数 f が $|S_f(z)| \leq A(|z|)$ $(z \in \mathbb{D})$ を満たすならば、f は $\mathbb{D}$ 上で単葉である。

[Proof] 単葉でないとして、ある 2 点 z_1, z_2 が存在して $f(z_1) = f(z_2)$ となったとしよう。後ろから Möbius 変換の元を合成しても Schwarz 微分には影響しないから、最初から $f(z_1) = f(z_2) = 0$ としても一般性を失わない。そこで、先の考察からある (4.1.2) の解 u, w で $f = u/w$ となっているものがあったことを思い出すと、今の場合は $u(z_j) = 0 \ \ (j = 1, 2)$ となっていることが分かる。

この 2 点 z_1, z_2 を通る双曲的直線 (つまりこの 2 点を通って単位円周と直交するような円弧) の点で原点からの距離が最も近い点を z_0 とする。そこで $r_0 = |z_0|$ として $\alpha = z_0/ir_0$ として Möbius 変換の元 $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ を $\gamma(z) = \alpha\frac{z+ir_0}{1-ir_0 z}$ と定める。すると、$\alpha^{-1}\gamma(z)$ は虚軸を虚軸に写し、原点を ir_0 に写す写像であるから、γ は実軸を z_1, z_2 を通る双曲直線に写すことが分かる。そこで $t_j = \gamma^{-1}(z_j) \in I \ \ (j = 1, 2)$ と定める。補題 4.1.1 により $v = (u \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{-1/2}$ とすればこれは方程式 (4.1.4) の解になっており、しかも $v(t_1) = v(t_2) = 0$ が成り立つ。　ここで系 1.1.7 により

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} = \frac{1}{1 - |t|^2}$$

であり、また直接計算により $t \in I$ に対しては

$$|\gamma(t)|^2 - t^2 = {r_0}^2(1 - t^4) \geq 0$$

が成り立つことが分かるから、特に $|t| \leq |\gamma(t)|$ が任意の $t \in I$ について成り立つ。よって、これらと性質 (B),(C) を用いて

$$\begin{aligned} |\gamma^*(\varphi)(t)| &= |\varphi(\gamma(t))||\gamma'(t)|^2 \\ &\leq \frac{A(|\varphi(t)|)(1 - |\gamma(t)|^2)^2}{(1 - t^2)^2} \leq A(|t|) = A(t) \end{aligned}$$

が得られる。これより定理 2.4.1 が使えて、方程式 (4.1.4) の解 v には零点が高々1 個しかないはずだが、これは $v(t_j) = 0 \ \ (j = 1, 2)$ に矛盾する。よって、f は単葉でなければならないことが分かった。 □

この定理の応用として、次の結果を紹介しておこう。

n を自然数、$a_k > 0, \mu_k \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)$ を次の条件を満たす定数とする。

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$,

(2) $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq 2$.

また、函数 $C : [0, 2] \to \mathbb{R}$ を

$$C(\mu) := \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1 \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2 \end{cases} \tag{4.1.8}$$

によって定める。この時、次の結果が成り立つ。

定理 4.1.7 (Avkhadiev, cf. [10]) 単位円板上の非定数有理型函数 f が

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k C(\mu_k)(1 - |z|^2)^{-\mu_k} \tag{4.1.9}$$

を任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して満足するならば、f は単位円板上で単葉である。

注意 4.1.8 この定理で $n = 1$ の場合を考える。$\mu = 0, 2$ の場合が *Nehari* のオリジナルの場合 *[79]* であり、$\mu = 1$ の場合が *Pokornyi [91]* によってアナウンスされた結果である。

[Proof] まず函数 $A(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k C(\mu_k)(1 - t^2)^{-\mu_k}$ が条件 (B), (C) を満たすことは容易に分かる。次に

$$A_0(t) = \frac{\pi^2}{2}, \quad A_1(t) = \frac{4}{1 - t^2}, \quad A_2(t) = \frac{2}{(1 - t^2)^2}$$

はそれぞれ条件 (A1), (B), (C) を満たすことも容易に分かる。従って、特に (A4) の条件も満足されている。これより、$\alpha \in (0, 1), -1 < t_1 < t_2 < 1$ として、I 上の連続函数 u が $u(t_1) = u(t_2) = 0$ を満たしているとすると、Hölder の不等式より

$$\int_{t_1}^{t_2} A_l^{\alpha} A_m^{1-\alpha} u^2 dt \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} A_l u^2 dt\right)^{\alpha} \left(\int_{t_1}^{t_2} A_m u^2 dt\right)^{1-\alpha} \leq 2\int_{t_1}^{t_2} (u')^2 dt$$

が得られる。ただし、ここに $l, m = 0, 1, 2$ とし A_l が条件 (A4) を満たすことを用いた。これより $A_l^{\alpha} A_m^{1-\alpha}$ も条件 (A4) を満たすことが分かったので、特に $C(\mu)(1 - t^2)^{-\mu}(0 \leq \mu \leq 2)$ もこの条件を満たすことが分かった。すなわち、

$$\int_{t_1}^{t_2} C(\mu)(1 - t^2)^{-\mu} u(t)^2 dt \leq 2\int_{t_1}^{t_2} u'(t)^2 dt$$

が言えた。この式に $\mu = \mu_k$ を代入して a_k を掛けて足し合わせれば $A(t)$ 自身も条件 (A4) 従って条件 (A1) を満たすことが分かった。 $\square$

この定理は容易に次の積分形に一般化出来る。

定理 4.1.9 a を区間 $[0,2]$ 上の正値測度として $\int_0^2 da \leq 1$ であるとする。この時単位円板上の非定数有理型函数 f が

$$|S_f(z)| \leq \int_0^2 C(\mu)(1-|z|^2)^{-\mu} da(\mu) \tag{4.1.10}$$

を満足するならば、f は単葉である。

Ahlfors-Weill の定理及び Nehari の定理に関しては様々な精密化が行われており、色々興味深い結果も知られてきている。代表的な結果を若干紹介しておくことにしよう。

