Wiman–Valiron理論と複素力学系

Topics in Complex Analysis 1993 (Special issue)

Acknowledgements

この小冊子は，複素平面上の値分布理論と複素力学系の研究についてまとめたものです．1950 年代から始まった I. N. Baker の仕事と Wiman–Valiron 理論を基本にすえた W. Bergweiler と A. Eremenko の 1980 年代後半から 1990 年代初頭にかけての研究を紹介いたしました．実際には，1994 年 1 月に行われました複素力学系のワークショップをきっかけに講演者の何人かが出筆にあたりました．

作成に当たり多くの先生方にご協力いただきましたが，タイプミス，記号の不統一などの改善すべき箇所が残ってしまいましたことをおわび申し上げます．ご意見，ご質問等ございましたら承りたく思います．

最後に出筆の機会を与えて下さいました谷口雅彦先生，大竹博巳先生，およびワークショップ幹事の先生方，また作成にあたりまして多くのご助言をいただきました新濃清志先生，中西敏浩先生，斎藤四郎先生，小中澤聖二先生他多数の先生方，加えてタイプの際にご助力下さいました井之上和代さんに心より感謝申し上げます．

なお，本小冊子出版にあたりましては，平成 5 年度科学研究費補助金 (一般研究 (C)「周期写像の代数的および超越的性質の研究」代表者: 志賀　弘典　先生) からの補助を受けました．

監修
柳原　二郎　(千葉大　理)

著者
藤解　和也　(金沢大　工)
澤田　一成　(東京理大)
石川　昌樹　(京都大　理)
鈴木　麻美　(帝京技術科学大)
柳　香代子　(千葉大　理)
石崎　克也　(東京工高専)

Contents

Chapter 1

Wiman–Valiron theory

1.1. Maximum term and central index

$f(z)$ を超越的整函数とし，その Taylor 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1.1}$$

とする．与えられた任意の $r > 0$ に対して，$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0 \tag{1.1.2}$$

である．よって，その *maximum term* $|a_m| r^m = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n$ が存在する．この値を

$$\mu(r) := \mu(r, f) := \max_{n\geq 0} |a_n| r^n \tag{1.1.3}$$

と書くこととする．(1.1.2) より，maximum term は無限個存在しないので，*central index* $\nu(r) = \nu(r, f)$ を $\mu(r)$ を与える最大の整数として定義する．即ち

$$\nu(r) := \nu(r, f) := \max\{m \mid |a_m| r^m = \mu(r)\}. \tag{1.1.4}$$

これらの定義より，一般に

$$|a_n| r^n \leq \mu(r) \quad \text{for all } n \geq 0, \tag{1.1.5}$$

$$|a_n| r^n < \mu(r) \quad \text{for all } n > \nu(r) \tag{1.1.6}$$

が成立する．Maximum modulus は通常の定義 $M(r, f) := \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$ とし，以下 Jank and Volkmann [1] に基づいて $\mu(r)$, $\nu(r)$ の性質，また $M(r, f)$ との関係について述べていくことにする．

Proposition 1.1.1.

(a) $\mu(r)$ は十分大きな r に対して狭義単調増加で，$\mu(r) \to \infty$ *as* $r \to \infty$.
(b) $\nu(r)$ は単調増加で，$\nu(r) \to \infty$ *as* $r \to \infty$.

Proof of Proposition 1.1.1. (a) $f(z)$ は定数ではないので，ある r_0 があって，$\nu(r_0) \geq 1$. $R > r \geq r_0$ とすると

$$\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} < |a_{\nu(r)}| R^{\nu(r)} \leq |a_{\nu(R)}| R^{\nu(R)} = \mu(R).$$

これは，$r \geq r_0$ に対し $\mu(r)$ は狭義単調増加であることを示している．

(1.1.5) より，任意の n に対して，$n \log r + \log |a_n| \leq \log \mu(r)$．よって，

$$n \leq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log \mu(r)}{\log r}, \quad \text{for all } n \tag{1.1.7}$$

$f(z)$ は超越的なので，$n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log \mu(r)}{\log r} = \infty \tag{1.1.8}$$

これは，$\mu(r) \to \infty$ as $r \to \infty$ を示している．

(b) (1.1.4) より，任意の r, R に対して

$$|a_{\nu(r)} r^{\nu(r)}| \geq |a_{\nu(R)}| r^{\nu(R)},$$
$$|a_{\nu(R)} R^{\nu(R)}| \geq |a_{\nu(r)}| R^{\nu(r)}$$

よって

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu(R)} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^{\nu(r)}.$$

これは，$R > r$ ならば $\nu(R) \geq \nu(r)$ （$\nu(r)$ は増加）であることを示している．

(1.1.2) より，ある $K > 0$ があって全ての n に対して，$|a_n| \leq K$ である．(1.1.3) より

$$\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} \leq K r^{\nu(r)}.$$

よって

$$\frac{\log \mu(r)}{\log r} \leq \nu(r) + \frac{\log K}{\log r}.$$

ゆえに，(1.1.8) より $\lim_{r\to\infty} \nu(r) = \infty$ を得る． □

Proposition 1.1.2.

(a) $\nu(r)$ は右側連続である．
(b) $\mu(r)$ は連続である．

Proof of Proposition 1.1.2. (a) 任意に r_0 をとる．$\nu(r)$ は整数値函数であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $r_0 < r < r_0 + \varepsilon$ なる r に対して $\nu(r) \equiv \nu(r_0)$ となることを示せばよい．簡単のため $\nu(r_0) = n$ とおく． (1.1.6) より

$$|a_j| r_0^j < |a_n| r_0^n \quad \text{for all } j > n. \tag{1.1.9}$$

(1.1.2) より，即ち $\lim_{j\to\infty} |a_j| r^j = 0$ より，ある $\delta_1 > 0$ と $j_0 > n$ があって

$$|a_n| r_0^n - |a_j| r_0^j \geq \delta_1 \quad \text{for all } j \geq j_0. \tag{1.1.10}$$

一方

$$\max_{n<j\le j_0-1}(|a_n|r_0^n-|a_j|r_0^j)=\delta_2 \tag{1.1.11}$$

とおくと (1.1.9) より，$\delta_2>0$ ととれる．$\delta=\frac{1}{2}\min(\delta_1,\delta_2)>0$ とおけば，(1.1.10) と (1.1.11) より

$$|a_n|r_0^n-|a_j|r_0^j\ge 2\delta \quad \text{for all } j>n. \tag{1.1.12}$$

再び (1.1.2) より，任意の $\varepsilon_1>0$ に対して $\lim_{j\to\infty}|a_j|(r_0+\varepsilon_1)^j=0$. よって，ある $j_1>n$ があって $r_0<r<r_0+\varepsilon_1$ なる全ての r に対して

$$|a_j|r^j\le |a_j|(r_0+\varepsilon_1)^j<\delta \quad \text{for all } j\ge j_1. \tag{1.1.13}$$

ゆえに，(1.1.12), (1.1.13) より

$$|a_n|r^n-|a_j|r^j\ge |a_n|r_0^n-\delta>\delta \quad \text{for all } j\ge j_1. \tag{1.1.14}$$

$|a_j|r^j$ は r について連続なので $j=n+1,\,n+2,\,\dots,\,j_1-1$ に対して $\varepsilon<\varepsilon_1$ を小さくとれば，$r_0<r<r_0+\varepsilon$ に対して

$$|a_j|r^j-|a_j|r_0^j<\delta \tag{1.1.15}$$

とできる． (1.1.13) とあわせて (1.1.15) は $j>n$ に対して成立することが分かる．(1.1.12) と (1.1.15) より $r_0<r<r_0+\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}|a_n|r^n-|a_j|r^j&\ge |a_n|r_0^n-|a_j|r_0^j+|a_j|r_0^j-|a_j|r^j\\&\ge 2\delta-\delta=\delta \qquad \text{for all } j>n\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

が成立する．これは，$j>n$ なる整数は $\nu(r)$ となりえないことを示している．即ち，$n=\nu(r_0)\ge\nu(r)$. $\nu(r)$ は増加であるから，$r_0<r<r_0+\varepsilon$ なる r に対し $\nu(r)\equiv\nu(r_0)$ である．

(b) (a) の証明の中で使用した記号はそのまま用いることにする． $\mu(r)$ は狭義単調増加であるから，$0<r_0<r<r_0+\varepsilon$ なる r に対して

$$\begin{aligned}0\le\mu(r)-\mu(r_0)&=|a_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}-|a_{\nu(r_0)}|r_0^{\nu(r_0)}\\&=|a_{\nu(r_0)}|(r_0^n-r^n).\end{aligned}$$

$\lim_{r\to r_0}(r_0^n-r^n)=0$ なので $\mu(r)$ は右側連続である．

以下，左側連続であることを示す．$|a_n|r^n\le\mu(r)$ なので

$$\liminf_{r\to r_0}|a_n|r^n\le\liminf_{r\to r_0}\mu(r)\le\limsup_{r\to r_0}\mu(r). \tag{1.1.17}$$

$r < r_0$ とれば $\mu(r) \le \mu(r_0)$ であるから，$\limsup_{r\to r_0}\mu(r) \le \mu(r_0)$．また，$\liminf_{r\to r_0}|a_n|r^n = |a_n|r_0^n = \mu(r_0)$ であるから，(1.1.17) とあわせて，$\lim_{r\to r_0}\mu(r) = \mu(r_0)$ を得る．□

次に，Fuchs [1] によって別の角度から maximum modulus と central index を考察してみることにする．$f(z)$ の展開 (1.1.1) の係数 a_n に基づいて座標軸上に

$$P_n := (n, -\log|a_n|), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

を取って，集合 $\mathcal{P} = \{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対する largest convex minorant $y = g_0(x)$ を考える．曲線 $y = g_0(x)$ は区分的には直線で凸曲線で $\mathcal{P}$ の点をコーナーにする．

$$\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}\log|a_n|) = \infty$$

であるから $y = g_0(x)$ の傾きは減少することはない（実際には ∞ に発散する）．曲線 $y = g_0(x)$ のことを *associated curve* と言うことにする．異なった整函数で同じ associated curve を持つことは勿論有り得る．これらの中で最大の係数を持つ整函数として

$$F_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-g_0(n)}z^n$$

が定義できる．収束については容易に示される．

$$|a_n| \le e^{-g_0(n)}, \tag{1.1.18}$$

$$M(r,f) \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{-g_0(n)}r^n = M(r,F_0). \tag{1.1.19}$$

associathed curve から maximum term と central index が幾何的な考察から見つけることが出来る．$r = e^t$ と置くと

$$\log|a_n|r^n = nt + \log|a_n|$$

は $P_n = (n, -\log|a_n|)$ を通る傾き t の直線の y 切片の原点からの距離である．よって

$$\log\mu(r,f) = \sup_n(nt + \log|a_n|)$$

は傾き t の associated curve への support line の y 切片で与えられることが分かる．central index は support line 上の $\mathcal{P}$ の点 P の最大 x 座標を与えるものとして得られる．定義より

$$\log\mu(r,f) = \log\mu(r,F_0) = \sup_{x>0}(xt - g_0(x)) \tag{1.1.20}$$

であり $f(z)$ と F_0 は同じ central index を持つ．

構成上の困難さを避けるため $g_0(x)$ の代わりに $g(x)$ を以下の条件を満たすものとして定義する:

(1.1.21) $$g(x) \in C^2(0,\infty),$$

(1.1.22) $$g''(x) > 0, \qquad x > 0,$$

(1.1.23) $$g(x) - g_0(x) \to 0, \quad \text{as } x \to \infty,$$

(1.1.24) $$|g(x) - g_0(x)| < 1, \qquad x > 0.$$

これらの条件を満たす $g(x)$ が存在することは容易に示される.

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-g(n)z^n}$$

と置くと (1.1.23) から

$$\mu(r,f) \sim \mu(r,F_0), \quad r \to \infty$$

また，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな x に対して

$$\frac{1}{1+\varepsilon} e^{-g(x)} < e^{-g(x)} < (1+\varepsilon)e^{-g(x)}.$$

よって，十分大きな x_0 に対して

(1.1.25) $$M(r,F_0) < (1+\varepsilon)M(r,F) + O(r^{x_0})$$

$F(z)$ は超越的なので

$$r^{x_0} = o(M(r,F)), \quad \text{as } r \to \infty$$

故に，(1.1.25) より十分大きな r に対して

$$M(r,F_0) < (1+\varepsilon)M(r,F).$$

1.2. Order of growth

整函数 $f(z)$ の maximum modulus を

(1.2.1) $$M(r) := M(r,f) := \max_{|z|=r} |f(z)|$$

とし，$f(z)$ の上位数，下位数をそれぞれ

(1.2.2) $$\overline{\sigma}(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \quad \underline{\sigma}(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

で定義する. ($\overline{\sigma}(f)$ を単に位数 (Order) とし $\sigma(f)$ と書くことにする）.

Proposition 1.2.1.

(a)　任意の $r > 0$ に対して

$$\mu(r) \leq M(r), \tag{1.2.3}$$

(b)　任意の $0 < r < R$ に対して

$$M(r) \leq \mu(r)\left(\nu(R) + \frac{R}{R-r}\right). \tag{1.2.4}$$

Proof of Proposition 1.2.1. (a) Cauchy の積分公式から

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

上式より，直ちに (1.2.3) を得る．

(b) $0 < r < R$ とする．

$$M(r) \leq \max_{|z|=r}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\nu(R)-1}|a_n|r^n + \sum_{n=\nu(R)}^{\infty}|a_n|r^n. \tag{1.2.5}$$

(1.2.5) 右辺の第一項については

$$\sum_{n=0}^{\nu(R)-1}|a_n|r^n \leq \mu(r)\nu(R), \tag{1.2.6}$$

第二項については

$$\begin{aligned}\sum_{n=\nu(R)}^{\infty}|a_n|r^n &\leq \sum_{n=\nu(R)}^{\infty}|a_n|r^n\frac{|a_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}}{|a_{\nu(R)}|r^{\nu(R)}}\frac{R^{n+\nu(R)}}{R^{n+\nu(R)}} \\ &\leq \mu(r)\sum_{n=\nu(R)}^{\infty}\frac{|a_n|R^n}{|a_{\nu(R)}|R^{\nu(R)}}\frac{R^{\nu(R)}r^n}{R^n r^{\nu(R)}} \\ &\leq \mu(r)\sum_{n=\nu(R)}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-\nu(R)} \\ &\leq \mu(r)\frac{R}{R-r}\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

(1.2.5)–(1.2.7) より，(1.2.4) を得る．　□

THEOREM 1.2.2. $f(z)$ を整函数でその上位数，下位数をそれぞれ $\overline{\sigma}$, $\underline{\sigma}$ とする．

$$\overline{\rho}_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log\mu(r)}{\log r}, \quad \overline{\rho}_2 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\nu(r)}{\log r}, \tag{1.2.8}$$

$$\underline{\rho}_1 = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log\mu(r)}{\log r}, \quad \underline{\rho}_2 = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\nu(r)}{\log r} \tag{1.2.9}$$

とすると

$$\overline{\sigma} = \overline{\rho}_1 = \overline{\rho}_2, \tag{1.2.10}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\rho}_1 = \underline{\rho}_2. \tag{1.2.11}$$

PROOF OF THEOREM 1.2.2. $f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ が多項式ならば，ある r_0 があって，$r > r_0$ に対して

$$\mu(r) = |a_n| r^n, \quad \nu(r) = n$$

であるから，$\overline{\sigma} = \overline{\rho}_1 = \overline{\rho}_2 = 0$, $\underline{\sigma} = \underline{\rho}_1 = \underline{\rho}_2 = 0$.

$f(z)$ が超越的とする． $\lim_{r\to\infty} |a_n| = 0$ であるから，十分大きな任意の r に対して

$$\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} \leq r^{\nu(r)}. \tag{1.2.12}$$

ゆえに，$\overline{\rho}_1 \leq \overline{\rho}_2$, $\underline{\rho}_1 \leq \underline{\rho}_2$. $0 < r < R$ なる任意の r, R に対して

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu(r)} = \frac{|a_{\nu(r)}| R^{\nu(r)}}{|a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}} \leq \frac{\mu(R)}{\mu(r)}$$

それゆえ，十分大きな r に対して

$$\nu(r) \log \frac{R}{r} \leq \log\mu(R) - \log\mu(r) \leq \log\mu(R).$$

$R = 2r$ とおくことで，

$$\overline{\rho}_2 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\nu(r)}{\log r}(1 + o(1)) \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log\mu(2r)}{\log 2r(1 - o(1))} = \overline{\rho}_1$$

同様に，$\underline{\rho}_2 \leq \underline{\rho}_1$ を得る． よって，$\overline{\rho}_1 = \overline{\rho}_2$, $\underline{\rho}_1 = \underline{\rho}_2$. 簡単のため，前者の値を $\overline{\rho}$, 後者の値を $\underline{\rho}$ と書くことにする．

Proposition 1.2.1 (a) より，$\overline{\rho} \leq \overline{\sigma}$, $\underline{\rho} \leq \underline{\sigma}$ は明かである．

$\overline{\sigma} \leq \overline{\rho}$ を示す． $\overline{\rho} = \infty$ のときは証明することはない． $\overline{\rho} < \infty$ とする．Proposition 1.2.1 (b) より，$\varepsilon > 0$ に対して，ある r_0 があって $r > r_0$ に対して

$$M(r) \leq \mu(r)((2r)^{\overline{\rho}+\varepsilon} + 2) \leq \mu(r) r^{\overline{\rho}+2\varepsilon} \tag{1.2.13}$$

ゆえに，(1.2.13) より $\overline{\sigma} \leq \overline{\rho}$.

最後に $\underline{\sigma} \leq \underline{\rho}$ を示す． $\underline{\rho} = \infty$ のときは証明することはない． $\underline{\rho} < \infty$ とする． 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，無限に多くの R_n, $R_n \to \infty$ as $n \to \infty$ があって

$$\nu(R_n) \leq R_n^{\underline{\rho}+\varepsilon}. \tag{1.2.14}$$

(1.2.12) より

$$\mu(R_n) \leq R_n^{R_n^{\underline{\rho}+\varepsilon}}.$$

Proposition 1.2.1 (b) より，十分大きな $r_n = R_n/2$ に対して

$$M(r_n) \leq \mu(R_n)(\nu(R_n)+2) \leq R_n^{R_n^{\underline{\rho}+\varepsilon}}(R_n^{\underline{\rho}+\varepsilon}+2) \leq R_n^{R_n^{\underline{\rho}+2\varepsilon}} \leq r_n^{r_n^{\underline{\rho}+3\varepsilon}}$$

よって

$$\underline{\sigma} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\log M(r_n)}{\log r_n} \leq \underline{\rho} + 3\varepsilon.$$

ε の任意性から $\underline{\sigma} \leq \underline{\rho}$. □

区間 $[0, \infty)$ で定義された函数 $\varphi(r)$, $\psi(r)$ に対して

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} = 1$$

が成り立つとき

$$\varphi(r) \sim \psi(r)$$

と書くことにする．

Theorem 1.2.3. 整函数 $f(z)$ は位数有限とする．このとき

$$\log M(r) \sim \log \mu(r). \tag{1.2.15}$$

Proof of Theorem 1.2.3. $f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ が多項式ならば，ある r_0 があって，$r > r_0$ に対して $\mu(r) = |a_n| r^n$, $M(r) = |a_n| r^n (1 + o(1))$ である．よって

$$\log \mu(r) \sim n \log r \sim \log M(r).$$

$f(z)$ が超越的とする． (1.2.13) より，ある $K > 0$ が存在して

$$\mu(r) \leq M(r) \leq \mu(r) r^K$$

よって，(1.1.8) より

$$1 \leq \frac{\log M(r)}{\log \mu(r)} \leq 1 + K \frac{\log r}{\log \mu(r)} \leq 1 + o(1).$$

□

Nevanlinna の特性函数を $T(r,f)$ とする． 超越整函数 $f(z)$ と $f'(z)$ の増大の関係として

$$T(r,f') \le T(r,f) + o(\log r + \log T(r,f)), \quad r \notin E, \tag{1.2.16}$$

$$M(r,f) \le rM(r,f')(1+o(1)), \tag{1.2.17}$$

$$T(r,f) \le \log M(r,f) \le \frac{R+r}{R-r} T(R,f), \quad 0 < r < R, \tag{1.2.18}$$

ここで，E は測度有限な除外区間． (1.2.18) より

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

であり，(1.2.16)–(1.2.18) より

$$\sigma(f) = \sigma(f') \tag{1.2.19}$$

を得るが，位数有限な函数についてより詳しい評価を紹介する．

Theorem 1.2.4. 超越整函数 $f(z)$ が位数有限とする．このとき

$$\log \mu(r,f) \sim \log \mu(r,f'), \qquad \log M(r,f) \sim \log M(r,f'). \tag{1.2.20}$$

Proof of Theorem 1.2.4. Theorem 1.2.3 と (1.2.19) より後式を示せば，前式は示される． Theorem 1.2.3 と (1.1.8) より，任意の超越整函数 $g(z)$ に対して $\lim_{r\to\infty} \log r / M(r,g) = 0$ である． よって，(1.2.17) より

$$\frac{\log M(r,f)}{\log M(r,f')} \le 1 + \frac{\log r}{\log M(r,f')} = 1 + o(1). \tag{1.2.21}$$

$\sigma = \sigma(f) = \sigma(f')$ とおくと (1.2.13) および Theorem 1.2.3 より $\varepsilon > 0$ に対して r を十分大きくとれば

$$M(r,f') \le \mu(r,f') r^{\sigma+\varepsilon}, \qquad \nu(r,f') \le r^{\sigma+\varepsilon}. \tag{1.2.22}$$

$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ であるから

$$\mu(r,f') = (\nu(r,f')+1)|a_{\nu(r,f')+1}| r^{\nu(r,f')} \le (\nu(r,f')+1)\frac{\mu(r)}{r}. \tag{1.2.23}$$

(1.2.3), (1.2.22), (1.2.23) より，十分大きな r に対して

$$M(r,f') \le (1+o(1)) M(r,f) r^{2\sigma-1+\varepsilon}.$$

ゆえに

$$\frac{\log M(r,f')}{\log M(r,f)} \le 1 + (2\sigma - 1 + \varepsilon)\frac{\log r}{\log M(r,f)} = 1 + o(1). \tag{1.2.24}$$

(1.2.21), (1.2.24) より定理は証明された． □

1.3. Behavior near point where its maximum modulus is attained I

この節では Hayman [5], 特に Fuchs [1] に基づいて Maximum modulus を与える点の近くでの振る舞いを考察することにする．

$g(x)$ は (1.1.21)–(1.1.24) で定義された函数とし $v(x) = -g(x) + tx$ で定義する．このとき

$$v'(x) = -g'(x) + t, \qquad v''(x) = -g''(x) < 0$$

であるから $v(x)$ は最大値 $x = \nu(t)$ まで増加し，その後単調に減少する．そこで $v(t)$ は単調増加な函数として以下で定義される

$$g'(\nu(t)) = t. \tag{1.3.1}$$

この $\nu(t)$ が実際の $\nu_0(t) := \nu(t, f)$[1] とあまり違わないことは後で示される (Theorem 1.3.5)．$\nu(t)$ についての評価をしていくが，実際の結果は測度有限な除外区間に含まれない t に関して得られるものが多い．先ず除外区間を取り扱うためのいくつかの補題を準備する．記号として集合 A の測度 $\displaystyle\int_A dt$ を $m(A)$ で，対数測度 $\displaystyle\int_A \frac{1}{t} dt$ を $Lm(A)$ で表すことにする．

Theorem 1.3.1. $f(z)$ は超越的整函数とし

$$|f(z_0)| \ge \frac{1}{2} M(|z_0|, f),$$
$$|z - z_0| < r\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad |z_0| = r > 0$$

とすれば

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\nu} f(z_0)(1 + o(1)), \quad as\ r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{1.3.2}$$

本節では，この定理を証明することを問題意識の一つとする．準備として，暫く 1.1 節で与えられた $\nu(r, f)$, $\mu(r, f)$ について更に細かい評価を考えていくことにする (Fuchs [1, pp. 266–274])．

Lemma 1.3.2. A を実軸上の区間 I の和集合とする．I は開区間，閉区間，半開区間のいづれであってもよいが一点ではないとする．どの互いに交わらない I 達の和集合の測度も K を越えないならば，A は測度が $(2 + \varepsilon)K$ よりちいさい開区間に含まれる，ここで $\varepsilon > 0$ は任意の定数である．

Proof of Lemma 1.3.2. 先ず，全ての I が開区間である場合を考える．$m(A) > 2K$ と仮定して矛盾を導く．この仮定に基で，ある compact 集合 F があって $F \supset A$,

[1] 以降，$\nu_0(t) := \nu(t, f)$ で前節で与えられた定義による central index を表すものとする．実際には本節で述べる Theorem 1.3.1, 1.3.10 は $\nu_0(t)$ に関しても成立するが，複雑さを回避するため本小冊子での証明は $\nu(t)$ についてのものを紹介することにとどめた．詳しくは Hayman [5], Varilon [1] を参照されたい．

$m(F) > 2K$ とできる．Heine–Borel の被覆定理から I 達の中から有限個の区間 I_1, $I_2, \ldots, I_m$ があって $F \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$. どの I_j, $j = 1, \ldots, m$ も他の I_k, $k = 1, \ldots, m$, $k \neq j$ には含まれないとして一般性は失われることはなく，更に $I_j = (r_j, R_j)$, $r_1 < r_2 < r_3, \ldots$ と書いてよい．

$\rho \in I_2$, $\rho \notin I_j$, $j \neq 2$ なる ρ があるから $R_1 \leq \rho \leq r_3$ であり，これは I_1 と I_3 は交わらないことを意味する．同様の議論から偶数番どうしの I_j は交わることがなく，奇数番どうしも交わらない．よって

$$2K < m(F) \leq \sum_{j \text{ odd}} m(I_j) + \sum_{j \text{ even}} m(I_j) \leq 2K$$

これは矛盾である．

次に，いくつかの I が開区間でない場合を考える．このときは $I' \supset I$, $m(I') < (1+\varepsilon)I$ なる I' で置き換えて，前半の証明の中で K を $(1+\varepsilon)K$ で置き換えて $A' := \bigcup I'(\supset A)$ に対して同様の議論を行えばよい． □

Lemma 1.3.3. $a > 0$, $\delta > 0$ とし E を

$$t' - t \leq (\nu(t') - \nu(t))K(\nu(t')) \tag{1.3.3}$$

を満たす区間 $[t, t']$, $0 < t < t'$ の和集合とする，ここで

$$K(x) = \frac{a}{x\log(x+3)(\log\log(x+3))^{1+\delta}}. \tag{1.3.4}$$

このとき，$m(E) < \infty$ である．

Proof of Lemma 1.3.3. $\{[t_k, t'_k]\}$ を (1.3.3) を満たす互いに交わらない区間の集まりとする．$\nu(t)$ は増加関数であるから $[\nu(t), \nu(t')]$ 達も互いに交わらない．故に

$$\sum_k (t'_k - t_k) < \sum_k (\nu(t'_k) - \nu(t_k))K(\nu(t')) < 1 + \int_1^\infty K(x)dx =: A(a, \delta) < \infty.$$

よって，Lemma 1.3.2 より直ちに示される． □

Proposition 1.3.4. $\nu(t)$ は (1.3.1) で定義されるものとし

$$u(k, r) := e^{-g(k)} r^k = e^{-g(k)+tk}, \quad r = e^t$$

ここで，$k > 0$, k は整数である必要はない．更に

$$h(x) = \frac{b}{x\log(x+3)(\log\log(x+3))^{1+\delta}}, \quad b,\ \delta > 0 \tag{1.3.5}$$

とすれば

$$\frac{u(k, r)}{u(\nu(t), r)} < e^{-\frac{1}{2}(k-\nu(t))^2 h(\nu(t))}, \quad 0 \leq k \leq 2\nu(t), \quad r \notin E. \tag{1.3.6}$$

ここで，E は $Lm(E) < \infty$ なる除外区間.

