序

関数論において通常扱われる BMO 空間は境界関数に対しての 1 次元 BMO 空間であり 2 次元 BMO 空間については, 正則関数に対してはそれがよく知られた Bloch 型関数空間と一致してしまうためもあってか関数論的立場からはそれほどよく調べられていないように思われる. しかし Reimann の定理によれば 2 次元 BMO 空間は (擬) 等角写像によって不変になるというその定義からは思いもよらない性質を持っている. それゆえ BMO 空間は等角構造にのみよって定まる空間となっており 2 次元 BMO 関数の最も自然な定義域は Riemann 面であるとも考えることができる. そこで 2 次元 BMO 空間と等角写像のかかわりを中心にまとめたものがこの資料である.

第 1 章では以下の章の準備も兼ねて John-Nirenberg の定理など (1 次元 BMO 空間の概説等も含め) BMO 空間の基本的性質をまとめる.

第 2 章では Reimann による BMO 空間の擬等角不変性定理の証明を与える. Reimann [68] は全平面 $\mathbf{C}$ 上の BMO 空間の擬等角不変性を証明し, さらに Jones [45] は一般の平面領域上の BMO 空間の擬等角不変性も Reimann の証明をもとに証明できることを指摘している. しかし一般領域上の BMO 空間の擬等角不変性の証明ははっきりとした形ではどこにも述べられていない様なので Reimann の証明を紹介すると共に一般の平面領域上の BMO 空間の擬等角不変性の証明をきちんと与えることがこの章での目的である.

Jones [45] は, その上の BMO 関数が常に $\mathbf{C}$ 上の BMO 関数に拡張可能であるような領域が一様領域に他ならないことを示した. 第 3 章では Jones によるこの結果をより一般的化された形で証明する. すなわち 領域 $D \subset D'$ について D 上の BMO 関数が常に D' 上の BMO 関数に拡張できるような領域 D が D' に関する "相対的" 一様領域として特徴付けられることを証明する. また Whitney 分解を用いた議論の応用として BMO multiplier の特徴付け等についても論じる.

第 4 章においては平面領域上での 2 次元 BMO 空間に相当する BMO 空間を一般の Riemann 面に対しても定義しこの空間の性質を調べる. ここでの考察の中心はこの BMO 空間を保存する正則写像 (BMO 写像) の特徴付けである.

原稿作成にあたっては BMO 関数に関し予備知識なしで読めるよう配慮したつもりである. しかし当方の力量の不足, 時間的制約のため誤り, 誤植などがかなり存在するのではないかと思われるので御気付きの方はご指摘いただければ幸いである.

目次

第 1 章 BMO 関数の基本性質

§1.1. 平面領域上の 2 次元 BMO 空間の基本性質 3

§1.2. 単位円板上の種々の BMO 空間 12

§1.3. 単位円板上の Green potential の BMO 性 19

第 2 章 BMO 空間の擬等角不変性 (Reimann の定理)

§2.1. BMO による擬等角写像の特徴付け (その１) 29

§2.2. BMO による擬等角写像の特徴付け (その 2) 37

第 3 章 BMO 関数の拡張性 (Jones の定理とその一般化)

§3.1. Jones の定理, 主定理 41

§3.2. 主定理の証明 48

§3.3. BMO multiplier の特徴付け等 64

第 4 章 Riemann 面上の BMO 空間

§4.1. BMO 写像 (その 1) 68

§4.2. BMO 写像 (その 2) 77

§4.3. BMO 写像 (その 3) 83

§4.4. 種々の BMO 空間, HD, AD 空間の関係 86

参考文献 90

第 1 章. BMO 関数の基本性質

§1.1. 平面領域上の 2 次元 BMO 空間の基本性質

以下では “正方形” といえば特にことわらないかぎりすべて座標軸に平行な辺を持つ閉正方形のこととし, “円板” といえば閉円板のこととする. さらに $l(Q)$ を 正方形 Q の辺長, $\mathrm{rad}(B)$ を円板 B の半径とし, $tQ, tB, t>0$ はそれぞれ Q, または B と同じ中心を持ち辺長 $tl(Q)$ または 半径 $t\mathrm{rad}(B)$ の正方形または円板を表わすものとする. また $dm = dxdy$ は 2 次元 Lebesgue 測度, $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ はユークリッド距離, A は場所場所によって値の変わりうる正値絶対定数, C は場所場所によって値の変わりうる必ずしも絶対定数ではない正定数を表すものとする.

複素平面 $\mathbf{C}$ の部分領域 D 上の局所可積分な複素数値関数 f が D 上の (2 次元) BMO 関数 (function of bounded mean oscillation) であるとは

$$\|f\|_* = \|f\|_{*,D} = \sup_Q \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

なることとし その全体を $BMO(D)$ と表す. ここで sup は D 内の全ての正方形についてとるものとし $f_Q = m(Q)^{-1} \int_Q f dm$ とする. さらに $H(D)$, $A(D)$ をそれぞれ D 上の調和, 及び 正則な関数のなす空間とし

$$BMOH(D) = BMO(D) \cap H(D), \quad BMOA(D) = BMO(D) \cap A(D),$$

と定める. BMO, BMOH, BMOA 空間は定数関数を 0 とみなせば Banach 空間となる. L^∞ 関数は BMO 関数であるが有界でない BMO 関数も存在する. 典型的な例として $\log |z|$ は $BMO(\mathbf{C})$ 関数である. このことは後に定理 1.1 及び 1.2 の応用として証明する (例 1.2).

まず c を任意の定数として

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm \le \frac{1}{m(Q)} \int_Q (|f-c| + |f_Q - c|) dm \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f - c| dm$$

なので

補題 1.1. $f \in L^1(Q)$ ならば任意の定数 c に対し

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f - c| dm.$$

特に $f \in L^1_{loc}(D)$ に対し

$$\|f\|_{**,D} = \sup_Q \inf_{c \in \mathbf{C}} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - c| dm$$

とおけば $\|f\|_{**,D} \le \|f\|_{*,D} \le 2\|f\|_{**,D}$.

補題 1.2. (lattice 性) $f \in BMO(D)$ であれば $|f| \in BMO(D)$ となり しかも $\||f|\|_{*,D} \le$

$2\|f\|_{*,D}$. また $f, g \in BMO(D)$ が実数値関数であれば $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\} \in BMO(D)$ となりかつ

$$\|\max\{f,g\}\|_{*,D} \le \frac{3}{2}(\|f\|_{*,D} + \|g\|_{*,D}), \quad \|\min\{f,g\}\|_{*,D} \le \frac{3}{2}(\|f\|_{*,D} + \|g\|_{*,D}).$$

(証明) まず補題 1.1 より

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q ||f| - |f|_Q| dm \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q ||f| - |f_Q|| dm \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm$$

よって $\||f|\|_{*,D} \le 2\|f\|_{*,D}$. 後半は $\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, $\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ より従う.

Q. E. D.

補題 1.3. $BMO(D)$ 関数列 $\{f_n\}$ が D 上 a.e. にある関数 f に収束しかつ $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_{*,D} < \infty$ であれば f も $BMO(D)$ 関数となりしかも $\|f\|_{*,D} \le 2\,\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_{*,D}$.

(証明) Q を D 上の正方形とすると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m(Q)^2} \int_Q \int_Q |f_n(z) - f_n(w)| dm(z) dm(w) \\
&\qquad \le \frac{1}{m(Q)^2} \int_Q \int_Q (|f_n(z) - (f_n)_Q| + |f_n(w) - (f_n)_Q|) dm(z) dm(w) \\
&\qquad \le \frac{2}{m(Q)} \int_Q |f_n - (f_n)_Q| dm \le 2\|f_n\|_{*,D}.
\end{aligned}$$

よって Fatou の補題より

$$\frac{1}{m(Q)^2} \int_Q \int_Q |f(z) - f(w)| dm(z) dm(w) \le 2 \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_{*,D}.$$

ゆえに Fubini の定理より f は Q 上可積分となり

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm \le \frac{1}{m(Q)^2} \int_Q \int_Q |f(z) - f(w)| dm(z) dm(w) \le 2 \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_{*,D}.$$

Q. E. D.

この補題の係数 2 は実際には取り除くことができる (cf. Reimann [68]).

BMO 性は次の意味で局所的な性質であり, この性質を用いれば領域の境界の形状から生じる困難をかなりの部分回避することができる.

定理 1.1. (局所化定理) $f \in L^1_{loc}(D)$ について f は $\mathrm{d}(Q, \partial D) \ge \lambda l(Q)$ $(\lambda \ge 1)$ なる D 内の任意の正方形 Q 上 BMO 関数となりしかも $\|f\|_{*,Q} \le K$ であるとする. そのとき f は $BMO(D)$ 関数となり しかも $\|f\|_{*,D} \le AK\lambda$.

(証明) $[3\lambda + \sqrt{2}] + 1 = s$ とおく. Q を D 内の任意の正方形とする. Q の中心を原点と仮定して

よい．$l(Q)=l$ とおく．$Q_m,\ m=1,2,\cdots$ を原点中心 $l(Q_m)=(1-2^{-m})l$ なる正方形とする．各 $Q_m, m\geq 2$ を 辺の長さが $2^{-m-1}l$ であるような合同な正方形に分割する．それら正方形の中で Q_{m-1} に含まれないものの全体を $\mathcal{D}_m$ と表すことにする．Q_1 についてはそれを 4 個の合同な正方形に分割しそれを $\mathcal{D}_1$ と表すことにする．そのとき $\#\mathcal{D}_m=2^{m+3}-12$ ．さらに $\mathcal{D}_m$ の各正方形を s^2 個の合同な正方形に分割する．その族を $\mathcal{D}'_m=\{Q_{m,i}\}, 1\leq i\leq s^2(2^{m+3}-12)$ と表すことにする．まず $Q_{m,i}\cap Q_{m',i'}\neq\emptyset$ なるとき $|f_{Q_{m,i}}-f_{Q_{m',i'}}|\leq 45K$ を証明する．$l(Q_{m,i})\geq l(Q_{m',i'})$ と仮定してよくこのとき

$$Q_{m,i}\cup Q_{m',i'}\subset 3Q_{m,i}$$

となりまた

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(3Q_{m,i},\partial D)}{l(3Q_{m,i})}&\geq\frac{\mathrm{d}(Q_{m,i},\partial Q)-\sqrt{2}l(Q_{m,i})}{3l(Q_{m,i})}\\&\geq\frac{s-\sqrt{2}}{3}\geq\lambda.\end{aligned}$$

よって $3Q_{m,i}$ は定理の仮定を満たす正方形であるから

$$|f_{Q_{m,i}}-f_{3Q_{m,i}}|\leq\frac{1}{m(Q_{m,i})}\int_{Q_i}|f-f_{3Q_{m,i}}|dm\leq\frac{9}{m(3Q_{m,i})}\int_{3Q_i}|f-f_{3Q_i}|dm\leq 9K.$$

$l(Q_{m,i})\leq 2l(Q_{m',i'})$ に注意すれば同様にして $|f_{3Q_{m,i}}-f_{Q_{m',i'}}|\leq 36K$ を得るので,

$$|f_{Q_{m,i}}-f_{Q_{m',i'}}|\leq|f_{Q_{m,i}}-f_{3Q_{m,i}}|+|f_{3Q_{m,i}}-f_{Q_{m',i'}}|\leq 45K$$

ここで $\{Q_{1,i}\}$ の正方形で原点を含むものの一つを Q_0 とおくとき $Q_{m,i}$ と Q_0 は高々 ms 個の, 隣合う正方形が共通部分を持つような $\{Q_{m,i}\}_{m,i}$ の正方形の列で結べるので $|f_{Q_{m,i}}-f_{Q_0}|\leq 45Kms$. よって

$$\begin{aligned}\int_Q|f-f_{Q_0}|dm&\leq\sum_{m,i}\int_{Q_{m,i}}\left(|f-f_{Q_{m,i}}|+|f_{Q_{m,i}}-f_{Q_0}|\right)dm\\&\leq\sum_{m,i}(m(Q_{m,i})K+m(Q_{m,i})45Kms)\leq\sum_{m,i}m(Q_{m,i})46Kms\\&=\sum_{m=1}^{\infty}l^2s^{-2}2^{-2m-2}\cdot 46Kms\cdot s^2(2^{m+3}-12)\leq 92l^2sK\sum_{m=1}^{\infty}m2^{-m}\leq AKl^2\lambda\end{aligned}$$

ゆえに $m(Q)^{-1}\int_Q|f-f_Q|dm\leq 2m(Q)^{-1}\int_Q|f-f_{Q_0}|dm\leq AK\lambda.$ Q. E. D.

この評価は以下の意味で最良である.

例 1.1. H を上半平面とし H 上の関数 f を $f(x,y)=\log y$ と定めれば f は $BMO(H)$ 関数で $\mathrm{d}(Q,\partial H)\geq\lambda l(Q)$ $(\lambda\geq 1)$ なる H 内の任意の正方形 Q 上

$$\|f\|_{*,Q}\leq\sup_{x,y\in Q}|f(x)-f(y)|=\log(1+\frac{1}{\lambda})\leq\frac{A}{\lambda}.$$

定理 1.1 の証明より特に $f\in BMO(D)$ に対し Q が $Q^o\subset D$ を満たしさえすれば $f\in L^1(Q)$ な

ることがわかる. そこで $Q_n = (1-\frac{1}{n})Q\ (\subset D)$ とおき不等式 $m(Q_n)^{-1}\int_{Q_n}|f-f_{Q_n}|dm \le \|f\|_{*,D}$ において $n\to\infty$ とすれば

系 1.1. $f\in BMO(D)$ であれば f は $Q^o \subset D$ なる任意の正方形 Q 上 L^1 でしかも

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f-f_Q|dm \le \|f\|_{*,D}$$

次の主張は $\mathbf{C}$ 以外の領域 D に対しては自明とは言えない.

系 1.2. $BMO(D)$ の定義において sup は正方形のかわりに円板についてとっても或いはまた必ずしも軸に平行でない辺を持つ正方形の全体について取っても (同値な norm を与えるという意味において) 構わない.

(証明) 定理 1.1. は (BMO の定義も含め) “正方形” を “円板” または “必ずしも軸に平行でない辺を持つ正方形” と置き換えて同様に証明できる. (詳細は読者に任せる.) あとは 定理 1.1 の仮定を満たすという意味で D の境界から離れた “正方形”, “円板” 及び “必ずしも軸に平行でない辺を持つ正方形” は互いに他で内側と外側から近似できることに注意すればよい. Q. E. D.

この定理 1.1 及び 系 1.1, 1.2 の一般化に関しては定理 3.7 及びその 系 3.9 を参照して欲しい. そこではある意味において最良の結果が与えられる.

定理 1.2. (一点の除去可能性定理) $z_0\in D$, $D' = D\setminus\{z_0\}$ とするとき $BMO(D') = BMO(D)$, さらに $f\in BMO(D')$ に対し $\|f\|_{*,D'} \le \|f\|_{*,D} \le A\|f\|_{*,D'}$.

(証明) $BMO(D)\subset BMO(D')$ 及び $\|f\|_{*,D'}\le\|f\|_{*,D}$ は定義から明らか. 逆に $f\in BMO(D')$ とする. Q を $\mathrm{d}(Q,\partial D)\le 4l(Q)$ なる D 内の正方形とし Q 上での f の mean oscillation を評価する. $z_0\notin Q$ であれば問題はないので $z_0\in Q$ としてよい. Q' を $z_0 = x_0+iy_0$ 中心 $l(Q') = 2l(Q)$ なる正方形とすれば仮定より $Q\subset Q'\subset 2Q'\subset D$. ここで

$$Q_1 = [x_0, x_0+l]\times[y_0, y_0+l],\quad Q_2 = [x_0-l, x_0]\times[y_0, y_0+l],$$

$$Q_3 = [x_0-l, x_0]\times[y_0-l, y_0],\quad Q_4 = [x_0, x_0+l]\times[y_0-l, y_0]$$

とおけば $Q' = Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup Q_4$. さらに $\hat{Q} = [x_0-l, x_0+l]\times[y_0, y_0+2l]$ とおくとき $\hat{Q}^o\subset D'$. よって系 1.1 より $m(\hat{Q})^{-1}\int_{\hat{Q}}|f-f_{\hat{Q}}|dm\le\|f\|_{*,D'}$ となるので定理 1.1 の証明と同様にして

$$|f_{Q_1}-f_{\hat{Q}}|\le 4\|f\|_{*,D'},\qquad |f_{Q_2}-f_{\hat{Q}}|\le 4\|f\|_{*,D'},$$

となり

$$|f_{Q_1}-f_{Q_2}|\le|f_{Q_1}-f_{\hat{Q}}|+|f_{Q_2}-f_{\hat{Q}}|\le 8\|f\|_{*,D'}.$$

同様にして

$$|f_{Q_2}-f_{Q_3}|\le 8\|f\|_{*,D'},\quad |f_{Q_4}-f_{Q_1}|\le 8\|f\|_{*,D'},$$

$$|f_{Q_3}-f_{Q_1}|\le|f_{Q_3}-f_{Q_2}|+|f_{Q_2}-f_{Q_1}|\le 16\|f\|_{*,D'}.$$

よって

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f-f_Q|dm \le \frac{2}{m(Q)}\int_Q |f-f_{Q_1}|dm \le \frac{2}{m(Q)}\int_{Q'} |f-f_{Q_1}|dm$$
$$= \frac{2}{m(Q_1)}\int_{Q_1} |f-f_{Q_1}|dm + \sum_{k=2}^{4}\frac{2}{m(Q_k)}\int_{Q_k} |f-f_{Q_1}|dm$$
$$\le 2\|f\|_{*,D'} + \sum_{k=2}^{4}\frac{2}{m(Q_k)}\int_{Q_k} (|f-f_{Q_k}|+|f_{Q_k}-f_{Q_1}|)dm \le A\|f\|_{*,D'}.$$

後は局所化定理を用いれば証明は完了する. Q. E. D.