定理 4.1.10 (Gehring-Pommerenke [43]) 単位円板上の非定数有理型函数 f が $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 2$ を満たすならば、f は $\overline{\mathbb{D}}$ まで連続に拡張することができ、像領域は *Jordan* 領域か、または帯領域の *Möbius* 変換による像（この場合 S_f は $2/(1-z^2)$ を *Möbius* 変換で *2* 次微分として引き戻したものになっており、形が具体的に分かる）になっている。さらに、任意の $\zeta \in \mathbb{T} - f^{-1}(\infty)$ に対して

$$|f(r\zeta) - f(\zeta)| = O(\delta_{f(\mathbb{D})}(f(r\zeta))^{1/2}) \quad (r \to 1)$$

となっている。

ここで帯領域というのは、平行な 2 直線で囲まれた領域のことである。そのような領域への等角写像は例えば、$f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ などがある。

この定理からこのような帯領域への写像はやや特殊なものであり、それ以外は全て Jordan 領域になると主張しているわけだが、Chuaqui-Osgood [29] は Poincaré 計量のより精密な評価を行うことにより、帯領域への写像を除いては実際に Ahlfors-Weill 拡張がそのまま $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} = 2$ の場合にも使えることを証明している。

なお、Nehari の定理 (定理 4.1.5) は 2 という数字をそれ以上良く出来ないという意味で最良の結果である。

補題 4.1.11 (Hille [57]) ε を正定数として函数 $f_\varepsilon(z) = [(1+z)/(1-z)]^{i\varepsilon}$ とすると、これは $\mathbb{D}$ 上では単射ではなく、$\|S_{f_\varepsilon}\|_{2,\mathbb{D}} = 2(1+\varepsilon^2)$ である。

この最良性については Nehari 自身も次のような一般的な結果を得ている。

定理 4.1.12 (Nehari [82]) $F : [0,1) \to \mathbb{R}$ を *2* 回連続的微分可能な函数で $F' > 0, F''(0) = 0$ を満たしているとする。また、$S_F(t)(1-t^2)^2$ は非増加函数であるとする。この時、単位円板上の非定数有理型函数 f が

$$|S_f(z)| \leq S_F(|z|), \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たすならば、f は $\mathbb{D}$ 上で単葉である。

さらに、F がもともと $\mathbb{D}$ 上で正則な函数で $[0,1)$ 上では $S_F > 0$ となり、しかも $|S_F(z)| \leq S_F(|z|)$ が成り立つものとする。また、$\lim_{|z|\to 1} F(|z|) = \infty$ であるとすれば、単位円板上の正則函数 G で区間 $(-1,1)$ 上では $G > 0$ であるようなものについて任意の $\varepsilon > 0$ に対して条件

$$|S_f(z)| \leq S_F(|z|) + \varepsilon G(|z|)$$

は f の単位円板での単葉性を保証しない。（つまり、単葉でないこの条件を満たす f が常に存在する。）

さらに、Nehari はこのような函数の例として次のようなものを紹介している。

$$F(t) = \int_0^t \frac{ds}{(1-s^2)^{\mu+1}}, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{(1+s^2)^{\mu}}{(1-s^2)^{\mu+1}} ds, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

また、この定理の後半に関連して Chuaqui [25] は $F(1) < \infty$ となる場合について考察し、非常に興味深い結果を得ている。

さらに、次の結果は $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 2$ を満たす函数のクラスの歪曲定理あるいは増大度定理として sharp な結果であり非常に興味深い。まず記号を用意しておくことにしよう。単位円板上の函数の族を

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+z)^{\sqrt{2}} - (1-z)^{\sqrt{2}}}{(1+z)^{\sqrt{2}} + (1-z)^{\sqrt{2}}}, \quad N(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \tag{4.1.11}$$

また、$0 \leq t < 1$ に対して

$$A_t(z) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{(1+z)^{\sqrt{1-t}} - (1-z)^{\sqrt{1-t}}}{(1+z)^{\sqrt{1-t}} + (1-z)^{\sqrt{1-t}}} \tag{4.1.12}$$

と定めることにする。これらについては

$$S_n(z) = \frac{-2}{(1-z^2)^2}, \quad S_N(z) = \frac{2}{(1-z^2)^2}, \tag{4.1.13}$$

$$S_{A_t}(z) = \frac{2t}{(1-z^2)^2} \tag{4.1.14}$$

がなりたつので、特に $\|S_n\|_{2,\mathbb{D}} = \|S_N\|_{2,\mathbb{D}} = 2, \|S_{A_t}\|_{2,\mathbb{D}} = 2t$ であることが分かる。$A_t(-1 < t < 0)$ についても $S_{A_{-t}} = -S_{A_t}$ を満たすように正規化されたものを考える。

定理 4.1.13 (Chuaqui-Osgood [28]) f を単位円板上正則な函数で $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$ と正規化されているものとする。この時、次のことが成り立つ。

(1)　$\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 2$ ならば、次の式が成り立つ。

$$n(|z|) \leq |f(z)| \leq N(|z|), \quad n'(|z|) \leq |f'(z)| \leq N'(|z|) \tag{4.1.15}$$

(2)　$\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 2t$ ならば、次の式が成り立つ。

$$A_{-t}(|z|) \leq |f(z)| \leq A_t(|z|), \quad {A_{-t}}'(|z|) \leq |f'(z)| \leq {A_t}'(|z|) \tag{4.1.16}$$

また、これらのいずれかで原点以外で等号が成立した場合、同じになったその函数に回転の差を除いては一致してしまう。

その他、この Nehari の単葉性条件、あるいは関連して微分方程式 (4.1.2) の零点分布に関する結果については、例えば [36], [32], [97], [64], [18], [13], [52] などを参照せよ。

4.2　Becker, Epstein の単葉性条件とその一般化

前節では Schwarz 微分 S_f に関連する単葉性定理について見てきたが、同様に T_f についても単葉性定理が成り立つ。最初にそれを注意したのは恐らく Duren-Shapiro-Shields [33] であろう。彼らはそこで次の補題を示し Nehari の定理に持ち込むことにより $\|T_f\|_{1,\mathbb{D}} \leq 2(\sqrt{5}-2) = 0.472\ldots$ ならば f が単位円板上で単葉であることを示した。

