$\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ への正則写像について

足立幸信（姫路学院女子短大）
平井悦子（京都産業大理学部）

§0. 序

本稿は，J.-P. Rosay and W. Rudin の論文 Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., 310 (1988), 47-86. の主要と思われる内容の解説である．原則として証明は省略する．

ここでは，$n \geq 2$ として，正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を考える．F の Jacobian を JF で表す．特に，次のような写像を考える：

(a) 非退化正則写像（Jacobian JF が恒等的に零ではない）

(b) 正則なはめこみ（immersion — Jacobian JF が零をとらない），

(c) 単射正則写像，

(d) 全単射正則写像（自己同型写像 — この全体を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ で表す．）

さらに，これらのうち Jacobian JF が定数であるもの，恒等的に 1 に等しいもの．

1 変数の場合との著しい違いとして，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が非常に大きい群であること，単射正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で全射でないものが存在することが挙げられる．そこで，(1) 自己同型写像による $\mathbf{C}^n$ の部分集合の可遷性や，(2) 正則写像による像 $F(\mathbf{C}^n)$ の性質を調べることが重要となる．§1 では (1) を，§2 では (2) を中心にした話題を解説する．

ここで基本的な道具として使われる自己同型写像について説明しておこう．

(1) shear（ずらし）．いま $\mathbf{C}^n$ の座標系 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ を固定して，e_j で，j 成分が 1 の単位ベクトル $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ を表す $(1 \leq j \leq n)$．また $f(z)$ を変数 z_j を含まない $\mathbf{C}^n$の正則関数とする．

$$z \mapsto z + f(z)e_j$$

という形の写像を（e_j 方向の）shear という．σ が shear ならば，Jacobian $J\sigma \equiv 1$ である．また，逆写像 σ^{-1} も shear である．

(2) $a_1, \ldots, a_n$ を非負整数，$c_j \in \mathbf{C}$，$\sum_{j=1}^n c_j a_j = 0$，$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を正則函数として

$$w_j = z_j \exp\{c_j f(z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n})\} \quad (1 \leq j \leq n)$$

で定まる写像 $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (w_1, \ldots, w_n)$．この写像において

$$w_1^{a_1} \cdots w_n^{a_n} = z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$$

が成り立つことに注意すれば，逆写像は

$$z_j = w_j \exp\{-c_j f(w_1^{a_1} \cdots w_n^{a_n})\} \quad (1 \le j \le n)$$

で与えられることがわかる．また，Jacobian は $(w_1 w_2 \cdots w_n)/(z_1 z_2 \cdots z_n)$ に等しい．

§1．種々の可算集合上での正則写像のふるまい

1．はめこみ補間定理

定理 1　$\{p_j\}$ は $\mathbf{C}^n$ の discrete な点列で，$j \neq k$ のとき $p_j \neq p_k$ とする．また $\{w_j\}$ は $\mathbf{C}^n$ の任意の点列とする．このとき，正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で

$$\text{(a) } F(p_j) = w_j \quad (j = 1, 2, \ldots); \quad \text{(b) } JF \equiv 1$$

なるものが存在する．

2．稠密な集合上のふるまい

定理 2　X と Y を $\mathbf{C}^n$ の稠密な可算部分集合とする．このとき，正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で

$$\text{(a) } F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n); \quad \text{(b) } F(X) = Y; \quad \text{(c) } JF \equiv 1$$

なるものが存在する．

3．discrete な集合上のふるまい

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^n$ とし，$N = \{e_1, 2e_1, 3e_1, \ldots\}$ とする．

定理 3　E を $\mathbf{C}^n$ の discrete な無限部分集合とする．このとき，正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で

$$\text{(a) } F\text{は単射}; \quad \text{(b) } F(E) = N; \quad \text{(c) } JF \equiv 1.$$

なるものが存在する．

ここで，一般には $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ なる F がとれるとは限らない（定理 7）．そこで，次の [very] tame という概念を考えることが意味をもつ．

定義 1　$\mathbf{C}^n$ の部分集合 E が tame であるとは，$F(E) = N$ となる $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が存在することをいう．E が very tame であるとは，更に F が $JF \equiv 1$ をみたすようにとれるときをいう．

$\mathbf{C}^n$ の部分集合 E が tame であるための，十分条件を挙げよう．$n = k + m$ $(k, m > 0)$，$\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^k \oplus \mathbf{C}^m$ として $\pi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^k$ を自然な射影とする．

定理 4　E を $\mathbf{C}^n$ の discrete な部分集合とする．$\pi(E)$ が $\mathbf{C}^k$ で discrete ならば E は tame である．さらに，各 $p \in \pi(E)$ に対して逆像 π^{-1} が有限集合ならば E は very tame である．

系　(a) $\mathbf{C}^n$ の複素超平面に含まれる discrete な部分集合は very tame である.
(b) 有限集合と (very) tame な集合の和集合は (very) tame である.
(c) $\mathbf{C}^n$ の discrete な無限部分集合は，2つの very tame な集合の和集合として表される.

定理 6 にみられるように，$\mathbf{C}^n$ の discrete な無限集合は一般に tame とは限らない．これは [H-E] で出された問題の否定的解決を与える．また，tame ではあるが very tame ではない集合が存在することが定理 10 よりわかる.

4. unavoidable な集合

定義 2　Γ を $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ の中への正則写像の或るクラスとする．$\mathbf{C}^n$ の部分集合 E が Γ に関して unavoidable とは，Γ に属する任意の F に対し，$F(\mathbf{C}^n) \cap E \neq \emptyset$ であることをいう．そうでないとき avoidable という.

定理 5　単射正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で，$F(\mathbf{C}^n) \cap N = \emptyset$ かつ $JF \equiv 1$ なるものが存在する．従って tame な集合は単射正則写像に関して avoidable である．また，very tame な集合は $JF \equiv 1$ なる単射正則写像に関して avoidable である.

[例 2 の後の補註を参照.]