例 1.2. 有界でない BMO 関数の典型的な例として $f(z)=\log|z|$ が $BMO(\mathbf{C})$ 関数であることを示す. Q を $\mathrm{d}(Q,0)\ge l(Q)$ なる正方形とすれば

$$\|f\|_{*,Q} \le \sup_{x,y\in Q}|f(x)-f(y)| \le A.$$

よって局所化定理によって $f\in BMO(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ となるので前定理より $f\in BMO(\mathbf{C})$.

補題 1.4. (鏡像の原理) 実軸に関し対称な領域 D' に対し, $D=D'\cap\{\mathrm{Re}(z)>0\}$ とおく. $p(z)=\overline{z}$ として D 上の BMO 関数 f に対しその D' への拡張 f' を

$$f'(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D,\\ f(p(z)), & z\in p(D),\end{cases}$$

により定めれば f' は $BMO(D')$ 関数となりしかも $\|f'\|_{*,D'}\le A\|f\|_{*,D}$.

(証明) Q を $\mathrm{d}(Q,\partial D)\ge 2l(Q)$ なる D 内の正方形 とし Q 上での f' の mean oscillation を評価する. $Q\cap\mathbf{R}=\emptyset$ であれば問題はないので $Q\cap\mathbf{R}\ne\emptyset$ としてよい. $Q=[a,a+l]\times[b,b+l]$ とする. そのとき $Q_1=[a,a+l]\times[0,l]$, $Q_2=[a,a+l]\times[-l,0]$, として $Q\subset Q_1\cup Q_2\subset D$. 系 1.1 より

$$\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|f'-f'_{Q_1}|dm\le\|f\|_{*,D},\qquad \frac{1}{m(Q_2)}\int_{Q_2}|f'-f'_{Q_2}|dm\le\|f\|_{*,D}.$$

よって

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f'-f'_Q|dm\le\frac{2}{m(Q)}\int_Q|f'-f'_{Q_1}|dm$$
$$\le\frac{2}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|f'-f'_{Q_1}|dm+\frac{2}{m(Q_2)}\int_{Q_2}|f'-f'_{Q_2}|dm\le 4\|f\|_{*,D}.$$

後は局所化定理を用いれば証明は完了する. Q. E. D.

$M\ddot{o}b(\hat{\mathbf{C}})$ を 複素球面 $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 上の Möbius 変換 (一次分数変換) の全体とする.

定理 1.3. (BMO の Möbius 変換による不変性) D を平面領域, T を $D'=T(D)\subset\mathbf{C}$ なる Möbius 変換とする. そのとき 任意の $f'\in BMO(D')$ に対し $f=f'\circ T$ は $BMO(D)$ 関数となりさらに $A^{-1}\|f'\|_{*,D'}\le\|f\|_{*,D}\le A\|f'\|_{*,D'}$.

(証明) BMO は平行移動及び拡大によって不変なので T としては $T(z)=1/z$ に対してのみ主

張を証明すれば十分である．$B=\{z||z-z_0|\le r\}$ を $\mathrm{d}(B,\partial D)\ge \mathrm{rad}(B)$ なる D 内の円板とする．そのとき $0\notin D$ より $|z_0|=a$ とおいて $a\ge 2r$. また B 上 $|T'|(a+r)^2\ge 1$. よって $B'=T(B)$ として 系 1.2 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(B)}\int_B |f-f_B|dm &\le \frac{2}{m(B)}\int_B |f-f'_{B'}|dm\\ &\le \frac{2}{m(B)}\int_B |f'\circ T-f'_{B'}|(a+r)^4|T'|^2dm = \frac{2(a+r)^4}{\pi r^2}\int_{B'}|f'-f'_{B'}|dm\\ &\le \frac{2(a+r)^4}{\pi r^2}Am(B')\|f'\|_{*,D'} = \frac{2(a+r)^4}{r^2}\left(\frac{r}{a^2-r^2}\right)^2 A\|f'\|_{*,D'}\\ &\le A\left(\frac{a+r}{a-r}\right)^2\|f'\|_{*,D'}\le A\|f'\|_{*,D'}.\end{aligned}$$

最後に局所化定理を用いれば証明は完了する． Q. E. D.

ここで $\mathbf{C}$ 上の領域だけでなく $\hat{\mathbf{C}}$ 上の領域 D に対してもその上の BMO 空間を $BMO(D)=BMO(D\setminus\{\infty\})$ により定めることにする．そのとき BMO についての 一点の除去可能性定理，及び Möbius 変換による不変性から

系 1.3. 定理 1.3 は $\hat{\mathbf{C}}$ 上の部分領域に対しても成立する．すなわち D を $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域, T を Möbius 変換, $D'=T(D)$ とするとき任意の $f'\in BMO(D')$ に対し $f=f'\circ T$ は $BMO(D)$ 関数となりさらに $A^{-1}\|f'\|_{*,D'}\le\|f\|_{*,D}\le A\|f'\|_{*,D'}$.

この意味において 無限遠点は BMO に関し除去可能な特異点であり BMO 空間の自然な定義域は $\hat{\mathbf{C}}$ であると言える．すると球面測度についての BMO 空間との関係が問題になってくる．

D を $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域とする．D 上の球面測度 $d\sigma(z)=dm(z)/(1+|z|^2)^2$ に関する局所可積分な関数 f は

$$\|f\|_{*,\sigma,D}=\sup_B\frac{1}{\sigma(B)}\int_B|f-f_{B,\sigma}|d\sigma<\infty$$

なるとき $BMO_\sigma(D)$ 関数であるという． ここで sup は D 内の全ての円盤 B について取り $f_{B,\sigma}=\sigma(B)^{-1}\int_B fd\sigma$ とする．

定理 1.4. $\hat{\mathbf{C}}$ の任意の部分領域 D に対し $BMO(D)=BMO_\sigma(D)$ が成立する．さらに任意の $f\in BMO(D)$ に対し $A^{-1}\|f\|_{*,D}\le\|f\|_{*,\sigma,D}\le A\|f\|_{*,D}$.

(証明) まず $f\in BMO_\sigma(D)$ とする．$D_0=D\setminus\{0,\infty\}$ とし $\mathrm{d}(B,\partial D_0)\ge\mathrm{rad}(B)$ なる D_0 内の円盤 B を取る．そのとき $\mathrm{d}(B,0)\ge\mathrm{rad}(B)$ より B 上での 測度 $d\sigma$ の (測度 dm に比較しての) 変動は一様に評価できるので $m(B)^{-1}\int_B|f-f_B|dm\le A\|f\|_{*,\sigma,D}$. よって局所化定理, 一点の除去可能性定理を用いれば

$$\|f\|_{*,D}=\|f\|_{*,D\setminus\{\infty\}}\le A\|f\|_{*,D_0}\le A\|f\|_{*,\sigma,D_0}$$

逆に $f\in BMO(D)$ とする．B を D 上の円盤とする．T を $\hat{\mathbf{C}}$ の回転となる Möbius 変換で し

かも $B_0 = T^{-1}(B)$ が原点中心の円盤となるようなものとする．そのとき

$$\frac{1}{\sigma(B)}\int_B |f - f_{B,\sigma}| d\sigma = \frac{1}{\sigma(B_0)}\int_{B_0} |f\circ T - (f\circ T)_{B_0,\sigma}| d\sigma$$

でありまた $BMO(D)$ の Möbius 変換による不変性から $D_0 = T^{-1}(D)$ として $\|f\circ T\|_{*,D_0} \le A\|f\|_{*,D}$. よって B は最初から 原点中心の円盤と仮定してよい. $\mathrm{rad}(B) \le 1$ であれば B 上 dm と $d\sigma$ の比較可能なことから問題はない. $\mathrm{rad}(B) > 1$ なる場合, N を $2^N \le \mathrm{rad}(B) < 2^{N+1}$ なる整数とし $B_k,\ 0 \le k \le N$ を原点中心半径 2^k の円盤, $B_{N+1} = B$ とする．すると定理 1.1 の証明と同等にして $|f_{B_{k+1}} - f_{B_k}| \le A\|f\|_{*,D},\ 0 \le k \le N$ が成立するので $|f_{B_k} - f_{B_0}| \le Ak\|f\|_{*,D}$ よって

$$\begin{aligned}\int_B |f - f_{B_0}| d\sigma &\le \int_{B_0} |f - f_{B_0}| d\sigma + \sum_{k=0}^{N}\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |f - f_{B_0}| d\sigma \\ &\le Am(B_0)\|f\|_{*,D} + \sum_{k=0}^{N}\int_{B_{k+1}} (|f - f_{B_{k+1}}| + |f_{B_{k+1}} - f_{B_0}|)\frac{dm}{(2^{2k}+1)^2} \\ &\le A\|f\|_{*,D} + \sum_{k=0}^{N} (A\|f\|_{*,D} + A(k+1)\|f\|_{*,D})\frac{\pi 2^{2(k+1)}}{(2^{2k}+1)^2} \le A\|f\|_{*,D}.\end{aligned}$$

よって $\sigma(B)^{-1}\int_B |f - f_{B,\sigma}| d\sigma \le 2\sigma(B_0)^{-1}\int_B |f - f_{B_0}| d\sigma \le A\|f\|_{*,D}$. Q. E. D.

補題 1.5. (Calderón-Zygmund の分解定理) $g \ge 0$ を正方形 Q 上の L^1 関数とする．そのとき $m(Q)^{-1}\int_Q g dm \le s$ なる任意の s に対し以下の条件を満たす Q 内の有限個もしくは無限個の正方形の族 $\{Q_i^s\}_i,\ (Q_i^s)^o \cap (Q_j^s)^o = \emptyset,\ i \ne j$, が存在する.

(1) 任意の i に対し $s < m(Q_i^s)^{-1}\int_{Q_i^s} g dm \le 4s$.

(2) $Q \setminus \cup_i Q_i^s$ 上 a.e. に $g \le s$.

特に $f \in BMO(Q),\ g = |f - f_Q|$ なる場合, (1) は 次の形に改良できる.

(1)' 任意の i に対し $s < m(Q_i^s)^{-1}\int_{Q_i^s} g dm \le s + 4\|f\|_{*,Q}$.

(証明) 証明は “stopping time argument” によりなされる．まず Q を 4 つの合同な正方形の分割する．そして そのようにして得られた 4 つの正方形のひとつひとつをさらに 4 つに分割して行く．以下このような 4 分割の process を無限に繰り返すことを考える．ただし 分割の途中で得られた正方形 Q' についてもしも $s < m(Q')^{-1}\int_{Q'} g dm$ なることがあれば Q' に対する以下の分割は行なわず, Q' を $\{Q_i^s\}_i$ の元として登録するものとする．すると このような Q' に対しては Q' をその 4 分割の一つとし $m(\tilde{Q}')^{-1}\int_{\tilde{Q}'} g dm \le s$ を満たす Q 内の正方形 $\tilde{Q}'$ が存在するので

$$\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} g dm \le \frac{4}{m(\tilde{Q}')}\int_{\tilde{Q}'} g dm \le 4s.$$

ゆえに (1) は示された. 特に $f \in BMO(Q)$, $g = |f - f_Q|$ なる場合には

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'}|f-f_Q|dm &\le \frac{1}{m(Q')}\int_{Q'}(|f-f_{\tilde{Q}'}|+|f_{\tilde{Q}'}-f_Q|)dm\\ &\le \frac{4}{m(\tilde{Q}')}\int_{\tilde{Q}'}|f-f_{\tilde{Q}'}|dm+|f_{\tilde{Q}'}-f_Q|\\ &\le 4\|f\|_{*,Q}+\frac{1}{m(\tilde{Q}')}\int_{\tilde{Q}'}|f-f_Q|dm \le 4\|f\|_{*,Q}+s.\end{aligned}$$

よって (1)' が成立する. また $z \in Q \setminus \cup_i Q_i^s$ であればこの分割の過程において現われる z を含む正方形の列 Q_n で

$$l(Q_n) \to 0, \quad \frac{1}{m(Q_n)}\int_{Q_n} g dm \le s$$

なるものが存在する. よって Lebesgue の定理より (2) が成立する. Q. E. D.

定理 1.5. (John-Nirenberg [44]) $f \in BMO(Q)$, $(\|f\|_{*,Q} \neq 0)$, $s > 0$, に対し

$$\lambda(s) = m(\{z \in Q \mid |f - f_Q| > s\})$$

とおくとき

$$\lambda(s) \le A_1 \exp\left(-A_2 \frac{s}{\|f\|_{*,Q}}\right).$$

ここで A_1, A_2 は正値絶対定数.

(証明) $s \ge \|f\|_{*,Q}$, $t = s + 6\|f\|_{*,Q}$ とおき s, t に対し Q の補題 1.5 による分割 $\{Q_i^s\}_i$, $\{Q_j^t\}_j$ を取り $S_s = \cup_i Q_i^s$, $S_t = \cup_j Q_j^t$ とおく. ここでこれらの構成法より各 Q_j^t はある Q_i^s の分割で得られる正方形の一つとなっている. そこで Q_i^s をひとつ取りこの正方形に含まれる $\{Q_j^t\}_j$ の正方形の全体を $\{Q_{j_k}^t\}_k$ と表すことにすると前補題より

$$\begin{aligned}tm(S_t\cap Q_i^s) &= t\sum_k m(Q_{j_k}^t) \le \sum_k \int_{Q_{j_k}^t}|f-f_Q|dm\\ &\le \sum_k\int_{Q_{j_k}^t}(|f-f_{Q_i^s}|+|f_{Q_i^s}-f_Q|)dm \le \int_{Q_i^s}|f-f_{Q_i^s}|dm+\sum_k m(Q_{j_k}^t)|f_{Q_i^s}-f_Q|\\ &\le m(Q_i^s)\|f\|_{*,Q}+m(S_t\cap Q_i^s)\frac{1}{m(Q_i^s)}\int_{Q_i^s}|f-f_Q|dm\\ &\le m(Q_i^s)\|f\|_{*,Q}+m(S_t\cap Q_i^s)\left(s+4\|f\|_{*,Q}\right).\end{aligned}$$

i について和を取れば

$$tm(S_t) \le m(S_s)\|f\|_{*,Q} + m(S_t)\left(s + 4\|f\|_{*,Q}\right)$$

よって $m(S_t) \le m(S_s)/2$. そこで $s_n = (1+6n)\|f\|_{*,Q}$, $n \ge 0$ とおけば

$$\lambda(s_n) \le m(S_{s_n}) \le \frac{m(S_{s_0})}{2^n} \le \frac{m(Q)}{2^n}$$

あとは $\lambda(s)$ の単調性に注意すればよい. Q. E. D.

系 1.4. (逆 Hölder 不等式) $1 \le p < \infty$ とするとき $f \in BMO(D)$ ならば $f \in L^p_{loc}(D)$ でさらに

$$\sup_Q \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \le C_p \|f\|_{*,D}.$$

ここで $C_p > 0$ は p にのみよる定数.

(証明) Q を D 内の正方形とするとき $\lambda(s) = m(\{z \in Q \mid |f - f_Q| > s\})$ として John-Nirenberg の定理より

$$\begin{aligned} \int_Q |f - f_Q|^p dm &= -\int_0^\infty s^p d\lambda(s) = \int_0^\infty \lambda(s) d(s^p) \\ &\le \int_0^\infty m(Q) A_1 \exp\left(-A_2 \frac{s}{\|f\|_{*,D}}\right) p s^{p-1} ds \le m(Q) C'_p \|f\|^p_{*,D} \end{aligned}$$

Q. E. D.

定理 1.6. 領域 D 上の調和関数 h について h が $BMOH(D)$ 関数であるための必要十分条件は h が Bloch 型の調和関数となること, すなわち $\sup_{z \in D} \mathrm{d}(z, \partial D) |\nabla h(z)| < \infty$ なることである. またこのとき

$$\frac{1}{A} \|f\|_{*,D} \le \sup_{z \in D} \mathrm{d}(z, \partial D) |\nabla h(z)| \le A \|f\|_{*,D}.$$

(証明) まず $h \in BMOH(D)$ とし $|\nabla h(z_0)|,\ z_0 \in D$ を評価する. h は実関数としてよく, また $z_0 = 0$ と仮定して一般性を失わない. $r_0 = \mathrm{d}(0, \partial D),\ 0 < r < r_0,\ B = \{|z - z_0| < r_0\}$ として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} [h(re^{i\theta}) - h(0)] d\theta, \quad |z| < r,$$

とおくと

$$f'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2} [h(re^{i\theta}) - h(0)] d\theta,$$

より

$$|\nabla h(0)| = |f'(0)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} [h(re^{i\theta}) - h(0)] d\theta \right| \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} |h(re^{i\theta}) - h(0)| d\theta$$

よって

$$\begin{aligned} |\nabla h(0)| \frac{r_0^3}{3} = |\nabla h(0)| \int_0^{r_0} r^2 dr &\le \frac{1}{\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta}) - h(0)| r dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_B |h - h_0| dm \le A r_0^2 \|h\|_{*,D}. \end{aligned}$$

となり $|\nabla h(0)| r_0 \le A \|h\|_{*,D}$.