Proof of Proposition 1.3.4. E を Lemma 1.3.3 で定義された除外区間とする．$m(E) < \infty$ なので $\log r = t \in E$ なる r の集合は対数測度有限である．$t \notin E$ とすれば

$$s - t > (\nu(s) - \nu(t))K(\nu(t)), \quad s > t, \tag{1.3.7}$$

$$t - s > (\nu(t) - \nu(s))K(\nu(s)), \quad s < t. \tag{1.3.8}$$

$\nu(s) = w$ と置けば，$\nu(t)$ は増加関数なので $s > t$ のとき $w = \nu(s) > \nu(t)$ で，(1.3.7) と (1.3.1) より

$$g'(w) - t > (w - \nu(t))K(w), \quad w > \nu(t). \tag{1.3.9}$$

$\nu(t) \le w \le 2\nu(t)$ なる w に対しては適当な $c = c(\delta)$, $0 < c < 1$ があって

$$K(w) > cK(\nu(t)). \tag{1.3.10}$$

それゆえ，(1.3.9), (1.3.10) より

$$g'(w) - t > (w - \nu(t))cK(w), \quad \nu(t) < w \le 2\nu(t). \tag{1.3.11}$$

(1.3.11) の両辺を w について $\nu(t)$ から k, $\nu(t) < k \le 2\nu(t)$ まで積分すれば

(1.3.12)

$$\begin{aligned} -\log u(k, r) + \log u(\nu(t), r) >& \frac{1}{2}c(k - \nu(t))^2 K(\nu(t)), \\ & \nu(t) < k \le 2\nu(t). \end{aligned}$$

同様に，(1.3.8) と (1.3.1) より

$$t - g'(w) > (\nu(t) - w)K(\nu(t)), \quad 0 \le w < \nu(t).$$

上式の両辺を k, $0 \le k < \nu(t)$ から $\nu(t)$ まで積分して

$$\log u(k, r) - \log u(\nu(t), r) > \frac{1}{2}(\nu(t) - k)^2 K(\nu(t)), \quad 0 \le k < \nu(t). \tag{1.3.13}$$

(1.3.4) で $a = b/c$ となるようにとれば，(1.3.12) と (1.3.13) より定理は証明される．□

$f(z)$ を固定したとき，実際の除外区間 E は b, δ に依存して決まるが，ここでの議論では余り重要ではない．以下，必要が生じない限り除外区間は登場するごとに記号として区別せず E で代表することにする．

Theorem 1.3.5. 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して

$$|\nu_0(r,f) - \nu(t)| < \varepsilon h(\nu(t))^{-\frac{1}{2}}, \quad r = e^t, \quad r \notin E. \tag{1.3.14}$$

Proof of Theorem 1.3.5. $f(z)$ の展開の一般項の係数について (1.1.24) より，$r = e^t$ として

$$|a_n| r^n \le e^{-g_0(n)+tn} \le e^{-g(n)+tn+1} \tag{1.3.15}$$

であり，また十分大きな n に対しては (1.1.23) より

$$|a_n| r^n \le e^{-g_0(n)+tn} \le e^{-g(n)+tn+o(1)}. \tag{1.3.16}$$

$r \notin E$ として，以下簡単のために $\nu := \nu(t)$, $h := h(\nu(t))$ と書くことにする．注意しておくべき事として，h の定義より明らかに $\nu \to \infty$ のとき $h \to 0$ である．

$f(z)$ と $F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-g_0(n)} z^n$ の maximum term と central index は等しいので，定理の証明は

$$e^{-g_0(n)+tn} < \mu(r, F_0) = \mu(r, f), \quad |n - \nu| > \varepsilon h^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.3.17}$$

が示されればよい．

先ず，(1.1.) と $\nu = \nu(t)$ の定義から $\mu(r,f)$ に関して

(1.3.18)
$$\begin{aligned}\log u(\nu, r) &= \sup_{x>0}(-g(x) + tx) = \sup_{x>0}(-g_0(x) + tx + o(1)) \\ &= \log \mu(r,f) + o(1), \quad r \to \infty, \quad r \notin E.\end{aligned}$$

次に，$u(n,r)$ を評価することを考える．Proposition 1.3.4 より

$$u(n,r) = e^{-g(n)+tn} < u(\nu, r) e^{-\frac{1}{2}(n-\nu)^2 h}, \quad 0 \le n \le 2\nu. \tag{1.3.19}$$

$u(n,r)$ の $n > 2\nu$ における評価を求めることにする．この区間では $-g'(x) + t$ は減少関数であるから，$b = ca$ であることを考慮すれば (1.3.9), (1.3.10) より

$$-g'(x) + t < -g'(2\nu) + t < -\nu K(2\nu) < -\nu c K(\nu) = -\nu h, \quad x > 2\nu.$$

2ν から n まで積分して $\alpha := \nu h$ と置くと

$$-g(n) + tn < -g(2\nu) + 2t\nu - \alpha(n - 2\nu). \tag{1.3.20}$$

(1.3.19) で $n = 2\nu$ とすれば

$$u(2\nu, r) < u(\nu, r) e^{-\frac{1}{2}\nu^2 h}. \tag{1.3.21}$$

(1.3.20), (1.3.21) より

(1.3.22) $$u(n,r) < u(2\nu,r)e^{-\alpha(n-2\nu)} < u(\nu,r)e^{-\frac{1}{2}\nu^2 h-\alpha(n-2\nu)}, \quad n > 2\nu.$$

$0 \le n \le 2\nu$ と $n \ge 2\nu$ のときに分けて (1.3.17) を示す．注意しておくべきこととして $\nu(t)$ は増加函数であるから $n \to \infty \Rightarrow \nu \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty \Leftrightarrow r \to \infty$ である．

$0 \le n \le 2\nu$ の場合: $|n-\nu| > \varepsilon h^{-\frac{1}{2}}$ ならば，(3.1.19) より

$$e^{-g_0(n)+tn} \le e^{-g(n)+tn+o(1)} < u(\nu,r)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2+o(1)}, \quad \text{as } r \to \infty,\ r \notin E.$$

よって (1.3.18) より

(1.3.23)
$$-g_0(n) + tn \le \log u(\nu,r) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(1) = \log\mu(r,f) - \frac{1}{2}\varepsilon + o(1), \quad \text{as } r \to \infty,\ r \notin E.$$

$n \ge 2\nu$ の場合: (1.3.22) より $u(n,r) < u(\nu,r)e^{-\frac{1}{2}\nu^2 h}$．$\nu$ と h の定義より $r \to \infty$ のとき $\nu^2 h \to \infty$ なので，十分大きな r に対しては $\nu^2 h > \varepsilon^2$ としてよい．よって (1.3.23) を得る．故に (1.3.23) より (1.3.17) が示される． □

Theorem 1.3.6. *ν, h は Theorem 1.3.5 の中で定義されるものとし*

(1.3.24) $$|z| = re^s = e^{t+s}, \qquad |s| < h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

とし，k は $0 \le k \le \nu$ なる整数とする．このとき，$r \notin E$ に対して

(1.3.25)
$$D = \left| f^{(l)}(z) - \sum_{|n-\nu|<k} n(n-1)\cdots(n-l+1)a_n z^{n-l} \right| < A2^l\nu^l\mu(r,f)e^{s\nu}e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k}h^{-\frac{1}{2}}|z|^{-l}, \quad l = 0,\ 1,\ \ldots$$

が成り立つ，ここで A はある定数である．

Proof of Theorem 1.3.6. $u(n,r)$ の定義より

(1.3.26)
$$|z|^l D < \sum_{|n-\nu|\ge k} n^l|a_n|e^{t+s} < \sum_{|n-\nu|\ge k} n^l e^{-g(n)+(t+s)n+1} = e\sum_{|n-\nu|\ge k} n^l u(n,r)e^{sn}$$

(1.3.26) の $|n-\nu| \ge k$ にわたる和を $n > 2\nu$ と $k \le |n-\nu| \le \nu$ の分けて評価する．先ず，前者に関して (1.3.22) と (1.3.18) から十分大きな r に対して

(1.3.27) $$e\sum_{n>2\nu} n^l u(n,r)e^{sn} < 3\mu(r,f)e^{-\frac{1}{2}h\nu^2+2\alpha\nu}\sum_{n=2\nu}^{\infty} n^l e^{-(\alpha-s)n}.$$

(1.3.24) と ν, h の定義から，$x > 2\nu$ と十分大きな r に対して

$$\frac{l}{x} - (\alpha - s) < \frac{l}{2\nu} + h^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - \nu h < 0$$

であるから

$$\frac{d}{dx}(x^l e^{-(\alpha-s)x}) = x^l e^{-(\alpha-s)x}\left(\frac{l}{x} - (\alpha - s)\right) < 0.$$

任意の正値単調減少関数 $\varphi(x)$ に対して

$$\sum_{n>a} \varphi(n) < \varphi(a) + \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

が成り立つことを考慮すれば，十分大きな r に対して

$$\sum_{n>2\nu} n^l e^{-(\alpha-s)n} < (2\nu)^l e^{-(\alpha-s)2\nu} + \int_{2\nu}^\infty x^l e^{-(\alpha-s)x}dx; \tag{1.3.28}$$

(1.3.29)

$$\begin{aligned} I = \int_{2\nu}^\infty x^l e^{-(\alpha-s)x} &< \frac{(2\nu)^l e^{-(\alpha-s)\nu}}{\alpha - s} + \frac{l}{\alpha - s}\int_{2\nu}^\infty x^{l-1} e^{-(\alpha-s)x}dx \\ &< \frac{(2\nu)^l e^{-(\alpha-s)\nu}}{\alpha - s} + \frac{l}{2(\alpha - s)\nu} I \\ &< \frac{(2\nu)^l e^{-(\alpha-s)\nu}}{\alpha - s} + \frac{1}{2} I \end{aligned}$$

十分大きな r に対して $-\frac{1}{2}h\nu^2 + s\nu < 0$ であるから，(1.3.27)–(1.3.29) より

(1.3.30)

$$\begin{aligned} e\sum_{n>2\nu} n^l u(n,r)e^{sn} &< A_1(2\nu)^l \mu(r,f)e^{s\nu}e^{-\frac{1}{2}h\nu^2+s\nu} \\ &< A_1(2\nu)^l \mu(r,f)e^{s\nu}e^{-\frac{1}{2}hk^2+sk}, \\ &\quad 0 \le k \le \nu \end{aligned}$$

次に，$k \le |n-\nu| \le \nu$ の和の部分について考える．(1.3.19) と (1.3.18) より

$$e\sum_{k\le|n-\nu|\le\nu} n^l u(n,r)e^{sn} < 6\mu(r,f)e^{s\nu}(2\nu)^l \sum_{j\ge k} e^{-\frac{1}{2}hj^2+|s|j}. \tag{1.3.31}$$

$-\dfrac{1}{2}hx^2 + |s|x = -\dfrac{h}{2}\left(x - \dfrac{|s|}{h}\right)^2 + \dfrac{|s|^2}{2h}$ は $|s|/h$ で最大値 $|s|^2/(2h)$ をとるが

$$\frac{|s|^2}{2h} < \frac{h^{2\varepsilon}}{2} = o(1), \quad \text{as } r \to \infty$$

である．更に $k \le h^{-\frac{1}{2}}$ と $k > h^{-\frac{1}{2}}$ の場合に分ける．前者の場合から扱う，(1.3.31) の右辺の和を必要に応じて単調減少な部分をとるように分ける．

(1.3.32)
$$\begin{aligned}\sum_{j\ge k} e^{-\frac{1}{2}hj^2+|s|j} &< A_3\left(\max_x e^{-\frac{1}{2}hx^2+|s|x} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}hx^2+|s|x}dx\right)\\ &< A_4h^{-\frac{1}{2}} < A_5h^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k}, \quad k \le h^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$k > h^{-\frac{1}{2}}$ のときは (1.3.31) の右辺の和の部分は単調減少なので

(1.3.33)
$$\begin{aligned}\sum_{j\ge k} e^{-\frac{1}{2}hj^2+|s|j} &< e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k} + \int_k^{\infty} e^{-\frac{1}{2}hx^2+|s|x}dx\\ &< e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k} + \frac{e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k}}{hk-|s|}\\ &< A_6h^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}hk^2+|s|k}\end{aligned}$$

(1.3.26), (1.3.30)–(1.3.33) より (1.3.25) は得られる． □

Theorem 1.3.7. $A > 0$ とする． $r \notin E$ に対して次式が成り立つ．

$$M(r,f) < Ah^{-\frac{1}{2}}\mu(r,f). \tag{1.3.34}$$

Proof of Theorem 1.3.7. Theorem 1.3.6 の (1.3.25) で $s=0$, $k=0$, $l=0$ とすればよい． □

Lemma 1.3.8. $P(z)$ を次数 m の多項式とし

$$|P(z)| \le M, \quad |z| \le r$$

ならば

$$|P'(z)| \le \frac{emMR^{m-1}}{r^m}, \quad |z| \le R, \quad r \le R. \tag{1.3.35}$$

Proof of Lemma 1.3.8. $r < |z| \le \infty$ における $z^{-m}P(z)$ に対する最大値の原理から

$$|z^{-m}P(z)| \le Mr^{-m}, \quad |z| \ge r.$$

それ故，$|z| = R \ge r$ に対して

$$|P'(z)| \le \frac{1}{d}\max_{|\zeta-z|=d}|P(\zeta)| \le \frac{M(R+d)^m}{dr^m}$$

$d = R/m$ と取れば

$$|P'(z)| \le \frac{mR^{m-1}M}{r^m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{emR^{m-1}M}{r^m}.$$

□

Lemma 1.3.9. $P(z)$ は *Lemma 1.3.8* で定義されたものとする．$|z_0| = r$, $|z - z_0| < r/(8m)$ ならば

$$|P(z) - P(z_0)| < \frac{4mM}{r}|z - z_0|. \tag{1.3.36}$$

Proof of Lemma 1.3.9. Lemma 1.3.8 を $|\zeta - z_0| < r/(8m)$ で適応して

$$|P'(\zeta)| \le \frac{emM(1 + \frac{1}{8m})^m}{r} < \frac{4mM}{r}.$$

両辺を積分することで (1.3.36) を得る． □

これらの準備の定理や補題を用いて Theorem 1.3.1 の証明に取りかかることにする．

Proof of Theorem 1.3.1. この証明の中で登場する $o(\cdot)$ は特に断らない限り $o(\cdot)$ as $r \to \infty$, $r \notin E$ を表すこととしておく．$r = |z_0|$, $|z| = re^s$ とする．定理の仮定から

$$1 - \nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} < e^s < 1 + \nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

であるから，十分大きな r に対して

$$|s| < 2\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} < h^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

第 1 の不等式は基本的な微積分から，第 2 の不等式は $(h\nu)^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\nu^{\frac{\varepsilon}{2}} \to \infty$ から得られる．Theorem 1.3.6 の (1.3.25) で $l = 0$, k を $h^{-\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}$ を越える最小の整数とすれば，$r \notin E$ に対して

$$\left| f(z) - \sum_{|n-\nu|<k} a_n z^n \right| = o(\mu(r, f)e^{s\nu}). \tag{1.3.37}$$

実際，$k_0 := h^{-\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}$ とすれば

$$e^{-\frac{1}{2}hk_0^2 + |s|k_0}h^{-\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}(H-1)}, \quad H = (\log\frac{1}{h})^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{\varepsilon}{2}}(\log\frac{1}{h})^{-\frac{1}{3}}.$$

q を $q - \nu > -k$ を満たす最小の整数とすれば

$$\sum_{|n-\nu|<k} a_n z^n = z^q P(z),$$

ここで $P(z)$ は多項式でその次数を m とすれば $m \le 2k$ である．(1.3.37) で $s = 0$ とすれば，Proposition 1.2.1 より

$$|P(z)| < r^{-q}M(r, f) + o(\mu(r, f)) < r^{-q}M(r, f)(1 + o(1)), \quad |z| \le r$$

よって，定理の仮定と Lemma 1.3.9 より，$|z-z_0| < r\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ なる z に対して

$$|P(z)-P(z_0)| < A_1 k M(r,f) r^{-q}\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} = o(M(r,f)r^{-q}), \tag{1.3.38}$$

(1.3.37), (1.3.38) より

$$\begin{aligned}
&|z^{-q}f(z)-z_0^{-q}f(z_0)| \le |z^{-q}f(z)-P(z)| + |P(z)-P(z_0)| + |z_0^{-q}f(z_0)-P(z_0)| \\
&= o\left(M(r,f)\left|\frac{z}{z_0}\right|^{\nu}|z|^{-q}\right) + o(M(r,f)r^{-q}) + o(M(r,f)|z_0|^{-q}).
\end{aligned}$$

$|z^q|$ を上式の両辺にかけることで

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^q f(z_0) + o\left(M(r,f)\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^{\nu} + \left|\frac{z}{z_0}\right|^{q}\right)\right).$$

を得る．$|q-\nu+k| < 1$ とすれば

$$(q-\nu)\log\left|\frac{z}{z_0}\right| = O\left(h^{-\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) = o(1)$$

なので

$$\left|\frac{z}{z_0}\right|^{q} = \left|\frac{z}{z_0}\right|^{\nu}\left|\frac{z}{z_0}\right|^{q-\nu} = \left|\frac{z}{z_0}\right|^{\nu}(1+o(1)).$$

以上で，定理は証明された． □

Theorem 1.3.1 は高階微分について次のように拡張される．

THEOREM 1.3.10. $f(z)$ は超越的整函数とし

$$|f(z_0)| \ge \frac{1}{2}M(|z_0|,f),$$
$$|z-z_0| < r\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad |z_0| = r > 0$$

とすれば，全ての整数 l に対して

$$f^{(l)}(z) = \nu^l\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\nu}\frac{f(z_0)}{z_0^l}(1+o(1)), \quad as\ r\to\infty, \quad r\notin E. \tag{1.3.39}$$

PROOF OF THEOREM 1.3.10. 証明は l についての帰納法による．$l=0$ のときは Theorem 1.3.1 で示された．q, $P(z)$ は Theorem 1.3.1 の証明の中で定義されたものとする

$$\frac{d^l}{dz^l}\left(\sum_{|n-\nu|<k} a_n z^n\right) = \frac{d^l}{dz^l}\left(z^q P(z)\right).$$

Lemma 1.3.8 を繰り返し適応して $|P(z)| < 2M(r,f)r^{-q}$ を考慮して

$$|P^{(l)}| < A\frac{e^l m^l M(r,f)}{r^{l+q}}, \quad |z| \le r.$$

よって，Leibnitz の公式から

$$\left|\frac{d^l}{dz^l}\left(z^q P(z)\right)\right| < (2e)^l q^l M(r,f) r^{-l} < (2e)^l \nu^l M(r,f) r^{-l}, \quad |z| \le r.$$

故に

$$|R(z)| = \left|z^{-q+l}\frac{d^l}{dz^l}\left(z^q P(z)\right)\right| < (2e)^l \nu^l M(r,f) r^{-q}, \quad |z| \le r.$$

$R(z)$ はその次数を m とすれば $m < 2k$ であるところの多項式なので，Lemma 1.3.8 より

$$|R'(z)| < 2^{l+1} e^l \nu^l k M(r,f) r^{-q-m}(|z|^{m-1} + r^{m-1}). \tag{1.3.40}$$

k を $h^{-\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}$ を越えない最大の整数とする．$|z_0| = r$, $|z - z_0| < r\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ に対して，Theorem 1.3.6 を用いれば $r \notin E$ に対して

$$\begin{aligned}(1.3.41)\qquad &\left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^{l+1} f(z_0) z^{-l-1} - f^{(l+1)}(z)\right| \\ &< \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^{l+1} f(z_0) z^{-l-1} - \frac{d}{dz}(z^{q-l}R(z))\right| \\ &\quad + \left|f^{(l+1)}(z) - \frac{d}{dz}(z^{q-l}R(z))\right| \\ &< \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^{l+1} f(z_0) z^{-l-1} - (q-l) z^{q-l}\frac{R(z)}{z}\right| \\ &\quad + |z^{q-l}R'(z)| + o\left(\nu^{l+1} M(r,f)\left|\frac{z}{z_0}\right|^\nu |z|^{-l-1}\right).\end{aligned}$$

帰納法の仮定と再び，Theorem 1.3.6 を用いて

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^l f(z_0) z^{-l} - z^{q-l}R(z)\right| \\ &< \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^l f(z_0) z^{-l} - f^{(l)}(z)\right| + |f^{(l)}(z) - z^{q-l}R(z)| \\ &< o\left(\nu^l M(r,f)\left|\frac{z}{z_0}\right|^\nu |z|^{-l}\right).\end{aligned}$$

これと $q - l = \nu(1 + o(1))$ をあわせて

$$\begin{aligned}(1.3.42)\qquad &\left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu \nu^{l+1} f(z_0) z^{-l-1} - (q-l) z^{q-l-1}R(z)\right| \\ &= o\left(\nu^{l+1} M(r,f)\left|\frac{z}{z_0}\right|^\nu |z|^{-l-1}\right).\end{aligned}$$

仮定の $|z-z_0|<r\nu^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $|z_0|=r>0$ より $\left|\dfrac{z}{z_0}\right|=1+o(1)$．故に (1.3.40)–(1.3.42) から (1.3.39) は得られる． □