補題 4.2.1 ([33]) 任意の単位円板上の正則函数 φ に対して $\|\varphi'\|_{2,\mathbb{D}} \leq 4\|\varphi\|_{1,\mathbb{D}}$ が成り立つ。従って、特に $\|S_f\|_{2,\mathbb{D}} \leq 4\|T_f\|_{1,\mathbb{D}} + \frac{1}{2}\|T_f\|_{1,\mathbb{D}}^2$ が得られる。

証明は Cauchy の積分公式から容易に従うが、ここでは省略する。

この T_f に関する単葉性定理は Becker により次のように改良された。

定理 4.2.2 (Becker [11]) 単位円板上の非定数正則函数 f が $\|T_f\|_{1,\mathbb{D}} \leq 1$ を満たすならば、実は f は単葉である。

注意 4.2.3 オリジナルの論文ではより強い形の「$|zf''(z)/f'(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \Rightarrow f$ は単葉」という主張だが、ここでは話の流れからこのようなやや弱い形で述べた。

この定数“ 1 ”が最良であるかどうか長い間未解決であったが、Becker-Pommerenke [12] により最良であることが証明された。しかも、この場合は常に $f(\mathbb{D})$ は Jordan 領域になることがやはり [12] において証明されている。

Becker の定理は Löwner の方法を用いて証明されたが、後に Epstein [34], [35] がこの Becker の定理と Nehari の定理を含むような単葉性定理を、これまでとは全く違って、双曲幾何学を使う方法により証明した。

定理 4.2.4 (Epstein) f を単位円板上で局所単葉な有理型函数とする。ある実数値函数 $\sigma \in C^5(\mathbb{D})$ と定数 $k \in [0,1)$ が存在して任意の $z \in \mathbb{D}$ について

$$\left|\frac{(1-|z|^2)^2[\sigma_{zz}(z)-\sigma_z(z)^2-\frac{1}{2}S_f(z)]-2\bar{z}(1-|z|^2)\sigma_z(z)}{1+(1-|z|^2)^2\sigma_{z\bar{z}}(z)}\right| \leq k \tag{4.2.1}$$

が成り立つとする。ただし、ここでさらにある $k_1 \in [0,1)$ が存在して

$$1+(1-|z|^2)^2\sigma_{z\bar{z}}(z) > 0 \tag{4.2.2}$$

$$|\sigma_z(z)|(1-|z|^2) \leq k_1 \max\left\{|z|, \frac{1}{2|z|}\right\} \tag{4.2.3}$$

であるとする。この時 f は単位円板 $\mathbb{D}$ 上で単葉でありさらに $\widehat{\mathbb{C}}$ の $\frac{1+k}{1-k}$-擬等角写像に拡張できる。

これでは、どのように Nehari の定理や Becker の定理が含まれるのかよく分からないが、Pommerenke が局所単葉な有理型函数 g に対して $\sigma = \mathrm{Re}\,\log g'$ を採用すればよいことを指摘したそうで、実際これを代入してみると次の系を得る。

系 4.2.5 単位円板上の非定数有理型函数 f に対してある単位円板上の局所単葉有理型函数 g と定数 $k \in [0,1)$ が存在して

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2[S_f(z)-S_g(z)]+\bar{z}(1-|z|^2)\frac{g''}{g'}(z)\right| \leq k \tag{4.2.4}$$

が成り立ち、さらに φ は条件

$$\left|z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right|(1-|z|^2) \leq k_1 \max\left\{2|z|^2, 1\right\} \tag{4.2.5}$$

を満たすものとする。このとき f は単葉でありさらに $\widehat{\mathbb{C}}$ の $\frac{1+k}{1-k}$-擬等角写像に拡張出来る。

この系において、例えば $g(z) \equiv z$ に取れば、Ahlfors-Weill,Nehari の定理を得る。一方、$f = g$ に取れば今度は Becker の定理が得られる。ここで両方の場合も条件 (4.2.5) は満足されていることに注意しておこう。

この定理が得られてすぐに Pommerenke は Löwner の方法によりこの系の証明を函数論的に行った。また、その際に実はこの補助的な条件 (4.2.5) は不要であることも示した。さらにその後、Anderson-Hinkkanen [7] は Ahlfors-Weill の方法のように、直接擬等角拡張を構成することにより定理 4.2.4 を示した。さらに、その際 σ についての仮定を $\sigma \in C^2(\mathbb{D})$ でさらに複素数値まで許すというように非常に弱くした。

ここでは Pommerenke による Löwner の方法を用いた証明（(4.2.5) は仮定しない）を紹介しておこう。

[Proof] まず g の条件は affine 変換で不変だから $g(z) = z + \cdots$ と仮定してよい。さらに f は Möbius 変換を後から合成しても条件は不変だから $f(z) = g(z) + O(z^3)$ と仮定してよい。これより特に $f'(z)/g'(z) = 1 + O(z^2)$ であることが分かる。さて、そこで $z = 0$ の近傍で正則な函数 u, v を

$$v(z) = \sqrt{g'(z)/f'(z)} = 1 + \beta z^2 + \cdots, \tag{4.2.6}$$

$$u(z) = f(z)v(z) = z + \alpha z^2 + \cdots \tag{4.2.7}$$

により定める。さらに $t \in [0, \infty)$ に対して

$$f_t(z) = \frac{u(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zu'(e^{-t}z)}{v(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zv'(e^{-t}z)} = \frac{e^t z + (2 - e^{-2t})\alpha z^2 + \cdots}{1 + (2 - e^{-2t})\beta z^2 + \cdots} \tag{4.2.8}$$