定理 6　$\mathbf{C}^n$ の discrete な無限集合 E で，$\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ の中への非退化正則写像に関して unavoidable なものが存在する.

従って tame でない集合が存在する.

定理 7　$\mathbf{C}^n$ の部分集合 E が $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ の中への単射正則写像に関して unavoidable とする．このとき，$F(N) = E$ となる正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ は単射ではありえない.

(証明) N は tame だから定理 5 より，或る単射正則写像 $G : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n \setminus N$ が存在する．F が単射で $F(N) = E$ とすると，$F \circ G(\mathbf{C}^n) \cap E = \emptyset$ となる．これは E の仮定に矛盾する. (証明終)

5. rigid な集合

定義 3　$\mathbf{C}^n$ の discrete な部分集合 D で，次の性質をもつものを rigid とよぶ：
『F を $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ への非退化正則写像で，$F(\mathbf{C}^n \setminus D) \subseteq \mathbf{C}^n \setminus D$ なるものとすると，F は恒等写像である.』

定理 8　$\mathbf{C}^n$ の rigid な部分集合が存在する.

D を rigid な集合とすると，定義より D を D の上へ写す $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の元は恒等写像である．一方，次の定理がある.

定理 9　$\mathbf{C}^n$ の tame な部分集合 E は permutable である．即ち，任意の E の置換は或る $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の E への制限となっている.

6. tame であるが very tame でない集合

定理 10 $\mathbf{C}^n$ の tame な部分集合 D で，Jacobian $JF \equiv$ 定数 $\neq 0$ なる正則写像のクラスに関して unavoidable なものが存在する．

定理 5 より，このような D は tame であるが very tame ではない．定理 5 と定理 10 より，次の系が成立する．

系 次のような領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ が存在する：$F(\mathbf{C}^n) = \Omega$ なる単射正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ は存在するが，このような F で Jacobian JF が定数となるものはない．

この現象は $n = 2$ の場合について，西村 [N1,2] によって最初に発見された．証明は，この Rosay-Rudin におけるものとは全く異なる方法による．この方法が一般の n に通用するかどうかは明らかではない．

§2. $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ への正則写像の像領域について

7. 像の体積が有限となる整写像

$\mathbf{C}^n$ の立方体とは，各辺が $\mathbf{C}$ の座標軸に平行な正方形の n 個の直積をいう．また，集合 $E \subset \mathbf{C}^n$ の $2n$ 次元 Lebesgue 測度を $\mathrm{vol}(E)$ で表す．

定理 11 Q を $\mathbf{C}^n$ の立方体とし，ε を正数とする．このとき，正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ で $JF \equiv 1$, $\mathrm{vol}(F^{-1}(\mathbf{C}^n \setminus Q)) < \varepsilon$ なるものが存在する．

上の定理をいいかえると，集合 $X \subset \mathbf{C}^n$ があって，$F(X) \subset Q, \mathrm{vol}(\mathbf{C}^n \setminus X) < \varepsilon$ となるということである．F は局所的に体積を保存するから

$$\mathrm{vol}(F(\mathbf{C}^n)) < \varepsilon + \mathrm{vol}(Q)$$

が成り立つ．従って $\mathbf{C}^n$ の像の体積はいくらでも小さくなるように F を選べる．

8. 強凸コンパクト集合

定義 4 $\mathbf{C}^n$ のコンパクト集合 K が強凸とは，K の定義関数で，その（実）Hessian が境界上で正定値なるものが存在することをいう．

定理 12 K を $\mathbf{C}^n$ の強凸コンパクト集合または 1 点とし，E を $\mathbf{C}^n \setminus K$ の任意の可算集合とする．そのとき単射正則写像 $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ が存在して，$E \subset F(\mathbf{C}^n) \subset \mathbf{C}^n \setminus K$, $JF \equiv 1$ を満たす．

特に，K を 1 点とし，E を $\mathbf{C}^n \setminus K$ で稠密とすると，$\mathbf{C}^n$ と双正則で $\mathbf{C}^n$ で稠密な領域 $\Omega \neq \mathbf{C}^n$ が存在することになる．

［補注：（2 次元の場合），$\Omega \neq \mathbf{C}^2$ を $\mathbf{C}^2$ と双正則な領域とすると，その外点全体のなす集合は（空でなければ）擬凸である [U]．従って，K に条件をつけなければ上の定理は成り立たない．］

9. 正則写像による不動点への吸引領域

$F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ とし，F の吸引不動点 $p \in \mathbf{C}^n$ があるとする．即ち，$F(p) = p$ で，$F'(p)$ の固有値 λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ の絶対値はすべて 1 より小とする．

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n; \lim_{k \to \infty} F^k(z) = p\}$$

おき，これを F による p への吸引領域とよぶ．Ω は $\mathbf{C}^n$ 全体になる場合も $\mathbf{C}^n$ の真部分集合になる場合もあるが，これが p を含む連結開集合であることは容易にわかる．また Ω は Runge 領域である [DE],[U].

定理 13　このとき，$\mathbf{C}^n$ から Ω への全単射正則写像 Φ が存在する．さらに，$JF \equiv c$ ならば $J\Phi \equiv 1$ とできる．

固有値に条件をつけると，もう少し強い主張ができる：

定理 14 前定理において，$A = F'(p)$ の固有値が条件

$$|\lambda_i|^2 < |\lambda_j| \quad (i \neq j) \tag{1}$$

を満たすとする．(これは，固有値を $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ と並べたとき $|\lambda_1|^2 < |\lambda_n|$ が成り立つというのと同値.)

このとき $A^{-k} \circ F^k$, $(k = 1, 2, \ldots)$ は Ω 上で広義一様収束し，極限

$$\Psi = \lim_{k \to \infty} A^{-k} \circ F^k \tag{2}$$

は Ω から $\mathbf{C}^n$ の上への双正則写像となる．

この定理で Ψ のつくり方からわかるように $A \circ \Psi = \Psi \circ (F|\Omega)$ 即ち $F|\Omega = \Psi^{-1} \circ A \circ \Psi$. 従って，$F|\Omega$ は Ψ によって線型変換 A に共役となる．

註　条件 (1) が成り立たないときは，

(a) $F|\Omega$ は線型変換 A に共役となるとは限らない．(そのときは (2) はもちろん発散.)