1.4. Behavior near point where its maximum modulus is attained II

ここでは前節に引き続き Wiman-Valiron theory (例えば Hayman [4], Valiron [1]) に於いては標準的と思われる様な結果を幾つか引用しておく．

Lemma 1.4.1. g は超越整函数，K と η は正の定数とする．もし $|z_0|=r$, $|g(z_0)|\geq\eta M(r,g)$, そして $|\tau|\leq K/\nu(r,g)$ ならば,

$$g(z_0e^{\tau})\sim g(z_0)e^{\nu(r,g)\tau},\quad r\notin E \tag{1.4.1}$$

かつ

$$g'(z_0e^{\tau})\sim\frac{\nu(r,g)}{z_0e^{\tau}}g(z_0e^{\tau}),\quad r\notin E \tag{1.4.2}$$

となる．

この Lemma は，本質的には Theorem 1.3.1, 1.3.10 と同じである．次の結果は Lemma 1.4.1 と Rouché の定理から得られるものである．証明の詳細については Bergweiler [1] を参照した．

Lemma 1.4.2. g は超越整函数，K, η, そして ε は正の定数とする．もし $|\sigma_1|<K$, $|g(z_0)|\geq\eta M(r,g)$ であり，かつ $|z_0|=r\notin E$ であれば，$|\nu(r,g)\tau_1-\sigma_1|<\varepsilon$ 及び $g(z_0e^{\tau_1})=g(z_0)e^{\sigma_1}$ を満たす τ_1 が存在する．もし $\varepsilon<2\pi$ で，また $r\notin E$ が十分に大きいときには，τ_1 は一意的である．

Proof of Lemma 1.4.2. $\omega_1=g(z_0)e^{\sigma_1}$ と置き，整函数 $f_1(\tau):=g(z_0e^{\tau})$ と $f_2(\tau):=g(z_0)e^{\nu(r,g)\tau}=\omega_1\exp\{\nu(r,g)\tau-\sigma_1\}$ を考察する．もし $|\nu(r,g)\tau-\sigma_1|=\varepsilon$ ならば，$|\tau|\leq(K+\varepsilon)/\nu(r,g)$ であり，仮定から $|z_0|=r\notin E$ なので，(1.4.1) より

$$f_1(\tau)\sim g(z_0)e^{\nu(r,g)\tau}=f_2(\tau)$$

を得る．それ故

$$|(f_1(\tau)-\omega_1)-(f_2(\tau)-\omega_1)|=|f_1(\tau)-f_2(\tau)|=o(|f_2(\tau)|) \tag{1.4.3}$$

となる．一方，$|\nu(r,g)\tau-\sigma_1|=\varepsilon$ のとき $0<\varepsilon<2\pi$ であるならば,

$$\begin{aligned}|f_2(\tau)-\omega_1|&=|\omega_1\{\exp(\nu(r,g)\tau-\sigma_1)-1\}|\\&\geq\delta_1|\omega_1|\geq\delta_2|f_2(\tau)|\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

が $\delta_1\geq\delta_2>0$ となる定数 δ_1, δ_2 に対して成立している．(1.4.3) 及び (1.4.4) によって Rouché の定理から結論を得る． □

Lemma 1.4.3. g は超越整函数，C と η は正の定数とせよ．j は整数とし，$r \notin E$ であって z_0 は $|z_0| = r$ と $|g(z_0)| \geq \eta M(r,g)$ を満たしていると仮定する．そのとき，$|z - z_0| \leq Cr/\nu(r,g)$ に於いて定義される解析函数で $\tau_j(z)$ で，

$$|\tau_j(z)\nu(r,g) - 2\pi ij| \to 0, \quad as\ r \to \infty$$
$$g(ze^{\tau_j(z)}) = g(z)$$

更には

$$\frac{d}{dz}(ze^{\tau_j(z)}) \sim 1, \quad as\ r \to \infty$$

を満たすものが存在する．

$j = 1$ の場合についてはBergweiler [3, Lemma 3] でこの証明が与えられている．一般の場合についても，Bergweiler [2, Lemma 3] に於いて既に指摘されている様に，同じ方法によって証明可能である．

Proof of Lemma 1.4.3.　もし $|z - z_0| \leq Cr/\nu(r,g)$ であれば

$$\left|1 - \frac{z}{z_0}\right| \leq \frac{C}{\nu(r,g)}$$

となり，それ故 $z = e^u z_0$ となる様な u が $|u| \leq 2C/\nu(r,g)$ 内に存在する，但し r は十分に大きいものとする．(従って $|z_0| = r > 0$ であり $|u|/2 \leq |1 - e^u|$ でもある)．このとき (1.4.1) により，$|\sigma - \nu(r,g)u| = o(1)$ を満たす様なある σ に対して $g(z) = g(z_0)e^{\sigma}$ となる．特に r が大であれば $|\sigma| \leq 3C$ である．ここで整函数

$$f_1(\omega) := g(z_0e^{\omega}) - g(z)$$

及び

$$f_2(\omega) := g(z_0)e^{\nu(r,g)\omega} - g(z)$$

を定義する．(1.4.1) から，$|\nu(r,g)\omega - (\sigma + 2\pi ij)| = \varepsilon$, 但し $0 < \varepsilon < 2\pi$, であれば

$$|f_1(\omega) - f_2(\omega)| = o(|f_2(\omega)|)$$

であることが導かれる．適当な δ に対して $|f_2(\omega)| \geq \delta|g(z_0)|$ に注意するとRouchéの定理により，$|\nu(r,g)v - (\sigma + 2\pi ij)| < \varepsilon$ を満たす v で

$$f_1(v) = f_2\left(\frac{\sigma + 2\pi ij}{\nu(r,g)}\right) = g(z_0)e^{\sigma + 2\pi ij} - g(z) = 0$$

となるものがある．従って

$$g(z) = g(z_0e^v) = g(ze^{v-u})$$

である．ここで $\tau_j(z) := v - u$ と定義すれば，ε を 0 に近づけたときLemma 1.4.3の一番目と二番目の性質を満たしていることが分かる．更には，今考えている円

板内では $g'(ze^{\tau_j(z)}) \neq 0$ であることが，(1.4.2) によって示される．それ故 g の逆函数 g^{-1} の適当な branch に対し，$ze^{\tau_j(z)} = g^{-1}(g(z))$ となるから $\tau_j(z)$ はそこで解析的である．従って二番目の性質として得られた関係式 $g(ze^{\tau_j(z)}) = g(z)$ の両辺を微分すれば

$$\frac{d}{dz}(ze^{\tau_j(z)}) = \frac{g'(z)}{g'(ze^{\tau_j(z)})}$$

となり，(1.4.2) より $g'(z) \sim \nu(r,g)g(z)/z$, $g'(ze^{\tau_j(z)}) \sim \nu(r,g)g(ze^{\tau}_j(z))/(ze^{\tau_j(z)})$ であるから，三番目の性質

$$\frac{d}{dz}(ze^{\tau_j(z)}) \sim \frac{g(z)}{g(ze^{\tau_j(z)})}e^{\tau_j(z)} = e^{\tau_j(z)} \sim 1$$

が $r \to \infty$ のとき得られた．以上で Lemma 1.4.3 は証明された． □

次の結果は (1.4.1) を用いて証明できることを Clunie [1, p. 76][2] は既に指摘している．

Lemma 1.4.4. h と g が超越整函数ならば,

$$M(r, h \circ g) = M((1 - o(1))M(r, g), h), \quad r \notin E$$

及び

$$M(r, h \circ g) = M(M((1 - o(1))r, g), h)$$

がなりたつ．

実際に我々が次章の主定理 Theorem 2.2.1 の証明に用いるのは第 2 式である．具体的には $1 \leq j < m$ として $g := f_m$, $f_j(z') = z'$ であれば，十分大なる $|z'|$ については

$$|g(z')| \leq M\left(\frac{|z'|}{2}, g\right)$$

となることを示すために利用する．ここで $|g(z')| = |f_{m-j}(f_j(z'))| = |f_{m-j}(z')| \leq M(|z'|, f_{m-j})$ であるから，十分なる $|z'|$ に対し

$$M(|z'|, f_{m-j}) \leq M\left(\frac{|z'|}{2}, g\right) = M\left(\frac{|z'|}{2}, f_{m-j} \circ f_j\right)$$

---

[2] J.Clunie は 2 つの評価式

$$M(r(1 + o(1)), h \circ g) \geq M(M(r, g), h), \quad [\Leftrightarrow M(r, h \circ g) \geq M(M(r(1 + o(1)), g), h)] \tag{1.4.6}$$

及び

$$M(r, h \circ g) \geq M((1 + o(1))M(r, g), h), \quad r \notin E \tag{1.4.7}$$

が $r \to \infty$ のときに成り立つと述べている．ここで $o(1)$ と E は $g(z)$ に関係して定まる量である．実際，Clunie [2] では (1.4.3) が証明され，同様な方法で (1.4.7) を示すことができると付記されている．勿論，$M(r, h \circ g) \leq M(M(r, g), h)$ は常に成立する．

が成り立てば良い．ここで f_j が超越的だから

$$|z'| < M\left(\frac{|z'|}{4}, f_j\right)$$

であると仮定できるので，我々は (1.4.6)，特に十分大なる全ての r に対し

$$M(M(r,g),h) \leq M(2r, h\circ g) \tag{1.4.5}$$

となることが言えていれば良い．それ故ここでは (1.4.5) の証明を与えるに留める．この証明は本質的に Clunie の方法による．

Proof of (1.4.5). まず E として Lemma 1.4.2 のものを考え，$r \notin E$ として，点 z_*, $|z_*| = r$, は $|g(z_*)| = M(r,g)$ となるものとする．更に $\omega_* = |g(z_*)|e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, は $|\omega| = |g(z_*)|$ 上に於いて $h(\omega)$ がその maximum modulus を実現する一つの点とせよ，即ち $|h(\omega_*)| = M(M(r,g),h)$.

このとき，$g(z_*) = |g(z_*)|e^{i\psi}$, $0 \leq \psi < 2\pi$, と書けば，Lemma 1.4.2 によって $|\nu(r,g)\tau_1 - i(\varphi-\psi)| < \varepsilon$ となる τ_1 で

$$g(z_* e^{\tau_1}) = g(z_*)e^{i(\varphi-\psi)} = \omega_*$$

を満たしているものがある．それ故，$(h\circ g)(z_* e^{\tau_1}) = h(\omega_*)$ であり

$$M(M(r,g),h) = |(h\circ g)(z_* e^{\tau_1})| \leq M(|e^{\tau_1}|r, h\circ g)$$

となる．$|\tau_1| \leq (\varepsilon+4\pi)/\nu(r,g)$ であるから，十分大なる r に対しては $|e^{\tau_1}| \leq \frac{3}{2} < 2$ が満たされ，従って $r \notin E$ のときには (1.4.5) が成り立つ．

次に $r \in E$ とする．このとき E の対数的測度が有限であることから，

$$\log\frac{4}{3} > \int_{E\cap[r_0,\infty)} \frac{dt}{t}$$

となる $r_0 > 1$ が存在して，任意の $r \geq r_0$ に対しては $[r, \frac{4}{3}r] \not\subset E$ となっている．実際もしそうでなければ，

$$\int_{E\cap[r_0,\infty)} \frac{dt}{t} \geq \int_{E\cap[r,\infty)} \frac{dt}{t} \geq \int_r^{\frac{4}{3}r} \frac{dt}{t} = \log\frac{4}{3}$$

となり不合理．故に $\varrho \in [r, \frac{4}{3}r] \setminus E$ となる ϱ がとれ，これに対しては

$$M(M(\varrho,g),h) \leq M\left(\frac{3}{2}\varrho, h\circ g\right)$$

が成り立つ $r < \varrho \leq \frac{4}{3}r$ と $M(x,\cdot)$ の単調性から直ちに (1.4.5) が得られる．以上で，十分大きな全ての r の値に対して，(1.4.5) の評価が成り立つことが証明できた． □

Chapter 2

Applications to complex dynamics

2.1. The Eremenko theorem

$f(z)$ を 2 次以上の多項式または超越整関数とし，f_n を f の n-th iterate (n 次反復) とする．以下，f が多項式のときは複素球面，f が超越整関数のときは複素平面で考える．

$F(f)$ を f の *Fatou set*，すなわち $\{f_n\}$ がそこで正規族をなす最大の開集合とし，$J(f)$ をその補集合 (*Julia set*) とする．$J(f)$ は，空でない *perfect set* で，*completely invariant* （$f_{-1}(J(f)) = J(f)$）であり，repelling periodic point (反発的周期点) の集合の閉包と一致する．ここで

$$I(f) := \{z : f_n(z) \to \infty \ as \ n \to \infty\}$$

とおくと，f が多項式のときは $I(f)$ は ∞ を含む領域 ($F(f)$ の連結成分) で, 空ではなく

$$J(f) = \partial I(f) \tag{2.1.1}$$

が成立つ．本節の目的のひとつは f が超越的でも (2.1.1) が成立つことを示すことである．即ち

THEOREM 2.1.1. 整函数 f に対して (2.1.1) が成り立つ.

上定理を示すために，本節では次の定理を証明する

THEOREM 2.1.2. f が超越整関数のときも，$I(f)$ は空でない.

実際，Theorem 2.1.2 が証明されたとすると，Theorem 2.1.1 は下記のように示される．まず，$I(f)$ は無限集合であることが分かる．なぜなら，$I(f)$ は周期点を含むことはなく (z が周期点なら $f_n(z) \to \infty \ as \ n \to \infty$ は成立しない)，$z \in I(f)$ なら $f(z), f_2(z), \ldots$ も $I(f)$ も含まれる.

また $I(f)$ が内点 z_0 を含めば，$z_0 \in F(f)$ である．なぜなら，z_0 の近傍 V_0 が $I(f)$ に含まれるとき，$z_0 \in J(f)$ とすると V_0 の中に周期点がなければならず，矛盾である．よって，

$$\mathrm{Int}(I(f)) \cap J(f) = \phi.$$

以下，順に (a) $J(f) \subset \partial I(f)$, (b) $\partial I(f) \subset J(f)$ であることを証明する.

PROOF OF (a). $z \in J(f)$ とし，V を z の近傍とする．$z_1 \in I(f)$ をとり，$z_2 = f(z_1) \neq z_1$ とする．$\{f_n\}$ は V で正規族とならないから，いずれかの f_n は V 内のある点 z^* で z_1，z_2 のどちらかの値をとる．すると，$z^* \in I(f)$ でなければならないから，$J(f) \subset \overline{I(f)}$．しかし，$\mathrm{Int}(I(f)) \subset F(f)$ だから $J(f) \subset \partial I(f)$ が成立する．　□

PROOF OF (b). $z \in \partial I(f)$ ならば，任意の近傍 V 内に $f_n(z) \to \infty \ as \ n \to \infty$ となる z とそうでない z とが存在しなければならず，明らかに正規族にならない．　□

Eremenko [1] に基づいて Theorem 2.1.2 の証明に取りかかることにする.

Proof of Theorem 2.1.2. 超越整関数 f の maximum term，central index, maximum modulus をそれぞれ $\mu(r)$，$\nu(r)$，$M(r)$ とし ((1.1.3), (1.1.4), (1.2.1)), $M(r)$ を与える点を $w(r)$ とする：

$$|f(w(r))| = M(r), \quad |w(r)| = r.$$

Wiman-Valiron theory, (Theorem 1.3.1，1.3.10) により次のことが成立つ：$\alpha > 1/2$ を決めると，$|z - w(r)| < r(\nu(r))^{-\alpha}$ において

$$f(z) = \left(\frac{z}{w(r)}\right)^{\nu(r)} f(w(r))(1+\varepsilon_1), \tag{2.1.2}$$

$$f'(z) = \nu(r)\left(\frac{z}{w(r)}\right)^{\nu(r)} f(w(r))(w(r))^{-1}(1+\varepsilon_2), \tag{2.1.3}$$

と書くと，f と α とで定まる除外集合 E, $Lm(E) < \infty$ があって，$r \to \infty$, $r \notin E$ のとき ε_1，$\varepsilon_2 = o(1)$.

$r_1 \notin E$ を十分大きくとって

$$\begin{gathered} M(r) > 4r, \quad r \geq r_1; \\ |\log(1+\varepsilon_i)| < 1, \quad r \geq r_1, \quad r \notin E; \\ \mathrm{L}m(E \cap [r_1, \infty)) < 1; \\ \nu(r_1) > 10^4. \end{gathered}$$

$w(r_1)$ を w_1 と書くこととし，次の扇形を考える.

$$C_1' := \left\{ z : \left|\log\left|\frac{z}{w_1}\right|\right| < \frac{5}{\nu(r_1)}, \left|\arg\frac{z}{w_1}\right| < \frac{5}{\nu(r_1)} \right\}$$

写像

$$\zeta = \varphi(z) = \nu(r_1)\left(\log \frac{z}{w_1}\right) + \log f(w_1)$$

は C_1' を次の正方形に単葉に写す：

$$\varphi(C_1') = \{\zeta = \xi + i\eta : |\xi - \log|f(w_1)|| < 5, |\eta - \arg f(w_1)| < 5\}.$$

これに含まれる正方形

$$Q := \{\zeta = \xi + i\eta : |\xi - \log|f(w_1)|| < 4, |\eta - \arg f(w_1)| < 4\}$$

を考え，$\zeta_0 \in Q$ をとる．C_1' の境界上では，$|\varphi(z) - \zeta_0| > 1$ であり，(2.1.2) から

$$\log f(z) = \nu(r_1)\log\left(\frac{z}{w_1}\right) + \log f(w_1) + \log(1+\varepsilon_1).$$

したがって，

$$|\log(1+\varepsilon_1)| < 1$$

だから，Rouché の定理より，$\varphi(z) - \zeta_0$ と $\log f(z) - \zeta_0$ とは，C_1' で同数個（ちょうど１個）の零点をもつ．すなわち，領域 $C_1 \subset C_1'$ があって，C_1 は $\log f(z)$ によって Q 上に単葉に写される．$4 > \pi$ だから，像 $f(C_1)$（Q を $z = \exp(\zeta)$ で写したもの）は円環領域

$$A_2 := \{z : e^{-4}M(r_1) < |z| < e^4 M(r_1)\}$$

を含む．区間 $[\frac{1}{2}M(r_1), 2M(r_1)]$ の対数測度は $\log 4$ で１より大だから，

$$2r_1 < \frac{1}{2}M(r_1) < r_2 < 2M(r_1)$$

となるように $r_2 \notin E$ を取ることができる．$w_2 = w(r_2)$ とし，

$$C_2' := \left\{z : \left|\log\left|\frac{z}{w_2}\right|\right| < \frac{5}{\nu(r_2)}, \left|\arg\frac{z}{w_2}\right| < \frac{5}{\nu(r_2)}\right\}$$

とすると $\dfrac{5}{\nu(r_2)} < \dfrac{5}{10^4}$ だから

$$|z| < |w_2|e = r_2 e < 2eM(r_1) < e^4 M(r_1),$$

すなわち C_2' は A_2 に含まれる．

これを繰り返すと，$\{C_j\}$，$C_{j+1} \subset f(C_j)$ が得られ，$r_j > 2^j r_1$ だから $C_j \to \infty$ であり，(2.1.3) から C_{j+1} では $f'(z) \neq 0$ だから f_{-1} の一価な分枝が得られる．$B_j = (f_{-j})(C_{j+1})$ とおくと $\overline{B_{j+1}} \subset B_j$ だから $\cap B_j \neq \phi$．$z \in \cap B_j$ ならば $f_j(z) \in C_{j+1} \to \infty$ だから $z \in I(f)$ であり，定理が証明された．$\square$

2.2. Periodic points of entire functions

本節で考える函数 $f(z)$ は超越整函数である．この函数の iterates f_n は

$$f_0(z) := z, \quad f_n(z) := f(f_{n-1}(z)), \quad n \geq 1$$

で定義されるものとする．I. N. Baker は 1967 年に次のような予想を与えていた:

The Baker conjecture. 任意の整数 $n \geq 2$ に対し，f_n の *fixpoints* であるけれども，$1 \leq k < n$ となるどの整数 k についても f_k の *fixpoints* でない様な点は無限個存在している．

これから後の節の目的は，Bergweiler [6], [7] に基づいてこの予想の肯定的な解決を述べることであるが，実際にはこの性質を満たす無限個の repelling fixpoints が存在していることを証明する．

自然数 n について，$f_n(z_0) = z_0$ である点 z_0 のことを f の *periodic point* と呼ぶ．このとき n を z_0 の *period* と言い，この性質を持つ最小の n を z_0 の *primitive period* と言う．特に period 1 の periodic points 全体が，f の全ての *fixpoints* ということになる．点 z_0 が period n の periodic point であるとき，$f_n'(z_0)$ は (n に関する)z_0 の *multiplier* と呼ばれている．各 periodic point z_0 を，その multiplier の modulus が 1 より小さい，1 に等しい，或いは 1 より大きい場合の夫々に応じて *attracting*, *indifferent*, 或いは *repelling* と呼ぶ．任意の indifferent periodic point z_0 の multiplier は，或実数 α に対して $e^{2\pi i\alpha}$ という形で表される．このとき α が有理数であれば，z_0 は *rationally indifferent* であるという．そうでなければ，z_0 は *irrationally indifferent* であるという．Periodic points は iteration theory で重要な役割を演じる．Iteration theory の入門書としては，有理函数に関する Fatou [1] 及び Julia [1] の，また整函数に関する Fatou [1] の，いずれ古典ともいうべき論文が挙げられる．もっと近年の解説書としては，例えば Blanchard [1], Brolin [1] 及び Lyubich [1] 等の論文が有理函数に関するものであり，有理函数及び整函数に関しては Baker [6], Eremenko and Lyubich [1], そして Gross [1] 等のものが見うけられる．Iteration theory の主たる研究対象は，f の set of normality, いわゆる Fatou set と f の Julia set である．前者はそこで f の iterates の成す族が Montel の意味で正規となる様な複素数全体の集合であり，後者はこの集合の ($\mathbb{C}$ での) 補集合として定義されるものである．簡単に分かることは，attracting periodic points は Fatou set に属しているのに対して，repelling periodic points は Julia set に属するということである．また，rationally indifferent periodic points が Julia set 内にあるという事実も良く知られたことである．Irrationally indifferent poriodic points に関しては，それらが Julia set 内にあるのか Fatou set 内なのかを判定するのは一般に容易なことではない．いずれの可能性も実際起こってしまうのである[3]．Periodic points の重要性はまた，Fatou [2, p.354] の証明した次の結果からも説明できる．即ち，Julia set 内の各点は periodic points の limit point であるというものである．これは Baker [6] によって更に精密化され，Julia set の各点は repelling periodic points の limit point であること，換言すれば repelling periodic points 全体の集合の閉包が Julia set であることが証明されている．特に Julia set

[3] この事実に関する詳細は，'古典' Cremer [1], [2], Siegel [1] 又は，'新刊' Yoccoz [1], Beardon [1] 等を参照のこととする．

は空集合ではないことが知られているから，Fatou のそして Baker の結果により無限個の periodic points が，実際には無限個の repelling periodic points が存在していることが導かれる．そこで生じる疑問が，こういった点の periods 更には primitive periods に関してどんなことがいえるのであろうかというものである．この疑問は既に，Fatou により 1926 年には提起されていた．Fatou [2, p. 354] は，period が 2 である periodic points は少なくとも 1 つ存在していることを証明した．彼はこの主張の証明について概略を述べた上で，period n の periodic points は実際には無限個あると書き留めていた．1948 年，この結果は Rosenbloom [1] により一般化され，任意の $n \geq 2$ に対して period が n の periodic points は無限個あることが証明される．Hayman [3, Problem 2.20] (Baker [4, p. 284] 及び Hayman [2, Appendix p. 184] も参照のこと) は 1967 年，$n \geq 2$ のとき primitive period が n の periodic points もまた無限個存在するであろうと予想する．それ以前に彼は，このことが成り立たない正の整数 n は (f によるが) 存在しても高々1つであることを証明したのである．この予想に関するそれ以外の部分的結果については Baker [2], [3] を参照のこととする[4][5]．この論説の目的の一つは Baker の予想が正しいことを bergweiler [6], [7] に従って証明することである．実際には我々はより一般的な次の結果を証明する．

Theorem 2.2.1. f は整函数，また $n \geq 2$ とする．そのとき f は *primitive period* n の *repelling periodic points* を無限個持つ．

注意点として，整函数が必ずしも attracting periodic points を持つ訳ではないことを挙げておく．一つの例は $f(z) = e^z$ であるが,[6] これは既に Fatou [2, p. 370]