とおく。これは有理型函数となるが、その形からある正定数 r_0, K_0 があって

$$|f_t(z)| \leq K_0 e^t, \quad \forall |z| < r_0, t \in [0, \infty)$$

が成り立つことが分かる。また $f_t(z) = e^t z + \cdots$ と展開できる。さて、そこで $f_t' = \partial f_t/\partial z, \dot{f}_t = \partial f_t/\partial t$ とおいて計算すると、

$$\begin{aligned} q_t := \frac{\dot{f}_t - zf_t'}{\dot{f}_t + zf_t'} &= \frac{e^{-t}\delta z(u''v - v''u) + \delta^2 z^2(u''v' - v''u')}{u'v - v'u} \\ &= \frac{1}{2}\delta^2 z^2[S_g(e^{-t}z) - S_f(e^{-t}z)] - \delta e^{-t}z\frac{g''(e^{-t}z)}{g'(e^{-t}z)} \end{aligned}$$

であることが分かる。ただし、ここに $\delta = 1 - e^{-2t}$ とおいた。よって、ここで条件式 (4.2.4) から

$$|q_t(z)| \leq \max_{s \in \mathbb{T}} |q_t(s)| \leq k < 1$$

であることが分かる。よって $p_t = \dot{f}_t/zf_t'$ とおけば $p_t = \frac{1+q_t}{1-q_t}$ だからこれより Re $p_t > 0$ であることが分かる。よって、f_t は Löwner 鎖である。$f = u/v = f_0$ だから f は $\mathbb{D}$ 上単葉で、これにて定理が証明された。 □

この Epstein の定理に関してはさらに Chuaqui が [26] においてより一般的な形で示している。他に、東欧圏の研究者が数多くの一般化を行っているが、ほとんどが Löwner の方法を用いており、方法論的にはあまり際だったものは見当たらないように思える。

なお、Epstein の他にも Schwarz 微分の高次元への一般化、あるいは Nehari の定理の高次元版などは何人かの研究者が研究を進めている。例えば、[87], [88], [27], [24], [20] などを参照のこと。特に Carne [20] は高次元 Möbius 変換を Clifford 環を用いて表現することにより、非常にクリアな形で Schwarz 微分を高次元の場合に一般化しており興味深い。

4.3 Ahlforsの単葉性条件

この節では Ahlfors [3] による Ahlfors-Weill, Becker の定理の一般化を紹介したい。証明は非常に示唆に富むものであり、このような擬等角拡張をどのように与えるべきかを具体的に教えてくれる。

定理 4.3.1 (Ahlfors) 単位円板上の正則函数が次の $(i), (ii)$ の条件のうちいずれかを満たせば、f は単葉で $\widehat{\mathbb{C}}$ への $\frac{1+k}{1-k}$-擬等角拡張を持つ。

(i) ある定数 c で $|c| \le k$ を満たすものがあって、次の式が成り立つ。

$$\left| z\frac{f''}{f'}(1-|z|^2) + c|z|^2 \right| \le k \tag{4.3.1}$$

(ii) ある定数 c で $|c-1| \le k$ を満たすものがあって、次の式が成り立つ。

$$\left| \frac{1}{2}S_f(z)(1-|z|^2)^2 - c(1-c)\bar{z}^2 \right| \le k|c| \tag{4.3.2}$$

[Proof] まず、最初は f が単位円板の閉包の近傍で正則だとしよう。この時拡張を

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \le 1 \\ g(1/\bar{z}), & |z| \ge 1 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

のような形で与えるとする。g は十分滑らかだとして擬等角性の要請 $|F_{\bar{z}}/F_z| \le k$ の他にもさらに局所同相でなければならないので、各点では Jacobian が 0 になってはいけない。境界においても C^1 で貼り合う必要はないが、ここでの局所同相性を確保するために、g の方も境界まで込めて Jacobian が消えないという要請をすべきである。また、g は無限遠も値として取らなければいけないはずなので、その辺も留意すべきであろう。従って、g の満たすべき条件は以下の通りである。（なお、条件 (B) はもちろんほとんど全ての点で成り立てば良いのだが、以下にはそれはいちいち書かないことにする。）

(A) $\mathbb{T}$ 上では $g = f$,

(B) $|g_z| \le k|g_{\bar{z}}|$,

(C) $g(z) \ne \infty$ ならば $g_{\bar{z}}(z) \ne 0$ $(z \in \overline{\mathbb{D}})$,

(D) $g(z) = \infty$ ならば $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(1/g)(z) = -(g_z/g^2)(z) \ne 0$ $(z \in \overline{\mathbb{D}})$.

g は f と境界で滑らかにつながないといけないので、$g = f + u$ の形に書いてみる。するとこれらの条件は次のように置き代わる。

(A') $\mathbb{T}$ 上では $u = 0$,

(B') $|f' + u_z| \le k|u_{\bar{z}}|$,

(C') $u(z) \ne \infty$ ならば $u_{\bar{z}}(z) \ne 0$, (D')　$u(z)=\infty$ ならば $\frac{\partial}{\partial\bar z}(1/u)(z)=-(u_z/u^2)(z)\neq 0.$

(D') の条件を見やすくするために今度は $u=f'/\sigma$ と置いてみる。するとこれらの条件はさらに次のような形に変わる。

(A")　$\mathbb{T}$ の近傍で $1/\sigma$ は滑らかで $\mathbb{T}$ 上でこの値が 0 になる、

(B")　$|\sigma f''/f'+\sigma^2-\sigma_z|\leq k|\sigma_{\bar z}|,$

(C")　$\sigma(z)\neq 0$ ならば $(\sigma_{\bar z}/\sigma^2)(z)\neq 0,$

(D")　$\sigma(z)=0$ ならば $\sigma_{\bar z}(z)\neq 0.$

さらに今度は $\sigma=v-f''/2f'$ と置いてみる。すると今度は各条件は直接にではないが次のように変換される。

(A"')　$\mathbb{T}$ の近傍で $1/v$ は滑らかで $\mathbb{T}$ 上でこの値が 0 になる、

(B"')　$|\frac{1}{2}S_f+v^2-v_z|\leq k|v_{\bar z}|,$

(C"')　$v(z)\neq 0$ ならば $v_{\bar z}/v^2\neq 0,$

(D"')　$v(z)=0$ ならば $v_{\bar z}\neq 0.$

後は具体的に $\sigma=(c+1)\bar z(1-|z|^2)^{-1}\quad(c\neq -1)$, そして $v=c\bar z(1-|z|^2)^{-1}\quad(c\neq 0)$ を取ればこれらの条件が満足されることは容易にチェック出来るであろう。さらに、条件 (B"), (B"') に対応する条件が、それぞれ (i), (ii) となることも計算により容易に分かる。ただ、これだけではどうして定数 c に制限が必要なのかはまだ明確ではない。実は、まだ f が $\mathbb{D}$ の閉包において正則としている仮定を弱める必要があったことを思い出そう。