(b) $F|\Omega$ は線型変換 A に共役であっても (2) が収束するとは限らない．

例　次式で定まる $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ を考える．

$$F(z, w) = (\alpha z, \beta w + z^2), \quad (0 < |\alpha|, |\beta| < 1).$$

$F(0) = 0$ で $A = F'(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．$c = \alpha^2/\beta$ とおくと

$$F^k(z, w) = (\alpha^k z, \beta^k w + \beta^{k-1}(1 + c + \cdots + c^{k-1})z^2)$$

この形より，容易に Ω は $\mathbf{C}^2$ 全体に一致することがわかる．

(a) $\alpha^2 = \beta$ の場合，F は線型変換に共役ではない．

(証明) F が線型変換に共役とすると A に共役でなければならない. 従って$\Psi\circ F=A\circ\Psi$ を満たす全単射正則写像$\Psi:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ がある. $\Psi(z,w)=(\varphi(z,w),\psi(z,w))$ とすると

$$\varphi(\alpha z,\beta w+z^2)=\alpha\varphi(z,w)\quad \psi(\alpha z,\beta w+z^2)=\beta\psi(z,w)$$

なるものが存在する. $\psi(z,w)=c_{10}z+c_{01}w+c_{20}z^2+\cdots$ とおいて上の第2式に代入する. z の係数を比較して $c_{10}=0$, 従って $c_{01}\neq 0$. 次に z^2 の係数を比較する. 左辺では $c_{01}+c_{20}\alpha^2$, 右辺では βc_{20}. これらは $\alpha^2=\beta$ だから等しくできない. (証明終)

(b) $\alpha^2\neq\beta$ の場合.

$$\Psi(z,w)=(z,w+\frac{1}{\beta-\alpha^2}z^2)$$

とおくと $A\circ\Psi=\Psi\circ F$. すなわち F は線型変換 A に共役である. 一方,

$$A^{-k}\circ F^k(z,w)=(z,w+\beta^{-1}(1+c+\cdots+c^{k-1})z^2) \tag{3}$$

は, $|c|<1$ (すなわち $|\alpha|^2<|\beta|$) のときは, Ψ に収束する. ところが $|c|\geq 1$ のときは $z\neq 0$ で発散する. すなわち, この場合の Ψ は (3) の極限として得ることはできない.

註 2変数正則写像の吸引的不動点における固有値を α,β $(0<|\beta|\leq|\alpha|<1)$ とするとき, この写像は局所的に次の標準形に共役である (Lattès [L]) :

$$(z,w)\mapsto(\alpha z,\beta w),$$

または

$$(z,w)\mapsto(\alpha z,\beta w+z^m)\quad(\alpha^m=\beta,m\geq 1).$$

10. Fatou-Bieberbach 領域の例

$\mathbf{C}^n$ の真部分領域であって, $\mathbf{C}^n$ と双正則なものを Fatou-Bieberbach 領域 (略して F.B. 領域) という. 2次元の F.B. 領域の例をいくつか挙げる.

例1. F.B. 領域で, 任意の複素直線による切り口が有界である例.

$F:(z,w)\mapsto(u,v)$ を

$$u=\alpha w, v=\alpha z+w^2,\quad 0<|\alpha|<1$$

で定義すると, $F\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$, $F(0)=0$, $F'(0)$ の固有値は $\pm\alpha$ である. Ω を F による 0 への吸引領域とする.

$$E=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2;|w|>1+2|\alpha|+|z|\}$$

とおくと $F(E)\subset E$. 実際, $(z,w)\in E$ ならば

$$\begin{aligned}|v| &\geq |w|^2-|\alpha z|>|w|^2-|\alpha w|=|w|(|w|-|\alpha|)\\ &> |w|(1+|\alpha|)>1+2|\alpha|+|u|\end{aligned}$$

であるから $(u,v)\in E$. $0\notin E$ だから E の点は 0 に収束しない. すなわち$\Omega\subset \mathbf{C}^2\setminus E$. Ω は F で不変だから$\Omega\subset \mathbf{C}^2\setminus F^{-1}(E)$. 集合 $F^{-1}(E)$ の形

$$F^{-1}(E)=\{(z,w);|\alpha z+w^2|>1+2|\alpha|+|\alpha w|\}$$

から, 任意の複素直線 L と $\mathbf{C}^2\setminus F^{-1}(E)$ との共通部分は, 従って L と Ω の共通部分も, 有界であることは容易にわかる.

例2． $\mathbf{C}^2$ が無限個の F.B. 領域を含む例

$F:(z,w)\mapsto(u,v)$ を

$$u=z+w,\ v=\frac{1}{2}(1-w-e^{z+w})$$

で定義すると, $F\in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$. 不動点は

$$p_m=(2m\pi i,0)\quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

であり, $F'(p_m)$ の固有値は $\pm1/\sqrt{2}$ であることがわかる. 従って定理 13 より, 互いに共通部分をもたない F.B. 領域$\Omega_m\subset\mathbf{C}^2$ $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ が存在する. ここに Ω_m は F による p_m への吸引領域である.

$$F((z,w)+p_m))=F(z,w)+p_m$$

だから, $\lim_{k\to\infty}F^k((z,w)+p_m)=p_m$ となり

$$\Omega_m=\Omega_0+p_m$$

がいえる. 即ち Ω_m は Ω_0 を平行移動したものである.

いま, $E(u,v)=(e^u,ve^{-u})$ という写像を考えると, E は Ω_m 上1対1であり, $\Omega^*=E(\Omega_m)$ は m と無関係な領域である. 明らかに $\Omega^*\cap\{z=0\}=\emptyset$ であるから Ω^* は1本の複素直線を除外する F.B. 領域である. また $JF\equiv-1/2$, $JE\equiv1$ であるから, Ω_m および Ω^* は $\mathbf{C}^2$ の体積を保存する単射正則写像の像領域である.