次に $K = \sup_{z \in D} |\nabla h(z)| d(z, \partial D) < \infty$ と仮定し $B = \{|z - z_0| < r_0\},\ r_0 < \mathrm{d}(z_0, \partial D)$ 上での h の mean oscillation を評価する. $|z - z_0| = r < r_0$ とし z と z_0 を結ぶ線分を積分路をとるとき

$$|h(z) - h(z_0)| = \left| \int_{z_0}^z dh \right| \le \int_{z_0}^z |\nabla h(\zeta)| |d\zeta| \le \int_0^r \frac{K}{r_0 - s} ds = K \log \frac{r_0}{r_0 - r}.$$

よって

$$\int_B |h-h_B|dm \leq \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} K\left(\log\frac{r_0}{r_0-r}\right) rdrd\theta = 2\pi K r_0^2 \int_0^1 \left(\log\frac{1}{1-s}\right) sds \leq AKm(B)$$

ゆえに $\|h\|_{*,D} \leq AK.$ Q. E. D.

系 1.5. D 上の正則関数 $f=u+iv$ について f が $BMOA(D)$ 関数となるための必要十分条件は u が $BMOH(D)$ 関数となることである.

また Bloch 型の正則関数については次のような特徴付けが知られている.

命題 1.1.(cf. Pommerenke [63]) 単位円板 Δ 上の正則関数 f について f が Bloch 関数, すなわち $\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty$ となるための必要十分条件は f の逆関数の Riemann 面が任意に大きい半径を持った単葉円板を含まないことでありさらにそのような円板の最大半径を d_f とおくとき

$$d_f \leq \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \frac{4}{\sqrt{3}}d_f.$$

§1.2. 単位円板上の種々の BMO 空間

Δ を単位円板とする. Δ 上の関数に対しては自然に以下のような 3 種類の BMO 空間を考えることができる.

(1) Lebesgue 測度 $dm=dxdy$ に関する BMO 空間.
(2) hyperbolic 測度 $d\lambda = dxdy/(1-|z|^2)^2$ に関する BMO 空間.
(3) 境界値関数の ∂D 上の関数とみての 測度 $d\theta$ に関する BMO 空間.

(1) の BMO 空間は我々が今までに考察してきた空間 $BMO(\Delta)$ である. 以下では これら BMO 空間の関係を調べていく. まず (2), (3) の BMO 空間を正確に定義する.

$BMO_\lambda(\Delta)$ を

$$\|f\|_{*,\Delta,\lambda} = \sup_B \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f-f_{B,\lambda}|d\lambda < \infty$$

なる D 上の 局所可積分な関数の全体, $BMO_\theta(\Delta)$ を

$$\|f\|_{*,\Delta,\theta} = \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|d\theta < \infty$$

なる ∂D 上の 可積分な関数の全体とする. ここで sup はそれぞれ Δ 内の全ての円板 B 及び ∂D 内の全ての 区間 I についてとり $f_{B,\lambda}$, f_I はそれぞれ測度 $d\theta$, $d\lambda$ による B, I 上での積分平均とする. さらに

$$BMOH_\lambda(\Delta) = BMO_\lambda(\Delta)\cap H(\Delta), \quad BMOA_\lambda(\Delta) = BMO_\lambda(\Delta)\cap A(\Delta),$$

$$BMOH_\theta(\Delta) = \{f\in H(\Delta) \mid f \text{ はある } BMO_\theta(\Delta) \text{ 関数の Poisson 積分 }\},$$

$$BMOA_\theta(\Delta) = BMOH_\theta(\Delta)\cap A(\Delta),$$

と定める．$BMOH_\theta(\Delta)$ 及び $BMO_\theta(\Delta)$ は以下同一視するものとする．また $\partial\Delta$ 上の $p,\ 1 \leq p \leq \infty$ 乗可積分な関数もしばしばその Poisson 積分である Δ 上の調和関数と同一視する．まず $BMOH_\theta(\Delta)$ について考察する．ここでは 2 次元 BMO 空間が主題であるので $BMOH_\theta(\Delta)$ については以下必要となる性質だけを証明する．

Δ 内の点 $a = re^{i\phi}$ に対する Poisson 核 を

$$P_a(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}$$

とあらわすとき

補題 1.6. $\partial\Delta$ 上の可積分関数 f について f が $BMO_\theta(\Delta)$ 関数であるための必要十分条件は

$$\|f\|_{**,\Delta,\theta} = \sup_{a\in\Delta} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f-f(a)|P_a d\theta < \infty$$

なることである．またこのとき $A^{-1}\|f\|_{*,\Delta,\theta} \leq \|f\|_{**,\Delta,\theta} \leq A\|f\|_{*,\Delta,\theta}$.

(証明) まず $\|f\|_{**,\Delta,\theta} < \infty$ とする．Δ の区間 I に対し Δ 内の点 a を $a/|a|$ が I の中心となりかつ $|I| = 1-|a|$ なるものとしてとる．そのとき χ_I を I の特性関数として $\partial\Delta$ 上

$$\frac{1}{|I|}\chi_I \leq \frac{A}{2\pi}P_a,$$

よって

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|d\theta \leq \frac{2}{|I|}\int_I |f-f(a)|d\theta \leq \frac{2A}{2\pi}\int_{\partial\Delta} |f-f(a)|P_a d\theta \leq A\|f\|_{**,\Delta,\theta}.$$

次に $f \in BMO_\theta(\Delta)$ とする．先と同様に Δ 内の点 a に対し $\partial\Delta$ 上の区間 I を $a/|a|$ が I の中心となりかつ $|I| = 1-|a|$ なるものとしてとる． さらに 区間 $I_n,\ 0 \leq n \leq N+1$ を $I_n = 2^n I,\ 0 \leq n \leq N,\ I_{N+1} = \partial\Delta$, と定める．ここで $2^n I$ は I と同じ中心をもち長さ $2^n|I|$ なる区間とし, N は $2^n|I| \leq 2\pi$ なる最大の整数とする．そのとき

$$\frac{1}{2\pi}P_a(\theta) \leq \frac{A}{|I|}, \quad \theta \in I,$$

$$\frac{1}{2\pi}P_a(\theta) \leq \frac{A}{2^n|I_n|}, \quad \theta \notin I_n, \quad 0 \leq n \leq N+1,$$

よって $\partial\Delta$ 上

$$\frac{1}{2\pi}P_a \leq \frac{A}{|I|}\chi_I + \sum_{n=0}^{N} \frac{A}{2^n|I_n|}(\chi_{I_{n+1}} - \chi_{I_n}) \leq \frac{A}{|I|}\chi_I + \sum_{n=0}^{N} \frac{A}{2^n|I_{n+1}|}\chi_{I_{n+1}}$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f-f_I|P_a d\theta &\le \frac{A}{|I|}\int_I |f-f_I|d\theta + \sum_{n=0}^{N}\frac{A}{2^n|I_{n+1}|}\int_{I_{n+1}}|f-f_I|d\theta \\
&\le A\|f\|_{*,\Delta,\theta} + \sum_{n=0}^{N}\frac{A}{2^n|I_{n+1}|}\int_{I_{n+1}}(|f-f_{I_{n+1}}|+|f_{I_{n+1}}-f_I|)d\theta \\
&\le A\|f\|_{*,\Delta,\theta} + A\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\|f\|_{*,\Delta,\theta} + A\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}|f_{I_{n+1}}-f_I| \\
&\le A\|f\|_{*,\Delta,\theta} + A\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}|f_{I_{n+1}}-f_I|
\end{aligned}
$$

ここで定理 1.1 (または定理 1.2) の証明と同様の議論により $|f_{I_{n+1}}-f_I| \le 2(n+1)\|f\|_{*,\Delta,\theta}$ となるので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f-f(a)|P_a d\theta &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f-f_I|P_a d\theta \\
&\le A\|f\|_{*,\Delta,\theta} + A\sum_{n=0}^{N}\frac{n+1}{2^n}\|f\|_{*,\Delta,\theta} \le A\|f\|_{*,\Delta,\theta}.
\end{aligned}
$$

Q. E. D.

$M\ddot{o}b(\Delta)$ を Δ を不変にする Möbius 変換の全体とし Δ 上の関数 f に対し

$$\mathcal{M}(f) = \{g \mid g = f\circ T - f\circ T(0),\ T \in M\ddot{o}b(\Delta)\}$$

とおく. また Hardy 空間 $H^p(\Delta),\ 0<p<\infty$ は

$$\|g\|_p = \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

なる Δ 上の正則関数 g のなす空間である. ここで一般に $f \in L^1(d\theta), T \in M\ddot{o}b(\Delta)$ について $T(0)=a$ として

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f P_a d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\circ T d\theta$$

の成立することに注意すれば 補題 1.7 より $\partial\Delta$ 上の可積分な関数 f について f が $BMO_\theta(\Delta)$ 関数であるための必要十分条件は $\mathcal{M}(f)$ が $L^1(d\theta)$ において有界となることである. 特に Δ 上の正則関数 f については f が $BMOA_\theta(\Delta)$ 関数であるための必要十分条件は $\mathcal{M}(f)$ が $H^1(\Delta)$ において有界となることである.

$e^{i\theta}$ を端点とする Δ 上の Stolz 領域 $S_\alpha(\theta), 0<\alpha<\pi/2$ を円 $\{|z|=\sin\alpha\}$ 及び 点 $e^{i\theta}$ についての凸包の内部と定める. Δ 上の関数 f の点
$e^{i\theta}$ における f の非接極大関数 $\mathcal{N}_\alpha f(\theta)$ を

$$\mathcal{N}_\alpha f(\theta) = \sup_{z\in S_\alpha(\theta)}|f(z)|$$

と定める.

補題 1.7. F を Δ 上の連続関数, $0 < \alpha < \pi/2$ とし f は ある $\psi(t) = o(1),\ t \to \infty$ に対し

$$\sup_{g \in \mathcal{M}(f)} |\{\theta \mid \mathcal{N}_\alpha g(\theta) > t\}| \leq \psi(t)$$

を満たすとする．そのとき ψ 及び α にのみ依存するある定数 $\beta,\ 0 < \beta < \alpha$ 及び $K_1, K_2 > 0$ が存在し

$$|\{\theta \mid \mathcal{N}_\beta g(\theta) > t\}| \leq K_1 e^{-K_2 t}, \quad t > 0, \quad g \in \mathcal{M}(f).$$

(証明) $\beta,\ 0 < \beta < \alpha,\ a \in \Delta,\ |a| > \sin\beta$ に対し $\partial\Delta$ 上の開区間 I_a を 図のように定める．また I_a, 及び I_a の端点と a を結ぶ線分によって囲まれた領域を $\hat{I}_a$ と置く．$T_a \in M\ddot{o}b(\Delta)$ を $T_a(z) = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ と定める．β を十分小さく取り, $0 < \gamma < 1$ を十分 1 に近く取れば

$$T_a(S_\beta(\theta) \cap \hat{I}_a) \subset S_\alpha(T_a(e^{i\theta})), \quad e^{i\theta} \in I_a, \quad \gamma < |a| < 1.$$

またこのとき

$$\frac{1}{2\pi} P_a(\theta) \geq \frac{C_1}{|I_a|}, \quad e^{i\theta} \in I_a.$$

そこで $K > 0$ を

$$\sup_{g \in \mathcal{M}(f)} |\{\theta \mid \mathcal{N}_\alpha g(\theta) > K\}| < \min\left\{|I_\gamma|, \frac{C_1}{2}\right\}$$

となるように定める．$g \in \mathcal{M}(f)$ をひとつ固定し

$$E_n = \{\theta \mid \mathcal{N}_\beta g(\theta) > nK\}$$

とおくと E_n は開集合であり, $E_n = \cup_k I_{n,k}$ と開区間 $I_{n,k}$ の可算和として表せる．K の定め方より

$$I_{n,k} = I_{a_{n,k}}, \quad \gamma < |a_{n,k}| < 1$$

と表せる．すると $\Delta \setminus \cup_k I_{n,k}$ 上 $|g| \leq nK$．特に $|g(a_{n,k})| \leq nK$．$E_{n+1}^k = E_{n+1} \cap I_{a_{n,k}}$ とおくと $e^{i\theta} \in E_{n+1}^k$ なるとき $S_\beta(\theta) \cap \hat{I}_{a_{n,k}}$ 上のある点 z_0 に対し $|g(z_0)| > (n+1)K$．よって $|g(z_0) - g(a_{n,k})| > K$．そこで $h = g \circ T_{a_{n,k}}^{-1} - g \circ T_{a_{n,k}}^{-1}(0) \in \mathcal{M}(f)$ とすれば

$$w_0 = T_{a_{n,k}}(z_0) \in T_{a_{n,k}}(S_\beta(\theta) \cap \hat{I}_{a_{n,k}}) \subset S_\alpha(T_{a_{n,k}}(e^{i\theta}))$$

となりかつ $|h(w_0)| = |g(z_0) - g(a_{n,k})| > K$．よって $\mathcal{N}_\beta h(T_{a_{n,k}}(e^{i\theta})) > K$．ゆえに

$$\frac{C_1}{2} > \left|T_{a_{n,k}}(E_{n+1}^k)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{E_{n+1}^k} P_{a_{n,k}}(\theta)\,d\theta \geq \frac{C_1}{|I_{n,k}|}|E_{n+1}^k|$$

となり $|E_{n+1}^k| \leq |I_{n,k}|/2$．$k$ について和を取れば $|E_{n+1}| \leq |E_n|/2$．よって

$$|E_{n+1}| \leq \frac{|E_1|}{2^n} \leq \frac{2\pi}{2^n}.$$

このことから主張は容易に従う． Q. E. D.

系 1.6. (John-Nirenberg の定理) $f \in BMO_\theta(\Delta)$, $(\|f\|_{*,\Delta,\theta} \neq 0)$, $t > 0$, $a \in \Delta$, に対し $S_t = \{\theta \mid |f(e^{i\theta}) - f(a)| > t\}$ とし

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_t} P_a d\theta$$

とおくとき

$$\lambda(t) \leq A_1 \exp\left(-A_2 \frac{t}{\|f\|_{*,\Delta,\theta}}\right).$$

ここで A_1, A_2 は正値絶対定数.

(証明) $\|f\|_{*,\Delta,\theta} = 1$ と仮定してよい. $g \in \mathcal{M}(f)$ とすると 補題 1.6 より $\|g\|_1 \leq A$. $\mathrm{M}g$ を g の Hardy-Littlewood の 極大関数とする. そのとき $g \mapsto \mathrm{M}g$ は弱 1-1 型の作用素なので

$$|\{\theta \mid \mathrm{M}g(\theta) > t\}| \leq \frac{A}{t}, \quad t > 0, \quad g \in \mathcal{M}(f).$$

ここで一般に $\partial\Delta$ 上の L^1 関数 k に対して α にのみ依存する定数 $C_\alpha > 0$ が存在し $\mathcal{N}_\alpha k \leq C_\alpha \mathrm{M}k$ の成立することより前補題を用いればよい. Q. E. D.

そこで 系 1.4 の証明を繰り返せば

系 1.7. $1 \leq p < \infty$ とするとき $f \in BMO_\theta(\Delta)$ ならば $f \in L^p(d\theta)$ でさらに

$$\sup_{a\in\Delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta} |f - f(a)|^p P_a d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \|f\|_{*,D}.$$

ここで $C_p > 0$ は p にのみよる定数.

特に $p = 2$ の場合, Green の公式から $f \in L^2(d\theta)$ に対し

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta} |f - f(a)|^2 P_a d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{\partial\Delta} |\nabla f(z)|^2 \log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| dm(z).$$

よって

系 1.8. Δ 上の調和関数 f について f が $BMOH_\theta(\Delta)$ 関数であるための必要十分条件は

$$\sup_{a\in\Delta}\frac{1}{\pi}\int_{\partial\Delta} |\nabla f(z)|^2 \log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| dm(z) < \infty.$$

定理 1.7. Δ 上の正則関数 f に対し以下の条件は同値である.
(1) $f \in BMOA_\theta(\Delta)$.
(2) $\mathcal{M}(f)$ は ある p, $0 < p < \infty$ について Hardy class $H^p(\Delta)$ において有界.
(3) $\mathcal{M}(f)$ は 任意の p, $0 < p < \infty$ について Hardy class $H^p(\Delta)$ において有界.

(証明) (3) → (2) は明らか.