以上の議論を一般の場合にも適用するためには、よくやるように $r\in(0,1)$ に対して函数 $f_r(z)=f(rz)$ を考えてこれを上記のように拡張して後は $r\to 1$ としてやることを考える。ただし、この際に擬等角性を保証する条件が $f\mapsto f_r$ の変換で保たれることを言う必要がある。

例えば、まず函数 f が条件 (i) を満足していたとすると、f_r は条件

$$\left|rz\frac{f''}{f'}(rz)+\frac{cr^2|z|^2}{1-r^2|z|^2}\right|\leq\frac{k}{1-r^2|z|^2}\tag{4.3.4}$$

を満足することになる。一方、${f_r}''/{f_r}'(z)=r(f''/f')(rz)$ であることに注意すれば、f_r が満たすべき条件 (i) は

$$\left|rz\frac{f''}{f'}(rz)+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leq\frac{k}{1-|z|^2}\tag{4.3.5}$$

と同値になる。ここで等式

$$\frac{|z|^2}{1-|z|^2}-\frac{r^2|z|^2}{1-r^2|z|^2}=\frac{1}{1-|z|^2}-\frac{1}{1-r^2|z|^2}$$

に注意すれば、$|c|\leq k$ の条件の下で (4.3.5) から (4.3.4) が従うことはすぐに分かる。よって、近似の議論がうまく回転して擬等角拡張性が示されることになる。（あとは Ahlfors-Weill の

定理の証明と同様にすればよい。） 条件 (ii) についても同様である。この場合は不等式

$$\left|\frac{\bar{z}^2}{(1-|z|^2)^2}-\frac{r^4\bar{z}^2}{(1-r^2|z|^2)^2}\right|\leq\frac{1}{(1-|z|^2)}-\frac{1}{(1-r^2|z|^2)^2}$$

を用いればよい。 □

これらの結果についてもさらに補足的な研究が続けられており、例えば Anderson-Hinkkanen [8] はこの結果を半平面の場合に読み直して新しい結果を与えており、さらに Harmelin [50] はその極限の場合を証明している。また、さらに Tan [99] はこれらの結果をより一般の形にしている。

4.4 単葉性内半径・外半径

最後に平面領域 D についてその単葉性内半径・外半径というものを定義しよう。これは Lehto らによって調べられ始めたもので、総括的なことは Lehto の教科書 [70] に詳しい。まず次の量を定義しておこう。

定義 4.4.1 D を双曲的平面領域とする。この時次のように領域定数を定める。

$$\begin{aligned}\delta(D)&=\|S_g\|_{2,\mathbb{D}}\\ \sigma_O(D)&=\sup\{\|S_f\|_{2,\mathbb{D}};f\ \text{は}\ D\ \text{上単葉}\ \}\\ \sigma_I(D)&=\sup\{a;\|S_f\|_{2,\mathbb{D}}\leq a\Rightarrow f\ \text{は}\ D\ \text{上単葉}\ \}\end{aligned}$$

ここに $g:\mathbb{D}\to D$ は普遍被覆写像とする。$\sigma_O(D),\sigma_I(D)$ をそれぞれ領域 D の単射性外半径・内半径と呼ぶことにする。

ここで $\delta(D)$ は g の取り方によらないことに注意せよ。（また、同様に T_f についても全く同様の定義が可能である。）本書でこれまで述べてきたことをある程度まとめてみると次のようになる。

命題 4.4.2 D が円板または半平面の場合は、$\delta(D)=0,\sigma_O(D)=6,\sigma_I(D)=2$ である。また、D が単連結領域の場合は $\delta(D)\leq 6$ が成り立つ。さらに $\sigma_I(D)>0$ であるための必要十分条件は D が擬円板であることである。

ここで $\delta(D)$ と $\sigma_O(D)$ には次のような関係があることが分かっている。従って、どちらか一方の情報が得られればもう一方も自動的に分かることになる。

命題 4.4.3 (Lehto [69]) 任意の双曲的単連結領域 D について $\sigma_O(D)=\delta(D)+6$.

さて、ここからはある特殊な領域の族についてどの程度のことが分かるか述べていくことにしよう。

(1) 凸領域 D については $\delta(D) \le 2$ である。(Paatero [90], Nehari [81], Lehto [69])

(2) K-擬円板については $\delta(D) \le 6\frac{K^2-1}{K^2+1}$ である。(Lehto [70])

(3) $f \in A$ が有界境界回転 (bounded boundary rotation)$\le k\pi \quad (0 \le k \le 4)$ とする、つまり $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\,\{1+zf''(z)/f'(z)\}|d\theta \le k\pi$ とすると、$\delta(f(\mathbb{D})) \le \frac{2k+4}{6-k}$ である。(Lehto-Tammi [71])

(4) $f \in A$ が α-近接凸領域 $(0 \le \alpha \le 2)$ とする。すなわち、ある凸函数 g が存在して $|\arg(f'/g')| \le \alpha\pi/2$ が成り立つとする。（$\alpha \le 1$ の時が 3 章で定義した通常の近接凸函数である。）この時

$$\delta(f(\mathbb{D})) = \begin{cases} 2+4\alpha, & \alpha \le 1 \\ 2\alpha^2+4\alpha, & \alpha \ge 1 \end{cases}$$

が成り立つ。(Koepf [64])