［補註：同様の例は小平 [K1, 2] にもある. また, この例から $\mathbf{C}^n$ の複素超平面は（従って, その任意の部分集合も）Jacobian が定数の単射正則写像に関して aviodable であることがわかる. 実際 $\Omega_0\times\mathbf{C}^{n-2}$ は $\mathbf{C}^n$ の F.B. 領域で超平面と交わらない.］

例3． F.B. 領域で，その閉包が1本の複素直線を除外する例．

α を $0<|\alpha|<1$ なる定数とし, 整函数 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ を

$$e^{f(0)}=1/\alpha,\ f'(0)=0, f(1)=0,\ f'(1)=\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

を満たすようにとる. $F:(z,w)\mapsto(u,v)$ を

$$u=1-\alpha^2+\alpha^2ze^{f(zw)},\quad v=we^{-f(zw)}$$

で定義する. すると $F\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$, $JF\equiv\alpha^2$, $F(1,1)=(1,1)$ であり, $F'(1,1)$ の固有値は $\pm\alpha i$ である. Ω_0 を F による $(1,1)$ への吸引領域とする. 一方 $F(1+\alpha,0)=(1+\alpha,0)$ で,

そこで $F' = \alpha I$ （I は単位行列）である．Ω_1 を F による $(1+\alpha, 0)$ への吸引領域とする．任意の $z \in \mathbf{C}$ について $F(z,0) = (1-\alpha^2+\alpha z, 0)$ であるので，Ω_1 は複素直線 $\{w=0\}$ を含む．従って $\overline{\Omega_0}$ は $\{w=0\}$ とは交らない．

このような例は [N1] にも与えられている．［また [U] には境界が複素直線を含む F.B. 領域の例がある．］

例4．F.B. 領域で，$\{zw=0\}$ を含み，$\mathbf{C}^2$ で稠密でない例．

整函数 $g,\, h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ で

(1)
$$\exp g(0) = 2,\ \exp h(0) = 1/4$$

(2)
$$\exp g(2^{4p}) = 1/2,\ \exp h(2^{2p+2}) = 4 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たすものをとって

$$G(z,w) = (z \exp g(z^3 w), w \exp[-3g(z^3 w)])$$

$$H(u,v) = (u \exp h(uv), v \exp[-h(uv)])$$

とおき，$F = H \circ G$ とする．すると $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ で

$$F(z,0) = (\frac{1}{2}z, 0), \quad F(0,w) = (0, \frac{1}{2}w)$$

$$F(2^p, 2^p) = (2^{p+1}, 2^{p+1}), \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる．Ω を F による原点への吸引領域とすると，$\{zw=0\} \subset \Omega$，$(2^p, 2^p) \notin \Omega$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ は明らかである．

Ω が $\mathbf{C}^2$ で稠密でないようにするために，条件 (2) を強くして，2^{4p} および 2^{2p+2} を中心とする円板上 g, h が定数に近いようにする．

$D(a,r)$ で中心 a 半径 r の開円板 $\subset \mathbf{C}$ を表すものとして，

$$X_p = D(2^{4p}, \frac{1}{4}2^{4p}), \quad Y_p = D(2^{2p+2}, \frac{1}{4}2^{2p+2})$$

とおく．正数列 ε_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ が与えられたとき，整函数 g, h で (1) を満たし，さらに

$$X_p\text{上} \quad |1/2 - e^g| < \varepsilon_p, \quad Y_p\text{上} \quad |4 - e^h| < \varepsilon_p, \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

なるものを選ぶことが（Runge の定理を繰り返し使って）可能である．

正数 c_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ および c を

$$0 < c_0 < c_1 < \cdots < c, \quad (1+c)^4 - 1 < 1/4$$

を満たすようにとり，

$$D_p = D(2^p, c_p 2^p), \quad \Delta_p = D_p \times D_p$$

とする. $(z,w) \in \overline{\Delta_p}$ とすると, 条件 より $z^3 w \in X_p$, $4zw \in Y_p$ がいえる. X_p 上で $e^g \approx 1/2$ であるので, $(u,v) = G(z,w)$ とするとき $(u,v) \approx (z/2, 8w)$. ε_p を十分小さくとれば $uv \in Y_p$ となり, 従って

$$F(z,w) = H(u,v) \approx (4u, v/4) \approx (2z, 2w)$$

ε_p を十分小さくとれば

$$F(\Delta_p) \subset \Delta_{p+1} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる. 従って任意の $(z,w) \in \Delta_p$ について $|F^k(z,w)| \to \infty$ $(k \to \infty)$ がいえる. すなわち $\Omega \cap \Delta_p = \emptyset$.

§3. 未解決問題

1. $\mathbf{C}^2$ の discrete な無限集合についての次の諸性質の間にどんな関係が成り立つであろうか.

(a) E は $\mathbf{C}^2$ で tame である
(b) E は単射正則写像に関して avoidable である.
(c) E permutable である
(d) E はある $\mathbf{C}^2$ の自己同型写像の不動点全体である.

性質 (a) から他の 3 つが導かれることはわかっている : (a) $\Rightarrow$ (b) は定理 5 より, (a) $\Rightarrow$ (c) は定理 9 より, (a) $\Rightarrow$ (d) は例 2 より.

2. 前問の $(b) \Rightarrow (a)$? について次の特別の場合を考える : $\{\Omega_j\}$ を互いに交らない $\mathbf{C}^2$ の F.B. 領域の列とし, E を $\mathbf{C}^2$ で discrete で各 Ω_j が E の点を丁度 1 個含むとする. すると E は $\mathbf{C}^2$ の単射正則写像に関して avoidable である. では E は $\mathbf{C}^2$ で tame であろうか. [補註 : avoidable であることは次のようにしてわかる : $E \cap \Omega_1 = \{p_1\}$ とする. 単射正則写像 $\Phi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で $\Phi(\mathbf{C}^2) = \Omega_1$ なるものをとると, $\Phi^{-1}(E)$ は唯 1 点. これを q とする: 単射正則写像 $\Psi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で $q \notin \Psi(\mathbf{C}^2)$ なるものをとって合成写像 $\Phi \circ \Psi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を考えれば $\Phi \circ \Psi(\mathbf{C}^n)$ と E とは交わらない.]