(2) とする．$g \in \mathcal{M}(f)$ とする．g の零点を零点としてもつ Blashke 積を B とすれば $g = BF,\ F \in H^p(\Delta)$ とあらわされしかも $\|F\|_p = \|g\|_p$．$G = F^{\frac{p}{2}}$ とおけば $G \in H^2(\Delta)$ で Hardy-Littlewood の maximal theorem から $\mathcal{N}_\alpha G \in L^2(d\theta)$ となり

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{N}_\alpha G|^2 d\theta \leq C_\alpha \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G|^2 d\theta = C_\alpha \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F|^p d\theta = C_\alpha \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g|^p d\theta \leq C_\alpha C$$

ここで $C > 0$ は $g \in \mathcal{M}(f)$ の取り方によらない定数. よって Δ 上 $|g| \leq |F| = |G|^{\frac{2}{p}}$ より

$$|\{\theta \mid \mathcal{N}_\alpha g(\theta) > t\}| \leq |\{\theta \mid \mathcal{N}_\alpha G(\theta) > t^{\frac{p}{2}}\}| \leq \frac{2\pi C_\alpha C}{t^p}.$$

よって補題 1.7 より

$$|\{\theta \mid \mathcal{N}_\beta g(\theta) > t\}| \leq K_1 e^{-K_2 t}, \quad t > 0, \quad g \in \mathcal{M}(f).$$

なので $0 < p < \infty,\ g \in \mathcal{M}(f),\ 0 < r < 1$ として

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{N}_\beta g(\theta)|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} |\{\theta \mid \mathcal{N}_\beta g(\theta) > t\}| p t^{p-1} dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} K_1 e^{-K_2 t} p t^{p-1} dt \leq C'$$

ここで C' は $g,\ r$ の取り方にはよらない定数. よって $\mathcal{M}(f)$ は 任意の $p,\ 0 < p < \infty$ に対し $H^p(\Delta)$ で有界となり 補題 1.6 と合わせれば (2) → (1), 及び (2) → (3) が成立する.

最後に (1) であれば 補題 1.6 より $p = 1$ として (2) が成立する. Q. E. D.

補題 1.8. Δ 上の正則関数 $f = u + iv$ に対し以下の条件は同値である.
(1) $f \in BMOA_\lambda(\Delta)$,
(2) $f \in BMOA_\theta(\Delta)$,
(3) $u \in BMOH_\lambda(\Delta)$,
(4) $u \in BMOH_\theta(\Delta)$,

(証明) $u \in BMOH_\lambda(\Delta)$ とすると

$$\frac{1}{\lambda(\{|z| < r\})}\int_{\{|z|<r\}} |k| dm \leq \|u\|_{*,\Delta,\lambda}, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathcal{M}(u).$$

よって

$$\int_0^r \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})| d\theta - \|u\|_{*,\Delta,\lambda}\right) \frac{rdr}{(1-r^2)^2} \leq 0, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathcal{M}(u).$$

ここで $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})| d\theta$ は r の非減少関数なので $\int_0^r rdr/(1-r^2)^2 \to \infty$ より上式は

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})| d\theta \leq \|u\|_{*,\Delta,\lambda}, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathcal{M}(u).$$

と同値．よって 調和関数 u について $u \in BMOH_\lambda(\Delta)$ なることと $\mathcal{M}(u)$ が Hardy 型の調和関数の空間 $h^1(\Delta)$ において有界なことは同値である．ここで $h^p(\Delta)$, $0 < p < \infty$ は

$$\|g\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

なる Δ 上の調和関数 g のなす空間である．よってまず 補題 1.6 より (4) $\to$ (3) 及び (2) $\to$ (1) が成立．また 特に $f \in BMOA_\lambda(\Delta)$ であれば $\mathcal{M}(f)$ は $H^1(\Delta)$ において有界ということになりやはり補題 1.6 から (1) $\to$ (4) が成立．

最後に $\mathcal{M}(u)$ が $h^1(\Delta)$ において有界であるとする．このとき Kolmogorov の定理 (cf. Duren [21]) により共役作用素が $h^1(\Delta)$ から $h^p(\Delta)$, $0 < p < 1$ への有界作用素なので $\mathcal{M}(v)$ は $h^p(\Delta)$, $0 < p < 1$ において有界となる．よって $\mathcal{M}(f)$ は $H^p(\Delta)$, $0 < p < 1$ において有界となるので定理 1.7 より $f \in BMOA_\theta(\Delta)$. ゆえに (3) $\to$ (2) が成立する． Q. E. D.

補題 1.9.

$$BMO_\lambda(\Delta) \subset BMO(\Delta), \quad BMOH_\lambda(\Delta) \subset BMOH(\Delta), \quad BMOA_\lambda(\Delta) \subset BMOA(\Delta)$$

ここで包含関係は全て strict である．

(証明) $f \in BMO_\lambda(\Delta)$ とする．B を $d(B, \partial D) \geq \mathrm{rad}(B)$ なる D 内の円板とする．そのとき B 上 での測度 $d\lambda$ の変動が一様に評価できることから f の測度 dm に関する B 上での mean oscillation は B によらない定数で押さえられる．よって局所化定理によって $f \in BMO(\Delta)$. 次に 包含関係 $BMOA_\lambda(\Delta) \subset BMOA(\Delta)$ が strict であることを示そう．平面領域 D を複素平面 $\mathbf{C}$ から Gauss 整数 $\{x + yi \mid x,\ y \in \mathbf{Z}\}$ を除いた領域とし $f\ :\ \Delta \to D$ を D の普遍被覆写像とすれば命題 1.1 より $f \in BMOA(\Delta)$. 他方 f はどのような p, $0 < p < \infty$ に対しても $H^p(\Delta)$ 関数ではない (a.e. で radial な意味での境界値さえ持たない) ので 定理 1.7 より $f \notin BMOA_\theta(\Delta)$.
Q. E. D.

以上により次の関係を得た．

定理 1.8.

$$\begin{array}{ccccccc} & & BMO_\lambda(\Delta) & \subset & BMO(\Delta), & & \\ BMOH_\theta(\Delta) & = & BMOH_\lambda(\Delta) & \subset & BMOH(\Delta) & = & \mathcal{B}_h(\Delta), \\ BMOA_\theta(\Delta) & = & BMOA_\lambda(\Delta) & \subset & BMOA(\Delta) & = & \mathcal{B}(\Delta). \end{array}$$

ここで $\mathcal{B}(\Delta)$, $\mathcal{B}_h(\Delta)$ はそれぞれ Bloch 空間 及び Bloch 型の調和関数のなす空間であり, 包含関係は全て strict である．

§1.3. 単位円板上の Green potential の BMO 性

まず Cauchy 変換の BMO 性について考察する．μ を $\int (1/|\zeta - z|) d|\mu|(\zeta)$ が L^1_{loc} 関数となるような $\mathbf{C}$ 上の複素測度とする．例えば compact な support を持つ測度はこの性質を持つ．この

ような測度 μ に対しその Cauchy 変換 T^μ を

$$T^\mu(z) = \frac{-1}{\pi}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

と定める．そのとき

定理 1.9. μ についてある定数 $L \geq 0$ が存在し $\mathbf{C}$ 上の任意の円板 B に対し $|\mu|(B) \leq L\mathrm{rad}(B)$ が成立すれば T^μ は $BMO(\mathbf{C})$ 関数となりしかも $\|T^\mu\|_{*,\mathbf{C}} \leq AL$. また μ が正値測度であれば逆に $T^\mu \in BMO(\mathbf{C})$ なるとき $\mathbf{C}$ 上の任意の円板 B に対し $\mu(B) \leq A\|T^\mu\|_{*,\mathbf{C}}\mathrm{rad}(B)$ が成立する．

(証明) まず μ について $\mathbf{C}$ 上の任意の円板 B に対し $|\mu|(B) \leq L\mathrm{rad}(B)$ であるとする．$B_{z,r}$ によりここでは z 中心半径 r の円板を表すものとすれば

$$\int_{B_{z_0,r_0}} \left| T^\mu(z) - \int_{\mathbf{C}\setminus B_{z_0,2r_0}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| dm(z) \leq \int_{B_{z_0,r_0}} \left(\int_{B_{z_0,2r_0}} \frac{1}{|\zeta - z|} d|\mu|(\zeta) \right) dm(z)$$

$$+ \int_{B_{z_0,r_0}} \left(\int_{\mathbf{C}\setminus B_{z_0,2r_0}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right| d|\mu|(\zeta) \right) dm(z) = I_1 + I_2.$$

ここで

$$I_1 \leq \int_{B_{z_0,2r_0}} \left(\int_{B_{\zeta,3r_0}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm(z) \right) d|\mu|(\zeta) = 6\pi r_0 \int_{B_{z_0,2r_0}} d|\mu|(\zeta) \leq 12\pi L r_0^2.$$

他方 $\zeta \in \mathbf{C} \setminus B_{z_0,2r_0}$ なるとき

$$\int_{B_{z_0,r_0}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right| dm(z) \leq \int_{B_{z_0,r_0}} \frac{2|z - z_0|}{|\zeta - z_0|^2} dm(z) = \frac{4\pi r_0^3}{3|\zeta - z_0|^2}$$

なので

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbf{C}\setminus B_{z_0,2r_0}} \frac{4\pi r_0^3}{3|\zeta - z_0|^2} d|\mu|(\zeta) = \frac{4\pi r_0^3}{3} \int_{2r_0+0}^\infty \frac{1}{r^2} d(|\mu|(B_{z_0,r})) \\ &= \frac{4\pi r_0^3}{3} \left\{ \left[\frac{1}{r^2}|\mu|(B_{z_0,r}) \right]_{2r_0+0}^\infty - \int_{2r_0+0}^\infty |\mu|(B_{z_0,r}) \frac{-2}{r^3} dr \right\} \\ &\leq \frac{4\pi r_0^3}{3} \int_{2r_0+0}^\infty Lr \frac{2}{r^3} dr = \frac{4\pi L r_0^2}{3}. \end{aligned}$$

以上によって

$$\int_{B_{z_0,r_0}} |T^\mu(z) - T^\mu_{B_{z_0,r_0}}| dm(z) \leq 2\int_{B_{z_0,r_0}} \left| T^\mu(z) - \int_{\mathbf{C}\setminus B_{z_0,2r_0}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| dm(z)$$

$$\leq 2(12\pi L r_0^2 + \frac{4\pi L r_0^2}{3}) \leq ALm(B_{z_0,r_0}).$$

次に μ が正測度とする．$\phi(z),\ 0 \le \phi \le 1$ を $\phi(z) = 0,\ |z| \ge 2,\ \phi(z) = 1,\ |z| \le 1$, なる $\mathbf{C}$ 上の C^∞ 関数とする．そのとき $(T^\mu)_{\bar{z}} = \mu$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\mu(B_{z_0,r_0}) &\le \int \phi(\frac{\zeta - z_0}{r_0})d\mu(\zeta) \le \int \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left(\phi(\frac{\zeta - z_0}{r_0})\right) T^\mu(\zeta)dm(\zeta) \\
&= \frac{1}{r_0}\int \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\frac{\zeta - z_0}{r_0})T^\mu(\zeta)dm(\zeta) = \frac{1}{r_0}\int \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\frac{\zeta - z_0}{r_0})\left\{T^\mu(\zeta) - T^\mu_{B_{z_0,2r_0}}\right\}dm(\zeta) \\
&\le \frac{1}{r_0}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}\right\|_\infty \int_{B_{z_0,2r_0}} \left|T^\mu(\zeta) - T^\mu_{B_{z_0,2r_0}}\right| dm(\zeta) \le A\|T^\mu\|_{*,\mathbf{C}} r_0.
\end{aligned}$$

Q. E. D.

定理の応用として BMOA に関する除去可能集合の特徴づけをあたえよう．E を平面領域 D の compact な部分集合とする．$D \setminus E$ 上正則であるような $BMO(D)$ 関数が (測度 0 の集合上で値を適当に変更して) 常に D 上の正則関数となっているとき E は D において $BMOA$ に関し除去可能な集合であるという．除去可能性はそれを含む領域の取り方によらない性質である．

定理 1.10.(Kaufman [46]) E が $BMOA$ に関し除去可能な集合であるための必要十分条件は E の 1 次元 Hausdorff 測度が 0 となることである．

(証明) まず E の 1 次元 Hausdorff 測度が正であったとする．そのとき E 上の 0 でない正則度 μ で $\mathbf{C}$ 上の任意の円板 B に対し $\mu(B) \le C\mathrm{rad}(B)$ を満たすものが存在する．よって前定理によりその Cauchy 変換 T^μ が求める $BMO(D)$ 関数である．

逆に E の 1 次元 Hausdorff 測度が 0 であったとする．H を D 上 compact な support を持つ C^∞ 関数として $\int fH_{\bar{z}}dm = 0$ を示せばよい．$\|H\|_\infty,\ \|H_{\bar{z}}\|_\infty \le 1$ と仮定してよい．$\varepsilon > 0$ に対し E の被覆をなす円板族 $\{B_i\}_{i=1}^n$ で r_i をその半径として $\sum_{i=1}^n r_i < \varepsilon$ なるものが取れる．$\mathrm{rad}(B_1) \ge \mathrm{rad}(B_2) \ge \cdots \ge \mathrm{rad}(B_n)$ としてよい．ここでもし $B_1 \cap B_i \ne \emptyset$ なる $i \ge 2$ が存在すれば $B_i \subset 3B_1$．そこでそのような B_i は全て取り除き残った円板列を改めて $B_1, B_2, \cdots$ とおく．以下 $B_2, B_3, \cdots$ に対しても同様の操作を施してゆき, 最後に得られた円板列を改めて $\{B_i\}_{i=1}^n$ とおけば $E \subset \cup_{i=1}^n 3B_i$ かつ $B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \ne j$．ここで $\phi,\ 0 \le \phi \le 1$ を $\{|z| \le 5\}$ 上に support を持ち $\{|z| \le 3\}$ 上 1 なる C^∞ 関数としさらに $\phi_i(z) = \phi((z - z_i)/r_i),\ 1 \le i \le n$ とおく．$z \in \mathbf{C}$, $1 \le l \le n,\ k \ge 1$ に対し

$$\Lambda_{k,l,z} = \{i \mid z \in 5B_i,\ 2^{k-1}r_l \le r_i < 2^k r_l\}$$

と定めれば $\{B_i\}$ が disjoint なことから $\sharp\Lambda_{k,l,z} \le A$．また $|\nabla\phi_i(z)| \le A/2^k r_l,\ i \in \Lambda_{k,l,z}$．よって

$$\left|\nabla\left(\sum_{i=1}^l \phi_i(z)\right)\right| \le \sum_{k=1}^\infty \sum_{i \in \Lambda_{k,l,z}} |\nabla\phi_i(z)| \le \sum_{k=1}^\infty \frac{A}{2^k r_l} \le \frac{A}{r_l}.$$

そこで $-\infty < t < \infty$ 上の C^∞ 関数 $h(t),\ 0 \le h(t) \le 1$ で $h(t) = 1,\ t \ge 1,\ h(t) = 0,\ t \le 0$ かつ $|h'(t)| \le 2$ なるものをとり $\Phi_1(z) = h(\phi_1(z))$, とおく．さらに

$$\Phi_l(z) = h(\sum_{i=1}^l \phi_i(z)) - h(\sum_{i=1}^{l-1} \phi_i(z)), \quad 2 \le l \le n$$

と定める．そのとき Φ_l の support は $5B_l$ 内にあり関数 $\sum_{l=1}^n \Phi_l(z) = h(\sum_{i=1}^n \phi_i(z))$ は $\cup_{i=1}^n 3B_i$ 上恒等的に 1 となる．しかも

$$|\nabla \Phi_l(z)| \leq \left| \nabla \left(h(\sum_{i=1}^{l} \phi_i(z)) \right) \right| + \left| \nabla \left(h(\sum_{i=1}^{l-1} \phi_i(z)) \right) \right| \leq \frac{A}{r_l}.$$

まず

$$\int f H_{\bar{z}} dm = \int f\{(1 - \sum_{l=1}^{n} \Phi_l)H\}_{\bar{z}} dm + \int f\{\sum_{l=1}^{n} \Phi_l H\}_{\bar{z}} dm$$

ここで $(1-\sum_{l=1}^n \Phi_l)H$ は D において compact な support を持つ C^∞ 関数でしかもその support 上 f は正則．よって第 1 項は 0．また

$$\text{第 2 項} = \int f(\sum_{l=1}^{n} \Phi_l)_{\bar{z}} H dm + \int f(\sum_{l=1}^{n} \Phi_l) H_{\bar{z}} dm = I_1 + I_2$$

において fH が $BMO(D)$ 関数であることに注意すれば

$$|I_1| = \left| \sum_{l=1}^{n} \int \{fH - (fH)_{5B_l}\}(\Phi_l)_{\bar{z}} dm \right| \leq \sum_{l=1}^{n} \|\nabla \Phi_l\|_\infty \int_{5B_l} |fH - (fH)_{5B_l}| dm$$

$$\leq A\|fH\|_* \sum_{l=1}^{n} r_l < A\|fH\|_* \varepsilon.$$

最後に I_2 が評価できればよい．

$$\left| \int f \Phi_l H_{\bar{z}} dm \right| \leq \int_{5B_l} |f| dm = A r_l^2 |f|_{5B_l} \leq A r_l^2 \left(||f|_{5B_l} - |f|_{B_l}| + |f|_{B_l} \right) \leq A r_l^2 \|f\|_* + A \int_{B_l} |f| dm.$$

よって $\{B_l\}$ が disjoint なことから

$$|I_2| \leq \sum_{l=1}^{n} A r_l^2 \|f\|_* + \int_{\cup_l B_l} |f| dm \leq A\|f\|_* \varepsilon + A \int_{\cup_l B_l} |f| dm.$$

それゆえ f の絶対連続性より $\varepsilon \to 0$ なるとき $I_2 \to 0$ となり証明は完了する． Q. E. D.