---

[4]Baker [2] では例えば以下の様な各条件を付加した上で，primitive period $n(\geq 2)$ の periodic points ('exact order n の fixpoints', cf. Baker[2], [3]) が無限個存在することを証明している:

- $f(z)$ は位数 $< \frac{1}{2}$ で，multipliers が 1 又は 1 の p 乗根，但し p は素数，の fixpoints を持たない (Baker [2, Theorem 2])．(従って，f_n の fixpoints は無限個存在し全て一位．)
- 正の数 r_0 と $\mu(\mu < 1)$ を，$r \geq r_0$ ならば $\log\log M(r, f) \leq (\log r)^\mu$ となる様に選ぶことが可能 (Bergweiler [2, Theorem 3])．

Baker [3] では，f_n の total deficiency sum が $\frac{3}{2}$ より大ならば，primitive period $n(\geq 2)$ の periodic points が存在することを証明している．(実は $b \in \mathbb{C}$ で $\delta(b, f_n) > 0$ となるもの, deficient value, があればよい)．

[5]この他にも Whittington [1] には位数 1 の整函数 f で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &: \overline{N}_{\mathrm{att}} = \overline{N}_{\mathrm{ind}} = \overline{N}_{\mathrm{rep}} = 0;\\
\mathrm{II} &: \overline{N}_{\mathrm{att}} = \infty,\ \overline{N}_{\mathrm{ind}} = \overline{N}_{\mathrm{rep}} = 0;\\
\mathrm{III} &: \overline{N}_{\mathrm{att}} < \infty,\ \overline{N}_{\mathrm{ind}} = 1,\ \overline{N}_{\mathrm{rep}} = \infty;\\
\mathrm{IV} &: \overline{N}_{\mathrm{att}} = 0,\ \overline{N}_{\mathrm{ind}} = \infty,\ \overline{N}_{\mathrm{rep}} = 0;\\
\mathrm{V} &: \overline{N}_{\mathrm{att}} = \overline{N}_{\mathrm{ind}} = 0,\ \overline{N}_{\mathrm{rep}} = 1
\end{aligned}$$

となる例が与えられている．ここに，$\overline{N}_{\mathrm{att}}, \overline{N}_{\mathrm{ind}}, \overline{N}_{\mathrm{rep}}$ は夫々，f の attracting, indifferent, repelling fixpoints の総数である．本文の例は $|a-1| < 1$ のときは II 型，$|a-1| = 1$ のとき IV 型であるが，$|a-1| > 1$ のときには，VI: $\overline{N}_{\mathrm{att}} = \overline{N}_{\mathrm{ind}} = 0, \overline{N}_{\mathrm{rep}} = \infty$ の例となる．

[6]$f(z) = e^z$ の Julia set は $\mathbb{C}$ に一致するという Fatou [1, p. 370] の予想は，Misiurewicz [1] により肯定的に解決された．他にも $J(\lambda z e^z) = \mathbb{C}$ がある適当な値 λ に対

(Baker [7, §8] も参照せよ) には知られていたものである．また，$n = 1$ のときには Theorem 2.2.1 の結論が必ずしも成り立たないことも，$f(z) = e^z + z + a$ 但し $|a-1| \leq 1$ の様な例を用いて示される[7]．然しながら Whittington [1] は，minimum modulus に関する Kjellberg [1] の定理を用いて，劣位数 $< \frac{1}{2}$ 又は位数 $\frac{1}{2}$ かつ type 0 の函数については repelling fixpoints 又は multiplier が 1 の fixpoints が無限個存在することを証明している[8]．(2 次以上の) 有理函数については，repelling 又は multiplier 1 の fixpoints が少なくとも 1 つ存在していることが，Fatou [1, p. 168] 及び Julia [1, p. 85, p. 243] により証明された．Theorem 2.2.1 から得られる 2 つの結果を記しておく．

Corollary 1．超越整函数 F の *fixpoints* が全て相異なる *multipliers* を持てば，F はいかなる整函数 f の *n-th iterate* でもあり得ない．ここで $n > 1$ とする[9]．

Corollary 2．高々有限個の *repelling fixpoints* しか持たない様な超越整函数 F はいかなる整函数 f の *n-th iterate* でもあり得ない．ここで $n > 1$ とする[10]．

これらの結果は F 又は f の order に関して何らかの仮定を付け加えた下に，Baker [2, p. 152] 及び Whittington [1, p. 533] により証明されていたのである以上のことからも判る様に，fixpoints と periodic points (period $n \geq 2$) とは，大変な差異がある．これは，$\{f$ の fixpoints$\} \subset \{f$ の period n の periodic points$\}$, $n \geq 2$ という ‘universal’ な関係が 1 つの要因の様に思われる．例えば Rosenbloom [1] 他の方法に習って

$$h_n(z) = \frac{f_n(z) - z}{f_{n-1}(z) - z}, \quad n \geq 2$$

を考える．もし，或 n に対して，$\#\{f$ の period n の periodic points$\} =: k(n) < +\infty$ とすれば，$\#\{f$ の fixpoints$\} =: k(1) \leq k(n) < +\infty$, $\#\{z \mid f_n(z) - f_{n-1}(z) = 0,\ |z| < r\} \leq \sum_\omega \#\{z \mid f_{n-1}(z) - \omega = 0,\ |z| < r\}$, 但し ω は $|\omega| < M(r, f_{n-1})$ を

し成り立つことが，Baker [8] で示されている．

[7]Whittington [1, Theorem 1] は次のことを述べている: 任意に与えられた fixpoints $a_1, a_2, \ldots$ と，夫々に与えられた multipliers $b_1, b_2, \ldots$ だけを持つ整函数が存在する．但し，点列 $\{a_n\}$ は有限な limit points を持たないものとする．この函数はその作り方から一般に位数 ≥ 1 で，$\#\{a_n\} = \infty$ ならば無限位数を持つことが分かる．(ちなみに，その存在の一意性については何も述べられてはいない．勿論，$\#\{a_n\} = 0$ ならば一意性などあり得ないが，$\#\{a_n\} > 0$ ならどうか? ただこれも，multipliers $\{b_n\}$ に付加条件がないと nonsense である．実際，$f(z) = e^{-z} + z - 1$ と，$g(z) = -e^z + z + 1$ は共に $\{\pm 2n\pi i:\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ を fixpoints, その multipliers が 0, 0, … のときの解である)

[8]例えば，Baker [2, Theorem 3, Corollary] は，Corollary 1 を f の位数が $< \frac{1}{2}$ として (Theorem 3), 或いは F の位数が有限として (Corollary) 証明しているし，Whittington [1, Corollaries 1 and 2] もまた同様な仮定の下に Corollary 2 を証明している．但し，後者は multiplier 1 の fixpoints もまた有限個しかないと仮定している．(即ち，M. Shishikura [2] の用語に従えば，weakly repelling fixpoints が有限個と仮定するのである)．

[9]証明は Baker [4, p. 284] に述べられているが，ここで短い証明を与えておく．$F(z) = f_n(z)$, $n \geq 2$ と書けるとする．z_0 を primitive preiod n の periodic point とし，$z_j = f_j(z_0), 1 \leq j \leq n-1$ とおく．このとき，$z_i \neq z_j$ であるが $F'(z_i) = f'_n(z_i) = f'_n(z_j) = F'(z_j)$, $0 \leq i < j \leq n-1$．これは矛盾である．

[10]証明は Theorem 2.2.1 より自明である．

満たす f の全ての fixpoints，となるので (ここで個数は重複度に応じて数えたものとする)

$$
\begin{aligned}
&N(r,h_n) \le N(r,0;f_{n-1}(z)-z) \le T(r,f_{n-1}) + O(\log r), \quad \text{as } r\to\infty \\
&N(r,0;h_n) \le k(n)\log r, \\
&N(r,1;h_n) \le \sum_{\omega} N(r,\omega;f_{n-1}) \le k(1)T(r,f_{n-1}) + O(1), \quad \text{as } r\to\infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここでは，Nevanlinna の第一主要定理を用いた．また第二主要定理からは

$$
\begin{aligned}
(1-o(1))T(r,h_n) &\le \overline{N}(r,h_n) + \overline{N}(r,0;h_n) + \overline{N}(r,1;h_n) + S(r,h_n) \\
&\le \bigl(1+k(1)\bigr)T(r,f_{n-1}) + S(r,h_n) + O(\log r), \quad \text{as } r\to\infty
\end{aligned}
$$

を得る．また $T(r,f_{n-1}) = o(T(r,f_n))$，$r\to\infty$, (Clunie [1]) なので，$T(r,h_n) = T(r,f_n) + S(r,f_n)$ が従うが，上の評価より $T(r,h_n) = S(r,h_n)$ となるので不合理．よって $k(n) = +\infty$, $n \ge 2$ となる．(ここで，$S(r,h) = o(T(r,h))$, $r\to\infty$, $r\notin E$; $E \in [0,\infty)$ は測度有限．) (Fixpoints については，E. Mues の或結果から超越有理型函数 $f(z)$ の 2 重以上の極，及び $f'(z)$ の零点 ($f(z)$ の critical points) の個数函数が $S(r,f)$ ならば，fixpoints が無限個あることが従う).

一方，primitive period n の periodic points が有限個であると仮定すれば，

$$
\overline{N}(r,0;f_n(z)-z) \le \sum_{\substack{1\le k<n\\ k|n}} \overline{N}(r,0;f_k(z)-z) + O(\log r) = o(T(r,f_n))
$$

となる．従って，$\overline{N}(r,h_n)$, $\overline{N}(r,0;h_n)$ についてはこの場合にも $o(T(r,f_n))$ であるが，$\overline{N}(r,1;h_n) = \overline{N}(r,0;f_n - f_{n-1})$ についての評価を上の様にすることができないところが，period と primitive period の分岐点という訳である．この場合でも，f の fixpoints が有限個であれば，各 $n \geqq 2$ に対して primitive period n の periodic points は無限個存在することは確かめられる．(より一般的には,

$$
\liminf_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E}} \frac{n(M(r,f_{n-1}),0;f(z)-z)T(r,f_{n-1})}{T(r,f_n)} < 1
$$

であれば十分．ここに $n(R,0;f(z)-z) = \#\{z \mid f(z)=z,\ |z|<R\}$, 特に $n(R,0;f(z)-z) \le N(eR,0;f(z)-z)$ なので,

$$
\liminf_{r\to\infty} \frac{N(eM(r,f_{n-1}),0;f(z)-z)T(r,f_{n-1})}{T(r,f_n)} < 1
$$

ならばよい).

2.3. Results from Nevanlinna–Ahlfors theory and from iteration theory

我々が用いる主要な道具の 1 つが，Ahlfors の被覆面の理論から得られた次の結果である．

Lemma 2.3.1. G_1, G_2, G_3 は複素平面上の単連結領域で，互いにその閉包は素とする．もし $f(z)$ が $|z-z_0|<R$ で解析的であり，また $|z-z_0|<R$ のどんな部分領域もこの領域 G_j, $j=1, 2, 3$ のうちのいずれの上にも (*1* 対 *1*) 等角に写像していなければ,

$$R \le \frac{2\mu(\log\mu + A)}{|f'(z_0)|}$$

である．ここに $\mu = \max\{1, |f(z_0)|\}$ であり，A は *3* つの領域 G_j にのみ依存した定数である．

ここで $2\mu(\log\mu + A)$ を $A(1+|f(z_0)|^2)$ で置き換えたものが，Ahlfors [1, p. 9] 及び Dufresnoy [1, p. 224] による結果である．この形であれば 3 つの領域というところを 5 つの領域でということにすると，f が有理型である場合にも結論は成り立つ．それは Ahlfors の被覆面の理論 (Ahlfors [1] 又は Hayman [2, Chapter 5] を参照) から導くことができる事実である．上記の形では，これは本質的に Hayman [1] による結果である．それは彼の著書 [2] の Theorems 6.8, 6.6, 及び 5.5 から直接従う事実である．Theorem 6.8 とは次の結果である．

Theorem 2.3.2 (Strong versions of the theorems of Schottky and Landau).
$\mathcal{F}$ は $|z|<1$ で正則な函数の成す *normal invariant family* とする．そのとき，$\mathcal{F}$ にのみ依存した定数 C で,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots \in \mathcal{F}$$

に対しては

$$|a_1| \le 2\mu(\log\mu + C)$$

かつ

$$M(r,f) \le \mu^{(1+r)/(1-r)} \exp\left(\frac{2Cr}{1-r}\right), \quad 0 \le r < 1,$$

となるものが存在する．但し，$\mu = \max(1, |a_0|)$, 及び $M(r,f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ である．

ここで，函数族 $\mathcal{F}$ が invariant であるとは，$f(z) \in \mathcal{F}$ であればその全ての translates

$$f(z, z_0, \lambda) = f\left(e^{i\lambda}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |z_0| < 1$$

が再び $\mathcal{F}$ に属することを言う．Normal invariant families の 1 つが次であたえられる:

Theorem 2.3.3 (Hayman [2, Theorem 6.6]). *$f(z)$ は $|z| < 1$ から Riemann 球面への有理型写像を与えているものとし，$|z| < 1$ 内にその閉包が含まれている様な或円板の $f(z)$ による像の面積を πS, 円周の像の長さを L とする．任意の正の定数 h について，その様な全ての円板に対し*

$$S \leq hL$$

となる函数 $f(z)$ が成す族を $\mathcal{L}(h)$ で表す．このとき $\mathcal{L}(h)$ は normal inveriant family である．

ちなみに metric は spherical であり，もし考えている円板が $|z| < r < 1$ ならば

$$L = L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\theta})| r d\theta}{1 + |f(re^{i\theta})|^2}$$
$$\pi S = \pi S(r) = \iint_{\substack{|z|<r \\ (z=x+iy)}} \frac{|f'(z)|^2 dxdy}{(1+|f(z)|^2)^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{|f'(\varrho e^{i\theta})|^2 \varrho d\varrho d\theta}{(1+|f(\varrho e^{i\theta})|^2)^2}$$

となる．即ち双方共 multiplicity を考慮したものである．また任意の r, $r_0 \leq r < 1$ に対して $S(r) \leq hL(r)$ が成り立つということは，$f(z)$ の image Riemann surface が Ahlfors の意味で regularly exhaustible でないということである．

Theorem 2.3.1 の証明のために 2 つの主要定理を述べておくことにする．先ず

Theorem 2.3.4 (First fundamental theorem). *D を Riemann 球面上の領域とするとき，定数 $h_1 = h_1(D)$ で*

$$|S(r) - S(r, D)| \leq h_1 L(r)$$

を満たすものが存在する．ここで $I(r, D)$ を D の上にある $f\{|z| < r\}$ の面積，$I_0(D)$ を D の面積としたとき，$S(r, D)$ は $I(r, D)/I_0(D)$ で与えられるものとする．

次の結果が Ahlfors の Second fundamental theorem であるが，我々は Hayman の Theorem 5.5 の代わりに次の形で述べておく．主張は前者に比べ精度が劣るが，我々の目的には十分であるし，用語の説明も簡略化されている．これは (それ以降も)Schiff [1] から引用したものである．$L(r)$ 及び $S(r)$ は上記のものとし，ここで言う Jordan 領域とは，sectionally analytic (s.a.) Jardan curve で囲まれたものとする．また，s.a. Jordan curve は (regular) analytic arcs P_1P_2, P_2P_3, ... , P_nP_1 の有限和から成る単純閉曲線であって，2 つの arcs の出会う各点 P_i, $i = 1$, 2, ... , n では cusp を成さないものである (cf. Hayman [2, p.126]).

Theorem 2.3.5 (Second fundamental theorem). *$w = f(z)$ は円板 $|z| \leq r$ から Riemann 球面への有理型写像を与えているものとする．D_1, ... , D_q, $q \geq 3$, は閉包が互いに素である様な w-sphere 上の Jordan 領域とせよ．そのとき，これらの領域 D_j の組にのみ依存する定数 h_2 で*

$$\sum_{j=1}^{q} (S(r) - \overline{n}(r, D)) \leq 2S(r) + h_2 L(r)$$

となるものが存在する．ここに $\overline{n}(r, D)$ は *multiplicity* を考慮しないで数えたときの $|z| < r$ 内にある D の上の相異なる *islands* の総数とする．

$w = f(z)$ によって各 D_ν, $1 \le \nu \le q$, に対応している様な互いに素な集合 $\triangle_\nu$ を考えたとき，各 $\triangle_\nu$ は 2 種類に分けられる有限個の成分からなる: $\triangle_\nu$ の成分 $\triangle$ は，もしその閉包 $\overline{\triangle}$ と $|z| = r$ とが交わる様なものであれば D_ν の上の *tongue*, そうでなければ *island* と呼ぶ．より具体的には $\triangle$ として $|z| < r$ の部分領域で $\overline{\triangle} \cap \{|z| = r\} = \phi$ となり，$f(z)$ によって D_ν の上に p 対 1 対応で写されているものを考える．このとき $\triangle$ は D_ν の上の multiplicity p の island である．$p = 1$ のとき $\triangle$ を simple island と呼ぶ．

Proof of Lemma 2.3.1. 一般性を失うことなく $z_0 = 0$ としてよい (実際 $f(z + z_0)$, $|z| < R$ を考えればよい)．また r, $0 < r < R$, は十分大きいものとして任意に固定して考える．更には (必要ならば各 G_j の部分領域 G_j' を考えて)G_1, G_2, G_3 は Second fundamental theorem で求められている仮定を全て満たすとしてよい．

最初に，各 G_j はその上の an island 又は islands を持っており，各 island の multiplicity は 2 以上であると仮定する．First fundamental theorem より，$h_{1j} = h_1(G_j)$ として

$$\overline{n}(r, G_j) \le \frac{1}{2} S(r, G_j) \le \frac{1}{2} S(r) + h_{1j} L(r), \quad j = 1,\, 2,\, 3$$

が成り立つ．また G_4 として無限遠点を含む様な Jordan 領域で $\overline{G}_4 \cap \overline{G}_j = \phi$, $j = 1$, 2, 3 とすると，仮定より G_4 上には islands は存在しない．よって，$\overline{n}(r, G_4) \equiv 0$. 以上を Second fundamental theorem に適用すると，

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{2} S(r) - h_{1j} L(r) \right) + S(r) \le 2S(r) + h_2 L(r),$$

従って，

$$S(r) \le 2(h_2 + \sum_{j=1}^{3} h_{1j}) L(r)$$

を得る．

次に，或 G_j, $i = 1, 2, 3$ が island(s) を含まないときには $\overline{n}(r, G_j) \equiv 0$ なので，再び Second fundamental theorem より同様の評価を得る．

今，$h = 2(h_2 + \sum_{j=1}^{3} h_{1j})$(但し，後半の場合には $h_{1j} = 0$) と置くと，これは勿論，G_1, G_2, G_3 にのみ依る．(即ち f には無関係の) 正の定数である．それ故 Lemma 2.3.1 の条件を満たす ($z_0 = 0$) $f(z)$ に対して，$f(z/r)$ の translates 全体の成す族 $\mathcal{F}_r$ は $\mathcal{L}(h)$ の部分族として normal (かつ invariant) であることが Theorem 2.3.3 より従う[11]．それ故 $\mathcal{F}_R$ もまた normal invariant family である．

[11] この主張は，Schiff [1, p. 86] に詳細に述べられている．

さて，Therem 2.3.2 をこの族 $\mathcal{F}_R$ に適用すれば，$|\zeta| < 1$ に対して

$$f(R\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots$$

と書くとき

$$R|f'(0)| = |a_1| \leq 2\mu(\log\mu + C)$$

より $R \leq 2\mu(\log\mu + C)/|f'(0)|$ を得る ($f'(0) = 0$ ならば Lemma 2.3.1 は何も主張していない; $R \leq +\infty$)．今，定数 C は族 $\mathcal{F}_R$ にのみ依存 (Theorem 2.3.2) しており，その族は定数 h にのみ，それ故 3 つの領域 G_1, G_2, G_3 にのみに依存したものであることも得られる．以上で Lemma 2.3.1 の主張は証明された．$\square$

次に，iteration theory から引用される結果を紹介する．Theorem 2.2.1 を証明する過程に於いて，attracting 及び rationally indifferent periodic points に関する結果が幾つか利用されている．次の Lemma で，rationally indifferent periodic points に関して必要となる結果をまとめる．これらは本質的に Fatou [1, Chapter 2, 4] によるものである．最近の解説としては，Lyubich [1, §1.10] の概説記事を挙げることが出来る．Fatou も Lyubich も有理函数だけを考察しているけれども，その諸々の結果は整函数についても同様に成り立つ．Fatou の諸結果を Baker [5] は，多項式或いは有理函数が或 primitive period の periodic points を持つことができないのは如何なる場合なのをかを決定する際に用いた．ここでの Fatou の結果に関する記述は，Baker [5, Lemma 4] 及び Lyubich [1, §1.10] の記述に従っている．

Lemma 2.3.6. *f は整函数とし，z_0 はその primitive priod p の periodic point とする．z_0 が rationally indifferent であり，t は $(f_p'(z_0))^t = 1$ となる最小の正の整数とする．このとき f_{pt} は*

$$f_{pt}(z) = z_0 + (z - z_0) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, \quad a_{m+1} \neq 0$$

という Taylor series を持つ．ここで m は或正整数 k に対し $m = kt$ という形をしている．更に $z_j = f_j(z_0)$, $1 \leq j \leq p-1$, と定義したとき，各 j, $0 \leq j \leq p-1$ に対し z_j を境界点に持ち各 $z \in D_{ij}$ について $\lim_{\nu\to\infty} f_{\nu p} = z_j$ を満たすという性質を有した丁度 m 個の f の Fatou set の成分 D_{ij}, $1 \leq i \leq m$ が存在する．これらの領域 D_{ij} を Leau domains と呼ぶ．また $pm = pkt$ 個の Leau domains D_{ij} の全体の集合は cycles of Leau domains と呼ばれる k 個の相異なる部分集合に分かれており，かく部分集合は f により順に移り合って循環する pt 個の領域で構成されている．各々の cycle of Leau domains は，f の逆函数 f_{-1} の singularities (即ち f の critical values 及び有限な漸近値，更にはこれらの値の (有限な) limit points) を少なくとも一つ含んでいる．

全ての Leau domains が Leau petals と呼ばれる部分領域 L_{ij} を含むが，これらは z_j を境界点に持ちかつ区分的に解析的な曲線によって囲まれるものを言う．この L_{ij} 全体の和集合を L とし，$\varepsilon > 0$ と仮定せよ．そのとき，$f(L) \subset L$ かつ各 i, j については $L_{ij} \subset D(\varepsilon, z_j)$ となる様に L_{ij} 全体を選ぶことが出来る．

Attracting periodic points については状況はもっと単純である．これはつぎの Lemma の様に記述できる (cf. e.g., Fatou [1, Chapter 4] か Lyubich [1, §1.8])．

Lemma 2.3.7. f は整函数で z_0 はその *primitive periodic priod* p の *attracting periodic point* とする．$z_j = f_j(z_0)$, $1 \le j \le p-1$ と定義して D_j は z_j を含んでいる *Fatou set* の成分を表すものとする．また D を全ての D_j, $0 \le j \le p-1$ の和集合として定義する．そのとき D は f_{-1} の少なくとも一つの *singularity* を含む．

更には，いくつかの仮定の下で Leau domains 及び Lemma 2.3.7 の domains D_j が有界となることを主張する様な結果が必要となって来る．これについては Bhattacharyya [1, Theorem 1] が f の位数 $< \frac{1}{2}$ または位数 $= \frac{1}{2}$ で type 0 であるときに既に証明してある[12]．次の結果を証明するために Bhattacharyya の方法を利用する．

Lemma 2.3.8. f は整函数，z_0 はその *primitive period* p の *rationally indifferent* 或いは *attracting periodic point* とする．$1 \le j \le p-1$ に対し $z_j = f_j(z_0)$ とする．もし z_0 が *rationally indifferent* ならば，z_j の一つを境界点を持つ *Leau domais* 全ての和集合を D とする．もし z_0 が *attracting* ならば，D は *Lemma 2.3.7* にあるものとする．$\Gamma_0 \cap f(\Gamma_0) = \phi$ かつ $\Gamma_0 \subset f(\mathit{int}(\Gamma_0))$ である様な単純閉曲線 Γ_0 が存在すると仮定する．ここで $\mathit{int}(\Gamma_0)$ は Γ_0 の内部を表す．更には $0 \le j \le p-1$ に対して $z_j \in \mathit{int}(\Gamma_0)$ と仮定すれば，$D \subset \mathit{int}(\Gamma_0)$ である．

Proof of Lemma 2.3.8. 証明は z_0 が rationally indifferent である場合にのみ行う．z_0 が attracting である場合にも証明は同様にして与えられる．各 z_j に対する Leau petals 全ての和集合 L を Lemma 2.3.6 の様に選ぶとする．$f(L) \subset L$ かつ $L \subset \mathrm{int}(\Gamma_0)$ と仮定してよい．今 $D \not\subset \mathrm{int}(\Gamma_0)$，即ち $D \cap \Gamma_0 \ne \phi$ とせよ．そのとき Leau petals の一つを Γ_0 とつないでいる様な D 内の或曲線 γ がある．γ は D の compact な部分集合であるから，$0 \le j \le p-1$ を満たす j で，$z \in \gamma$ に対して一様に $\lim_{\nu\to\infty} f_{\nu p}(z) = z_j$ となるものが存在する．その一方で，各 $\nu \ge 1$ につ

---

[12] Bhattacharyya [1, Theorem 1] には次のようにある: $f(z)$ は growth $(\frac{1}{2}, 0)$ の非定数整函数として $\{\alpha_k\}$, $k = 1, \ldots, n$ は order n の attracting cycle であるとする．このとき，その $\{\alpha_k\}$ の immediate domain of attraction $D_{\{\alpha_k\}}$ は有界である．即ち，Lemma 2.3.7 の言葉では，$f(z)$ の位数が $< \frac{1}{2}$ または $= \frac{1}{2}$ のときには type 0 であるときに，D は有界である．この証明の基本点は，この様な $f(z)$ について

$$\limsup_{r\to\infty} \min_{|z|=r} |f(z)| = \infty$$

が成り立つという，いわゆる Wiman の定理とその拡張にある．それについては Boas Jr. [1, Chapter 3] を参照するものとする．Bhattacharyya [1] ではこれによってある十分大きな r に対して

$$\min_{|z|=r} |f(z)| > r$$

が成り立つことを得ている．これと Lemma 2.3.8 の条件: $\Gamma_0 \cap f(\Gamma_0) = \phi$ かつ $\Gamma_0 \subset f(\mathrm{int}(\Gamma_0))$ とが対応する．また Bhattacharyya [1] の Remark には，rationally indifferent periodic points についてもこの結果は同様に示されると述べられており，更には $n = 1$ ではこれが次の意味で best possible であることを注意している: 任意の $t > 0$ に対して位数 $\frac{1}{2}$ で type が t の整函数で D が非有界である様な attracting fixpoint z_0 を持つものが存在する．またこの様な D に於ける $|f(z)|$ の増大度についても考察されていることをつけ加えておく．この論文に関しては Whittington [1] も参照するとよいと思われる．

いて $f_\nu(z_\nu) \in \Gamma_0$ となる $z_\nu \in \gamma$ が存在していることは容易に分かる．これは矛盾であり，Lemma は証明された． □

Baker による整函数の力学系の組織だった研究は大変重要である．次に紹介する Lemma はその流れの中でしばしば現れるものである．詳しくは，Baker [1], [2] を参照されたい．

Lemma 2.3.9. $g(z)$ は超越的整函数，$0 < A < B$, $0 < R$ は定数とし，$|z| < A$ ならば $|g(z)| < R$，$|z| = B$ のときは $|g(z)| > R$ であるとする．このとき，円環 $\{z : A < |z| < B\}$ に含まれ，原点の回りを一周する *simple closed curve* Γ で $|g(\zeta)| = R$, $\zeta \in \Gamma$ を満たすものが存在する．

この節の最後に，Baker [6] の稠密性定理を紹介しておく[13].