3. $\mathbf{C}^n$ の集合 E の 任意の 2 点間の距離が少なくとも 1 であるとすると, E は $\mathbf{C}^n$ で tame であろうか.

4. E は $\mathbf{C}^2$ で discrete で, $E \subset \{(z_1, z_2); |z_1| > 1\}$ とすると, E は $\mathbf{C}^2$ で tame であろうか. (ここでは解説していないが, $E \subset \{(z_1, z_2); |z_1| > 1, |z_2| > 1\}$ ならば E は very tame である.)

5. E は $\mathbf{C}^n$ で discrete で, 或る正則写像のクラスに関して unavoidable であるならば, E からその 1 点を除いた集合も同じように unavoidable であろうか.

6. 単射正則写像 $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$で, 自己同型写像の極限でないものが存在するであろうか. 関連した問題として

F が単射正則写像なら $F(\mathbf{C}^n)$ は Runge 領域か.
例 2 で定義した領域 Ω^* は Runge 領域か.
F.B. 領域の増大列の和集合は F.B. 領域か.

7．　正則写像 $F:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ で $JF\equiv 1$ （または $JF\neq 0$）かつ $F(\mathbf{C}^2)$ の閉包が体積有限となるものがあるか．

8．　$F\in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ で $JF\equiv 1$ なるものは shear の合成写像の極限であろうか．［これは Andersén [A] によって肯定的に解決された．］

9．　簡単のため２変数の場合について述べる．Γ で $\{z_1z_2=0\}$ の各点を固定する全単射正則写像の全体からなる部分群 $\subset \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ を表す．

(a)　Γ は次の形の写像によって生成されるか

$$(z_1,z_2)\mapsto(w_2,w_2)=(z_1\exp\{c_1f(z_1^{a_1}z_2^{a_2})\},z_2\exp\{c_2f(z_1^{a_1}z_2^{a_2})\}).$$

ここで，a_1,a_2 は非負整数，$c_j\in\mathbf{C}$，$c_1a_1+c_2a_2=0$ で $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ は正則，$f(0)=0$ とする．

(b)　$F\in\Gamma$，　$F(z_1,z_2)=(w_1,w_2)$ ならば $(JF)(z_1,z_2)=(w_1w_2)/(z_1z_2)$ が成り立つか．

Peschl は [P] において問 (b) の答は真であると主張しているが，彼の証明にはギャップがあるように思われる．

10．　単射正則写像 $F:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ で，その像が２本の複素直線を除外するものが存在するであろうか．

11．　Ω を F.B. 領域，L を１本の複素直線とするとき，次の状態が可能であろうか：(a) $L\cap\Omega$ が空でない連結集合．(b) $L\cap\Omega$ が有限個の連結成分からなる．(c) $L\cap\Omega$ が L の円板となる．

12．　$\mathbf{C}^2$ の F.B. 領域は何本の複素直線を含みうるか．例１では０本，例３の Ω_1 は１本，例４では２本の複素直線を含んでいる．

13．　$\mathbf{C}^n$ の互いに交らない２つの F.B. 領域で，その和集合が $\mathbf{C}^n$ で稠密なものがあるか．２個という代わりに有限個の，或いは無限個のとしたらどうであろうか．

参考文献

[A] E. Andersén, Volume-preserving automorphisms of $\mathbf{C}^n$, Complex Variables 14(1990), 223-235.

[D-E] P. G. Dixon and J. Esterle, Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 15 (1986),127-187.

[H-E] H. Hermes and E. Peschl, Über analytische Automorphismen des R_{2n}, Math. Ann. 122(1950),66-70.

[K1] K. Kodaira, On holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geom. 6 (1971), 33-46.

[K2] 小平邦彦, Nenvanlinna 理論, 東大セミナリーノート 34 (1974)

[L] M. S. Lattès, Sur les formes réduites des transformations ponctuelles à duex variables. Comptes Rendus, 152 (1911),1566-1569.

[N1] Y. Nishimura, Automorphismes analytiques admettant des sous variétés de points fixes attractives dans la derection transversale, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983), 289-299.

[N2] ——, Applications holomorphes injectives de $\mathbf{C}^2$ dans lui-même qui exceptent une droite complexe, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984),755-761.

[N3] ——, Applications holomorphes injectives à jacobien constant de deux variables, J. Math. Kyoto Univ. 26(1989),697-709.

[P] E. Peschl, Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes, C.R. Acad. Sci. Paris 242(1956), 1836-1838.

[U] T. Ueda, Local structure of analytic transformations of two complex variables, (I), J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986) 233-261; (II), J. Math. Kyoto Univ. 31 (1991) 695-711.

吸引不動点の標準形と Fatou-Bieberbach 領域

上田哲生

1. U を $0 \in \mathbf{C}^n$ の近傍，$F : U \to \mathbf{C}^n$ を正則写像とし，0 が F の吸引不動点であるとする．即ち，$F(0) = 0$ かつ F の 0 における微分（線型項）dF_0 の固有値$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は $0 < |\lambda_k| < 1$ $(k = 1, \dots, n)$ を満たすと仮定する．

以下では F の 0 における germ を問題とする．従って，F の定義域 U を必要に応じて小さく取り直す．また，dF_0 の固有値は

$$1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$$

なるように番号づけられているとする．

定義　写像 $F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ が下半三角型であるとは $f_k(x)$ が次の形であることをいう：

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lambda_1 x_1 \\ f_2(x) &= \lambda_2 x_2 + h_2(x_1) \\ f_3(x) &= \lambda_3 x_3 + h_3(x_1, x_2) \\ \cdots & \quad \cdots\cdots \\ f_n(x) &= \lambda_n x_n + h_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

ここで，h_k は $k-1$ 個の変数 $x_1, \dots, x_{k-1}$ の正則関数で $h_k(0, \dots, 0) = 0$ $(k = 2, \dots, n)$.