定理 1.9 , 定理 1.10 の論法は $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ における Newton potential 及び調和関数に対してもほとんど何も変更することなく適用できる．例えば $\mathbf{R}^n$ 上の部分領域 D 及びその compact 部分集合 E について E が D において BMOH に関し除去可能となるための必要十分条件は E の $n-2$ 次元 Hausdorff 測度が 0 となることである．また $n=2$ の場合については関数 $\log|z|$ が示すようにその $\emptyset$ でないどのような部分集合も BMOH に関し除去可能とはならない．

次に Dirichlet 積分有限な関数の BMO 性について考察する．D 上の, 超関数の意味での一階の各偏導関数が $L^2(D)$ 関数であるような関数を Dirichlet 関数という．或るいは有限な Dirichlet 積分を持つという．またその norm を

$$\|f\|_{I,D} = \left(\int_D |\nabla f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

により定める. $\mathbf{C}$ 上の Dirichlet 関数は常に compact な support を持つ $\mathbf{C}$ 上の C^∞ 関数によって近似でき, また $f_{\bar z} \in L^2(\mathbf{C})$ ならば測度 $d\mu = f_{\bar z} dm$ は定理 1.9 の仮定を満たすことから $\mathbf{C}$ 上の Dirichlet 関数は常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数となっっていることがわかる (cf. Constantinescu-Cornea [20]). さらに

定理 1.11. (Poincaré-Sobolev の不等式) 領域 D 上の, Dirichlet 関数 f は常に $BMO(D)$ 関数となりかつ $\|f\|_{*,D} \le A\|f\|_{I,D}$.

(証明) f を D 上の Dirichlet 関数とする. 補題 1.3 より f は C^∞ 関数と仮定してよい. $z_0 \in D$ に対し B を z_0 中心, 半径 $r_0 = d(z_0, \partial D)/3$ の円板とする. $z \in B$ に対し $\tilde B_z$ を z 中心, 半径 $2r_0$ の円板とすれば $B \subset \tilde B_z \subset 3B \subset D$ となり Schwartz の不等式を用いれば

$$
\begin{aligned}
\int_B \int_B |f(z) - f(w)| dm(w) dm(z) &\le \int_B \int_{\tilde B_z} \int_z^w |\nabla f(\zeta)||d\zeta| dm(w) dm(z) \\
&= \int_B \int_0^{2\pi} \int_0^{2r_0} \int_0^s |\nabla f(z + te^{i\theta})| dt s ds d\theta dm(z) \\
&\le \int_B \int_0^{2\pi} \int_0^{2r_0} \int_0^{2r_0} |\nabla f(z + te^{i\theta})| dt s ds d\theta dm(z) \\
&\le 2r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2r_0} \int_{3B} |\nabla f(\zeta)| dm(\zeta) d\theta dt \\
&= 8\pi r_0^3 \textstyle\int_{3B} |\nabla f(\zeta)| dm(\zeta) \le 8\pi r_0^3 \left(\displaystyle\int_{3B} |\nabla f(\zeta)|^2 dm(\zeta) \right)^{\frac12} \left(9\pi r_0^2\right)^{\frac12} \le A r_0^4 \|f\|_{I,D}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{1}{m(B)} \int_B |f - f_B| dm \le \frac{1}{m(B)^2} \int_B \int_B |f(z) - f(w)| dm(w) dm(z) \le A\|f\|_{I,D}.
$$

となるので局所化定理により証明は完了する. Q. E. D.

Δ 上の関数に対してはより強く

定理 1.12. Δ 上の Dirichlet 関数 f は常に $BMO_\lambda(\Delta)$ 関数となりしかも $\|f\|_{*,D,\lambda} \le A\|f\|_{I,D}$.

(証明) 一般に Dirichlet 関数は, 調和な Dirichlet 関数及び compact な support を持つ C^∞ 関数によって近似できるような Dirichlet 関数の直和に分解できる. (cf. Constantinescu-Cornea [20]). よって f としては 調和関数かまたは Δ において compact な support を持つ C^∞ 関数の場合について証明できれば十分である.

まず f が調和な Dirichlet 関数の場合, 系 1.8, 定理 1.8 及び Dirichlet 積分の 等角写像による不変性から

$$
\frac{1}{\pi} \int_{\partial\Delta} |\nabla f(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dm(z) \le A \int_\Delta |\nabla f(z)|^2 dm(z)
$$

を示せばよいがこれは例えば f の級数展開によって容易に示せる.

次に f が compact な support を持つ C^∞ 関数である場合. このとき $g \in \mathcal{M}(f)$, $B_r = \{|z| <$

$r\}, 0 < r < 1$ として

$$\frac{1}{\lambda(B_r)}\int_{B_r}|g-g_{B_{r,\lambda}}|d\lambda \le A\left(\int_{\Delta}|\nabla g(z)|^2 dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$

を示せばよい. $0 < r < 1/2$ のときは 測度 $d\lambda$ が dm と比較可能なことから 定理 1.9 よりわかる. また $1/2 \le r < 1$ なるとき

$$g(z) = \frac{-1}{\pi}\int_{\Delta}\frac{1}{\zeta - z}g_{\bar{\zeta}}(\zeta)dm(\zeta)$$

より $\phi_r(\zeta) = \int_{B_r}|z-\zeta|^{-1}d\lambda(\zeta)$ とおいて

$$\int_{B_r}|g-0|d\lambda \le \frac{1}{\pi}\int_{\Delta}\phi_r(\zeta)|g_{\bar{\zeta}}(\zeta)|dm(\zeta) \le \frac{1}{\pi}\left(\int_{\Delta}\phi_r(\zeta)^2 dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Delta}|g_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2 dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{\Delta}\phi_r(\zeta)^2 dm(\zeta) &= \int_{B_r}\int_{B_r}\left(\int_{\Delta}\frac{1}{|z-\zeta|}\frac{1}{|w-\zeta|}dm(\zeta)\right)d\lambda(z)d\lambda(w)\\ &\le \int_{B_r}\int_{B_r}\left(A + A\log\frac{1}{|z-w|}\right)d\lambda(z)d\lambda(w)\\ &\le \int_{B_r}\frac{A}{1-r}d\lambda(w) \le \frac{A}{(1-r)^2} \le A\lambda(B_r)^2.\end{aligned}$$

以上により

$$\frac{1}{\lambda(B_r)}\int_{B_r}|g-g_{B_{r,\lambda}}|d\lambda \le \frac{2}{\lambda(B_r)}\int_{B_r}|g-0|d\lambda \le A\|f\|_{I,\Delta}.$$

Q. E. D.

領域 D 上の正測度 μ は, ある定数 $K > 0$ が存在し $\mathrm{rad}(B) \le \mathrm{d}(B, \partial D)$ なる D 内の任意の円板 B に対し $\mu(B) \le K$ なるとき D において一様局所有界であるという.

補題 1.10. 領域 D 上の $\Delta f = -2\pi\mu$ なる 優調和関数 f が $BMO(D)$ 関数となっていれば μ は D において一様局所有界である.

(証明) 定理 1.9 後半の証明を繰り返せばよい. ϕ を $\{|z| \le 1\}$ 上 1, $\{|z| \ge 3/2\}$ 上 0, $0 \le \phi \le 1$ なる $\mathbf{C}$ 上の C^∞ 関数とする. B を z_0 を中心とする $r = \mathrm{rad}(B) \le \mathrm{d}(B, \partial D)$ なる D 内の円板とすると $B \subset \frac{3}{2}B \subset D$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\mu(B) &\le \textstyle\int_D \phi\left(\frac{z-z_0}{r}\right)d\mu(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_D \Delta\left(\phi(\frac{z-z_0}{r})\right)f(z)dm(z)\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_D \frac{1}{r^2}\Delta\phi(\frac{z-z_0}{r})\{f(z) - f_{\frac{3}{2}B}\}dm(z)\\ &\le \frac{1}{2\pi r^2}\int_D |\Delta\phi(\frac{z-z_0}{r})||f(z) - f_{\frac{3}{2}B}|dm(z)\\ &\le \frac{A}{2\pi r^2}\int_{\frac{3}{2}B}|f(z) - f_{\frac{3}{2}B}|dm(z) \le A\|f\|_{*,D}.\end{aligned}$$

Q. E. D.

系 1.9. **C** 上の正測度 μ に対しその対数 poteitial

$$f^{\mu}(z) = \int \log \frac{1}{|z-\zeta|} d\mu(\zeta)$$

が $BMO(\mathbf{C})$ 関数となるための必要十分条件は μ が有限測度となることである.

Δ 上の Green 関数を $g(z,\zeta)$ とおくとき等式

$$\int_{\Delta} g(z,\zeta) dm(\zeta) = \frac{\pi}{2}(1-|z|^2), \quad z \in \Delta$$

の成立することより

補題 1.11. 単位円板 Δ 上正測度 μ に対し以下の条件は同値である.
(1) $\sup\{<\nu, m> \mid \nu \in \mathcal{M}(\mu)\} < \infty$.
(2) $\sup\{\int_{\Delta} c(z,\zeta) d\mu(z) \mid z \in \Delta\} < \infty$.
(3) $\sup\{\int_{\Delta} (1-|z|^2) d\nu(z) \mid \nu \in \mathcal{M}(\mu)\} < \infty$.
ここで

$$c(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2},$$

$$\mathcal{M}(\mu) = \{\nu \mid \nu = \mu T^{-1},\ T \in M\ddot{o}b(\Delta)\},$$

$$<\nu, m> = \int_{\Delta}\int_{\Delta} g(z,\zeta) d\nu(z) dm(\zeta).$$

μ がこの条件を満たすとき 測度 $(1-|z|^2)d\mu(z)$ は Δ 上の Carleson 測度であるという. Carleson 測度のもともとの定義とこれらの条件の同値性については Garnett [24] を参照して欲しい. $(1-|z|^2)d\mu(z)$ が Carleson 測度であれば μ は一様局所有界である.

定理 1.13. Δ 上の正測度 μ の Green potential $P^{\mu}(z) = \int_{\Delta} g(z,\zeta) d\mu(\zeta)$ に対し次の 2 条件は同値である.
(1) $(1-|z|^2)d\mu(z)$ は Carleson 測度.
(2) P^{μ} を $\mathbf{C} \setminus \Delta$ 上では値を 0 と定めて $\mathbf{C}$ 上の関数に拡張するとき $P^{\mu} \in BMO(\mathbf{C})$.
またこのとき $P^{\mu} \in BMO_{\lambda}(\Delta)$.

(証明) まず $(1-|z|^2)d\mu(z)$ が Carleson 測度であるとき $P^{\mu} \in BMO(\Delta)$ を証明する. 局所化定理によって $\mathrm{rad}(B) \leq C\mathrm{d}(B, \partial\Delta)$ なる 円板 B だけ考えれば十分である. さらにこの様な円板を Δ 上の Möbius 変換で原点中心の円板に写すときその Möbius 変換 の B 上での Jacobian の変動は一様に評価できる. それで $T \in M\ddot{o}b(\Delta)$ に対し $P^{\mu} \circ T = P^{\mu T}$ となることに注意すれば B_r を原点中心 半径 r の円板として, ある $r_0,\ 0 < r_0 < 1$ に対し

$$\sup\left\{ \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r} |P^{\nu} - P^{\nu}_{B_r}| dm \;\middle|\; 0 < r < r_0,\ \nu \in \mathcal{M}(\mu) \right\} < \infty$$

を証明すれば十分である. $0 < r_0 < r_1 < 1$ とするとき 補題 1.11 (3) より

$$\phi_1^\nu(z) = \int_{\Delta \setminus B_{r_1}} g(z,\zeta) d\nu(\zeta) \le C, \quad z \in B_{r_0}, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu),$$

$$\int_{B_{r_1}} d\nu(\zeta) \le C, \quad z \in B_{r_0}, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu),$$

$\|g(\cdot,\zeta)\|_{*,\Delta} \le A$ なので第 2 の不等式より $\phi_2^\nu(z) = \int_{B_{r_1}} g(z,\zeta)d\nu(\zeta)$ とおくとき $\|\phi_2^\nu\|_{*,\Delta} \le C$.
以上により

$$\|P^\nu\|_{*,B_{r_0}} \le \|\phi_1^\nu\|_{*,B_{r_0}} + \|\phi_2^\nu\|_{*,B_{r_0}} \le C, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu).$$

よって P^μ は $BMO(\Delta)$ 関数. 次に $P^\mu \in BMO(\mathbf{C})$ を示そう. まず

$$P_{B_{r_0}}^\nu \le C \int_\Delta P^\nu dm = C \int_\Delta (1-|z|^2) d\nu(z) \le C, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu).$$

この不等式を P^μ についての式に書き換えれば

$$\sup\{P_B^\mu \mid B \text{ は } \mathrm{rad}(B) = \mathrm{const.d}(B, \partial\Delta) \text{ なる } \Delta \text{ 内の円板 }\} \le C.$$

よって

$$\hat{S}_{\theta,h} = \{z = re^{i\phi} \mid \theta - h < \phi < \theta + h,\ 1-h < r < 1-h/2\}$$

とおいて $P_{\hat{S}_{\theta,h}}^\mu \le C$. すると 定理 1.1 と同様の議論によって

$$S_{\theta,h} = \{z = re^{i\phi} \mid \theta - h < \phi < \theta + h,\ 1-h < r < 1\}$$

とおくとき $|P_{\hat{S}_{\theta,h}}^\mu - P_{S_{\theta,h}}^\mu| \le C$. よって $P_{S_{\theta,h}}^\mu \le C$. B を $\mathbf{C}$ 内の任意の円板とする. まず $\mathrm{rad}(B) \ge 1/10$ であれば

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |P^\mu - 0| dm \le A \int_\Delta P^\mu dm \le C.$$

また $\mathrm{rad}(B) < 1/10$ であるとき $B \cap \partial\Delta \ne \emptyset$ と仮定してよくこのとき

$$B \cap \Delta \subset S_{\theta,h}, \quad m(S_{\theta,h}) \le Am(B)$$

なる $S_{\theta,h}$ が取れることから

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |P^\mu - 0| dm \le AP_{S_{\theta,h}}^\mu \le C$$

以上により $P^\mu \in BMO(\mathbf{C})$.

次に (2) $\to$ (1) を示そう. $BMO(\mathbf{C})$ は $M\ddot{o}b(\hat{\mathbf{C}})$ によって不変であった (定理 1.3) ので (P^ν, $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$ も $\mathbf{C} \setminus \Delta$ 上へは 0 として拡張されているとして) $\|P^\nu\|_{*,\mathbf{C}} \le C$, $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$. よって $B_2 = \{|z| < 2\}$ として

$$C \ge \frac{1}{m(B_2)} \int_{B_2} |P^\nu - P_{B_2}^\nu| dm \ge \frac{1}{4\pi} \int_{B_2 \setminus \Delta} P_{B_2}^\nu dm = \frac{1}{4\pi} \int_{B_2 \setminus \Delta} \frac{1}{4} P_\Delta^\nu dm = \frac{3}{16} P_\Delta^\nu$$

ゆえに

$$\int_\Delta (1-|z|^2)d\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_\Delta P^\nu dm \le C, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu)$$

となり $(1-|z|^2)d\mu$ は Carleson 測度.

最後に $P^\nu \in BMO_\lambda(\Delta)$ を示そう. まず $B_{\frac{1}{2}}$ 上では $d\lambda$ と dm が比較できることより

$$\frac{1}{\lambda(B_r)}\int_{B_r} |P^\nu - P^\nu_{B_r,\lambda}|d\lambda \le C, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu), \quad 0<r\le \frac{1}{2}.$$

また $1/2<r<1$ ならば $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$ として

$$\frac{1}{\lambda(B_r)}\int_{B_r} |P^\nu - 0|d\lambda \le \frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|P^\nu - 0|dm \le \frac{4}{\pi}\int_\Delta P^\nu dm \le C,$$

よって $P^\nu \in BMO_\lambda(\Delta)$. Q. E. D.

$\{z_n\}$ を Δ 上の補間点列とすれば δ_{z_n} を点 z_n での Dirac 測度とするとき $\sum_n (1-|z|^2)d\delta_{z_n}$ は Carleson 測度なので

系 1.10. $\{z_n\}$ を Δ 上の補間点列とすれば $\sum_n g(z,z_n) \in BMO_\lambda(\Delta)$.

また 有限な エネルギー を持つ potential P^μ は有限な Dirichlet 積分を持つので定理 1.10 から $P^\mu \in BMO_\lambda(\Delta)$ がわかるがこれは

$$\sup_{\nu\in\mathcal{M}(\mu)} <\nu, m> \le \sup_{\nu\in\mathcal{M}(\mu)} <\nu,\nu>^{1/2}<m,m>^{1/2} = <\mu,\mu>^{1/2}<m,m>^{1/2} < \infty$$

よりこの定理からも導ける.

定理 1.14. Δ 上の正測度 μ について その Green potential P^μ が $BMO(\Delta)$ 関数であるための必要十分条件は一様局所有界かつ $z = re^{i\theta}$ として

$$\sup\left\{ \left| \int_\Delta e^{i\theta}(1-|z|^2)d\nu(z)\right| \;\middle|\; \nu \in \mathcal{M}(\mu)\right\} < \infty.$$

なることである.