(5) $f \in A$ が α-強星状とする $(0 \le \alpha \le 1)$。すなわち、$|\arg(zf'/f)| \le \alpha\pi/2$ とする。この時、$\delta(f(\mathbb{D})) \le 6\sin(\alpha\pi/2)$ が成り立つ。(Chiang [22])

(6) $f \in A$ が α-凸函数とする。つまり、$\mathrm{Re}\,(1+zf''/f') \ge \alpha$ が成り立つとする $(0 \le \alpha \le 1)$。この時、

$$\delta(f(\mathbb{D})) \le \begin{cases} 2, & 0 \le \alpha \le 1/2 \\ 8\alpha(1-\alpha) & 1/2 \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

が成り立つ。(吹田 [98])

なお、これらの結果は（少なくとも (5) を除いては）いずれも最良の評価である。なお、関連する話題については Chiang [23] も参照のこと。

$\delta(D)$ は、ある意味で単位円板からどの程度その領域が離れているかを測る一つの量であると考えられる。そこで一般に 2 つの単連結領域 D_1, D_2 が与えられた時に等角写像 $f : D_1 \to D_2$ が存在することはリーマンの写像定理から分かることであるが、この Schwarz 微分のノルムを測ることによって領域同士の距離を測ることが出来ると期待される。きちんと定義すると、

$$\delta(D_1, D_2) = \inf_{f:D_1\to D_2} \|S_f\|_{2,D_1}$$

によって δ を定めることにする。ただし、ここに inf は D_1 から D_2 への等角写像全てにわたって取るものとする。ここで等角写像 f については $\|S_f\|_{2,D_1} = \|S_{f^{-1}}\|_{2,D_2}$ が成り立つことに注意しておく。すると、δ が三角不等式を満たすことも容易に分かるから、これより少なくとも δ は平面の単連結領域全体（を Möbius 同値類で割ったもの）の上に擬距離を定めることは分かる。これが距離になるか？という問題を Lehto が [70] の中で提出していたが、これは Osgood-Stowe [86] によって否定的に解決された。

今度は単射性内半径について考えてみよう。まず、$\sigma_I(D)$ については次のような上からの評価があることは分かっている。

命題 4.4.4 (Lehto [69]) D を単連結領域とすると、$\sigma_I(D) \leq \min\{2, 6 - \delta(D)\}$.

しかし、この内半径を下から評価するのは一般的に非常に難しい。特殊な領域についてはある程度計算されているので紹介しておこう。

(1) （無限セクター）開き角 $k\pi \quad (0 < k \leq 2)$ の無限扇形 D_k とすれば、$\sigma_I(D_k) = 2k(1 - |1 - k|)$ である。(Lehtinen [66], Lehto [70])

(2)（三角形）T をユークリッド三角形とし、最小の角度を $k\pi$ とすれば、$\sigma_I(T) = 2k^2, \sigma_I(T^*) = 4k - 2k^2$ である。ただし、ここに T^* は外部を表す。(Lehtinen [68])

(3)（正多角形）P_n をユークリッド正 n 角形とすると、$\sigma_I(P_n) = 2(\frac{n-2}{n})^2, \sigma_I(P_n^*) = 2 - 8/n^2$ である。(Calvis [19], Lehtinen [68])

(4) （楕円の外部）$0 < r \leq 1$ として $E_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; (rx)^2 + y^2 < 1\}$ を楕円とする。この時、

$$\frac{16}{\pi}\arctan q - \frac{32}{\pi^2}(\arctan q)^2 \leq \sigma_I(E_r^*) \leq \frac{16}{\pi}\arctan r - \frac{32}{\pi^2}(\arctan r)^2$$

が成り立つ。ただしここに $q = r(2 - r^2)^{-1/2}$ とする。(Lehtinen [67])

(5) （双曲線の外部）$G_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x < 0$ または $(cx)^2 - y^2 < 1\}$ とする。ただしここに $c > 0$ とする。これに対して

$$\sigma_I(G_c) = \frac{8}{\pi}\arctan c - \frac{8}{\pi^2}(\arctan c)^2, \quad \sigma_I(G_c^*) = \frac{8}{\pi^2}(\arctan c)^2$$

が成り立つ。(Lehtinen [67])

なお、これらの中で最も基本的な結果は (1) であり、この評価を元に他の評価が導き出せることも多い。また、この結果は例えば Hinkkanen-Rossi [58] によって無限セクターにおける整函数 φ に対する方程式 $2y'' + \varphi y = 0$ の零点分布に関する情報を引き出すのに用いられている。

以上のような結果は多重連結領域になるとほとんど知られていないと言ってよい。多重連結領域については例えば、Gehring [37] や Osgood [85] などの結果があるくらいである。例えば、有限連結の場合は $\sigma_I(D) > 0$ であるための必要十分条件は各境界成分が擬円周または 1 点のみからなることなどが分かっている。しかし、具体的な評価になるとほとんど何も分かっていないのが現状である。例えば、円環領域についてすら筆者は結果を知らない。

なお、多重連結領域について $\delta(D) < \infty$ になるための必要十分条件は Pommerenke によって非常に深く研究されている。これは一様完全 (uniformly perfect) という概念で特徴づけられることが分かっているが、これについては Pommerenke [93], [94] などを見て頂きたい。

また、当初詳しく述べる予定であった Teichmüller 空間と Schwarz 微分の関係についてほとんど述べることが出来なかった。詳細については例えば Lehto [70] などをご覧になって頂きたい。また、T_f でも上記と同様の領域定数が定義出来るが、これについては Schwarz 微分ほど詳しく研究されていないようである。これについては、例えば Astala-Gehring [9] などを参照して頂きたい。

関連図書

[1] Ahlfors, L. V. Quasiconformal reflections, *Acta Math.*, **109** (1963), 291–301.

[2] Ahlfors, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings*, van Nostrand (1966).

[3] Ahlfors, L. V. Sufficient condition for quasiconformal extension, Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, Vol. 79, Princeton, N.J. (1974), Princeton Univ. Press.

[4] Ahlfors, L. V. and Bers, L. Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math. (2)*, **72** (1960), 385–404.

[5] Ahlfors, L. V. and Weill, G. A uniqueness theorem for Beltrami equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 975–978.