我々の目標は，0 を吸引不動点とする任意の写像 F （の 0 における germ）が下半三角型写像に共役であることを示すことである．

この結果をより強い形で述べるために，次の定義をする：k 重指数全体の集合を

$$\mathbf{N}^k = \{I = (i_1, \dots, i_k) \mid i_1, \dots, i_k \text{ は非負整数}\}$$

で表す．また $S_k \subset \mathbf{N}^k$ $(k = 1, \dots, n-1)$ を

$$S_k = \{I = (i_1, \dots, i_k) \mid \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_k^{i_k} = \lambda_{k+1}\}$$

で定める．これは明らかに有限集合である（generic には空集合）．

多重指数 $I = (i_1, \dots, i_k) \in S_k$ を持つ単項式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$ の線形結合である k 変数多項式の全体を $\mathcal{P}_k$ $(k = 1, \dots, n-1)$ で表す．(S_k が空のときは $\mathcal{P}_k = \{0\}$.) 関数 $h(x_1, \dots, x_k)$ が $\mathcal{P}_k$ に属するための必要充分条件は

$$h(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k) = \lambda_{k+1} h(x_1, \dots, x_k)$$

であることに注意しよう．

次の定理を，以下の第2〜5節で証明しよう．

定理 1　0 を吸引不動点とする任意の写像 F は，$h_k(x_1,\ldots,x_{k-1})\in\mathcal{P}_{k-1}$ $(k=2,\ldots,n)$ なる下半三角型多項式写像に共役である．

2.

まず，証明のための準備をしよう．$\mathbf{C}^n$ の点を $x=(x_1,\ldots,x_n)$ で表わし，そのノルムを

$$\|x\|=(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}$$

で定める．また，$\mathbf{C}^n$ の点 x における複素接空間を $T_x\mathbf{C}^n$ で，接ベクトルを

$$v=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

で表し，そのノルムを

$$\|v\|=(|v_1|^2+\cdots+|v_n|^2)^{1/2}$$

で定める．

補題 2　A を n 次正則行列とし，その固有値を$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とする．

$$0<s<\min|\lambda_i|,\quad \max|\lambda_i|<r$$

なる任意の正実数 r,s に対して，適当な正則行列 P をとって $B=P^{-1}AP$ とおくと，$\|Bv\|\le r\|v\|$, $\|B^{-1}v\|\le\|(1/s)v\|$ とできる．

(証明)　$A=(a_{ij})$ は下半三角行列であると仮定してよい：$a_{ij}=0$ $(i<j)$, $a_{ii}=\lambda_i$．P として，対角成分が $\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^n$ なる対角行列をとると，$P^{-1}AP=(\varepsilon^{i-j}a_{ij})$．$\varepsilon\to0$ のとき，これは $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ を対角成分とする対角行列に近づく．よって，ε を十分 0 に近くとれば補題は成り立つ．　□

この補題より次がわかる：　F を吸引不動点をもつ写像とするとき，線型変換による共役に移って F の 0 における微分は

$$\|dF_0v\|<r\|v\|,\quad \|dF_0^{-1}v\|<(1/s)\|v\|$$

を満たすと仮定できる．さらに U として 0 を中心とする十分小さい開球をとって

$$x\in U \text{ ならば } \|F(x)\|<r\|x\| \text{ (従って } F(x)\in U)$$

$$x\in F(U),\ v\in T_x\mathbf{C}^n \text{ ならば } \|dF^{-1}v\|<(1/s)\|v\|$$

と仮定できる．

3.

証明の第1段階として，F が $h_k(x_1,\ldots,x_{k-1})$ $(k=2,\ldots,n)$ が正則関数であるような下半三角型写像に共役であることを示そう．これは次の命題から次元による帰納法で得られる．

命題 3　F はつぎの形の写像に共役である：

$$(y, x_n) \mapsto (G(y), \lambda_n x_n + h_n(y))$$

ここで，$y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$，$G$ は $n-1$ 変数の 0 を吸引不動点とする正則写像，$h(y)$ は $n-1$ 変数の正則関数.

補題 4　$a \in T_0\mathbf{C}^n$ を dF_0 の固有値 λ_n に対応する固有ベクトルとする.（$dF_0 a = \lambda_n a$.）このとき，U 上の正則ベクトル場 $v(x)$ で $v(0) = a$ かつ

$$dF_x v(x) = \lambda_n v(F(x)) \quad x \in U$$

を満たすものが唯一つ存在する.

(証明)　r, s を $0 < s < |\lambda_n| = \min |\lambda_k|$, $|\lambda_1| = \max |\lambda_k| < r$, かつ $|\lambda_n| r/s < 1$ なるようにとる. この r, s について第 2 節の条件が成立すると仮定する. U 上有界な正則ベクトル場 $v^{(0)}(x)$ で $v^{(0)}(0) = a$ なるものを (任意に) とり，U 上の正則ベクトル場 $v^{(j)}$ を

$$v^{(j)}(x) = \lambda_n dF^{-1} v^{(j-1)}(F(x)) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

によって定める. $v^{(j)}(0) = a$ なることに注意する. $j \to \infty$ のときこれが収束することを示せば，この極限ベクトル場が条件を満たすことは明らかである. いま

$$\begin{aligned} w(x) &= v^{(1)}(x) - v^{(0)}(x) \\ &= \lambda_n dF^{-1} v^{(0)}(F(x)) - v^{(0)}(x) \end{aligned}$$

とおくと $w(0) = 0$. 従って $\|w(x)\| \leq K\|x\|$ なる正数 K が存在する.

$$v^{(j+1)}(x) - v^{(j)}(x) = \lambda_n^j dF^{-j} w(F^j(x)) \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

において $\|F^j(x)\| < r^j \|x\|$ より $\|w(F^j(x))\| < K r^j \|x\|$, $\|dF^{-j} w(F^j(x))\| < (1/s)^j K r^j \|x\|$
従って,

$$\|v^{(j+1)}(x) - v^{(j)}(x)\| \leq \left(\frac{|\lambda_n| r}{s} \right)^j K\|x\|$$

これから $v^{(j)}$ が収束することがわかる.　□

次の補題は常微分方程式の解の存在および初期値に関する正則性からただちに導かれる.