(証明) まず $P^\mu \in BMO(\Delta)$ とする. μ の一様局所有界性は 補題 1.10 による. 等式

$$\int_\Delta \zeta g(z,\zeta)dm(\zeta) = \frac{\pi}{4}z(1-|z|^2), \quad z\in\Delta$$

に注意すれば $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$ に対し

$$\left|\int_\Delta z(1-|z|^2)d\nu(z)\right| = \left|\int_\Delta\int_\Delta \frac{4}{\pi}\zeta g(z,\zeta)dm(\zeta)d\nu(z)\right| = \frac{4}{\pi}\left|\int_\Delta \zeta[P^\nu(\zeta)-P^\nu_\Delta]dm(\zeta)\right|$$

$$\le \frac{4}{\pi}\int_\Delta |P^\nu(\zeta)-P^\nu_\Delta|dm(\zeta) \le A\|P^\nu\|_{*,\Delta} \le A\|P^\mu\|_{*,\Delta}$$

他方 μ の一様局所有界性から $B_r = \{|z| < r\}$ として

$$\nu(B_r) \le \frac{C}{1-r}, \quad 0 < r < 1, \quad \nu \in \mathcal{M}(\mu).$$

よって

$$\left| \int_\Delta e^{i\theta}(1-|z|^2)d\nu(z) - \int_\Delta z(1-|z|^2)d\nu(z) \right| \le 2\int_\Delta (1-|z|)^2 d\nu(z) \le C.$$

よって μ は定理の条件を満たす.

逆に μ が定理の条件を満たすとする. $r_1,\ r_2$ を $0 < r_1 < r_2 < 1$ ととりさらに $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$ を任意にとり以下固定する. そして

$$P^\nu(z) = \int_{B_{r_2}} g(z,\zeta)d\nu(\zeta) + \int_{\Delta \setminus B_{r_2}} g(z,\zeta)d\nu(\zeta) = g_1(z) + g_2(z)$$

とおく. μ の一様局所有界性から $\nu(B_{r_2}) \le C$ なので $\|g_1\|_{*,\Delta} \le C$. よって局所化定理によりあと g_2 の $BMO(B_{r_1})$ norm が評価できればよい. g_2 は B_{r_1} 上調和でありしかも 調和関数に対しては BMO 関数であることと Bloch 型の関数であることは同値であった (定理 1.6) ので $|\nabla g_2(z)|,\ \ z \in B_{r_1}$ の一様有界なことを示せば十分である. $T_z(w) = (w+z)/(1+\bar{z}w)$ とおく. そのとき $|T_z'(0)| \ge C > 0$ でさらにある $r_0,\ r_3,\ 0 < r_0 < r_3 < 1$ が存在して $B_{r_0} \subset T_z^{-1}(B_{r_2}) \subset B_{r_3},\ \ z \in B_{r_1}$. ここで $\eta_z = \nu T_z\ (\in \mathcal{M}(\mu)),\ z \in B_{r_1}$ とおけば

$$g_2 \circ T_z(w) = \int_{T_z^{-1}(\Delta \setminus B_{r_2})} g(w,\zeta)d\eta_z(\zeta).$$

よって

$$|\nabla g_2(z)||T_z'(0)| = \left| \int_{T_z^{-1}(\Delta\setminus B_{r_2})} \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta} d\eta_z(\zeta) \right|, \quad z \in B_{r_1},$$

ここで先ほどと同様に

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Delta \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}(1-|\zeta|^2)d\eta_z(\zeta) - \int_{T_z^{-1}(\Delta\setminus B_{r_2})} \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta} d\eta_z(\zeta) \right| \\
&\qquad \le \int_{T_z^{-1}(\Delta\setminus B_{r_2})} \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|\zeta|)}{|\zeta|} d\eta_z(\zeta) + \int_{T_z^{-1}(B_{r_2})} (1-|\zeta|^2)d\eta_z(\zeta) \\
&\qquad \le \tfrac{2}{r_0} \textstyle\int_{\Delta\setminus B_{r_0}} (1-|\zeta|)^2 d\eta_z(\zeta) + \int_{B_{r_3}} (1-|\zeta|^2)d\eta_z(\zeta) \le C.
\end{aligned}$$

それゆえ

$$|\nabla g_2(z)| \le C \left| \int_{T_z^{-1}(\Delta\setminus B_{r_2})} \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta} d\eta_z(\zeta) \right| \le C + C\int_\Delta \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}(1-|\zeta|^2)d\eta_z(\zeta) \le C.$$

Q. E. D.

補題 1.11 の条件 (3) より Carleson 測度は (定理 1.11 によらなくとも) この定理の条件を満たすことが分かる.

次の例より Δ 上の $\nu \leq \mu$ なる正測度 ν, μ で P^ν が $BMO_\lambda(\Delta)$ 関数でありながら P^μ が $BMO(\Delta)$ 関数とはならないものが存在する. 特に 一様局所有界な Δ 上の正測度でその Green potential が $BMO(\Delta)$ 関数とならないものが存在する.

例 1.3. $f(z) = \log(1-|z|^2),\ \ f_r(z) = f(rz) - f(r),\ \ 0 < r < 1$ とすれば f 及び $f_r,\ 0 < r < 1$ は $BMO_\lambda(\Delta)$ 関数となりそれらの $BMO_\lambda(\Delta)$ norm は有界となる. (証明は読者に任せる.) また

$$f_r(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_\Delta g(z,\zeta)\Delta f_r(\zeta)dm(\zeta) = \int_\Delta g(z,\zeta)\frac{2r^2}{\pi(1-r^2|z|^2)^2}dm(\zeta)$$

そこで

$$d\mu_r(\zeta) = \frac{2r^2}{\pi(1-r^2|z|^2)^2}dm(\zeta), \quad 0 < r < 1,$$

$$d\nu_r(\zeta) = \chi_{\{\mathrm{Re}\zeta > 0\}}d\mu_r, \quad 0 < r < 1,$$

と定めれば

$$\left|\int_\Delta e^{i\theta}(1-|z|^2)d\nu_r(z)\right| \to \infty, \quad r \to 1.$$

なので前定理より $\|P^{\nu_r}\|_{*,\Delta} \to \infty,\ \ r \to 1,$ よって $r_n,\ 0 < r_n < 1, r_n \to 1,\ \ \alpha_n > 0,$ 及び $T_n \in M\ddot{o}b(\Delta)$ を適当に選べば $\mu = \sum_n \alpha_n \mu_{r_n} T_n^{-1},\ \ \nu = \sum_n \alpha_n \nu_{r_n} T_n^{-1}$ が求めるものとなる.

最後に 優調和関数の Riesz 分解が BMO 性を保存するかどうかを考える.

定理 1.15. f を Riesz 分解 $f = h + P^\mu$ を持つ Δ 上の優調和関数とする. もし f が $BMO_\lambda(\Delta)$ 関数であれば $h,\ P^\mu$ も共に $BMO_\lambda(\Delta)$ 関数となりしかも

$$\|h\|_{*,\Delta,\lambda} \leq \|f\|_{*,\Delta,\lambda}, \quad \|P^\mu\|_{*,\Delta,\lambda} \leq 2\|f\|_{*,\Delta,\lambda}.$$

(証明) $\nu \in \mathcal{M}(\nu)$ に対し $2\pi^{-1}\int_0^{2\pi}|P^\nu(re^{i\theta})|d\theta \to 0,\ r \to 1$ となることに注意すれば 補題 1.8 と同様の議論により

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|d\theta \leq \|f\|_{*,\Delta,\lambda}, \quad 0 < r < 1, \quad u \in \mathcal{M}(h)$$

が分かり $\|h\|_{*,\Delta,\lambda} \leq \|f\|_{*,\Delta,\lambda}$ となる. Q. E. D.

$BMO_\lambda(\Delta)$ が このように Riesz 分解によって保存されるのに対し $BMO(\Delta)$ 以下のように Riesz 分解によって保存されない.

例 1.4. H を上半平面とし $f(x,y) = \log y$ とするとき $f \in BMO(H)$. Γ を $\Gamma \cap \mathbf{R} = \{0\}$ なる, 原点を除いては十分に滑らかで原点の近傍においては

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$$

と表されるような $\bar{H}$ 内の単純閉曲線とする. Ω を Γ の囲む領域とすし, $\phi\ :\ H \to \Omega$ を $\phi(0)=0$ なる等角写像とする. そのとき (例えば次章に於証明する BMO の等角写像による不変性より) $g = f \circ \phi \in BMO(H)$. 他方 g の境界値関数は ある有界関数 $\psi_1,\ \psi_2$ により

$$g(x) = \begin{cases} \min\{2\log|x|, 0\} + \psi_1(x), & x > 0 \\ \min\{4\log|x|, 0\} + \psi_2(x), & x < 0 \end{cases}$$

と表される. よって境界値関数

$$k(x) = \begin{cases} \min\{2\log|x|, 0\}, & x > 0 \\ \min\{4\log|x|, 0\}, & x < 0 \end{cases}$$

を持つ H 上の調和関数 h が $BMOH(H)$ 関数でないことを示せばよい. h は

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} k(t)dt$$

と表されるので

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-2yt}{(t^2+y^2)^2}\log t dt$$

よって

$$y|\nabla h(0,y)| \geq y\left|\frac{\partial h}{\partial x}(0,y)\right| \to \infty, \quad y \to +0$$

となり 定理 1.6 より $h \notin BMOH(H)$. Q. E. D.

第 2 章. BMO 空間の擬等角不変性 (Reimann の定理)

§2.1. BMO による擬等角写像の特徴付け (その１)

平面領域 D 上の関数 g は D 内の軸に平行な各長方形 $Q = [a, a'] \times [b, b']$ に対し $g(x, y),\ b \le y \le b'$ が $[a, a']$ 内の a.e. の x に対し絶対連続でありさらに $g(x, y),\ a \le x \le a'$ が $[b, b']$ 内の a.e. の y に対し絶対連続であるとき D 上 ACL (absolutely continuous on line) であるという. $\mathbf{C}$ 上の 領域 D から D' への 向きを保つ同相写像 g は ACL であってしかも ある定数 $K,\ 1 \le K < \infty$ が存在し D 上 a.e. に $\sup_{|v|=1} |\nabla g \cdot v| (= |\nabla g|) \le K \inf_{|v|=1} |\nabla g \cdot v|$ なるとき (K-) 擬等角写像と呼ばれる. また $\hat{\mathbf{C}}$ 上の 領域 D から D' への 向きを保つ同相写像 g はその $D \setminus (g^{-1}(\{\infty\}) \cup \{\infty\})$ への制限が (K)-擬等角写像であるとき (K-) 擬等角写像であるという. g が K-擬等角写像であれば g は D 上 a.e. の点で微分可能かつ J_g を g の Jacobian として $|\nabla g|^2 \le K J_g$ が成立する. $g : D \to D'$ が K-擬等角写像であればその逆写像 $g^{-1} : D' \to D$ も K-擬等角写像である.

平面領域 R は $\hat{\mathbf{C}} \setminus R$ がちょうど 2 個の成分 $C_1,\ C_2$ からなるとき環状領域であると呼ばれる. 環状領域 R に対し $\Gamma(R)$ を C_1 と C_2 を分離する R 内の rectifiable な閉曲線の族とし, $A(R)$ を任意の $\gamma \in \Gamma(R)$ に対し $\int_\gamma \rho ds \ge 1$ なる R 上の Borel 可測関数 $\rho \ge 0$ のなす族とする. そのとき R の modulus $M(R)$ を

$$M(R) = \inf_{\rho \in A(R)} \int_R \rho^2 dm$$

により定める. $R = \{a < |z| < b\}$ であれば

$$M(R) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

となる. $R \subset R'$ なる環状領域 $R,\ R'$ に対しては $M(R) \le M(R')$ が成立する. Teichmüller の環状領域 $R_T(t),\ t > 0$ を $\mathbf{C}$ から 実軸上の区間 $[-1, 0]$ 及び $[t, \infty)$ を除いた環状領域とすると

$$M(R_T(t)) \le \frac{1}{2\pi} \log(16(t+1))$$

でありさらに $0, z_1$ 及び z_2, ∞ を それぞれ $\hat{\mathbf{C}} \setminus R$ の同じ成分に属する点として持つ環状領域 R に対しては常に

$$M(R) \le M(R_T(\frac{|z_2|}{|z_1|}))$$

が成立する. $g : D \to D'$ を K-擬等角写像とすれば R を D 内の環状領域, $R' = g(R)$ として常に $M(R)/K \le M(R') \le K M(R')$ が成立する. (Ahlfors [1] 参照.)

補題 2.1. $g : D \to D'$ を平面領域の間の K-擬等角写像とする. そのとき任意の $\alpha \ge 1$ に対しある定数 $L(K, \alpha) \ge 1$ が存在し, $z_0 \in D$ を中心とし $\mathrm{d}(Q, \partial D) \ge L(K, \alpha) l(Q)$ なる D 内の任意の正方形 Q に対し $w_0 = g(z_0)$ を中心とし $\mathrm{d}(Q', \partial D') = \alpha l(Q')$ なる正方形 Q' をとれば $g(Q) \subset Q'$ が成立する.

(証明) Q_0 を $z_0 \in D$ 中心 $l(Q_0) = \mathrm{d}(Q_0, \partial D)$ なる正方形とする. B' を w_0 中心 半径 $r' = \mathrm{d}(w_0, g(\partial Q_0))$ なる円盤とし w_0 を中心とする B' 内の正方形 Q_1' を $\mathrm{d}(Q_1', \partial B') = \alpha l(Q_1')$

となるように取る．そのとき $r'/l(Q_1')$ は α にのみ依存する定数となり $Q_1' \subset Q'$ が成立する．B を Q_0 に内接する円盤としその半径を r とおく．B_1 を z_0 中心 半径 $r_1 = \mathrm{d}(z_0, g^{-1}(\partial Q_1'))$ なる円盤とする．そのとき r_1/r を下から評価できればよい．環状領域 $R = B^o \setminus B_1$ 及び $R' = g(R)$ について $\hat{\mathbf{C}} \setminus R'$ の ∞ を含む成分は w_0 との距離が r' となる点を含みまた w_0 を含む成分は w_0 との距離が $l(Q_1')/2$ となる点を含む. よって

$$M(R') \leq M(R_T(\frac{r'}{\frac{l(Q_1')}{2}})) = C(\alpha).$$

よって

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} = M(R) \leq KM(R') \leq KC(\alpha).$$

ゆえに $r_1 \geq C(K, \alpha) r$. Q. E. D.

正方形 Q 及び Q 上の非負可測函数 f に対し

$$M_p(f, Q) = \begin{cases} \mathrm{ess.sup}_Q f, & p = \infty, \\ \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q f^p dm \right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0,\ p \neq \pm\infty \\ \exp\left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q \log f dm \right), & p = 0, \\ \mathrm{ess.inf}_Q f, & p = -\infty, \end{cases}$$

とおく．$M_p(f, Q)$ は p の非減少関数であり高々 2 点 $p_1 = \sup\{p \mid M_p(f, Q) = 0\}$, $p_2 = \inf\{p \mid M_p(f, Q) = \infty\}$ を除いては p についての連続関数である.

補題 2.2. $g : D \to D'$ を平面領域の間の K-擬等角写像とするときある定数 $L_i(K) > 0$, $i = 1, 2, 3$ が存在し $\mathrm{d}(Q, \partial D) \geq L_1(K) l(Q)$ なる D 内の任意の正方形 Q に対し z_0 を Q の中心, $w_0 = g(z_0)$ として以下が成立する;

(1) $\max_{z \in \partial Q} |g(z) - w_0| \leq L_2(K) \min_{z \in \partial Q} |g(z) - w_0|$.

(2) $0 < M_1(J_g, Q) \leq L_3(K) M_{1/2}(J_g, Q) < \infty$.