[6] Alexander, J. W. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. of Math.*, **17** (1915), 12–22.

[7] Anderson, J. M. and Hinkanen, A. Univalence criteria and quasiconformal extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **324** (1991), 823–842.

[8] Anderson, J. M. and Hinkkanen, A. A univalency criterion, *Michigan Math. J.*, **32** (1985), 33–40.

[9] Astala, K. and Gehring, F. W. Injectivity, the *BMO* norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.

[10] Avhadiev, F. G. and Aksent'ev, L. A. Fundamental results on sufficient conditions for the univalence of analytic functions (Russian), *Uspehi Mat. Nauk*, **30**, 4 (184) (1975), 3–60, English translation in Russian Math. Surveys **30** (1975), 1–64.

[11] Becker, J. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, *J. Reine Angew. Math.*, **255** (1972), 23–43.

[12] Becker, J. and Pommerenke, C. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete, *J. Reine Angew. Math.*, **354** (1984), 74–94.

[13] Beesack, P. R. and Schwarz, B. On the zeros of solutions of second-order linear differential equations, *Can. J. Math.*, **8** (1956), 504–515.

[14] Belov, A. S. A problem of Salem and Zygmund on the smoothness of an analytic function that generates a Peano curve, *Math. USSR Sbornik*, **70** (1990), 485–497.

[15] Bernardi, S. D. *Bibliography of Schlicht Functions, 3 vols.*, Mariner Publishing Co., 10927 North Dale Mabry, Tampa, FL. 33618 (1983).

[16] Beurling, A. and Ahlfors, L. V. The boundary correspondence for quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **96** (1956), 125–142.

[17] Brickman, L. Φ-like analytic functions. I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 555–558.

[18] Čadek, M. Oscillatory properties of second order linear differential equations in the complex domain, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **30** (1989), 17–21.

[19] Calvis, D. The inner radius of univalence of normal circular triangles and regular polygons, *Complex Variables Theory Appl.*, **4** (1985), 295–304.

[20] Carne, K. The Schwarzian derivative for conformal maps, *J. Reine Angew. Math.*, **408** (1990), 10–33.

[21] Casey, S. D. The inclusion of classical families in the closure of the universal Teichmüller space, *Michigan Math. J.*, **39** (1992), 189–199.

[22] Chiang, Y. M. *Schwarzian derivative and second order differential equations*, PhD thesis, University of London (1991).

[23] Chiang, Y. M. Some remarks on Lehto's domain constant, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **17** (1992), 285–293.

[24] Chuaqui, M. The Schwarzian derivative and quasiconformal reflections on S^n, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **17** (1992), 315–326.

[25] Chuaqui, M. On a theorem of Nehari and quasidiscs, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **18** (1993), 117–124.

[26] Chuaqui, M. A unified approach to univalence criteria in the unit disc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 441–453.

[27] Chuaqui, M. and Osgood, B. The Schwarzian derivative and conformally natural quasiconformal extensions from one to two to three dimensions, *Math. Ann.*, **292** (1992), 267–280.

[28] Chuaqui, M. and Osgood, B. Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative, *J. London Math. Soc.*, **48** (1993), 289–298.

[29] Chuaqui, M. and Osgood, B. Ahlfors-Weill extensions of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric, *Comment. Math. Helv.*, **69** (1994), 659–668.

[30] Douady, A. and Earle, C. J. Conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle, *Acta Math.*, **157** (1986), 23–48.

[31] Duren, P. L. *Univalent Functions*, Springer-Verlag (1983).

[32] Duren, P. L. and Lehto, O. Schwarzian derivatives and homeomorphic extensions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **477** (1970), 1–11.

[33] Duren, P. L., Shapiro, H. S. and Shields, A. L. Singular measures and domains not of Smirnov type, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 247–254.

[34] Epstein, C. L. The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections, *J. Reine Angew. Math.*, **372** (1986), 96–135.

[35] Epstein, C. L. Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space, *J. Reine Angew. Math.*, **380** (1987), 196–214.

[36] Essén, M. and Keogh, F. R. The Schwarzian derivative and estimates of functions analytic in the unit disc, *Math. Proc. Phil. Soc.*, **78** (1975), 501–511.

[37] Gehring, F. W. Univalent functions and the Schwarzian derivative, *Comment. Math. Helv.*, **52** (1977), 561–572.

[38] Gehring, F. W. *Characteristic Properties of Quasidisks*, Les Presses de l'Université de Montréal (1982).

[39] Gehring, F. W. Injectivity of local quasi-isometries, *Comment. Math. Helv.*, **57** (1982), 202–220.

[40] Gehring, F. W. Uniform domains and the ubiquitous quasidisk, *Jahresbericht Deutsche. Math. Ver.*, **89** (1987), 88–103.

[41] Gehring, F. W. and Osgood, B. G. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, *J. Analyse Math.*, **36** (1979), 50–74.

[42] Gehring, F. W. and Palka, B. P. Quasiconformally homogeneous domains, *J. Analyse Math.*, **30** (1976), 172–199.

[43] Gehring, F. W. and Pommerenke, C. On the Nehari univalence criterion and quasicircles, *Comment. Math. Helv.*, **1984** (59), 226–242.

[44] Gol'dstein, V. M. and Vodop'janov, S. K. Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasi conformes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **290** (1980), 453–456.

[45] Goodman, A. W. *Univalent Functions, 2 vols.*, Mariner Publishing Co. Inc. (1983).

[46] 後藤泰宏 一般領域上の2次元 BMO 空間, Topics in Complex Analysis (1991).

[47] Gotoh, Y. On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO, *J. Math. Kyoto Univ.*, **35** (1995), 299–324.

[48] Hahn, K. T. Some remarks on a new pseudo-differential metric, *Ann. Polon. Math.*, **39** (1981), 71–81.

[49] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. Some properties of fractional integrals II, *Math. Zeit.*, **34** (1932), 403–439.

[50] Harmelin, R. A univalency criterion, *Complex Variables Theory Appl.*, **10** (1988), 327–331.