Theorem 2.3.10. f を整函数とすると，*repelling periodic points* は $J(f)$ 内に *dense* に存在する．

定理の証明を追うために，次の 3 つの Lemma を準備する．

Lemma 2.3.11. f は $\{|z| < 1\}$ で正則とする．ある正の定数 h_1 があって $S(r) < h_1 L(r)$, $0 < r < 1$ ならば，h_1 によって決まるある h_2 があって

$$f^{\#}(0) < h_2$$

を満たす，ここで $f^{\#}(z) := \dfrac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$ は (球面上での微分) である．

Lemma 2.3.12. f は $\{|z| < 1\}$ で正則とする．$\mathbb{C}$ 内の有界領域 D_1, D_2, D_3 はその閉包も互いに素，即ち $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \phi$, $i \neq j$ であるとすると，D_j, $j = 1$, *2*, *3* にのみに依る $C > 0$ が取れて $f^{\#}(0) > C$ ならば[14] $\{|z| < 1\}$ は f によりある D_j に単射にうつる *island* を含むようにできる[15].

Lemma 2.3.13. $\mathcal{F}$ を領域 Ω 上の正則函数の族とする．$\mathcal{F}$ が *nomal* であることの必要十分条件は，任意の *compact* 集合 $K \subset \Omega$ に対してある正の定数 $C = C(K)$ があって $f^{\#}(z) \leq C$, $z \in K$, $f \in \mathcal{F}$.

Proof of Theorem 2.3.10. $z_0 \in J(f)$, V を z_0 の任意の近傍としたときに V が repelling periodic point を含むことを示す．$J(f)$ は perfect なので円板 $D(a_j, \varepsilon) \in V$, $j = 1, 2, 3$ を $a_j \in J(f)$ で $\overline{D(a_i, \varepsilon)} \cap \overline{D(a_j, \varepsilon)} = \phi$, $i \neq j$ とできる．さて $\{f_n\}$ は各 $D(a_i, \frac{\varepsilon}{3})$ で nomal でないので Lemma 2.3.13 より $b_i = b_i(n) \in D(a_i, \frac{\varepsilon}{3})$ が取れて

$$(f_n)^{\#}(b_i) > \frac{3C}{\varepsilon}, \quad n > n_0(i), \tag{2.3.1}$$

ここで C は Lemma 2.3.12 の定数．

---

[13] 詳しくは Beardon [1], Schiff [1] を参照されたし

[14] $\{|z| < R\}$ に変えたときは，$f^{\#}(0) > C$ は $f^{\#}(0) > \frac{C}{R}$ に変わる．

[15] 証明は Ahlfors の Five islands theorem による．

(2.3.1) が $i = 1,\ 2,\ 3$ で同時に成り立つように n を取り，$g_i(\zeta) = f_n(b_i + \zeta)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ と置く．

$$g_i^{\#}(0) = f_n^{\#}(b_i) > \frac{3C}{\varepsilon}$$

であるから，Lemma 2.3.12 より $D(b_i, \frac{\varepsilon}{3})$ はある $D(a_j, \varepsilon)$ に単射に写るような island を含む．これを繰り返すと f のある iteration f_ν はある j について $D(b_j, \frac{\varepsilon}{3})$ 内に $D(a_j, \varepsilon)$ に単射に写るような island を持つことが分かる．

$\varphi := (f_\nu)^{-1}$ と置く．$\varphi(z) - z = (\varphi(z) - a_j) - (z - a_j)$ に Rouché の定理を使うと，$\partial D(a_j, \varepsilon)$ 上で $|\varphi(z) - a_j| < |z - a_j|$ なので $\varphi(z)$ は $D(a_j, \varepsilon)$ 内に fixpoint p を持つことが分かる．$h : D(a_j, \varepsilon) \longrightarrow \{|z| < 1\}$ を $h(p) = 0$ であるような Möbius 変換すると

$$h\varphi h^{-1}(0) = 0, \quad \overline{h\varphi h^{-1}\{|z| < 1\}} \subset \{|z| < 1\}$$

であるから Schwarz の Lemma を使うと

$$|h\varphi h^{-1}(0)| = |\varphi'(p)| < 1$$

即ち，$|(f_\nu)'(p)| > 1$ が分かる．よって p は repelling periodic point であることが示された． □

2.4. The Bergweiler theorem

固定点に関する Bergweiler の定理, Theorem 2.2.1 を証明する準備として次の定理を証明する:

Theorem 2.4.1 (Bergweiler [6], [7]). *h, g は超越的整函数，$K > 1$, ε は正定数とする．$h \circ g$ の repelling fixpoints z' は有限個を除いて*

$$|g(z')| < M\left(\frac{|z'|}{2}, g\right)$$

を満たすとする．ω_1, ω_2 は complex numbers で $r \notin E$ のとき

$$\frac{1}{K} M(r, g) \le |\omega_j| \le K M(r, g), \quad j = 1,\ 2 \tag{2.4.1}$$

が成り立つものとする．このとき

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \log |h(\omega_1)| \le \log |h(\omega_2)| \le (1+\varepsilon) \log |h(\omega_1)| \tag{2.4.2}$$

が成り立つ.

Proof of Theorem 2.4.1. この定理のすべての仮定を満たし，かつ (2.4.2) が成立しないような K, ε, ω_1, ω_2 が存在するとする．必要ならば ω_1, ω_2 を交換すればよいから

$$(1+\varepsilon) \log |h(\omega_2)| < \log |h(\omega_1)|$$

と考えてよい．まず初めに，r が十分に大なるとき，次に述べる 3 つの式が成立するような ω_0 が存在することを示す:

$$\frac{1}{K}M(r,g) \le |\omega_0| \le KM(r,g), \tag{2.4.3}$$

$$|h(\omega_0)| \ge |\omega_0|, \tag{2.4.4}$$

$$\frac{|h'(\omega_0)|}{|h(\omega_0)|\log|h(\omega_0)|} \ge \frac{\delta}{|\omega_0|}, \tag{2.4.5}$$

但し，δ は正定数で r が十分大なるとき K, ε に依存して定まる．ω_0 の存在を $|\omega_1| \le |\omega_2|$ なる場合について証明するが，$|\omega_2| < |\omega_1|$ の場合も同様に示せる．また ω_1 として

$$|h(\omega_1)| = M(|\omega_1|, h)$$

となるようなもので置き換えてもよい．(2.4.1) 式より $M(r,g) \le K|\omega_1|$, $|\omega_2| \le KM(r,g)$ を考慮して

$$|\omega_2| \le K^2|\omega_1|$$

を得る．従って，ω_1 と ω_2 とを結ぶ曲線 $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) = \omega_1$, $\gamma(1) = \omega_2$ でその長さが高々$(K^2 - 1 + \pi)|\omega_1|$ であり，さらに

$$\frac{1}{K}M(r,g) \le |\omega_1| \le |\gamma(t)| \le |\omega_2| \le KM(r,g)$$

となるものが存在する．そこで

$$t_1 = \inf\{t:\ (1+\varepsilon)\log|h(\gamma(t))| \le \log|h(\omega_1)|\}$$

を考えると $t_1 > 0$ であり，$(1+\varepsilon)\log|h(\gamma(t_1))| = \log|h(\omega_1)|$ である．また対数の適当な分岐を選べば r が十分大なるとき

$$\log|h(\gamma(t_1))| + \pi = \log|h(\gamma(t_1))|\left(1 + \frac{(1+\varepsilon)\pi}{\log M(|\omega_1|, h)}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} |\log h(\gamma(t_1))| &\le \log|h(\gamma(t_1))| + \pi \\ &\le \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\log|h(\gamma(t_1))|. \end{aligned}$$

を得る．従って

$$\begin{aligned} &|\log\log h(\omega_1) - \log\log h(\gamma(t_1))| = \left|\log\frac{\log h(\omega_1)}{\log h(\gamma(t_1))}\right| \\ &\ge \log\left|\frac{\log h(\omega_1)}{\log h(\gamma(t_1))}\right| = \log|\log h(\omega_1)| - \log|\log h(\gamma(t_1))| \\ &\ge \log\log|h(\omega_1)| - \log\left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\log|h(\gamma(t_1))|\right) \\ &= \log\left((1+\varepsilon)\log|h(\gamma(t_1))|\right) - \log\log|h(\gamma(t_1))| - \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \log(1+\varepsilon) - \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}\log(1+\varepsilon)-\log\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) &\le |\log\log h(\omega_1)-\log\log h(\gamma(t_1))| \\ &= \left|\int_0^{t_1}\frac{h'(\gamma(t_1)\gamma'(t))}{h(\gamma(t)\log h(\gamma(t))}dt\right| \\ &\le \max_{0\le t\le t_1}\left|\frac{h'(\gamma'(t))}{h(\gamma(t))\log h(\gamma(t))}\right|\int_0^{t_1}|\gamma'(t)|dt \\ &\le \frac{|h'(\gamma(t_0))|}{|h(\gamma(t_0))|\log|h(\gamma(t_0))|}(K^2-1+\pi)|\omega_1|\end{aligned}$$

但し，maximum は $t=t_0$ で attain されるものとする．ここで $\omega_0=\gamma(t_0)$ と定義すると $|\omega_1|\le|\omega_0|$ であるから，r が十分大のとき

$$\delta=\frac{\log(1+\varepsilon)-\log(1+\frac{\varepsilon}{2})}{K^2-1+\pi}$$

に対して (2.4.5) が成り立つ．また $\gamma(t)$ の定義より (2.4.3) は明らか．さらに h の超越性と $|\omega_1|\ge\frac{1}{K^2}|\omega_2|$ を考慮して，$0\le t_0\le t_1$, $|\omega_2|\ge|\omega_0|$ より

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\log|h(\omega_0)| > \log|h(\omega_1)| &= \log M(|\omega_1|,h)\ge A\log|\omega_1| \\ &\ge A\left(1-\frac{2\log K}{\log|\omega_2|}\right)\log|\omega_2| \\ &\ge A\left(1-\frac{2\log K}{\log|\omega_2|}\right)\log|\omega_0|\end{aligned}$$

定数 A を適当に選んで，$1+\varepsilon<A(1-2\log K/\log|\omega_2|)$ とできるから

$$\log|h(\omega_0)|\ge\log|\omega_0|$$

よって (2.4.4) が成り立つ．

さて，z_0 を $|z_0|=r\notin E$, $Lm(E)<\infty$ であり $|g(z_0)|=M(r,g)$ となるようにとる．このとき σ を適当に定めて

$$\omega_0=e^\sigma g(z_0)$$

であり，$|\operatorname{Re}\sigma|\le\log K$, $|\operatorname{Im}\sigma|\le\pi$ とできる．このとき Lemma 1.4.2 より

$$|s|\le(1+o(1))\frac{\log K+\pi}{\nu(r,g)}$$

となる s が存在して $g(z_0e^s)=e^\sigma g(z_0)=\omega_0$ となるから，$u_0=z_0e^s$ とおくと $g(u_0)=\omega_0$ であり，さらに

$$|g'(u_0)|\sim\left|\frac{\nu(r,g)}{r}g(u_0)\right|=\frac{\nu(r,g)}{r}|\omega_0|$$

そして

$$\begin{aligned}|u_0 - z_0| &= r|e^s - 1| \le (1+o(1))sr \\ &\le (1+o(1))\frac{\log K + \pi}{\nu(r,g)} r \le \frac{\log K + 4}{\nu(r,g)} r\end{aligned}$$

ここで

$$f(z) = \frac{\nu(r,g)}{u_0}(h(g(z)) - u_0)$$

とおく．このとき

$$\left|\frac{u_0}{h(\omega_0)}\right| \le \frac{|u_0|}{|\omega_0|} = \frac{|z_0 e^s|}{|e^\sigma g(z_0)|} = \frac{r}{M(r,g)}\frac{e^s}{e^\sigma} \to 0, \quad \text{as } r \to \infty$$

なので

$$\begin{aligned}|f(u_0)| &= \left|\frac{\nu(r,g)}{u_0}(h(g(u_0)) - u_0)\right| \\ &\sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h(\omega_0) - u_0| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h(\omega_0)|\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

特に (2.4.6) と (2.4.3), (2.4.4) より十分大きな r に対して $|f(u_0)| > 1$ である．なぜならば

$$|f(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h(\omega_0)| \ge \frac{\nu(r,g)}{r}|\omega_0| \ge \frac{1}{K}\frac{\nu(r,g)}{r}M(r,g) \to +\infty, \quad \text{as } r \to \infty.$$

一般に

$$\log \nu(r,g) = o(\log M(r,g)), \quad r \notin E, \quad \text{as } r \to \infty.$$

従って，(2.4.6) より

$$\log|f(u_0)| \sim \log|h(\omega_0)|\left(1 + \frac{\log \nu(r,g) - \log r}{\log|h(\omega_0)|)}\right)$$

を得るが，ここで $\log|h(\omega_0)| \ge \log|\omega_0| = \mathrm{Re}\,\sigma + \log M(r,g)$ なので

$$\frac{\log \nu(r,g) - \log r}{\log|h(\omega_0)|} \le \frac{\log \nu(r,g) - \log r}{\log M(r,g) + \mathrm{Re}\,\sigma} \to 0, \quad r \to \infty$$

であるから

$$\log|f(u_0)| \sim \log|h(\omega_0)|. \tag{2.4.7}$$

更に $f'(z) = \dfrac{\nu(r,g)}{u_0}h'(g(z))g'(z)$, $|g'(u_0)| \sim \dfrac{\nu(r,g)}{r}|\omega_0|$ であることから

$$|f'(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)}{r}|h'(g(u_0))g'(u_0)| \sim \frac{\nu(r,g)^2}{r^2}|h'(\omega_0)\omega_0| \tag{2.4.8}$$

を得る．(2.4.6)–(2.4.8) と (2.4.5) を結びつけて $r \notin E$ のとき

(2.4.9)
$$\begin{aligned}\frac{2|f(u_0)|(\log|f(u_0)|+A)}{|f'(u_0)|} &= 1+o(1)\frac{2|h(\omega_0)|\log|h(\omega_0)|r}{|\omega_0 h'(\omega_0)|\nu(r,g)} \\ &\le (1+o(1))\frac{2}{|\omega_0|}\frac{r}{\nu(r,g)}\frac{|\omega_0|}{\delta} \\ &< \frac{3}{\delta}\frac{r}{\nu(r,g)}\end{aligned}$$

但し，A は定数である．整数 N を $N > 5/\delta$ となるようにとり，$G_j = D(2\pi ijN, 5/\delta)$, $j = 1, 2, 3$ を考える．ここで $D(a, R)$ は中心 a, 半径 R の disk とする．Ahlfors の定理によれば (2.4.9) に注意すると，$D(u_0, 3r/\delta\nu(r,g))$ に含まれる subdomain G と j, $j = 1, 2, 3$ が存在して

$$f : G \to G_j : \text{conformally onto}$$

とできる．Lemma 1.4.3 に従って τ_{-jN} を選び $\sigma(z) = z\exp(\tau_{-jN}(z))$ を考え，更に

$$u_j := u_0\left(1 + \frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)}\right)$$

と定義する．このとき $r \notin E$ ならば

$$|\tau_{-jN}(z)\nu(r,g) + 2\pi ijN| \to 0, \quad r \to \infty, \quad r \notin E$$

ゆえ

$$\tau_{-jN}(z) \to -\frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)} + \frac{\varepsilon}{\nu(r,g)}$$

とおくことができる．但し，$\varepsilon \to 0$, as $r \to \infty$ である．このとき

$$\begin{aligned}\sigma(u_j) - u_0 &= u_j e^{-\frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)} + \frac{\varepsilon}{\nu(r,g)}} - u_0 \\ &= u_0\left(1 + \frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)}\right)e^{-\frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)} + \frac{\varepsilon}{\nu(r,g)}} - u_0 \\ &= u_0\Bigg\{\left(1 + \frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)} + \frac{\varepsilon}{\nu(r,g)} + \frac{1}{2!\nu(r,g)^2}(2\pi ijN + \varepsilon)^2 + \dots\right) - 1\Bigg\} \\ &= \frac{u_0}{\nu(r,g)}\frac{2\pi^2 j^2 N}{\nu(r,g)}(1+o(1))\end{aligned}$$

よって，十分大きな r に対して

$$|\sigma(u_j) - u_0| \sim \frac{r}{\delta\nu(r,g)}\frac{2\pi^2 j^2 N^2 \delta}{\nu(r,g)}(1+o(1)) < \frac{1}{2}\frac{r}{\delta\nu(r,g)}$$

また τ_{-jN} の評価式より，特に $|\sigma(z)| \sim |z|$．以上より

$$D\left(u_0, \frac{3r}{\delta\nu(r,g)}\right) \subset \sigma\left(D\left(u_j, \frac{4r}{\delta\nu(r,g)}\right)\right)$$

を得る．また同じく Lemma 1.4.3 より $\sigma'(z) \neq 0$, $|z| = r \notin E$, $r \to \infty$ なので，domain $H \subset D(u_j, 4r/\delta\nu(r,g))$ が存在して $G = \sigma(H)$ となり，従って

$$f \circ \sigma : H \to G_j : \text{conformally onto}$$

このことと

$$h(g(\sigma(z))) = \frac{u_0}{\nu(r,g)} f(\sigma(z)) + u_0, \quad \frac{2\pi ijN}{\nu(r,g)} u_0 + u_0 = u_j$$

によって

$$h \circ g \circ \sigma : H \to D\left(u_j, \frac{5|u_0|}{\delta\nu(r,g)}\right) : \text{conformally onto}$$

となる．再び，Lemma 1.4.3 によって $h(g(\sigma(z))) = h(g(z))$ なので

$$h \circ g : H \to D\left(u_j, \frac{5|u_0|}{\delta\nu(r,g)}\right) : \text{conformally onto}$$

ここで $r \notin E$ が十分大ならば $\overline{H} \subset D(u_j, 5|u_0|/\delta\nu(r,g))$ であることに注意する．このとき Rouché の定理より $h \circ g$ は H 内に 1 つの fixpoint z' を持つことが導ける．更に Schwarz の Lemma によって z' は $h \circ g$ の repelling fixpoints である．更に

$$\begin{aligned} |z' - z_0| &\leq |z' - u_j| + |u_j - u_0| + |u_0 - z_0| \\ &\leq \frac{5|u_0|}{\delta\nu(r,g)} + \frac{2\pi jN|u_0|}{\nu(r,g)} + \frac{\log K + 4}{\nu(r,g)} r \\ &\leq \frac{Cr}{\nu(r,g)}, \quad r \notin E \end{aligned}$$

ここで C は $5/\delta + 2\pi jN + \log K + 4$ より大なる定数．従って $z' = z_0 e^t$ と表すと

$$|t| \leq (1 + o(1))C/\nu(r,g)$$

であり，Lemma 1.4.1 より $r \notin E$ が十分大ならば

$$g(z_0 e^t) \sim g(z_0) e^{\nu(r,g)t}$$

ここで

$$\begin{aligned} |\nu(r,g)t| &\leq \nu(r,g)(1 + o(1))C/\nu(r,g) \\ &= (1 + o(1))C. \end{aligned}$$

また

$$|g(z_0)| = M(r, g)$$

であることを考慮して

$$|g(z')| \geq (1+o(1))e^{-C}M(r,g) \geq M\left(\frac{|z'|}{2}, g\right) \tag{2.4.10}$$

さて，z_0 は (r と共に) 任意に大きくとれることになり，従って (1.2.10) を満たす repelling fixpoints が無限個存在することになる．これは矛盾である．□

2.3 節で述べた Lemma，および Theorem 2.4.1 を適応して Bergweiler の固定点に関する定理，Theorem 2.2.1 の証明に取りかかることにする．

Proof of Theorem 2.2.1. f が primitive period n, $n \geq 2$, の repelling periodic point を高々有限個しか持たないと仮定する．$l := \max\{p : p < n, p|n\}$, $m := n - l$ とし，$h := f_l$, $g := f_m$ とする．

先ず，このような設定の基で Theorem 2.4.1 の仮定が g, h 両方に関して，即ち

$$|g(z')| < M\left(\frac{|z'|}{2}, g\right), \quad |h(z')| < M\left(\frac{|z'|}{2}, h\right)$$

が満たされることを示す．z' を $h \circ g$ の repelling fixpoint，即ち f の period n の periodic point とする．我々の仮定から primitive period n の repelling periodic points は有限個であるから，$|z'|$ が十分大きければ，z' の primitive period j は $j < n$ である．明らかに $1 \leq j \leq l \leq m < n$ である．よって，$j < m$ のときは 1 章の 1.4 節の Lemma 1.4.4 で述べられた maximum modulus についての議論から示される (1.4 節，22–23 頁)．$j = m$ のときは，先に触れた性質から十分大きな $|z'|$ に対して $|g(z')| = |z'| < M(|z'|/2, g)$ である．$f_n = h \circ g = g \circ h$ であるから h と g の役割を代えることで h についても示されたことになる．

よって，Theorem 2.4.1 の ω_j のひとつを maximum modulus を与える点のひとつと取ることで，ある非有界無限点列 $\{t_\nu\}$ で

$$\log|g(z)| \sim \log M(t_\nu, g), \quad \text{for } |z| = t_\nu \tag{2.4.11}$$

を満たすものが取れる。

正定数 δ を $\delta < \frac{1}{2}$ とする．$s_\nu \notin E$ を十分大きな ν に対して $(t_\nu)^{1-2\delta} \leq s_\nu \leq (t_\nu)^{1-\delta}$ を満たすように取る．Hadamard の 3 円定理[16] から，任意の $1 < \eta < 1+\sqrt{2}$ に対して

$$\log M(r,g) \leq \frac{\log M(r^\eta, g)}{(1-o(1))\eta}, \quad \text{as } r \to \infty \tag{2.4.12}$$