(証明) $z_0 = w_0 = 0$ と仮定してよい．前補題よりある $L_1(K) > 0$ が存在し $\mathrm{d}(Q, \partial D) \geq L_1(K) l(Q)$ であれば w_0 中心 半径 $t' = \max_{z \in \partial Q} |g(z)|$ の円盤は D' に含まれる．このような $Q = \{|x| \leq s,\ |y| \leq s\}$ に対して $\sqrt{2} r < s$ なる r をとり

$$Q_1 = \{|x| \leq r,\ |y| \leq r\}, \quad B = \{|z| \leq s\}, \quad B_1 = \{|z| \leq \sqrt{2} r\}$$

とおく．$r' = \sup_{z \in \partial B_1} |g(z)|$ とし等号を達成する z のひとつを z_1 とし，$w_1 = g(z_1)$ とおく．また $s' = \inf_{z \in \partial B} |g(z)|$ とし等号を達成する z のひとつを z_2 とし，$w_2 = g(z_2)$ とおく．さらに $C_1 = \hat{\mathbf{C}} \setminus B^o$, $C_2 = B_1, R = \hat{\mathbf{C}} \setminus (C_1 \cup C_2)$, $C_1' = g(C_1)$, $C_2' = g(C_2)$, $R' = g(R)$ とおく．そのとき $M(R) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{s}{\sqrt{2} r}$, また w_2, $\infty \in C_1'$, w_1, $0 \in C_2'$ なので

$$M(R') \leq M(R_T(\frac{|w_2|}{|w_1|})) = M(R_T(\frac{s'}{r'})) \leq \frac{1}{2\pi} \log(16(\frac{s'}{r'} + 1)).$$

$M(R) \leq KM(R')$ より

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{s}{\sqrt{2}r} \leq \frac{K}{2\pi}\log(16(\frac{s'}{r'}+1)).$$

よってある定数 $C'(K)$, $0 < C'(K) < 1$ が存在し r を $r = C'(K)s$ と定めることにすれば $s' \geq 2r'$ とできる．$P = \{r \leq x \leq s,\ -r \leq y \leq r\}$. とおくとき

$$\int_{-r}^{r}\int_{r}^{s} J_g^{\frac{1}{2}}(x,y)dxdy = \int_P J_g^{\frac{1}{2}}dm \leq \left(\int_P J_g dm\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_P dm\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

よって $\{-r \leq y \leq r\}$ の測度正のある部分集合がとれて y がその集合に属するとき

$$\int_Q J_g^{\frac{1}{2}}dm \geq \left(\int_{-r}^{r}dy\right)\left(\int_r^s J_g^{\frac{1}{2}}(x,y)dx\right) = 2r\int_r^s J_g^{\frac{1}{2}}(x,y)dx$$

となる．よってこの不等式を満たしかつ $g(x,y_0)$, $r \leq x \leq s$ が x の関数として絶対連続でしかもこの線分上の a.e. の x に対し g が微分可能かつ $|\nabla g(x,y_0)|^2 \leq KJ_g(x,y_0)$ である様な y_0, $-r \leq y_0 \leq r$ が存在する．

$t' = \max_{z\in\partial Q}|g(z)|$ において等号を達成する z のひとつを z_3 とし，$w_3 = g(z_3)$ とおく．$R_1' = \{s' < |z| < t'\}$ とするとき Q の取り方から $R_1' \subset D'$ であり $R_1 = g^{-1}(R_1')$ とおけば 先と同様にして

$$M(R_1') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{t'}{s'}.$$

$$M(R_1) \leq M(R_T(\frac{|z_3|}{|z_2|})) = M(R_T(\frac{\sqrt{2}s}{s})) \leq A.$$

よって $M(R_1') \leq KM(R_1)$ より

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{t'}{s'} \leq AK$$

となり $t' \leq C''(K)s'$ なる $C''(K) > 0$ が取れる．よって (1) が成立する．また

$$\begin{aligned}
s' &\leq 2(s'-r') \leq 2\mathrm{d}(g(\partial Q_1), g(\partial Q_2)) \leq 2\left|\int_s^t \frac{\partial g}{\partial x}(x,y_0)dx\right| \\
&\leq 2\int_s^t |\nabla g(x,y_0)|dx \leq 2\int_s^t (KJ_g(x,y_0))^{\frac{1}{2}}dx \leq 2K^{\frac{1}{2}}\int_s^t J_g^{\frac{1}{2}}(x,y_0)dx
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_Q J_g dm &= m(g(Q)) \leq \pi(t')^2 \leq \pi(C''(K)s')^2 \leq \pi(C''(K))^2\left(2K^{\frac{1}{2}}\int_s^t J_g^{\frac{1}{2}}(x,y_0)dx\right)^2 \\
&\leq \pi(C''(K))^2 4K\left(\frac{1}{2r}\int_Q J_g^{\frac{1}{2}}dm\right)^2 = \pi(C''(K))^2 4K\left(\frac{1}{2C'(K)s}\int_Q J_g^{\frac{1}{2}}dm\right)^2 \\
&= C'''(K)m(Q)\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_g^{\frac{1}{2}}dm\right)^2
\end{aligned}$$

Q. E. D.

補題 2.3. (Gehring [26]) h は $[1,\infty)$ 上の $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ なる単調非増大関数で, ある $q>0,\ a>1$ に対し

$$-\int_{t+0}^{\infty} s^q dh(s) \le a t^q h(t+0), \quad t \ge 1$$

を満たすとする. そのとき $q \le p < \frac{qa}{a-1}$ なる任意の p に対し

$$-\int_{1+0}^{\infty} t^p dh(s) \le \frac{q}{p-(p-q)a}\left(-\int_{1+0}^{\infty} t^q dh(s)\right).$$

(証明) まず h が $h(t)=0,\ t\ge T$ を満たす場合について証明する. $I_r(t) = -\int_{t+0}^{\infty} s^r dh(s)$ とおけば 仮定より $I_q(t) \le a t^q h(t+0)$. p を $p>q$ と取れば

$$\begin{aligned} I_p(1) &= -\int_{1+0}^{T+0} t^{p-q} t^q dh(t) = -\int_{1+0}^{T+0} t^{p-q} dI_q(t) \\ &= -\left[I_q(t)t^{p-q}\right]_{1+0}^{T+0} + (p-q)\int_{1+0}^{T+0} I_q(t) t^{p-q-1} dt \\ &\le I_q(1) + (p-q)\int_{1+0}^{T+0} a t^q h(t+0) t^{p-q-1} dt = I_q(1) + (p-q)a\int_{1+0}^{T+0} t^{p-1} h(t) dt. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{1+0}^{T+0} t^{p-1} h(t) dt &= \left[\frac{t^p}{p} h(t)\right]_{1+0}^{T+0} - \int_{1+0}^{T+0} \frac{t^p}{p} dh(t) \\ &= -\frac{1}{p} h(1+0) - \frac{1}{p} I_p(1) \le -\frac{1}{ap} I_q(1) + \frac{1}{p} I_p(1). \end{aligned}$$

よって

$$I_p(1) \le I_q(1) - \frac{(p-q)}{p} I_q(1) + \frac{a(p-q)}{p} I_p(1)$$

となり $q<p<\frac{qa}{a-1}$ であれば

$$I_p(1) \le \frac{q}{p-(p-q)a} I_q(1).$$

次に一般の h について証明する. $h_T,\ T>1$ を

$$h_T(t) = \begin{cases} h(t), & 1 \le t \le T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

により定めれば h_T は同じ定数 a に対し補題の条件を満たす. 実際 $t \ge T$ であれは両辺とも 0 となり明らか, また $t<T$ であれば

$$\begin{aligned} -\int_{t+0}^{\infty} s^q dh_T(s) &= -\int_{t+0}^{\infty} s^q dh(s) + \int_{T-0}^{\infty} s^q dh(s) + T^q h(T-0) \\ &\le a t^q h(t+0) + \int_{T-0}^{\infty} T^q dh(s) + T^q h(T-0) = a t^q h(t+0) = a t^q h_T(t+0). \end{aligned}$$

よって

$$-\int_{1+0}^{T+0} t^p dh(s) \le -\int_{1+0}^{\infty} t^p dh_T(s) \le \frac{q}{p-(p-q)a}\left(-\int_{1+0}^{\infty} t^q dh_T(s)\right)$$
$$\le \frac{q}{p-(p-q)a}\left(-\int_{1+0}^{\infty} t^q dh(s)\right).$$

よって $T \to \infty$ とすればよい. Q. E. D.

補題 2.4. (Gehring [26]) 正方形 Q 上の L^1 函数 $w \ge 0$ に対しある定数 $q > 1$ 及び $L \ge 1$ が存在し Q 内の任意の正方形 Q' に対し $M_q(w, Q') \le LM_1(w, Q')$ を満たすとする. そのとき定数 $\varepsilon = \varepsilon(q, L) > 0$ が存在し $q \le p < q + \varepsilon$ なる任意の p に対し $M_p(w, Q) \le L' M_q(w, Q)$ なる定数 $L' = L'(q, L, p) \ge 1$ が存在する.

(証明) $M_q(w, Q) = 1$ と仮定してよい. $E_s = \{z \in Q \mid w(z) > s\}$ とし $h(s) = \int_{E_s} wdm$ とおく. そのとき $-dh = dm^w$ であることから $r \ge 1$ に対し

$$-\int_{t+0}^{\infty} s^{r-1} dh(s) = \int_{E_t} w^r dm.$$

w^q 及び $s \ge 1$ に対し Calderón-Zygmund の分解定理を用いれば各 Q_i に対し

$$s^q < \frac{1}{m(Q_i)} \int_{Q_i} w^q dm \le 4s^q,$$

かつ $Q \setminus \cup_i Q_i$ 上 a.e. に $w^q(z) \le s^q$ なる Q 上の disjoint な正方形の族 $\{Q_i\}$ が存在する. $t \ge 1$ に対し s を $s = \frac{Lq}{q-1}t\ (> t)$ と定めれば

$$\frac{Lq}{q-1}t \le M_q(w, Q_i) \le LM_1(w, Q),$$

よって

$$\frac{q}{q-1}tm(Q_i) \le \int_{Q_i} wdm \le \int_{Q_i \cap E_t} wdm + tm(Q_i).$$

ゆえに

$$\frac{t}{q-1}m(Q_i) \le \int_{Q_i \cap E_t} wdm.$$

となり

$$\int_{E_s} w^q dm \le \sum_i \int_{Q_i} w^q dm \le \sum_i m(Q_i) 4s^q$$
$$\le \sum_i \frac{4s^q(q-1)}{t} \int_{Q_i \cap E_t} wdm. \le \frac{4s^q(q-1)}{t} \int_{E_t} wdm.$$

他方

$$\int_{E_t \setminus E_s} w^q dm \le s^{q-1} \int_{E_t \setminus E_s} wdm \le s^{q-1} \int_{E_t} wdm$$

以上により

$$\int_{E_t} w^q dm \le \left(\frac{4s^q(q-1)}{t} + s^{q-1}\right) \int_{E_t} wdm \le Ct^{q-1} \int_{E_t} wdm.$$

ここで
$$C=C(q,L)=\left(\frac{Lq}{L-1}\right)^{q-1}(4Lq+1).$$
よって
$$-\int_{t+0}^{\infty}s^{q-1}dh(s)\leq Ct^{q-1}h(t+0)$$
それで 前補題を適用すれば ある $\varepsilon=\varepsilon(q,L)>0$ 及び $C'=C'(q,L,p)>0$ が存在し $q\leq p<q+\varepsilon$ なるとき
$$-\int_{1+0}^{\infty}s^{p-1}dh(s)\leq -C'\int_{1+0}^{\infty}s^{q-1}dh(s)$$
この式を書き直せば
$$\int_{E_1}w^p dm\leq C'\int_{E_1}w^q dm$$
よって
$$\int_Q w^p dm\leq C'\int_Q w^q dm=C'.$$
Q. E. D.

定理 2.1. (Reimann [68], Jones [45]) (BMO の 擬等角写像による不変性) $g\ :\ D\to D'$ を $\mathbf{C}$ の部分領域の間の K-擬等角写像とするとき線形写像 $f\mapsto f\circ g^{-1}$ は $BMO(D)$ と $BMO(D')$ の間の同形を与え しかも K にのみ依存した定数 $L(K)\geq 1$ が存在して
$$\frac{1}{L(K)}\|f\|_{*,D}\leq\|f\circ g^{-1}\|_{*,D'}\leq L(K)\|f\|_{*,D}.$$

(証明) 補題 2.2 の定数 $L_1(K)$ に対し 補題 2.1 の定数 $L(K,L_1(K))$ を取る. D' 内の正方形 Q' で
$$\mathrm{d}(Q',\partial D')\geq\max\{L_1(K),L(K,L_1(K))\}l(Q')$$
なるものを取る. Q' の中心を w_0 とし $z_0=g^{-1}(w_0)$ とおく. Q を z_0 を中心とし, $g^{-1}(Q')$ に外接する正方形とすれば補題 2.1 より $\mathrm{d}(Q,\partial D)\geq L_1(K)l(Q)$. よって再び補題 2.2 から $r'=\inf_{w\in g(\partial Q)}|w-w_0|$, $s'=\sup_{w\in g(\partial Q)}|w-w_0|$ と定めれば $s'\leq L_2(K)r'$. また $r'\leq\sqrt{2}l(Q')/2$ なので $s'\leq(\sqrt{2}L_2(K)/2)l(Q')$ となり $m(g(Q))\leq C(K)m(Q')$. よって f を $BMO(D)$ 関数として
$$\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'}|(f\circ g^{-1})-f_Q|dm\leq\frac{1}{m(Q')}\int_{g^{-1}(Q')}|f-f_Q|J_g dm\leq\frac{1}{m(Q')}\int_Q|f-f_Q|J_g dm$$
ここで 補題 2.2 及び 2.3 からある $q=q(K)>1$ 及び $C'(K)>0$ が存在し
$$\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_g^q dm\right)^{\frac{1}{q}}\leq C'(K)\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_g dm.$$

よって p を $1/p+1/q=1$ と取り Hölder の不等式を用いれば系 1.5 によって

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f-f_Q|J_g dm \le \left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f-f_Q|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_g^q dm\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C''(K)\|f\|_{*,D}C'(K)\frac{1}{m(Q)}\int_Q J_g dm \le C'''(K)\|f\|_{*,D}\frac{m(g(Q))}{m(Q)}.$$

以上により

$$\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'} |(f\circ g^{-1})-(f\circ g^{-1})_Q|dm \le \frac{2}{m(Q')}\int_{Q'} |(f\circ g^{-1})-f_Q|dm$$

$$\le 2C'''(K)\frac{m(g(Q))}{m(Q')}\|f\|_{*,D} \le 2C'''(K)C(K)\|f\|_{*,D}.$$

最後に局所化定理を用いればよい. Q. E. D.

特に g が等角写像である場合を系としてあげておく. これは第一章において証明した BMO の Möbius 変換による不変性 (定理 1.3) の一般化である.

系 2.1. (BMO の 等角写像による不変性) $g: D \to D'$ を 平面領域の間の等角写像とするとき 線形写像 $f \mapsto f\circ g^{-1}$ は $BMO(D)$ と $BMO(D')$ の間の同形を与え しかも 絶対定数 $A \ge 1$ が存在して

$$\frac{1}{A}\|f\|_{*,D} \le \|f\circ g^{-1}\|_{*,D'} \le A\|f\|_{*,D}.$$

系 1.3 もやはり以下のように拡張できる.

系 2.2. 定理 2.1 及び 系 2.1 は D, D' を 複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域としてもそのままの形で成立する.

ここで定理 2.1 の逆を証明する前に, 定理 2.1 の証明を参考に密度 w を持った測度 wdm についての BMO 空間について考えてみる. 領域 D 上の関数 $w \ge 0$ は, ある定数 p ,$1<p\le\infty$ 及び $\alpha,\,\beta>0$ が存在して $\mathrm{d}(Q,\partial D) \ge \alpha l(Q)$ なる D 内の任意の正方形 Q に対し

$$0 < M_1(w,Q) \le \beta M_{\frac{-1}{p-1}}(w,Q) < \infty$$

となるとき $A_{p,\alpha,\beta}$ 条件を満たすという. またある α,β に対し $A_{p,\alpha,\beta}$ 条件を満たすとき単に (Muckenhoupt の) A_p 条件を満たすという. 同様にある q, $1<q<\infty$ に対し

$$0 < M_q(w,Q) \le \beta M_1(w,Q) < \infty$$

なるとき w は $B_{q,\alpha,\beta}$ 条件を満たすという. またある α,β に対し $B_{q,\alpha,\beta}$ 条件を満たすとき単に B_q 条件を満たすという. w が $A_{p,\alpha,\beta}$ 条件を満たせば $\mathrm{d}(Q,\partial D) \ge \alpha l(Q)$ なる正方形 Q に対し

$$M_1(w,Q) \le \beta M_{\frac{-1}{p-1}}(w,Q) \le \beta M_{1/2}(w,Q)$$

よって $\tilde{w} = w^{1/2}$ に Gehring の定理 (補題 2.4) を用いればある $q = q(p,\beta) > 1$, 及び $\beta' = \beta'(p,\beta) > 0$ に対し w は $B_{q,\alpha,\beta'}$ 条件を満たすことがわかる．ここでは用いないが, 逆に w がある q, $1 < q < \infty$ に対し B_q 条件を満たせば ある p, $1 < p < \infty$ に対し A_p 条件を満たすことが知られておりある B_q, $1 < q < \infty$ 条件を満たすこととある A_p, $1 < p < \infty$ 条件を満たすことは同値な条件となっている (cf. Reimann-Rychener [70]). するとまたある p, $1 < p < \infty$ に対し A_p 条件を満たすという条件は A_∞ 条件を満たすということと同じであることも分かる．なぜならばまず A_p, $1 < p < \infty$ 条件から A_∞ 条件が従うのは定義より明らか. 逆に A_∞ 条件を満たすとき先ほどと同様にしてある B_q 条件を満たすからである.

D 上の, D 内の各正方形 Q 上 $\int_Q wdm > 0$ なる関数 $w \geq 0$ に対し空間 $BMO_w(D)$ を

$$\|f\|_{*,D,w} = \sup_Q (\int_Q wdm)^{-1} \int_Q |f - f_{Q,w}| wdm < \infty$$

なる D 上の wdm に関し局所化積分な関数 f の全体とする．ここで $f_{Q,w} = (\int_Q wdm)^{-1} \int_Q fwdm$, また sup は D 内の全ての正方形について取るものとする.

w が $A_{p,\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$ 条件を満たすとき $\mathrm{d}(\tilde{Q}, \partial D) \geq \alpha l(\tilde{Q})$ なる正方形 $\tilde{Q}$ 及びその 4 分割の一つとなっている正方形 Q に対し $\int_{\tilde{Q}} wdm \leq C \int_Q wdm$ なる定数 $C = C(p,\beta) > 0$ が存在する．(このような wdm は doubling measure と呼ばれる.) 実際

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q wdm \geq \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w^{-1/(p-1)} dm \right)^{-(p-1)}$$

$$\geq \left(\frac{4}{m(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} w^{-1/(p-1)} dm \right)^{-(p-1)} \geq 4^{-(p-1)} \frac{1}{\beta} \frac{1}{m(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} wdm.$$

よって $\int_{\tilde{Q}} wdm \leq 4^p \beta \int_Q wdm$ を得る．この性質を持つ w に対しては局所化定理 (定理 1.1) が BMO_w 関数に対してもそのままの形で成立する．また Calderón-Zygmund の分解定理 (補題 1.5), John-Nirenberg の定理 (定理 1.5), その系 （系 1.4) がやはり成立する. (いずれも同じ証明がほとんどそのまま通用する.) 定理 2.1 の証明においては擬等角写像 f の Jacobina J_f がある B_q 条件を満たすということを利用した.