補題 5　(ベクトル場の直線化定理)　$v(x)$ を開集合 U 上の正則ベクトル場で $v(0) \neq 0$ なるものとする. このとき 0 の近傍 $\hat{U}$ および単射正則写像

$$\Phi : \hat{U} \ni \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

で　$\Phi(0) = 0$, $d\Phi \frac{\partial}{\partial \xi_n} = v$ なるものが存在する.

(命題 3 の証明)　補題 4 のベクトル場 $v(x)$ に補題 5 を適用して得られる写像を Φ とする.

$$\hat{F} := \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi : (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (\hat{f}_1(\xi), \ldots, \hat{f}_n(\xi))$$

とすると

$$d\hat{F}\frac{\partial}{\partial \xi_n} = \lambda_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

これから

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \xi_n} = \cdots = \frac{\partial \hat{f}_{n-1}}{\partial \xi_n} = 0, \ \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \xi_n} = \lambda_n$$

すなわち $\hat{f}_1, \ldots, g_{n-1}$ は $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ のみの関数で，$\hat{f}_n$ は $\lambda_n \xi_n + h_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ の形. これで命題は示された. □

4.　証明の第 2 段階として $h_k(x_1, \ldots, x_{k-1})$ を $m_k - 1$ 次以下の多項式にとれることを示そう. ここで，m_k は

$$|\lambda_1|^{m_k} < |\lambda_k| \leq |\lambda_1|^{m_k - 1}$$

なる整数 $(k = 2, \ldots, n)$.

これを次元に関する帰納法で証明しよう. そのために $V \subset \mathbf{C}^{n-1}$ を 0 の近傍として，次のような正則写像 $F : V \times \mathbf{C} \to V \times \mathbf{C}$ を考察する：

$$F(y, z) \mapsto (G(y), \mu z + h(y))$$

ここで，$y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$，$z = x_n$，$\mu = \lambda_n$ とし，$G : V \to \mathbf{C}^{n-1}$ は，0 を吸引不動点とする正則写像. また $h(y) \in \mathrm{Hol}(V)$ とする. V を適当にとりなおして $F(V) \subset V$ と仮定する. 線型作用素 $L : \mathrm{Hol}(V) \to \mathrm{Hol}(V)$ を

$$L[\varphi](y) := \varphi(G(y)) - \mu\varphi(y)$$

によって定める.

命題 6　$h, \hat{h}, \varphi \in \mathrm{Hol}(V)$ とする. $F(y, z) = (G(y), \mu z + h(y))$ と $\hat{F}(y, z) = (G(y), \mu z + \hat{h}(y))$ とが双正則写像 $\Phi : V \times \mathbf{C} \to V \times \mathbf{C}$

$$\Phi(y, z) = (y, z + \varphi(y))$$

によって共役であるための必要十分条件は，$L[\varphi] = h - \hat{h}$ が成り立つことである.

(証明)　$(y, z) \in V \times \mathbf{C}$ は $\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$ によって次のように写される：

$$\begin{aligned}
(y, z) &\overset{\Phi}{\mapsto} (y, z + \varphi(y)) \\
&\overset{F}{\mapsto} (G(y), \mu(z + \varphi(y)) + h(y)) \\
&\overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} (G(y), \mu(z + \varphi(y)) + h(y) - \varphi(G(y))) = (G(y), \mu z + h(y) - L[\varphi](y)))
\end{aligned}$$

これから補題が従う. □

定義 $h-\hat{h}=L[\varphi]$ なる $\varphi\in\mathrm{Hol}(V)$ が存在するとき h と $\hat{h}$ とは $(G,\mu$ に関して）同値であるという.

$m=m_n$ は条件 $|\lambda_1|^m<|\mu|\le|\lambda_1|^{m-1}$ $(\mu=\lambda_n)$ で定まった整数であることを思いだしておこう.

補題 7 $h,\hat{h}\in\mathrm{Hol}(V)$ の $x=0$ の周りの巾級数展開の $m-1$ 次以下の項がすべて一致すれば h と $\hat{h}$ とは同値である.

（証明） $\eta(y)=h(y)-\hat{h}(y)$ とおく.

$$L[\varphi](y):=\varphi(F(y))-\mu\varphi(y)=\eta(y)$$

なる $\varphi\in\mathrm{Hol}(V)$ が存在することを示せばよい. 次の級数によって φ を定める：

$$\varphi(y)=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{j+1}}\eta(G^j(y))$$

これが V で一様収束すれば条件を満たすことは容易にわかる. 収束は次のようにして確かめられる：

$\eta(G(y))$ は V で有界で, $y=0$ で少なくとも m 位の零をとるから $|\eta(G(y))|\le K\|y\|^m$ なる正数 K が存在する. また, $|\lambda_1|<r$, $r^m<|\mu|$ なる r について $\|G(y)\|\le r\|y\|$ が成り立つと仮定してよい. 従って

$$|\eta(G^j(y))|\le K\|G^{j-1}(x)\|^m\le K(r^{j-1}\|x\|)^m$$

$$\left|\frac{1}{\mu^{j+1}}\eta(G^j(y))\right|\le\frac{K}{|\mu|r^m}\left(\frac{r^m}{|\mu|}\right)^j\|y\|^m$$

この評価より一様収束がわかる. □

これより, $h(y)$ から m_n 次以上の項を取り去って得られる多項式を $\hat{h}$ とすると $F(y,z)=(G(y),\mu z+h(y))$ と $\hat{F}(y,z)=(G(y),\mu z+\hat{h}(y))$ とが同値であることがわかる.