[51] Hengartner, W. and Schober, G. On schlicht mappings to domains convex in one direction, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 303–314.

[52] Herold, H. Nichteuklidscher Nullstellenabstand der Lösungen von $w'' + p(z)w = 0$, *Math. Ann.*, **287** (1990), 637–642.

[53] Herron, D. A. and Koskela, P. Uniform, Sobolev extension and quasiconformal circle domains, *J. Analyse Math.*, **57** (1991), 172–202.

[54] Herron, D. A. and Koskela, P. Uniform and Sobolev extension domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **114** (1992), 483–489.

[55] Herron, D. A. and Koskela, P. Locally uniform domains and quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **20** (1995), 187–206.

[56] Herzog, F. and Piranian, G. On the univalence of functions whose derivative have a positive real part, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 625–633.

[57] Hille, E. Remarks on a paper by Zeev Nehari, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 552–553.

[58] Hinkkanen, A. and Rossi, J. Schwarzian derivatives and zeros of solutions to second order linear differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113** (1991), 741–746.

[59] 今吉洋一, 谷口雅彦 タイヒミュラー空間論, 日本評論社 (1989).

[60] Jones, P. W. Extension theorems for *BMO*, *Indiana Univ. Math. J.*, **29** (1980), 41–66.

[61] Jones, P. W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, *Acta Math.*, **147** (1981), 71–88.

[62] Kaplan, W. Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, **1** (1952), 169–185.

[63] Kas'yanyuk, S. A. On the method of structural formulae and the principle of conformity of boundaries in conformal mappings (Ukrainian), *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* (1959), 14–17, (Math. Review **21** #572).

[64] Koepf, W. Close-to-convex functions, univalence criteria and quasiconformal extensions, *Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska*, **40** (1986), 97–103.

[65] Kraus, W. Über den Zusamenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **21** (1932), 1–28.

[66] Lehtinen, M. On the inner radius of univalency for non-circular domains, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **5** (1980), 45–47.

[67] Lehtinen, M. Estimates of the inner radius of univalency of domains bounded by conic sections, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **10** (1985), 349–353.

[68] Lehtinen, M. Angles and the inner radius of univalency, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **11** (1986), 161–165.

[69] Lehto, O. Domain constants associated with Schwarzian derivative, *Comment. Math. Helv.*, **52** (1977), 603–610.

[70] LEHTO, O. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag (1987).

[71] LEHTO, O. and TAMMI, O. Schwarzian derivative in domains of bounded boundary rotation, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4** (1978/79), 253–257.

[72] LEHTO, O. and VIRTANEN, K. I. *Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd Ed.*, Springer-Verlag (1973).

[73] LEWANDOWSKI, Z. Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I, *Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska*, **12** (1958), 131–145.

[74] LEWANDOWSKI, Z. Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II, *Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska*, **14** (1960), 19–46.

[75] MARKUSHEVICH, A. I. *Theory of Functions of a Complex Variable (Translated by R. A. Silverman), 3 vols.*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965–68).

[76] MARTIO, O. and SARVAS, J. Injectivity theorems in plane and space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4** (1978/79), 383–401.

[77] MINDA, D. The Hahn metric on Riemann surfaces, *Kodai Math. J.*, **6** (1983), 57–69.

[78] NÄKKI, R. and PALKA, B. Lipschitz conditions, b-arcwise connectedness and conformal mappings, *J. Analyse Math.*, **42** (1983), 38–50.

[79] NEHARI, Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 545–551.

[80] NEHARI, Z. Some criteria of univalence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 700–704.

[81] NEHARI, Z. A property of convex conformal maps, *J. Analyse Math.*, **30** (1976), 390–393.

[82] NEHARI, Z. Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative, *Illinois J. Math.*, **23** (1979), 345–351.

[83] NEWMAN, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press (1939).

[84] NOSHIRO, K. On the theory of schlicht functions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, **2** (1934–35), 129–155.

[85] Osgood, B. G. Univalence criteria in multiply-connected domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260** (1980), 459–473.

[86] Osgood, B. and Stowe, D. The Schwarzian distance between domains: A question of O. Lehto, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **12** (1987), 313–318.

[87] Osgood, B. and Stowe, D. A generalization of Nehari's univalence criterion, *Comment. Math. Helv.*, **65** (1990), 234–242.

[88] Osgood, B. and Stowe, D. The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian maniforlds, *Duke Math. J.*, **67** (1992), 57–99.

[89] Ozaki, S. Some remarks on the univalency and multivalency of functions, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sec. A 2*, **31-32** (1934), 41–55.

[90] Paatero, V. Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränker Drehung sind, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math.-Phys.*, **XXXIII:9** (1931), 1–79.

[91] Pokornyi, V. V. On some sufficient conditions for schlichtness (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **79** (1951), 743–746.

[92] Pommerenke, C. *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).

[93] Pommerenke, C. Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, *Arch. Math.*, **32** (1979), 192–199.

[94] Pommerenke, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.

[95] Pommerenke, C. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag (1992).

[96] Salem, R. and Zygmund, A. Lacunary power series and Peano curves, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 569–578.

[97] Steinmetz, N. Homeomorphic extension of univalent functions, *Complex Variables Theory Appl.*, **6** (1986), 1–9.

[98] Suita, N. Schwarzian derivatives of convex functions, preprint.

[99] Tan, D. Quasiconformal extension and univalency criteria, *Michigan Math. J.*, **39** (1992), 163–172.

[100] Tims, S. R. A theorem on functions schlicht in convex domains, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 200–205.

[101] 辻正次 複素函数論, 槇書店 (1968).

[102] Warschawski, S. E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 310–340.

[103] G. C. Wen(聞國椿) *Conformal Mappings and Boundary Value Problems (translation)*, American Mathematical Society (1992).

[104] 吉田正章 Schwarz プログラム, 数学, **40** (1988), 36–46.

[105] Zinsmeister, M. *Domaines de Lavrentiev*, Publications Math., Orsay (1985).

[106] Zygmund, A. Smooth functions, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 47–76.