[16] g を超越整函数とする．$0 < r_1 < r_2 < r_3$ とすれば

$$M(r_2, g) \leq M(r_1, g)^\theta M(r_3, g)^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1}$$

が成り立つ．ここでは，$1 < \eta$ なる任意の η に対して $r_1 = 1$, $r_2 = r$, $r_3 = r^\eta$ と置けば (2.4.12) を得る．

を得る．よって，$(s_\nu)^{1/(1-\delta)} \leq t_\nu$ であるから $|z| = t_\nu$ を，即ち ν を十分大きくとって

$$\log M(s_\nu, g) \leq \frac{M((s_\nu)^{1/(1-\delta)}, g)}{(1-o(1))(1/(1-\delta))} \leq (1+o(1))(1-\delta)M(t_\nu, g) < \log|g(z)|$$

を得る．Theorem 2.3.9 より，円環 $s_\nu \leq |z| \leq t_\nu$ の中に原点の回りを一周するような simple closed curve Γ があって $\zeta \in \Gamma$ に対して $|g(\zeta)| = M(s_\nu, g)$ である．$s_\nu \notin E$ であるから，再び Theorem 2.4.1 より $\zeta \in \Gamma$ について ω_j のひとつを h の半径 $|g(\zeta)| = M(s_\nu, g)$ であるところの maximum modulus を与える点とすれば[17]

$$\begin{aligned} \log|f_n(\zeta)| &= \log|h(g(\zeta))| \\ &= (1+o(1))\log M(M(s_\nu, g), h) \\ &\geq (1+o(1))\log M(s_\nu, f_n) \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

$r_\nu \notin E$ を $(s_\nu)^{1-2\delta} \leq r_\nu \leq (s_\nu)^{1-\delta}$ なるように取る．再び 3 円定理より，$(r_\nu)^{1/(1-\delta)} \leq s_\nu$ であることから ν を大きく取れば (2.4.12) と併せて，$\zeta \in \Gamma$ に対して

$$\begin{aligned} \log M(r_\nu, f_n) &\leq (1+o(1))(1-\delta)M(s_\nu, f_n) \\ &\leq (1+o(1))(1-\delta)\log|f_n(\zeta)| \leq \log|f_n(\zeta)| \end{aligned}$$

上記のような Baker の議論から同様にして，$\mathrm{int}(\Gamma)$ に含まれるある simple closed curve Γ_0 で原点の回りを 1 周する曲線で $z \in \Gamma_0$ のとき $|f_n(z)| = M(r_\nu, f_n)$ となるものが存在する．明らかに，Γ_0 は円環 $\{z : r_\nu \leq |z| \leq t_\nu\}$ に含まれる．また仮定より $t_\nu \leq (r_\nu)^{1/(1-2\delta)^2}$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して δ を 0 に近くとって，$t_\nu < (t_\nu)^\varepsilon + 1$ とできる．また r_ν をうまく取って $z \in \Gamma_0$ に対し $f'_k(z) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$ とできる．

領域 $G_0 := \mathrm{int}(\Gamma_0)$ とし，$1 \leq k \leq n$ に対し $G_k = f_k(G_0)$ としその境界を $\Gamma_k := \partial G_k$ とする．明らかに Γ_n は半径 $M(r_\nu, f_n)$ の円である．また $1 \leq k \leq n$ に対し，ν を十分大きく取れば

$$\Gamma_k \subset \{z : \frac{1}{2}M(r_\nu, f_k) \leq |z| \leq M(t_\nu, f_k)\} \subset G_{k+1}$$

であることが示される[18][19]．$z(t)$ が Γ_k を 1 周するとき $f(z(t))$ が Γ_{k+1} の回りを何周かすることになるがこの回数を p_{k+1} とする．偏角の原理より $a \in G_k$ に対し，

[17] 一般に超越的整函数 h, g に対して

$$M(M(r,g),h) \geq M(r, h\circ g)$$

である．

[18] $\Gamma_k \subset \{z : \frac{1}{2}M(r_\nu, f_k) \leq |z| \leq M(t_\nu, f_k)\}$ であること: $\Gamma_k \subset \{z : |z| \leq M(t_\nu, f_k)\}$ であることは明か．仮に $\zeta \in \Gamma_0$ で $|\zeta_0| \leq \frac{1}{2}M(r_\nu, f_k)$ があるとすると，ある $z_0 \in \Gamma_0$ があって $f_k(z_0) = \zeta_0$ なるものが存在する．よって，Lemma 1.4.4 より

$$\begin{aligned} M(r_\nu, f_n) &= |f_n(z_0)| = |f_{n-k}(\zeta_0)| \leq M(|\zeta_0|, f_{n-k}) \\ &\leq M(\tfrac{1}{2}M(r_\nu, f_k), f_{n-k}) < M((1-o(1))M(r_\nu, f_k), f_{n-k}) = M(r_\nu, f_n). \end{aligned}$$

これは矛盾である．

[19] $\{z : \frac{1}{2}M(r_\nu, f_k) \leq |z| \leq M(t_\nu, f_k)\} \subset G_{k+1}$ であること: $t_\nu < (r_\nu)^\varepsilon$ より ν を十分大

$f(z)=a$ なる点 $z\in G_{k-1}$ は重複度を含めて p_k 個存在する．G_k 達の包含関係より，$a\in G_k$ に対し，$f_k(z)=a$ なる点は G_0 の中に重複度を含めて $P_k:=p_1p_2\cdots p_k$ 個存在する．Rouché の定理より $f_k(z)=z$ の解，即ち f_k の fixpoint は重複度を含め G_0 の中に P_k 個存在する．加えて，偏角の原理より f' の零点は G_k の中に重複度を含めて $p_{k+1}-1$ 個存在する．

個数 p_k，況や P_k は k のみならず ν にも依存する．f_k は超越整函数であるから $\nu\to\infty$ のとき $p_k\to\infty$ である．よって G_0 内の period n の periodic point の数 P_n は P_k, $k<n$ に比べてはるかに多い．[20]

以下，重複した periodic point の個数を評価する．G_0 内の period n の periodic points の重複度を無視した個数を $\overline{P}_n$ で表す．G_0 内の primitive period n の periodic points の個数を N_n で表し，重複度を無視した個数を $\overline{N}_n$ で表すことにする．明らかに

$$\overline{P}_n-\overline{N}_n\le\sum_{k<n,\ k|n}\overline{P}_k\le\sum_{k<n,\ k|n}P_k.$$

ゆえに

$$\overline{N}_n\ge\overline{P}_n-\sum_{k<n,\ k|n}P_k=P_n-\sum_{k<n,\ k|n}P_k-(P_n-\overline{P}_n).$$

$P_n-\overline{P}_n$ は重複分を数えたものである．z_0 は multiple periodic point とする．即ち，$f_n(z)-z$ は z_0 の近くで

$$f_n(z)-z=a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad a_{m+1}\ne0,\quad m\ge1$$

と表せる点とする．このとき，$P_n-\overline{P}_n$ への貢献は m である．z_0 の primitive period を p とすると，Lemma 2.3.6 に従って正整数 t を選べば $pt\le n$ である．Lemma 2.3.6 によれば，z_0 に伴う Leau domains は少なくとも m/t 個の f_{-1} の singularity を含んでいる．(2.4.13) によって有限な asymptotic value は存在しない．ゆえに，f_{-1} の singulaities は $f(c)$, $f'(c)=0$ の形に限る．実際，Lemma 2.4.8 によると G_{p-1} に含まれる cycle of Leau domains に制限した f の逆函数の singulaities に $f(c)$ は成っている．よって，この cylce of Leau domains は f' の零点を含んでいる，また f' は G_{p-1} の中に少なくとも m/t 個の零点を含み，f_p による iteration でいづれかの $f_j(z_0)$, $0\le j\le p-1$ に収束する．$P_n-\overline{P}_n$ に対する z_0 の cycle $\{f_j(z_0):0\le j\le p-1\}$ の貢献の総和は pm である[21]．$G_{p-1}\subset G_{n-1}$, $m/t\ge$

きく取って $M(r_\nu,f)>2t_\nu$ となるようにする．Lemma 1.4.4 より

$$\begin{aligned}M(r_\nu,f_{k+1})&=M(r_\nu,f_k\circ f)=M((1-o(1))M(r,f),f_k)\\&\ge M(2(1-o(1))t_\nu,f_k)>M(t_\nu,f_k).\end{aligned}$$

[20] $k<n$ のとき

$$\frac{P_n}{P_k}\to\infty,\quad\text{as }\nu\to\infty$$

である．

[21] z_0 を primitive period p の periodic point としてその重複度を m とすると $f_j(z_0)$, $0\le j\le p-1$ の重複度も m である．

pm/n, また f' は $p_n - 1$ 個の零点を持つことを併せて

$$P_n - \overline{P}_n \le \sum pm \le \sum n\frac{m}{t} \le n(p_n - 1),$$

ここで $\sum$ は異なる Leau domains について加えたものである．ゆえに $p_k \to \infty$, as $\nu \to \infty$ であるから

$$\overline{N}_n \ge \overline{P}_n - \sum_{k<n,\ k|n} P_k = P_n - \sum_{k<n,\ k|n} P_k - n(p_n - 1) = P_n(1 - o(1)), \quad \text{as } \nu \to \infty.$$

以上から，$\overline{N}_n \to \infty$ as $\nu \to \infty$ が示された．しかし，Theorem 2.2.1 を示すためには更なる評価が必要である．そのために $\overline{N}_n$ をそれぞれの性質を満たす periodic point の個数を数えるものに分ける，即ち

$$\overline{N}_n = \overline{N}_{\mathrm{att}} + \overline{N}_{\mathrm{rat}} + \overline{N}_{\mathrm{irr}} + \overline{N}_{\mathrm{rep}},$$

ここで，$\overline{N}_{\mathrm{att}}, \overline{N}_{\mathrm{rat}}, \overline{N}_{\mathrm{irr}}, \overline{N}_{\mathrm{rep}}$ はそれぞれ primitive period n の periodic points で G_0 に含まれるもので，attracting, rationally indifferent, irrationally indifferent, repelling なものを重複度を無視して数えたものである．はじめに $\overline{N}_{\mathrm{att}}, \overline{N}_{\mathrm{rat}}$ を評価する．Lemma 2.3.6, 2.3.7 によれば，どの attracting または rationally indifferent cycle も或 f_{-1} の singularities と対応している．更に，f' の零点に対応している．上記の議論と同様にして

$$\overline{N}_{\mathrm{att}} + \overline{N}_{\mathrm{rat}} \le 2n(p_n - 1)$$

を得る．次に $\overline{N}_{\mathrm{irr}}$ の評価をする．$Q(z)$ を多項式で，全ての G_{n-1} 内にある f の primitive period n の periodic points z_0 に対し

$$Q(z_0) = 0, \quad Q'(z_0) = f'(z_0)$$

であるものとする．$0 < \xi < 1$ に対し

$$F(z) := f(z) - \xi Q(z)$$

と置く．明らかに，primitive period n の periodic points で G_0 に含まれるものは F の period n の periodic point である．また，primitive period n の periodic points で G_0 に含まれる全ての z_0 に対して

$$F_n'(z_0) = (1 - \xi)^n f_n'(z_0)$$

が成立する[22]．これは f の indifferent periodic points は F の attracting periodic point であることを示している．Lemma 2.3.7 より period n の periodic points

[22] z_0 を f の primitive period n の periodic point とすると $0 \le j \le p - 1$ に対して $f_j(z_0) = F_j(z_0)$, $F_j'(z_0) = (1 - \xi)^j f_j'(z_0)$ が帰納法によって示される．

で G_0 に含まれるは F_{-1} に対応し，F' の零点と対応している．Hurwitz の定理[23] によって，ξ を十分小さく取ることで F' の零点は G_{n-1} に含まれるようにできて，F' と f' は G_{n-1} の中に同じ数の singularities を持つことが示される．f' は丁度 $p_n - 1$ 個の零点を G_{n-1} 内に持つから，F は高々$n(p_n - 1)$ 個の period n の attracting periodic points を G_0 内に持つ．ゆえに，$\overline{N}_{\mathrm{irr}} \leq n(p_n - 1)$ である．結局

$$\overline{N}_{\mathrm{rep}} = \overline{N}_n - \overline{N}_{\mathrm{att}} - \overline{N}_{\mathrm{rat}} - \overline{N}_{\mathrm{irr}} \geq P_n - \sum_{k<n,\ k|n} P_k - 3n(p_n - 1)$$
$$= P_n(1 - o(1)), \quad \text{as } \nu \to \infty.$$

以上から，$\overline{N}_{\mathrm{rep}} \to \infty$ as $\nu \to \infty$ が示された．これは我々の仮定に矛盾する．ゆえに，Theorem 2.2.1 は証明された． □

2.5. Remarks and open problems

$|z| \leq r$ 内にある period n の periodic points の個数 $n(r, 1/(f_n(z) - z))$ には興味深いいくつかの問題が関連している．この個数についての評価は既に，位数が $\frac{1}{2}$ より小さな函数に関しては Baker [2] が，また位数有限で正の劣位数を持つ函数に関しては Bergweiler [4] が行っている[24]．しかしながら，一般の場合には $n(r, 1/(f_n(z) - z))$ に対する或種の評価を得るためには利用できるが，この種の “良い”結果を与えることに向いているとは思われない．Baker [4, p. 284] は $N(r, 1/(f_n(z) - z))$ と $T(r, f_n)$ とは常に増大度が同じかどうかを問うている．(Nevanlinna 理論で用いられるこれらの用語の定義は例えば, Hayman [2], Laine [1] などを参照されたい[25])．更には，$|z| \leq r$ 内にある primitive period n の repelling periodic points の個数を考察しても良い．Baker [2] の結果を用いて，位数が $\frac{1}{2}$ より小さい函数に対するその個数のある下界を得ることができる．Baker [2, Lemma 1] は f の periodic points 全体に対してのいかなる仮定も無しに，f の位数が $\frac{1}{2}$ より小さければ (2.4.13) と同様な等式が成り立つことを証明した．彼の等式と (2.4.13) との間には 2 つの違いがあるだけである．第一は，任意に与えられた正の δ に対し $(t_\nu)^{1-2\delta} \leq s_\nu$ が成り立つということではなくて，n と f の位数とに依存する或正の σ に対し $(t_\nu)^\sigma \leq s_\nu$ が成り立つことであった．第二は，彼の等式は値 s_ν の或非有界数列に限らず全ての大きな s_ν に対して成り立つのである．Baker [2, Theorem 1] は $N(r, 1/(f_n(z) - z)) \geq (1 - o(1)) \log M(r^\sigma, f_n)$ となることを導いている．彼は，この事実より $p < n$ に対して $N(r, 1/(f_n(z) - z))$ が $N(r, 1/(f_p(z)) - z)$ より遥かに大きなものであることは導かれるが，これは位数 $< \frac{1}{2}$ の函数に対し彼の予想を証明したことにはなっていないことを言及している．なぜならば，全ての個数函数は重複度に応じて数えられているからなのである．しかしながら Theorem 1 の証明に用いた方法によって，全ての attracting 及び indifferent periodic points についての重複度と個数を評価することは可能である．実際，次の結果が得られる．

[23] f_i, $i = 1, 2, \cdots$ は領域 D で正則とし D で一様に $f_i \to f \not\equiv 0$ とすると $f(z)$ の零点は $f_n(z)$ の零点の集積点である．

[24] 次頁に詳細

[25] 次々頁に詳細

Theorem 2.5.1. f は位数が $\frac{1}{2}$ より小さい整函数であり $n \geq 2$ であるとする．$n(r)$ は $0 < |z| \leq r$ 内にある f の *primitive period* n の *periodic points* の個数を表すものとして，$N(r) := \displaystyle\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ とする．このとき f の位数のみに依存する正の数 σ で全ての大なる r に対して $N(r) \geq \log M(r^\sigma, f_n)$ となるものが存在する．

この評価が，位数に関していか様な制限を設けることなく，あらゆる整函数について成立してしまうというのはそれほど見込みの無いこととは思えない．それは任意の $\sigma < 1$ に対してすら，おそらく成立することであろう．

多項式または有理函数については，attracting そして indifferent periodic points が有限個しか存在しない (例えば Fatou [1], Shishikura [1])．超越整函数については，無限個の attracting または indifferent periodic points が存在しえる．しかしながら，$|z| < r$ 内にある様なこれらの点の個数について，$\log M(r, f)$ 或いは Nevanlinna の特性函数 $T(r, f)$ を用いて上界を得ることは可能か否かを問うことはできる．(勿論，自明な評価式 $N(r, 1/(f_n(z) - z)) \leq T(r, f_n) + O(\log r)$ は常に成り立っている)．

今までに述べた問題とは直接関係はないが Mandelbrot set の外の写像函数の係数問題として，例えば Douady and Hubbard [2], Ewing and Schober [1], [2] や Jungreis [1] などがある．

---

[19] Baker [2, Theorem 1] では，$f(z)$ の位数 $\rho < \frac{1}{2}$ と $n \geq 1$ に関した定数 $k > 1$ で

$$N(r, 0; f_n(z) - z) > \log^+ M(r^{1/k}, f_n) - O(\log r), \quad \text{as } r \to \infty$$

が成り立つものが存在することが示されている．一般に $\log^+ M(R, f) \geq T(R, f)$ であるから，Nevanlinna の特性函数についても同様な評価を得る．また $N(R, f) \leq n(R, f) \log R$ であるから

$$N(r, 0; f_n(z) - z) > (\log r)^{-1} \log^+ M(r^{1/k}, f_n) - O(1), \quad \text{as } r \to \infty$$

となる．(勿論，f が超越的であれば $\log r = o(T(r^{1/k}, f_n)) = o(\log^+ M(r^{1/k}, f_n))$ である．

また Bergweiler [4, Theorem] では，$f(z)$ の位数 ρ，劣位数 λ が $0 < \lambda \leq \rho < \infty$ を満たせば，任意の $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \rho &= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log_n n(r, 0; f_n(z) - z)}{\log r} \\ &= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log_n T(r, f_n)}{\log r} = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log_{n+1} M(r, f_n)}{\log r} \end{aligned}$$

となることが証明されている．(勿論，$\rho = \limsup_{r \to \infty} \log_1 T(r, f_1)/\log r$ である．) 例えば，この事実から任意の定数 $\delta < 1$ に対して

$$\log_n n(r_\nu, 0; f_n - z)) \geq \delta \log_n T(r_\nu, f_n)$$

を満たす数列 $\{r_\nu\}$, $r_\nu \to \infty$, as $\nu \to \infty$ の存在が従う．また $T(r, f) \geq \frac{1}{3} \log^+ M(\frac{r}{2}, f)$ 及び $n(r, f) \leq N(er, f)$ を用いれば同様の結果を得る．

[20] Baker [4] では，先ず primitive period k の periodic points を全く (もしくは有限個しか) 持たない超越整函数 $f(z)$ については，$n > k$ に対して

$$1 \leq \liminf_{r \to \infty} \frac{\overline{N}(r, 0; f_n(z) - z)}{T(r, f_n)}$$

であることを導く．証明のアイデアは 2.2 節の末部で触れたものと類似である．そしてこう述べられている: “もし $f(z)$ が order k の fixpoints (periodic k の periodic points) を全く (もしくは有限個しか) 持たない超越整函数ならば上記の不等式からは $n > k$ に対して exact order n の fixpoints (primitive period n の periodic points) が存在するだけでなくて，その個数は $T(r, f_n)$ と増大度が等しい個数函数を与えるということが結論づけられる．このことは「全て」の超越函数に対しても言えるのかという疑問が生じる．”

例えば，P, Q は非定数多項式で $f(z) = P(z)e^{Q(z)}$ と表せるとき

$$\overline{N}(r, 0; f_n(z) - z) = (1 + o(1))T(r, f_n), \quad r \notin E, \quad \text{as } r \to \infty$$

が $n \geq 1$ に依存した測度有限 (特に 6 以下) な集合 $E_n \subset [0, \infty)$ に対して成り立つ (特に $E_1 = \phi$)(証明については，例えば Hayman [2, Theorem 2.5] を用いる)．これは，全ての $n \geq 1$ に対して exact order n の fixpoints が存在して，その重複度を考慮しない個数函数の増大度と $T(r, f_n)$ のそれとが等しい例である．($f(z)$ は零点を有限個しか持たない超越整函数であることに注意せよ).

Chapter 3

Value distribution of composite functions

3.1. The Gross conjecture

Theorem 2.2.1 の証明に用いられた方法によると，２つの超越的整函数 h, g の合成函数 $h \circ g$ が同様な性質を持つことも示される．即ち

Theorem 3.1.1. h 及び g は超越的整函数とする．このときそれらの合成函数 $h \circ g$ は無限個の *fixpoints* を持つ．

この結果は 1966 年 Gross により予想されたものである (Ehrenpreis [1, p. 542, Problem 32] 及び Gross [1, p. 247, Problem 5] を参照せよ)．この最初の証明は Bergweiler [3] で与えられた．その結果についての議論と，Gross の予想に関するそれ以前の多々の部分的結果についての参考文献は，Bergweiler [3] を参照のこととする．

Gross は実際には次のことを予想した: $Q(z) \not\equiv 0$ は多項式，$\alpha(z)$ は非定数整函数として

$$F(z) = Q(z)e^{\alpha(z)} + z$$

という形をした函数は *prime* である．ここで有理型函数 $F(z)$ が prime とは，$\mathbb{C}$ 上で高々一価有理型な函数 h と g を用いて $F(z) = (h \circ g)(z)$ と表したとき (一般には h は有理型，g は整函数であるが，h が有理函数ならば g が極を持つことを許す)，常に h または g のいずれか一方が一次 (分数) 函数となることを言う．その他，この様な factorizaton theory の用語については Gross [1] 又は Gross and Yang [1] を参照のこととするが，より入手が容易でありかつ self-contained な文献として Chuang and Yang [1] を挙げておく．(以下の記述についても，これを参照してくだ

さい)．さて，この $F(z)$ は周期函数ではないので，factors h, g としては整函数のみ考えて prime であること (これを特に E-prime という) を示せばよい (cf. Gross and Yang [1, p. 214, Lemma 3] 又は Chuang and Yang [1, p. 116, Lemma 3.1])．P. C. Rosenbloom [2] は既に 1952 年の段階で，h が 2 次以上の多項式で，g が超越整函数のときには $F(z)$ を $(h\circ g)(z)$ と表すことはできない，換言すると $(h\circ g)(z)$ は必ず無限個の fixpoints を持つことを証明していた．また，Gross and Yang [1] 又は Chuang and Yang [1] は，2 つの整函数 (必ずしも超越的でなくてもよい) h, g に対し，$h\circ g$ と $g\circ h$ の fixpoints の個数の有限/無限は同時に起こることを証明している．それ故 g が多項式 (2 次以上), h が超越整函数であっても $(h\circ g)(z)$ の fixpoints は無限個存在する．従って，上で述べられた The Gross conjecture が未解決な問題として残されたのである．Gross and Yang [1, Theorem 1] 又は Chuang and Yang [1, p. 154, Corollary 4.1] での $F(z)$ の位数が有限 (従って $\alpha(z)$ は多項式) の場合や，factors の (下) 位数の有限性を仮定 ($F(z)$ の位数は無限でも可) した場合 (Chuang and Yang [1, Theorem 4.15], Gross and Osgood [1]) には，この予想が正しいことが証明されてはいた．Bergweiler [6, Theorem 4] は，位数に対する条件を省き，更には Rosembloom [2] の結果 (Gross and Yang [1, Theorem A], Chuang and Yang [1, Theorem 3.1]), 即ち "h 及び g が超越整函数ならば，h か $h\circ g$ のいずれかは fixpoints を無限個持つ", を一般化しているのである．(註:これはまず Bergweiler [3] で為された)．特に，Bergweiler [6, Theorem 4] は repelling fixpoints もまた無限個持つことを主張しているが，h が多項式である場合についてはこの結果は成り立つのか? (ちなみに Bergweiler [6, Lemma 9] は Gross and Yang の結果を repelling fixpoints について述べたものであり，これは h が多項式の場合にも成り立つので，h 又は g のいずれか一方が 2 次以上の多項式で他方が超越整函数の場合に，$h\circ g$ は repelling fixpoints を無限個持つかどうかを調べればよい)．残念ながらこれは成立しない．例えば，整函数 $g(z)=\sqrt{z}\sin\sqrt{z}$ と 2 次の多項式 $h(z)=z^2$ を考えると (Bergweiler [7])

$$(h\circ g)(z) = z\sin^2\sqrt{z} = z - z\cos^2\sqrt{z}$$

であり，

$$(h\circ g)'(z) = 1-\cos^2\sqrt{z}+\sqrt{z}\sin\sqrt{z}\cos\sqrt{z}.$$

従って $(h\circ g)(z)$ の各 fixpoint $z_0\neq 0$ で，その multiplier は 1 である ($z_0=0$ に於いては，multiplier は 0 である)．従って，$(h\circ g)(z)$ は無限個の fixpoints を持ってはいるが，(super-)attracting が 1 つで残りは全て indifferent, 特に multiplier 1 のものである．一方 $(g\circ h)(z)=z\sin z$ についても

$$(g\circ h)'(z) = \sin z + z\cos z$$

より，全く同様なことが言える．但し，その個数函数については，夫々

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{(h\circ g)(z)-z}\right) &= N\left(r, \frac{1}{\cos^2\sqrt{z}}\right) + \log r \\
&= 2N\left(r, \frac{1}{e^{2i\sqrt{z}}+1}\right) + \log r \\
&= \frac{4\sqrt{r}}{\pi} + \log r + O(1), \quad \text{as } r\to\infty
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{(g \circ h)(z) - z}\right) &= N\left(r, \frac{1}{\sin z - 1}\right) + \log r \\ &= 2N\left(r, \frac{1}{e^{iz} - i}\right) + \log r \\ &= \frac{2r}{\pi} + \log r + O(1), \quad \text{as } r \to \infty \end{aligned}$$