5. 最後に $h_{k+1}(x_1,\dots,x_k)\in\mathcal{P}_k$ とできることを示そう. そのためには, 前節の設定のもとで, 次を示せばよい：

任意の $h\in\mathrm{Hol}(V)$ に対して, h と同値な多項式 $P\in\mathcal{P}_{n-1}$ が存在する.

記号を簡単にするために, $p=n-1$ と表す.

定義 p 重指数全体からなる集合 N^p に次のように順序を導入する：$I=(i_1,\dots,i_p),J=(j_1,\dots,j_)$ に対して $I<J$ とは或る q $(1\le q\le p)$ があって

$$\begin{aligned} i_1+\cdots+i_t &= j_1+\cdots+j_t \quad (q<t\le p)\\ i_1+\cdots+i_q &< j_1+\cdots+j_q \end{aligned}$$

が成り立つことをいう．

これによって $\mathbf{N}^p$ は整列順序集合となる．例えば，$p=3$ の場合について言えば，

$$\begin{aligned}(0,0,0) &< (0,0,1) < (0,1,0) < (1,0,0)\\ &< (0,0,2) < (0,1,1) < (1,0,1) < (0,2,0) < (1,1,0) < (2,0,0) < \cdots\end{aligned}$$

多重指数 $I=(i_1,\ldots,i_p)$ の単項式

$$M_I(y) := x^I = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}, \quad y=(x_1,\ldots,x_p)$$

に対して

$$\begin{aligned}L[M_I](y) &= M_I(G(y)) - \mu M_I(y)\\ &= (\lambda_1 x_1)^{i_1}(\lambda_2 x_2 + h_2(x_1))^{i_2}\cdots(\lambda_p x_p + h_p(x_1,\ldots,x_p))^{i_p} - \mu x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\\ &= (\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_p^{i_p} - \mu)M_I + \sum_{J>I} c_J M_J\end{aligned}$$

となる．従って，$I \notin S_p$ ならば M_I は $J>I$ なる多重指数をもつ項のみからなる正則関数と同値である．

これを繰り返し用いれば，任意の $h \in \mathrm{Hol}(V)$ に対して，$P \in \mathcal{P}_p$ および充分大きい多重指数をもつ項のみからなる $\eta \in \mathrm{Hol}(V)$ が存在して h と $P+\eta$ とは同値となることがわかる．しかし補題 7 よりこれは P と同値である．

これで定理 1 の証明が完了した．

6.

応用として Fatou-Bieberbach 領域の構成法を述べる．まず，

命題 8 $F:\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ が 0 を吸引不動点とする下半三角型の正則自己同型写像ならば F の 0 への吸引領域 Ω_F は $\mathbf{C}^n$ 全体に一致する．

これを少し一般化した状況で証明しよう．$G:\mathbf{C}^{n-1}\to\mathbf{C}^{n-1}$を正則自己同型写像とし，0 が吸引的不動点であるとする．G の 0 への吸引領域を Ω_G で表す．μ を $0<|\mu|<1$ なる定数，$h(x)$ を $\mathbf{C}^{n-1}$ 上の整関数で $h(0)=0$ なるものとして，正則自己同型写像 $F:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ を

$$F:(y,z)\to(G(y),\mu z + h(y))$$

で定める．このとき $0\in\mathbf{C}^n$ は F の吸引不動点となる．

補題 9 F による 0 への吸引領域は

$$\Omega_F = \Omega_G \times \mathbf{C}$$

で与えられる．

(証明)　$\Omega_F \subseteq \Omega_G \times \mathbf{C}$ は明らかであるから，逆の包含関係を示そう．

dG_0 の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ として，$\max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{n-1}|, |\mu|\} < r < 1$ なる r をとる．$\mathbf{C}^{n-1}$ の線形変換による共役をとって，0 を中心とする開球 V で $\|G(y)\| \leq r\|y\|$ $(y \in V)$ なるものがあるとしてよい．また $|h(y)| \leq K\|y\|$ $(y \in V)$ なる定数 K が存在する．

$(y, z) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C} = \mathbf{C}^n$ に対して $F^j(y, z) = (y_j, z_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ とおく．

まず $V \times \mathbf{C} \subseteq \Omega_F$ なることを示そう．$(y, z) \in V \times \mathbf{C}$ とすると

$$|y_j| < r^j|y|, \ |z_j| < r^j|z| + jr^{j-1}K|y| \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

なることが帰納法によって容易に証明される；従って $(y_j, z_j) \to (0, 0)$ $(j \to \infty)$．即ち $U \times \mathbf{C} \subset \Omega_{\hat{F}}$ である．

次に，$(y, z) \in \Omega_F \times \mathbf{C}$，とすると，$j$ が充分大なるとき $y_j = G^j(y) \in V$．即ち $(y_j, z_j) \in V \times \mathbf{C}^{n-1} \subset \Omega_F$ 従って $(y, z) \in \Omega_F$．　□

定理 10　$F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を正則自己同型写像，0 を吸引的不動点とし，F の 0 への吸引領域を Ω_F で表す．このとき，全単射正則写像 $\Phi : \mathbf{C}^n \to \Omega_F$ で，$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$ が下半三角型正則自己同型となるものが存在する．

(証明)　原点 0 の近傍で下半三角型写像 $\hat{F}$ との共役を与える写像 Φ をとると $\Phi(\xi) = F^{-1} \circ \Phi \circ \hat{F}(\xi)$ 従って $\Phi(\xi) = F^{-j} \circ \Phi \circ \hat{F}^j(\xi)$ $(j = 1, 2, \ldots)$．これを用いて Φ を全単射正則写像 $\mathbf{C}^n \to \Omega_F$ に拡張（解析接続）できる．　□