である．一方，$r \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} T(r, h \circ g) &= 2m(r, \cos\sqrt{z}) + \log r + O(1) \\ &= \frac{4\sqrt{r}}{\pi} + \log r + O(1) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} T(r, g \circ h) &= m(r, \sin z) + \log r + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + \log r + O(1) \end{aligned}$$

ともなっている．(これらの評価については，Nevanlinna の値分布論に関する標準的な教科書，例えば Hayman [2] を参照)．それ故 $T(r, \bullet) = N(r, 0; \bullet - z) + O(1)$ がいずれの場合も成り立つ (cf. Bergweiler [6, §10]) が，一方で $N(r, 0; (h \circ g)(z) - z) = o(N(r, 0; (g \circ h)(z) - z))$ である．但し，repelling fixpoints は共に 1 つも持たない (Shishikura [2] の意味で weakly repelling fixpoints, 即ち repelling 又は multiplier 1 の fixpoints は無限個存在する)．ところが，Bergweiler [7, Satz 6] では 3 次以上の多項式を考えるときには，合成函数 $h \circ g$ の repelling fixpoints は無限個あることが主張されているのである．

上では整函数の合成について考えたが，例えば Bergweiler [8] は h を少なくとも 2 つの極を持った有理型函数 (特に超越的でなくてもよい) としたとき，$h \circ g$ が無限個の fixpoints (repelling か否かは不記) を持つことを示している．更には，h が唯一の極のみ持った超越有理型函数である場合は，本論説で用いる方法で同じ結論を得ることができるとそこには述べられている．また，Gross and Yang の結果は，h, g が共に有理型であっても成り立つことが示されてもいる．但し Bergweiler [2] の introduction にもある様に rational factor h と超越有理型の factor g について，h の次数が 2 である場合には fixpoints が有限個ということも起こり得る．簡単に思いつくのは，$h(z) = z^2$, $g(z) = i\sqrt{z}\tan\sqrt{z}$ であるが，Gross and Osgood [1] はこういった h と g 全てを特徴付けている．

Fixpoints の個数が有限無限というばかりでなく，Bergweiler [6, §10] にも述べられている様に個数函数 $N(r, 0; (h \circ g)(z) - z)$ と特性函数 $T(r, h \circ g)$ の増大を比較することで，より詳しく‘個数’を評価することも興味深い．これについては，1 つの結果を Langley [1] に見いだすことができる．h と g が超越整函数で $h \circ g$ の位数が有限ならば，$N(r, 0; (h \circ g)(z) - z) \neq o(T(r, h \circ g))$, 特に $\delta(0, (h \circ g)(z) - z) < 1$ である．ここで $\delta(a, F)$ は Nevanlinna deficiency

$$\delta(a, F) = 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, a; F)}{T(r, F)}$$

である．

ここでは，先ず Theorem 3.1.1 についての新しい証明を与えることにする．基礎を成すアイデアの幾つかは同じものであるけれども，この証明は Bergweiler [3] で与えられたものとは全く違っている (し，たぶんもっと簡単である)．然しながら，Bergweiler [3] ではより一般的な結果である，任意の非定数多項式 p について $h(g(z)) = p(z)$ は無限に多くの解を持つことが証明されているが，それをここで行うことはできない[26].

Proof of Theorem 3.1.1. $h \circ g$ は fixpoints を有限個しか持たないと仮定せよ．Gross and Yang [1] の指摘した様に，これから $g \circ h$ もまた有限個しか fixpoints を持たないことが従う．Theorem 2.2.1 の証明の際に行ったのと同じく Theorem 2.4.1 から，円環領域 $s_\nu \le |z| \le t_\nu$ 内に含まれ原点の周りを一回転する単純閉曲線 Γ で，その上で $\log|h(g(z))| = (1+o(1)) \log M(M(s_\nu, g), h)$ となる様のものが存在することを導くことが可能である．Rouché の定理により Γ の内部にある $h \circ g$ の fixpoints の個数は，Γ の内部にある $h(g(z)) = a$ の解の個数に等しいことが導かれる．但し ν は十分に大きいとせよ．ここで a は任意に固定された複素数である．この a を適切に選んで $h \circ g$ は無限個の fixpoints を持つことを得るが，これは仮定に反する．これで Theorem 3.1.1 の証明は完成する． □

Remark. 我々が Theorem 2.4.1 を，Theorem 3.1.1 の証明に於ける中間的な踏み台としか考えなければ，Theorem 2.4.1 内の “repelling” という語はないものとして済ませることができる．このことは証明を単純化する．Lemma 2.3.1 は必要でなくなり，Landau の定理を強めた形のもの (Hayman [2, p. 169]) を必要とするだけとなる．即ち，もし $h(z)$ が $|z-z_0| < R$ で解析的でありそこで 2 つの値 0 と 1 を取ることができなければ，或絶対定数 K に対し $|h'(z_0)|R \le 2|h(z_0)|(\big|\log|h(z_0)|\big| + K)$ である．“Repelling” という語句を省いた形での Theorem 2.4.1 を証明するために，Theorem 2.4.1 の証明と同じ手順を踏み ω_0 も u も同じ様に定義する．然しながら，ここでは

$$f(z) = \frac{h(g(z)) - z}{ze^{\tau_1(z)} - z}$$

と定義する．再び (2.4.6), (2.4.7), そして (2.4.8) が成り立つことが判る．それ故 (2.4.9) もまた成り立ち，定数 C を十分に大きくそして $r \notin E$ である様にすれば，f は $D(z_0, Cr/\nu(r,g))$ 内で 0 及び 1 の 2 つの値のいずれかをとることが導かれる．Lemma 1.4.3 を用いて，$C' > C + 2\pi$ であれば $h \circ g$ は $r \notin E$ のとき $D(z_0, C'r/\nu(r,g))$ 内に fixpoint z_0 を持つことが判る．また z' は (2.4.10) を満たすことも分かり，これで Theorem 2.4.1 の此の形についての証明が完了する．

Theorem 2.4.1 のこの弱い形は，導入部で引用した Baker の予想に対しても十分なものである．然しながら Theorem 2.2.1 の証明に対しては，先に述べた形の Theorem 2.4.1 が必要なのである．次の節に於いてそれが再び用いられることになる．

以下，Theorem 3.1.1 の 1 つの一般化を試みる．

[26] この節と次節の話題については，前述の Langley の論文の他にも Katajamäki, Kinnunen and Laine [1] [2], Bergweiler and Yang [1], Wang [1], Yang and Zheng [1] 等を参照のこととする．

Theorem 3.1.2. h と g は超越整函数であるとする．このとき，$h \circ g$ は *repelling fixpoints* を無限個持つ．

まず初めに次の Lemma が必要である．

Lemma 3.1.3. h と g は超越整函数であるとする[27]．このとき，$h \circ g$ が *repelling fixpoints* を無限個持つのは $g \circ h$ もまたそうであるときかつそのときに限る．

“Repelling”という語句なしでのこの結果は Gross and Yang[1] によるものであり，既に Theorem 3.1.1 の証明の際用いてある．以下の証明は Gross and Yang の論法に習ったものである．

Proof of Lemma 3.1.3. $h \circ g$ は無限に多くの repelling fixpoints z_0, z_1, z_2, ... を持つと仮定し，全ての k について $\omega_k = g(z_k)$ と定める．そのとき，$(g \circ h)(\omega_k) = g(h(g(z_k))) = g(z_k) = \omega_k$ が全ての k に対して得られる．更にはもし $\omega_j = \omega_k$ であれば，$z_j = h(g(z_j)) = h(\omega_j) = h(\omega_k) = h(g(z_k)) = z_k$ である．従って，$g \circ h$ は無限に多くの fixpoints ω_0, ω_1, ω_2, ... を持つ．$(g \circ h)'(\omega_k) = g'(z_k)h'(\omega_k) = (h \circ g)(z_k)$ であり，また z_k は $h \circ g$ の repelling fixpoint であるのだから，全ての k について ω_k が $g \circ h$ の repelling fixpoint となる．これで Lemma 3.1.3 の証明が完成した． □

Proof of Theorem 3.1.2. $h \circ g$ は repelling fixpoints を有限個しか持たないとする．Lemma 3.1.3 を用いて，Theorem 2.1.1 の証明中にある様に円環領域 $r_\nu \leq |z| \leq (r_\nu)^{1+\varepsilon}$ 内に含まれ原点のまわりをひと回りしている或単純閉曲線 Γ_0 を見つけ出し，

$$| h(g(z)) |= M(r_\nu, h \circ g), \quad z \in \Gamma_0 \tag{3.1.1}$$

とできる．$G_0 = \mathrm{int}(\Gamma_0)$,$G_1 = g(G_0)$, $\Gamma_1 = \partial G_1$, そして $G_2 = h(G_1)$ と定義する．明らかに，G_2 は原点中心で半径 $M(r_\nu, h \circ g)$ の円板である．Theorem 3.1.1 の証明と同様に，以下の性質を全て有した (ν に依存している)2 つの正整数 p_1 及び p_2 が存在していると判る．

(1) 各値 $a \in G_1$ に対し，重複度に応じて数えて，方程式 $g(z) = a$ は G_0 内に p_1 個の解を，また g' は G_0 内に $p_1 - 1$ 個の零点を持つ．
(2) 各値 $b \in G_2$ に対し，重複度に応じて数えて，方程式 $h(z) = b$ は G_1 内に p_2 個の解を，また h' は G_1 内に $p_2 - 1$ 個の零点を持つ．
(3) $h(g(z)) - z$ の零点としてその重複度に応じて数えれば，$h \circ g$ は $p_1 p_2$ 個の fixpoints を G_0 内に持つ．
(4) $\nu \to \infty$ としたとき $p_1 \to \infty$ かつ $p_2 \to \infty$ である．

$P = p_1 p_2$ と定義する．即ち P は，重複度に応じて数えたときの G_0 内にある $h \circ g$ の fixpoints の個数である．重複度を無視したときでの，それに対応した個数を $\overline{P}$ で表す．或 fixpoint z_0 が項 $P - \overline{P}$ に寄与していると仮定する．即ち，z_0 は或正の整数 m に対し重複度 $m + 1$ を持っていると仮定せよ．Theorem 2.2.1 の

[27] 証明から判る様に，g 又は h のいずれか一方が非定数多項式であっても，またいずれもが有理型函数である場合にも，同様な結果が成り立つ (cf. Bergweiler [6])．これは既に前節で述べた．

証明の様にして Lemma 2.3.6 と (3.1.1) から，G_0 内に $(h\circ g)'$ の m 個の零点 z_1, z_2, ..., z_m があって，それらは $h\circ g$ の iteration の下に z_0 に収束することが導かれる．その上 z_1, z_2, ..., z_m を，$i\neq j$ については $h(g(z_j))\neq h(g(z_j))$ となる様に選ぶことが可能である．後の方の主張は，z_0 に対応している Leau domain の各々は丁度一つの z_j を含んでいる，と仮定して良いという事実から従うものである．もし $h(g(z_1))=h(g(z_2))$ であれば，G_0 内にある $(h\circ g)'$ の 2 つの零点 z_1 と z_2 とは同値であるということにする．個の同値類の個数を N と書く．上の考察は今，$P-\overline{P}\leq N$ という形に書くことが可能である．同様に，G_0 内の $h\circ g$ の attracting, rationally indifferent, irrationally indifferent, そして repelling fixpoints の個数を $\overline{P}_{\rm att}$, $\overline{P}_{\rm rat}$, $\overline{P}_{\rm irr}$, そして $\overline{P}_{\rm rep}$ と書く．Theorem 2.1.1 の証明と同じく $\overline{P}_{\rm att}+\overline{P}_{\rm rat}\leq N$ が示され，再び $h\circ g$ についての small perturbation を用いれば，$\overline{P}_{\rm irr}\leq N$, であることが判る．以上をまとめ合わせれば,

$$\overline{P}_{\rm rep}=P-(\overline{P}_{\rm att}+\overline{P}_{\rm rat})-\overline{P}_{\rm irr}-(P-\overline{P})\geq P-3N$$

が得られる．その一方では，g' は G_0 内に p_1-1 個の零点を，また h' は G_1 内に p_2-1 個の零点を持つのであるから，$N\leq(p_1-1)+(p_2-1)=p_1+p_2-2$ を得る．$P=p_1p_2$ であるから，$\overline{P}_{\rm rep}\geq p_1p_2-3p_1-3p_2+6$ となることが分かる．従って，$\nu\to\infty$ とすれば $\overline{P}_{\rm rep}\to\infty$ であることがみちびかれる．これは矛盾でありこの Theorem 3.1.2 は証明された．

おわりに，2.5 節で掲げた整函数の iterates に対する問題の幾つかは，整函数の合成函数について問うてもよい．例えば，$|z|\leq r$ 内にある $h\circ g$ の fixpoints の個数に対する下界を求めるという問題がある．

$$N(r,1/(h(g(z))-z))\quad と\quad T(r,h\circ g)$$

とは或意味で常に同じ増大度を持つということは，起こりそうに思う[28]．事実，Bergweiler [6] では Nevanlinna deficiency $\delta(0,h(g(z))-z)$ が 0 より大である例

[28] 1 つの状況証拠を挙げておく．Prokopovich [1], Chuang and Yang [1, p. 156, Lemma 4.5] から，g を超越有理型函数で $N(r,g)=\circ\{T(r,g)\}$, $r\to\infty$ を満たすもの，h は次数 $k(z)$ の有理函数としたとき

$$N\left(r,\frac{1}{h(g(z))-z}\right)\geq(k-1+\circ(1))T(r,g)\quad r\to\infty,\quad r\notin E$$

が成り立つ．話を簡単にするために g,h 共に整函数 (h は多項式) とすれば，$\lim_{r\to\infty}T(r,h\circ g)/T(r,g)=k$ (例えば Hayman [2, p. 54] を見よ) であるから $\delta(0,h(g(z))-z)\leq 1-(k-1)/k=1/k$ を得る．もし $h(z)$ が超越的であれば $k\uparrow+\infty$ と考えられるので，これは $\delta(0,h(g(z))-z)=0$ が超越的整函数 g, h に対して成り立つのではあるまいかという希望に燈をともす．より精確には，$h(z)$ が

$$\sum_{r=m}^{\infty}C_\nu z^\nu\quad,\quad C_m\neq 0\quad,\quad m\geqq 0$$

という Taylor series で表現されるとき，$P_k(z)=\sum_{r=m}^{k}C_\nu z^\nu$, $C_k\neq 0$ と定義すれば，上の議論によって $\delta(0,P_k(g(z))-z)\leqq 1/k$ を得る．問題は $k\to+\infty$ とするときに $\delta(0,P_k(g(z))-z)\to\delta(0,h(g(z))-z)$ が成り立つかどうかであるが，これについては不明である．また，Katajamäki, Kinnunen and Laine [2, Remark 1] も参照のこと

は知られていないと述べられている．同様に，$|z| \leq r$ 内にある $h \circ g$ の repelling fixpoints の個数に対する下界を求めても良い．Bergweiler [8] では，もし h 及び g が超越有理型であり，また g が少なくとも 3 つ極を持てば，$h \circ g$ は無限個の fixpoints を持つことが証明されている．その証明からは，この場合には g の極のうちの 1 つは，$h \circ g$ の fixpoints の limit point であることが示される．$h = f$ そして $g = f_{n-1}$ と選べば，$n \geq 2$ でありまた f_{n-1} が少なくとも 3 つの極を持つことが判る．この結果は，本論説中で用いられた方法を適切に変形すれば証明できる様に，f_{n-1} が 1 つ或いは 2 つしか極を持たない場合にも変わらず成り立つのである．

3.2. The Katajamäki–Kinnunen–Laine theorem

この節では，合成函数の零点の値分布に関して Nevanlinna 理論的な考察を与えることにする．前節でも述べたように f を有理型函数, g を超越的整函数とするときに $N(r, 0; f \circ g - z)$ をできるだけシャープに評価することは最も興味ある未解決問題の一つである．評価を与える表現として零点の収束指数 λ を用いるが, 定義は有理型函数 φ に対して

$$\lambda(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log N(r, 0; \varphi)}{\log r}$$

である．ここでは，Katajamäki, Kinnunen and Laine [2] に基づいて f, g がある性質を満たすときに一つの解答を与える定理を紹介する．

Theorem 3.2.1. f は位数有限の有理型函数（次数 2 次以上の有理函数でもよい），g は下位数有限な超越整函数とする．Q は有理型函数で位数 $\sigma(Q)$ が g の下位数 $\underline{\sigma}(g)$ よりも小さいとする．このとき，$\lambda(f \circ g - Q) \geq \underline{\sigma}(g)$ が成り立つ．

証明の道具としては Wiman–Valiron 理論に加えて Bank, Laine, Steinmetz 達によって成された Complex D. E. についての理論を用いる．定理の証明の前にいくつかの結果を紹介しておく．

Lemma 3.2.2. $f(z)$ は超越的有理型函数，$a_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $a_n(z) \not\equiv 0$ は $f(z)$ に対して *small*[29] な函数とする．

$$\Phi(z, f) = a_n(z) f^n + a_{n-1}(z) f^{n-1} + \cdots + a_0(z), \quad n \geq 2$$

とする．このとき

$$\Phi(z, f) = a_n(z) \left(f + \frac{a_{n-1}(z)}{n a_n(z)} \right)^n$$

の型であるか

$$T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) + S(r, f),$$

ここで $\Phi(z) := \Phi(z, f(z))$ である．

上記のような Tumura–Clunie type の定理は Ishizaki [1, Chapter 2], Toda [1], Weissenborn [1] を参照されたし．次に Valiron–Mokhon'ko 定理, Mokhon'ko [1] を引用する．

[29] $a(z)$ が $f(z)$ に対して small とは $T(r, a) = o(T(r, f))$, as $r \to \infty$, $r \notin E$, $m(E) < \infty$ が成り立つことである．

Lemma 3.2.3. $f(z)$ を有理型函数，$R(z,f)$ を f についての既約な有理函数でその係数は $f(z)$ に対して *small* な函数とする．このとき

$$T(r,R) = dT(r,f) + S(r,f),$$

ここで $R(z) = R(z, f(z))$, $d = \deg_f R(z,f)$ である．

次に紹介する Steinmetz [1] の定理は composite function を取り扱う際有用である．実際には，Gross and Osgood [1] によって拡張された形で述べる．

Lemma 3.2.4. $F_0, F_1, \dots, F_m$ は少なくともひとつが恒等的に零ではない有理型函数，また $h_0, h_1, \dots, h_m$ も少なくともひとつが恒等的に零ではない有理型函数とする．g は非定数な整函数とし，ある定数 $K>0$ と非有界単調増加実数値点列 $\{r_j\}$ があって

$$\sum_{i=0}^{m} T(r_j, h_i) \le KT(r_j, g), \quad \textit{for each } j$$

とする．このとき

$$F_0(g)h_0 + F_1(g)h_1 + \cdots + F_m(g)h_m = 0$$

が成り立つならば，少なくともひとつは恒等的に零でない多項式 $P_0, P_1, \dots, P_m$ があって

$$P_0(g)h_0 + P_1(g)h_1 + \cdots + P_m(g)h_m = 0$$

が成り立つ．加えて，少なくともひとつは恒等的に零でない多項式 $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$ があって

$$F_0Q_0 + F_1Q_1 + \cdots + F_mQ_m = 0$$

が成り立つ．

Gross and Osgood [2], [3] には更に一般化された形で述べられている．次に Malmquist–Yosida の定理を紹介する．

Lemma 3.2.5. $R(z,w)$ を w の有理函数で係数は有理型函数とする．微分方程式

$$w' = R(z,w)$$

が許容解 $w(z)$ ($R(z,w)$ の係数は $w(z)$ に対して *small*) を持つならば，方程式は *Riccati* 方程式である．特に $N(r,w) = S(r,w)$ ならば $R(z,w)$ は w についての一次式である．

次に Hayman–Miles の定理を紹介する．

LEMMA 3.2.6. F は超越的有理型函数で $K > 1$ とする．このとき *upper logarithmic density* が高々

$$\delta(K) := \min\{(2e^{K-1} - 1)^{-1}, (1 + e(K-1))\exp(e(1-K))\}$$

である集合 $M(K)$ があって，任意の正整数 q に対して

$$\limsup_{\substack{r \to \infty \\ r \notin M(K)}} \frac{T(r, F)}{T(r, F^{(q)})} \leq 3eK$$

が成り立つ．

近代的な Malmquist–Yosida–Steinmetz type の理論は Laine [2, Chapter 9–14], Ishizaki [1] に詳しいが，ここでは Riccati 方程式についての Bank, Gundersen and Laine [1] の結果を引用する．Riccati 方程式は正規化されて

$$u' = u^2 + A(z) \tag{3.2.1}$$

の形に書ける．$A(z)$ が 2 重の極 z_0 を持つとき z_0 の近くで

$$A(z) = \frac{\beta}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad \beta \neq 0$$

と書けるとする．β の性質が Riccati 方程式の有理型函数解の個数と関係があるわけである．β の条件を与える整数の集合 B は次で定義される：

$$B := \{1 - n^2 \mid n \text{ は 2 以上の整数 }\}.$$

LEMMA 3.2.7. *Riccati* 方程式 (3.2.1) に関して $A(z)$ が少なくともひとつの 2 重の極を持つとする．もし $4\beta \notin B$ なる 2 重の極があるとするならば，(2.3.1) は高々 2 つの異なった有理型函数解を持つ．更に，$A(z)$ が $4\beta = 1$ なる 2 重の極を持つならば有理型函数解は高々 1 つである．

LEMMA 3.2.8. *Riccati* 方程式 (3.2.1) が少なくとも 3 つの有理型函数解 u_1, u_2, u_3 を持つとするならば，(3.2.1) は異なった有理型函数解の *one-parameter family* $(u_C)_{C \in \mathbb{C}}$ を持つ．また，任意の有理型函数解はひとつを除いてこの *family* に含まれる．

最後に，有理型函数の growth を取り扱うときに有用である Bank [1], Hayman [3] の定理をそれぞれ紹介する．

LEMMA 3.2.9. $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は単調非減少函数で $g(r) \leq h(r)$, $r \notin E$, $Lm(E) < \infty$ とする．このとき，任意の $\beta > 1$ に対してある $r_0 > 0$ があって $g(r) \leq h(r^\beta)$ が全ての $r > r_0$ について成り立つ．

LEMMA 3.2.10. ϕ は整函数で $\underline{\sigma}(\phi) < \infty$ とする．

$$G := \{r \geq 1 \mid T(4r, \phi) \geq \delta T(r, \phi)\}, \quad \delta > 1$$

とすると

$$\underline{\log dens}\ G \leq \frac{\underline{\sigma}(\phi) \log 4}{\log \delta}.$$

PROOF OF THEOREM 3.2.1. 定理の主張が正しくない，即ち $\lambda(f \circ g - Q) < \underline{\sigma}(g)$ と仮定して矛盾を導く．f_1, f_2 は共通零点を持たない位数有限の二つの整函数で $f = f_1/f_2$ とする．

$$f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g) = (f_2 \circ g)(f \circ g - Q)$$

と書くことで $f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g)$ の零点は $f \circ g - Q$ の零点か $f_2 \circ g$ の零点である．後者の場合 Q は $f_2 \circ g$ の零点と同じ位数の極を持たなければならない．$\lambda(1/Q) \leq \sigma(Q) < \underline{\sigma}(g)$ かつ $\lambda(f \circ g - Q) < \underline{\sigma}(g)$ なので $\lambda(f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g)) < \underline{\sigma}(g)$ である．$f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g)$ の零点と極より構成される canonical products を π_1, π_2 とすると

$$f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g) = \frac{\pi_1}{\pi_2} e^{\alpha} =: \pi e^{\alpha}, \quad \alpha \text{ 整函数} \tag{3.2.2}$$

と書けて

$$\sigma(\pi_1) = \lambda(\pi_1) = \lambda(f_1 \circ g - Q(f_2 \circ g)) < \underline{\sigma}(g)$$
$$\sigma(\pi_2) = \lambda(\pi_2) \leq \lambda(1/Q) < \underline{\sigma}(g)$$

である．よって

$$\sigma(\pi) \leq \max\{\sigma(\pi_1), \sigma(\pi_2)\} < \underline{\sigma}(g).$$

ゆえに，$T(r, Q) = S(r, g)$, $T(r, \pi) = S(r, g)$ が得られる．これらの評価を基に (i): $f(z)$ が有理函数の場合, (ii): $f(z)$ が超越的の場合，に分けて (3.2.2) を評価していくことにする．

(i) f_1, f_2 を互いに素な多項式で $f = f_1/f_2$, $n := \max\{\deg f_1, \deg f_2\} \geq 2$ と書くことにする．

$$f_1(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$
$$f_2(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0,$$

ここで，$a_n \neq 0$ か $b_n \neq 0$. $\alpha_j := a_j - Qb_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ とすれば，(3.2.2) より

$$\alpha_n g^n + \cdots + \alpha_1 g + \alpha_0 = \pi e^{\alpha}, \quad \alpha_0 \not\equiv 0. \tag{3.2.3}$$

Lemma 3.2.2 より，(3.2.3) の左辺は

$$\alpha_n g^n + \cdots + \alpha_1 g + \alpha_0 = \alpha_n \left(g + \frac{\alpha_{n-1}}{n\alpha_n} \right)^n \tag{3.2.4}$$

の形でなくてはならない．Lemma 3.2.3 より，(3.2.4) の両辺は g の多項式として一致していなければならない．g^{n-k}, $k = 2, \ldots, n$ の係数を比較して

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_n} = \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{n\alpha_n} \right)^k, \quad k = 2, \ldots, n \tag{3.2.5}$$

まず，$\alpha_{n-1} \not\equiv 0$ が示せる．実際，$\alpha_{n-1} \equiv 0$ とすると (3.2.4) より

$$\alpha_{n-2} g^{n-2} + \cdots + \alpha_0 \equiv 0,$$

これは，$\alpha_{n-2} = \cdots = \alpha_0 \equiv 0$ を示す．$\alpha_j = a_j - Qb_j$ なので，$a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$ かつ $b_{n-1} = \cdots = b_0 = 0$．これは f が既約な 2 次以上の有理函数であることに反する．(3.2.5) より

$$\frac{a_{n-2} - Qb_{n-2}}{a_n - Qb_n} = \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} \left(\frac{a_{n-1} - Qb_{n-1}}{a_n - Qb_n} \right)^2. \tag{3.2.6}$$

仮に，(3.2.6) の両辺が定数でないとすると，Lemma 3.2.3 より

$$T(r, Q) + O(1) = 2T(r, Q),$$

これは矛盾．それゆえ

$$\frac{a_{n-1} - Qb_{n-1}}{a_n - Qb_n} \equiv c_1, \quad \text{for some constant } c_1$$

Q は非定数だから，$a_{n-1} = c_1 a_n$, $b_{n-1} = c_1 b_n$．同様に，(3.2.5) よりある定数 c_k, $k = 2, \ldots, n$ があって，$a_{n-k} = c_k a_n$, $b_{n-k} = c_k b_n$．結局，

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n), \\ f_2(z) &= b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0 = b_n (z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n), \end{aligned}$$

これは，f が定数であることを示す．矛盾である．

(ii) f が超越的で位数有限とする．まず，ある定数 c に関して

$$T(r, \alpha) \le cT(4r, g), \quad r \notin E \tag{3.2.7}$$

を示す．Lemma 1.4.4 より

$$M(r, e^\alpha) = \exp((1 - o(1)) M(r, \alpha)), \quad r \notin E$$

であり，(1.2.8) より f が位数有限であることを考慮すれば，ある $\beta > 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&e^{T(r,\alpha)} \le M(r,\alpha) = (1+o(1))\log M(r,e^{\alpha}) \le 4T(2r,e^{\alpha})\\
&\le 5T(2r,f_1\circ g) + 5T(2r,f_2\circ g) \le 5\log M(2r,f_1\circ g) + 5\log M(2r,f_2\circ g)\\
&= 5\log M((1+o(1))M(2r,g),f_1) + 5\log M((1+o(1))M(2r,g),f_2)\\
&\le M(2r,g)^{\beta} = e^{\beta\log M(2r,g)} \le e^{3\beta T(4r,g)}
\end{aligned}$$

が $r \notin E$ に対して成立する．これは，(3.2.7) を意味する．
　次に

$$T(r,g) = S(r,\alpha') \tag{3.2.8}$$

を示す．仮に，(3.2.8) が正しくないとすると，ある $K > 0$ とある集合 $I \subset [1,\infty)$, $m(I) = \infty$ があって

$$T(r,\alpha') \le KT(r,g), \quad r \in I. \tag{3.2.9}$$

(3.2.2) を微分して e^{α} を消去して，$\gamma := \pi'/\pi + \alpha'$ とおくと

$$g'f_1'(g) - Qg'f_2'(g) - \gamma f_1(g) + (\gamma Q - Q')f_2(g) = 0. \tag{2.3.10}$$

Lemma 3.2.4 を (3.2.10) に適応して，少なくともひとつは恒等的に零でない多項式 $\phi_1, \dots, \phi_4$ が存在して

$$\phi_1 f_1' + \phi_2 f_1 + \phi_3 f_2' + \phi_4 f_2 = 0. \tag{3.2.11}$$

$\phi_1 \not\equiv 0$ か $\phi_3 \not\equiv 0$ であることが解る．もし共に零とすると

$$f = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\phi_4}{\phi_2}$$

となって f が有理函数となって矛盾である．
　$\phi_1 \not\equiv$ とする．(3.2.11) から

$$\phi_1(g)f_1'(g) + \phi_2(g)f_1(g) + \phi_3(g)f_2'(g) + \phi_4(g)f_2(g) = 0. \tag{3.2.12}$$

(3.2.10) と (3.2.12) から $f_1'(g)$ を消去して

$$\begin{aligned}
&(\gamma\phi_1(g) + g'\phi_2(g))f_1(g) + (Qg'\phi_1(g) + g'\phi_3(g))f_2'(g)\\
&\qquad + (g'\phi_4(g) - \gamma Q\phi_1(g) + Q'\phi_1(g))f_2(g) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

再び，Lemma 3.2.4，より同時に零になることのない多項式 ψ_1, ψ_2, ψ_3 があって

$$\psi_1 f_1 + \psi_2 f_2' + \psi_3 f_2 = 0. \tag{3.2.14}$$

よって

$$\psi_1(g)f_1(g)+\psi_2(g)f_2'(g)+\psi_3(g)f_2(g)=0. \tag{3.2.15}$$

明らかに，$\psi_2 \not\equiv 0$ であり，Lemma 3.2.3 より $Q\phi_1(g)+\phi_3(g)$ は恒等的に零ではない，ゆえに $f_2'(g)$ を (3.2.13) と (3.2.15) から消去して

$$Gf_1(g)+Hf_2(g)=0, \tag{3.2.16}$$

ここで

$$G=\gamma\phi_1(g)\psi_2(g)+g'(\phi_2(g)\psi_2(g)-Q\phi_1(g)\psi_1(g)-\phi_3(g)\psi_1(g)),$$

$$\begin{aligned}H=Q'\phi_1(g)\psi_2(g)-\gamma Q\phi_1(g)\psi_2(g)&\\ +g'(\phi_4(g)\psi_2(g)-Q\phi_1(g)\psi_3(g)-\phi_3(g)\psi_3(g)).&\end{aligned}$$

仮に，G と H が共に恒等的に零でなければ，(3.2.16) より

$$\frac{f_1(g)}{f_2(g)}=f\circ g=-\frac{H}{G},$$

これは

$$T(r,f\circ g)=O(T(r,g)),\quad \text{as } r\to\infty,\ r\in I$$

これは，矛盾である．よって

$$\gamma\phi_1(g)\psi_2(g)+g'(\phi_2(g)\psi_2(g)-Q\phi_1(g)\psi_1(g)-\phi_3(g)\psi_1(g))=0,$$

$$\begin{aligned}Q'\phi_1(g)\psi_2(g)-\gamma Q\phi_1(g)\psi_2(g)&\\ +g'(\phi_4(g)\psi_2(g)-Q\phi_1(g)\psi_3(g)-\phi_3(g)\psi_3(g))=0.&\end{aligned}$$

γ を消去して $P_1:=\phi_3\psi_3-\phi_4\psi_2$, $P_2:=\phi_3\psi_1-\phi_2\psi_2+\phi_1\psi_3$, $P_3:=\phi_1\psi_1$ とおくと

$$g'(P_1(g)+QP_2(g)+Q^2P_3(g))=\phi_1(g)\psi_2(g)Q'.$$

上式の右辺は恒等的に零ではないから

$$g'=\frac{\phi_1(g)\psi_2(g)Q'}{P_1(g)+QP_2(g)+Q^2P_3(g)}. \tag{3.2.17}$$

上式の右辺は g について既約であることが Katajamäki, Kinnunen and Laine [1, p. 67] と同様に示される．

Lemma 3.2.5 より，(3.2.17) の右辺の分母は g に無関係でなくてはならない，即ち P_1, P_2, P_3 は定数でなくてはならない．また $\deg\phi_1(g)\psi_2(g)\le 1$ である．更に，

Lemma 3.2.6 より，$\phi_1\psi_2$ は定数ではありえない．ゆえに，$\phi_1(z)\psi_2(z) = az + b$, $a \neq 0$ である．

一方，(3.2.11) と (3.2.14) より

$$\begin{cases} f_1' = \dfrac{\phi_3\psi_1 - \phi_2\psi_2}{\phi_1\psi_2} f_1 + \dfrac{\phi_3\psi_3 - \phi_4\psi_2}{\phi_1\psi_2} f_2 \\ f_2' = -\dfrac{\psi_1}{\psi_2} f_1 - \dfrac{\psi_3}{\psi_2} f_2 \end{cases} \tag{3.2.18}$$

(3.2.18) を

$$f' = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'}{f_2} - \frac{f_2'}{f_2} f$$

に代入して

$$f' = \frac{\phi_3\psi_3 - \phi_4\psi_2}{\phi_1\psi_2} + \frac{\phi_3\psi_1 - \phi_2\psi_2 + \phi_1\psi_3}{\phi_1\psi_2} f + \frac{\psi_1}{\psi_2} f^2.$$

ゆえに，f は微分方程式

$$f' = \frac{P_1 + P_2 f + P_3 f^2}{az + b} \tag{3.2.19}$$

を満たす．$P_3 \not\equiv 0$ である，なぜならば，否定すれば f は微分方程式 $(az+b)f' = P_1 + P_2 f$ を満たす，即ち f は有理函数となる．標準的な変換

$$f = \frac{az+b}{P_3} u - \frac{P_2}{2P_3} + \frac{a}{2P_3}$$

で Riccati 方程式 (3.2.19) は

$$u' = A(z) + u^2 \tag{3.2.20}$$

に帰着される，ここで

$$A(z) = \frac{4P_1P_3 - P_2^2 + a^2}{4a^2(z + b/a)^2}$$

である．

(3.2.20) の解が超越的か有理函数かは対応する (3.2.19) の解のそれと一致する．$4\beta := (4P_1P_3 - P_2^2 + a^2)/a^2$ として３つの場合をそれぞれ考察する．Lemma 3.2.7 より，先ず，$4\beta = 1$ のときは (3.2.20) は高々一つの有理型函数解を持つ．よって，(3.2.19) は丁度ひとつの有理型函数解を持つ．この解は定数でなくてはならない，実際には $P_1 + P_2 z + P_3 z^2 = 0$ の根（重根）がそれである．これは矛盾．次に，$4\beta \neq 1 - m^2$, for any $m \in \mathbb{Z}$ のときは，再び Lemma 3.2.7 より，(3.2.20) は高々２つの有理型函数解を持つ，この解は定数である，実際には $P_1 + P_2 z + P_3 z^2 = 0$

の根である．これは矛盾．最後に，$4\beta = 1 - m^2$ for some $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ のときには，(3.2.20) は解

$$u(z) = \frac{a}{2}\frac{m-1}{az+b}$$

と

$$u_C(z) = \frac{a}{2}\frac{C(m-1)-(m+1)(az+b)^m}{(az+b)(C+(az+b)^m)}, \quad C \in \mathbb{C}$$

を持つ．Lemma 3.2.8 より，(3.2.20) の解はこの形に限る．即ち，有理函数である．

$\phi_1 \equiv 0$ の場合には，$f_2'(g)$ を (3.2.10) と (3.2.12) から消去して評価することで，議論の大きな変更の必要なく証明できる．ゆえに，(3.2.8) が成り立つ．

(3.2.7) と (3.2.8) より，$r \notin E$ なる r に関して

$$T(r,\alpha) \le cT(4r,g) = o(1)T(4r,\alpha') \le o(1)(1+o(1))T(4r,\alpha) = o(1)T(4r,\alpha)$$

が成り立つ．(3.2.7) と Lemma 3.2.9 より，与えられた $\beta > 1$ に対して r を十分大きく取れば

$$T(r,\alpha) \le cT(r^\beta, g) \tag{3.2.21}$$

が成り立つ．$\underline{\sigma}(g) < \infty$ なので，(3.2.21) から $\underline{\sigma}(\alpha) < \infty$ が従う．

$$G := \{r \ge 1 \mid T(4r,\alpha) \ge \delta T(r,\alpha)\}$$

とおいて，Lemma 3.2.10 を用いれば，$\delta > 4^{\underline{\sigma}(\alpha)}$ なる δ に関して

$$\underline{\log\operatorname{dens}}\, G \le \frac{\underline{\sigma}(\alpha)\log 4}{\log\delta} < 1$$

とできる．$J := [1,\infty) \setminus G$ とすれば，$\overline{\log\operatorname{dens}}\ J > 0$．それゆえ，$Lm(J) = \infty$ (Hayman [3, p. 97] 参照)．ゆえに，$r \in J \setminus E$ なる r について

$$T(r,\alpha) < o(1)\delta T(r,\alpha)$$

が成り立ち，矛盾である． □

References

Ahlfors, L. V.

[1] *Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée*, Acta Soc. Sci. Fennicae (Nova Series A) (2) **2** (1933), 1–17.

[2] *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math. **65** (1935), 157–194.

Baker, I. N.

[1] *Zusammensetzungen ganzer Funktionen*, Math. Z. **69** (1958), 121-163.

[2] *Fixpoints and iterates of entire functions*, Math. Z. **71** (1959), 146–153.

[3] *Some entire functions with fixpoints of every order*, J. Austral. Math. Soc. **1** (1959/60), 203-209.

[4] *The existence of fixpoints of entire functions*, Math. Z. **73** (1960), 280-284.

[5] *Fixpoints of polynomials and rational functions*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 615-622.

[6] *Repulsive fixpoints of entire functions*, Math. Z. **104** (1968), 252–256.

[7] *In lectures on Complex Analysis*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1987, pp. 1–17.

[8] *Limit functions and sets of non-normality in iteration theory*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **467** (1970).

Baker, I. N. and A. Eremenko

[1] *A problem on Julia sets*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **12** (1987), 229-236.

Baker, I. N., J. Kotus and Lö Yinian

[1] *Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains*, J. London Math. Soc. (2) **42** (1990), 267-278.

[2] *Iterates of meromorphic functions I*, Ergodic Theory & Dynamical Systems **11** (1991), 241-248.

[3] *Iterates of meromorphic functions III: Periodic domains*, Ergodic Theory & Dynamical Systems **11** (1991), 603-618.

Bank S. B.

[1] *A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*, Compositio Math. **25** (1972), 61–70.

Bank S. B., G. G. Gundersen and I. Laine

[1] *Meromorphic solutions of the Riccati differential equation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **6** (1981), 369–398.

References

Beardon, A. F.

[1] *Iteration of rational functions*, Springer, New York, and Heidelberg, 1991.

Becker, P. G. and W. Bergweiler

[1] *Transcendency of Local conjugacies in complex dynamics and transcendency of their values*, Preprint.

Bergweiler, W.

[1] *On the fix-points of composite functions*, Pacific J. Math. **143** (1990), 1–8.

[2] *Fix-points of meromorphic functions and iterated entire functions*, J. Math. Anal. Appl. **151** (1990), 261–274.

[3] *Proof of a conjecture of Gross concerning fix-points*, Math. Z. **204** (1990), 381–390.

[4] *On the number of fix-points of iterated entire functions*, Arch. Math. **55** (1990), 558–563.

[5] *On the growth rate of composite meromorphic functions*, Complex Variables Theory Appl. **14** (1990), 187–196.

[6] *Periodic points of entire functions: Proof of a conjecture of Baker*, Complex Variables Theory Appl. **18** (1991), 57–72.

[7] *Periodishe Punkte bei der Iteration ganzer Funktionen*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1991.

[8] *On the existence of fix points of composite meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 879–880.

[9] *Newton's method and a class of meromorphic functions without wandering domains*, Ergodic Theory & Dynamical Systems (1993), 879–880 (to appear).

[10] *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 151–188.

Bergweiler, W. and H. Bock

[1] *On the growth of meromorphic functions of finite order*, Preprint.

Bergweiler, W. and A. Eremenko

[1] *On the singularities of the inverse function to a meromorphic function of finite order*, Preprint.

Bergweiler, W., Clunie, J. and J. Langley

[1] *Proof of a conjecture of Baker concerning the distribution of fixpoints*, Preprint.

Bergweiler, W. and N. Tergane

[1] *Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains*, Preprint.

Berweiler, W. and C. C. Yang

[1] *On the value distribution of composite moromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 357–361.

References

Bhattacharyya, P.

[1] *On the domain of nomality of an attractive fixpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 89–98.

Blanchard, P.

[1] *Complex analytic dynamics on Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.

Boas, R, Jr.

[1] *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954.

Brolin

[1] *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat. **6** (1967), 103–141.

Clunie, J.

[1] *In Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre*, Ohio University Press, Ahtens, Ohio, 1970, pp. 75–92.

[2] *The maximum modulus of an integral function of an integral function*, Quart. J. Math. Oxford (2) **6** (1955), 176–178.

Cremer, H.

[1] *Zum Zentrumsproblem*, Math. Ann. **98** (1926), 151–163.

[2] *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*, Math. Ann. **115** (1938), 573–580.

Chuang, C. T. and C. C. Yang

[1] *Fix-points and factorization of meromorphic functions*, World Scientific, Singapore, 1990.

Douady A. and J. H. Hubbard

[1] *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 287–343.

[2] *Itération des polynômes quadratique complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 123–126.

Dufresnoy, J.

[1] *Sur les couvertes par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroide.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **58** (1941), 179–259.

Ehrenpreis, L.

[1] *Problems In Entire Functions and Related Parts of Analysis,*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968, pp. 533-546.

Eremenko, A. E.

References

[1] *On the iteration of entire functions*, Daynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publ., vol 23 (1989), Polish Scientific Publishers, Warsaw, 339–345.

Eremenko A. E. and M. Yu. Lyubich

[1] *The dynamics of analytic transforms*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 563–634.

Ewing, J. H. and G. Schober

[1] *On the coefficients of the mapping to the exterior of the Mandelbrot set*, Michigan Math. J. **37** (1990), 315–320.

[2] *Coefficients associated with the reciprocal of the Mandelbrot set*, J. Math. Anal. Appl. **170** (1992), 104–114.

Fatou, P.

[1] *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161-271.

[2] *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières*, Acta. Math. **47** (1926), 337–360.

Fuchs, W. H. J.

[1] *Complex Anal. & Appl. Lect. Int. Semin. Course*, Trieste, pp. 235–283.

Gross, F.

[1] *Factorization of Meromorphic Functions*, U.S. Government Printing Office, Washington, DC., 1972.

F. Gross and C. F. Osgood

[1] *On fixed points of composite entire functions*, J. London Math. Soc. (2) **28** (1983), 57–61.

[2] *A simpler proof of a theorem of Steinmetz*, J. Math. Anal. Appl. **143** (1989), 290–294.

[3] *An extension of theorem of Setinmetz*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 287–292.

Gross, F. and C. C. Yang

[1] *The fix-points and factorization of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972), 211–219.

Gross, F. and C. F. Osgood

[1] *On fixed points of composite meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), 490–496.

Hayman, W. K.

[1] *Uniformly normal families, In lectures on Functions of a Complex Variable*, Michigan University Press, Ann Arbor, Michigan, 1955, pp. 199–212.

[2] *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[3] *On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals*, Proc. London Math. Soc. (3) **14A** (1965), 93–128.

[4] *Research Problems in Function Theory*, Athlone Press, London, 1967.

[5] *The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method*, Can. Math. Bull. (3) **17** (1974), 317–358.

Hayman W. K. and J. Miles

[1] *On the growth of a meromorphic functions and its derivatives*, Complex Variables Theory Appl. **12** (1989), 245–260.

Ishizaki, K.

[1] *Meromorphic solutions of complex differential equations*, Doctoral Dissertation, Chiba, 1993.

Jank, G and L. Volkmann

[1] *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1985.

Julia, G.

[1] *Sur l'itération des fonctions rationelles*, J. Math. Pures Appl. (7) **4** (1918), 47–245.

Jungreis, I

[1] *The uniformization of the complement of the Mandelbrot set*, Duke Math. J. **52** (1985), 935–938.

Katajamäki, K., L. Kinnunen and I. Laine

[1] *On the value distribution of composite entire functions*, Complex Variables Theory Appl. **20** (1992), 63–69.

[2] *On the value distribution of some composite meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 445–452.

Kjellberg, B. O.

[1] *On the minimum modulus of entire functions of lower order less than one*, Math. Scand. **8** (1960), 189–197.

Laine, I.

[1] *On the behavior of the solution of some first order differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **497** (1971).

[2] *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

Langley, J. K.

[1] *On the fixpoints of composite entire functions of finite order*, Preprint.

Lyubich, M. Yu.

[1] *The dynamics of rational transforms: the topological picture*, Russian Math. Surveys **41** **4** (1986), 43–117.

References

Mokhon'ko, A. Z.

[1] *The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions*, [Russian, Teor. Funktsiĭ Funkcional. Anal. i Priložhen. **14** (1971), 83–87.

Prokopovich, C. S.

[1] *Fix-points of meromorphic functions*, Ukrain Mat. Zh. **25** (1972), 248–260, (English translation 198–208).

Rosembloom, P. C.

[1] *L'itération des fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948), 382–383.

[2] *The fix-points of entire functions*, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl. Bd. M. Riesz (1952), 186–192.

Schiff, J. L.

[1] *Normal families*, Universitext, Springer, 1993.

Shishikura, M.

[1] *On the quasi-conformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), 1–29.

[2] *The connectivity of Julia set and fixed point*, Preprint.

Siegel, C.

[1] *Iteration of analytic functions*, Ann. of math. (2) **43** (1942), 607–612.

Steinmetz, N.

[1] *Über die faktorisierbaren Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Math. Z. **170** (1980), 169–180.

Toda, N.

[1] *On an extension of the theorem of Tumura–Clunie*, Comtemp. Math. **25** (1983), 215–219.

Valiron, G.

[1] *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Édouard Pricat, Toulouse, 1923.

Wang, S

[1] *A note on the value distribution of composite moremorphic functions*, Preprint.

Weissenborn, G.

[1] *On theorem of Tumura–Clunie*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 317–373.

Whittington, J. E.

[1] *On the fixpoints of entire functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 530–546.

References

Yang, C. C. and J. H. Zheng

[1] *Further results on fixpoints and zeros of entire functions*, Preprint.

Yoccoz, J.-C.

[1] *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de* $(C, 0)$, C. R. Acad. Sci. Paris **306** (1988), 55–58.