定理 2.2. (Reimann-Rychener [70]) 領域 D 上の非負関数 w がある A_p, $1 < p < \infty$ 条件を満たせば $BMO_w(D) = BMO(D)$.

(証明) w がある $A_{p,\alpha,\beta}$ 条件をみたすとする．そのとき w がある B_q 条件を満たすこと及び (一般化された) 局所化定理に注意すれば定理 2.2 の証明を繰り返すことで $BMO(D) \subset BMO_w(D)$ かわかる．逆に $f \in BMO(D)$ とすると Hölder の不等式及び (一般化された) 系 1.4 より q を $1/p + 1/q = 1$ により定めるとき $\mathrm{d}(Q, \partial D) \geq \alpha l(Q)$ なる正方形 Q に対し

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_{Q,w}| dm = \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_{Q,w}| w^{1/p} w^{-1/p} dm$$

$$\leq \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_{Q,w}|^p wdm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w^{-q/p} dm \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_p M_1^{1/p}(w,Q)\|f\|_{*,D,w} M_{-1/(p-1)}^{-1/p}(Q,w) \leq C_p \beta^{1/p}\|f\|_{*,D,w}.$$

よって $f \in BMO(D)$ となる．最後に局所化定理を用いればよい． Q. E. D.

この定理の逆は一般に成立しない．例えば 球面測度の密度関数 $w_0 = (1+|z|^2)^{-2}$ がそのような例となっている．まず定理 1.4 によって $BMO_{w_0}(\mathbf{C}) = BMO(\mathbf{C})$. 後は一般に関数 w が $\mathbf{C}$ 上においてある A_p, $1<p<\infty$ 条件を満たすとき $\mathbf{C}$ 上可積分であり得ないことを示せば十分である．$\mathbf{C}$ 上の任意の正方形 $\tilde{Q}$ 及びその 4 分割の一つとなっている正方形 Q を取る．$\tilde{Q}$ の 4 分割の一つで $Q'^o \cap Q^o = \emptyset$ なるもう一つの正方形 Q' をとれば先ほどの評価よりある定数 $k \geq 1$ が存在し $\int_{\tilde{Q}} wdm \leq k\int_{Q'} wdm$ となったので

$$\int_Q wdm \leq \int_{\tilde{Q}} wdm \leq k\int_{Q'} wdm \leq k\left(\int_{\tilde{Q}} wdm - \int_Q wdm\right)$$

よって $\int_{\tilde{Q}} wdm \geq \frac{k+1}{k}\int_Q wdm$ となり後はこの評価を繰り返し用いればよい．

§2.2. BMO による擬等角写像の特徴付け (その 2)

この節では前節定理 3.1 の逆について考察する．

補題 2.6. $f \in BMO(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$, $g \in Lip(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ であれば $h(x,y) = f(x)g(y)$ として $h \in BMO(\mathbf{R}^2)$ となりさらに

$$\|h\|_* \leq 2\|g\|_\infty \|f\|_* + 2\|f\|_1 \|g\|_{Lip}.$$

ここで

$$\|g\|_{Lip} = \sup_{y_1,y_2\in\mathbf{R}} \frac{|g(y_2)-g(y_1)|}{|y_2-y_1|}.$$

(証明) $\mathbf{R}^2$ 内の正方形 $Q = I \times J$, $|I| = |J| = t$ に対し

$$\int_J |g(y)-g_J|dy \leq \frac{1}{t}\int_J\int_J |g(y)-g(y')|dydy' \leq \frac{1}{t}\int_J\int_J \|g\|_{Lip} t dydy' = \|g\|_{Lip} t^2.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q)}\int_Q |h-h_Q|dm &\leq \frac{2}{m(Q)}\int_I\int_J |f(x)g(y) - f_I g_J|dxdy \\ &\leq \frac{2}{t^2}\int_I\int_J |f(x)-f_I||g_J|dxdy + \frac{2}{t^2}\int_I\int_J |g(y)-g_J||f(x)|dxdy \\ &\leq \frac{2}{t}\|g\|_\infty \int_I |f(x)-f_I|dx + \frac{2}{t^2}\|f\|_1\int_J |g(y)-g_J|dy \\ &\leq 2\|g\|_\infty\|f\|_* + 2\|f\|_1\|g\|_{Lip}.\end{aligned}$$

Q. E. D.

定理 2.3. (cf. Reimann [68]) $g : D \to D'$ は向きを保つ位相同型で g 及び g^{-1} は共に絶対連続とする．また g もしくは g^{-1} は ACL であるとする．さらにある定数 $L > 0$ が存在して D 上の compact な support を持つ任意の連続関数 f に対し $\|f \circ g^{-1}\|_{*,D'} \le L\|f\|_{*,D}$ が成立するものとする．そのとき C にのみ依存した定数 $K(L) \ge 1$ が存在し g は $K(L)$-擬等角写像となる．

(証明) $\mathbf{R}$ 上の関数 f_a，$a > 0$ 及び g を

$$f_a(x) = \min\{\log^+ \frac{1}{|x|},\ a\},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| \ge 2, \\ 2 - x, & 1 \le |x| < 2, \\ x, & 0 \le |x| < 1, \end{cases}$$

と定める．$\log \frac{1}{|x|}$ が $BMO(\mathbf{R})$ 関数であること及び $BMO(\mathbf{R})$ の lattice 性 によって f_a，$a > 0$ の $BMO(\mathbf{R})$ norm は有界である．よって $t \ge 1$ に対し a を $a > \log t$ を満たすものとして取り $u_{a,t}(x, y) = f_a(x/t)g(y)$ とおくとき 補題 2.4 から $\|u_{a,1}\|_{*,\mathbf{C}} \le A_1$，$\alpha > 0$ なる絶対定数 $A_1 > 0$ が存在する．また $Q_0 = \{|x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ として

$$\frac{1}{m(Q_0)} \int_{Q_0} |u_{a,t} - (u_{a,t})_{Q_0}| dm = \frac{1}{4} \int_{Q_0} |u_{a,t}| dm = \int_0^1 f_a(\frac{x}{t}) dx \int_0^1 g(y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^{te^{-a}} a dx + \int_{te^{-a}}^1 \log \frac{t}{x} dx \right) = \frac{1}{2}(\log t + 1 - te^{-a}) = C(t, a).$$

まず最初に g^{-1} が ACL の場合について証明する．g^{-1} は位相同型でもあったので g^{-1} は D' 上 a.e. に微分可能である．また g の絶対連続性から D' 上 a.e. に $J_{g^{-1}} \ne 0$ ．g^{-1} が微分可能 かつ $J_{g^{-1}} \ne 0$ なる点 z_0 を任意に取る．そのとき 適当な平行移動, 回転 及び 拡大を施すことで $z_0 = 0$ かつ

$$g^{-1}(z) = \frac{x}{t} + iy + o(|z|), \quad t \ge 1,$$

と仮定してよく そのとき t が L にのみ依存した定数で上から評価できることを示せばよい．$\psi_n(z) = ng^{-1}(z/n)$ とおけば $\psi_n(z)$ は Q_0 上一様に $\psi_\infty(z) = x/t + iy$ に収束する． よって $\phi_{a,n} = u_{a,1} \circ \psi_n$ とおけば $\phi_{a,n}$ は Q_0 上一様に $u_{a,t}$ に収束する．よって

$$\frac{1}{m(Q_0)} \int_{Q_0} |\phi_{a,n} - (\phi_{a,n})_{Q_0}| dm \to \frac{1}{m(Q_0)} \int_{Q_0} |u_{a,t} - (u_{a,t})_{Q_0}| dm = C(t, a).$$

ゆえに $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|\phi_{a,n}\|_{*,Q_0} \ge C(t, a)$．他方仮定から

$$\|\phi_{a,n}\|_{*,Q_0} = \|u_{a,1}(ng^{-1}(\frac{z}{n}))\|_{*,Q_0} \le \|u_{a,1}(ng^{-1}(z))\|_{*,\frac{1}{n}Q_0} \le \|u_{a,1}(ng^{-1}(z))\|_{*,D'}$$

$$\le L\|u_{a,1}(nz)\|_{*,D} \le L\|u_{a,1}(nz)\|_{*,\mathbf{C}} = L\|u_{a,1}(z)\|_{*,\mathbf{C}} \le LA_1.$$

よって

$$LA_1 \ge C(t, a) = \frac{1}{2}(\log t + 1 - te^{-a}).$$

$a \to \infty$ として $LA_1 \geq \frac{1}{2}(\log t + 1)$. ゆえに $t \leq \exp(2LA_1 - 1)$ $(= K(L))$ となり g^{-1} は $K(L)$-擬等角写像, よって g も $K(L)$-擬等角写像である.

次に g が ACL の場合について証明する. やはり

$$g(z) = tx + iy + o(|z|), \quad t \geq 1,$$

とするとき t が L にのみ依存した定数で上から評価できることを示せばよい. $\psi'_n(z) = ng(z/n)$ とおけば $\psi'_n(z)$ は $\mathbf{C}$ 上において広義一様に $\psi'_\infty(z) = tx + iy$ に収束する. $\phi'_{a,n} = u_{a,t} \circ \psi'_n$ とおく. $\phi'_{a,n}$ の定義域は 原点を中心に D を n 倍に拡大した領域 D_n であるが $u_{a,t}$ が compact な support を持つ連続関数なることから $\phi'_{a,n}$ を D_n の外では 0 と見做すことにすれば $\phi'_{a,n}$ は $\mathbf{C}$ 上一様に $u_{a,1}$ に収束する. 特に $\phi'_{a,n}$ は $BMO(\mathbf{C})$ において $u_{a,1}$ に収束する. ここで仮定より

$$\|u_{a,t}(nz)\|_{*,D'} \leq L\|u_{a,t}(ng(z))\|_{*,D} = L\|u_{a,t}(ng(\frac{z}{n}))\|_{*,D_n} = L\|\phi'_{a,n}\|_{*,D_n} \leq L\|\phi'_{a,n}\|_{*,\mathbf{C}}$$

$n \to \infty$ として

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_{a,t}(nz)\|_{*,D'} \leq L\|u_{a,1}\|_{*,\mathbf{C}} \leq LA_1.$$

他方

$$\|u_{a,t}(nz)\|_{*,D'} = \|u_{a,t}(z)\|_{*,D'_n} \geq \frac{1}{m(Q_0)} \int_{Q_0} |u_{a,t} - (u_{a,t})_{Q_0}| dm = C(t,a).$$

よって $C(t,a) \leq LA_1$ となり先と同じ $K(L)$ に対して g は $K(L)$-擬等角写像となる. Q. E. D.

絶対連続なる仮定を落とせるかどうかの関しては次の結果が知れられている. その局所的な, 強い仮定が外せるかどうかは知られていないようである.

定理 2.4. (Astala [3]) $g : D \to D'$ は向きを保つ位相同型で, ある定数 $L \geq 1$ が存在し D 内の任意の 相対 compact な 部分領域 G 及び G 上の有界連続関数 f に対し, $G' = g(G)$ として

$$\frac{1}{L}\|f\|_{*,G'} \leq \|f \circ g\|_{*,G} \leq L\|f\|_{*,G'}$$

が成立しているとする. そのとき L にのみ依存した定数 $K(L) \geq 1$ が存在し g は $K(L)$-擬等角写像である.

(証明) ここでは次章の結果を利用する. $z_0 \in D$ を任意に取り G' を $w_0 = g(z_0)$ 中心, 半径 $\mathrm{d}(w_0, \partial D')/2$ の開円板, $G = g^{-1}(G')$ とする. $r_0 = \mathrm{d}(z_0, \partial G)$ とおき G_r, $0 < r < r_0$ を z_0 中心半径 r の開円板, $G'_r = g(G_r)$ とする. f を G'_r 上の有界連続関数とすれば仮定より $f \circ g$ は $BMO(G_r)$ 関数で $\|f \circ g\|_{*,G_r} \leq L\|f\|_{*,G'_r}$. ここで G_r は開円板なので鏡像の原理 (補題 1.3)(及び BMO の 等角不変性) により $f \circ g$ の $\mathbf{C}$ への拡張 u で $\|u\|_{*,\mathbf{C}} \leq A\|f \circ g\|_{*,G_r}$ なるものが存在する. 特に $u_0 = u|G$ は $BMO(G)$ 関数なので再び仮定より $v = u_0 \circ g^{-1}$ は $BMO(G')$ 関数となりしかも $\|v\|_{*,G'} \leq L\|u_0\|_{*,G}$. さらに G' が開円板なることから再び鏡像の原理により v の $\mathbf{C}$ への拡張 $\hat{f}$ で $\|\hat{f}\|_{*,\mathbf{C}} \leq A\|v\|_{*,G'}$ なるものが存在する. 以上により $\hat{f}$ は $f \in BMO(G'_r)$ の $\mathbf{C}$ 上への拡張でありしかも $\|\hat{f}\|_{*,\mathbf{C}} \leq AL^2\|f\|_{*,G_r}$. よって 次章の 系 3.1 及び 系 3.2 によって G_r, $0 < r < r_0$ は $K = K(L)$-quasidisk となる.

ここで一般に有界な K-quasidisk R に対しては $\mathrm{diam}(R)^2 \leq C(K)m(R)$ なる定数 $C(K) > 0$ が存在する. (‘一様領域’ の定義参照 (cf. Gehring [28]). 或いは 補題 3.12 を $\mathrm{d}(Q_0, Q_n)$ が $\mathrm{diam}(R)$ に十分近いような R の Whitney 鎖に適用してみる.) よって

$$\varlimsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{diam}(g(G_r))}{m(g(G_r))} \leq C'(L).$$

この評価が D 上の全ての点 z_0 に対し成立するので g は $C''(L)$-擬等角写像である.(cf. Caraman [16]). Q. E. D.

第 3 章. BMO 関数の拡張性 (Jones の定理とその一般化)

§3.1. Jones の定理, 主定理

Jones は [45] において $\mathbf{R}^n$ の部分領域 D に対し D 上の (n 次元) BMO 関数が常に $\mathbf{R}^n$ 上の BMO 関数に拡張できるための必要十分条件を求めた. ここでは Jones 自身による証明法をもとにより一般に, $\mathbf{R}^n$ の部分領域 $D_1 \subset D_2$ について D_1 上の BMO 関数が常に D_2 上の BMO 関数に拡張できるための D_1, D_2 に対する必要十分条件 (定理 3.2) を求める. 以下では簡単のため $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ の場合についてのみ証明を与える. 一般次元の場合においても同様に証明できる.

以下この章では 'dyadic な正方形" といえば $[k2^n, (k+1)2^n] \times [l2^n, (l+1)2^n]$, $k, l, n \in \mathbf{Z}$ なる $\mathbf{C}$ 内の正方形, $A_1, A_2, \cdots$ は正値絶対定数, また A は使われる場所毎に値の移り変わる正値絶対定数とする.

領域 $D \subset \mathbf{C}$ 上の quasi-hyperbolic 距離 k_D を

$$k_D(z, z') = \inf \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\mathrm{d}(\zeta, \partial D)}, \quad z, z' \in D$$

により定める. ここで inf は z と z' を結ぶ D 内の求長可能な全ての曲線 γ についてとるものとする. さらに j_D を

$$j_D(z, z') = \log\left(1 + \frac{|z - z'|}{\mathrm{d}(z, \partial D)}\right)\left(1 + \frac{|z - z'|}{\mathrm{d}(z', \partial D)}\right), \quad z, z' \in D$$

と定める. k_D, j_D は D の Whitney 分解によって生じる正方形の族に対してのある種の距離 (後出) として自然に解釈できる量である. 領域 D はある定数 $L > 0$ に対し

$$k_D(z, z') \leq L j_D(z, z') + L, \quad z, z' \in D$$

を満たすとき, (L-) 一様領域 (uniform domain) という. (一様領域の元々の定義等については Gehring [28] 参照.) 領域 $D \subset \mathbf{C}$ について D 上の BMO 関数が常に $\mathbf{C}$ 上の BMO 関数に拡張できれば開写像定理によってある定数 $N \geq 1$ が存在し各 $f \in BMO(D)$ に対しその $\mathbf{C}$ への拡張 $\hat{f}$ で $\|\hat{f}\|_{*,\mathbf{C}} \leq N\|f\|_{*,D}$ なるものが取れる. この様な領域 D を (N-) BMO 拡張領域 と呼ぶことにする.

定理 3.1. (Jones [45]) 領域 $D \subset \mathbf{C}$ について D が N-BMO 拡張領域であれば D は $L = L(N)$-一様領域である. 逆に D が L-一様領域であれば D は $N = N(L)$-BMO 拡張領域となる.

また $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域 D はそれが $\hat{\mathbf{C}}$ 上のある (K-) 擬等角写像による上半平面 H の像であるとき (K-)quasidisk と呼ばれる. 単連結な領域 $D \subset \mathbf{C}$ について D が K-quasidisk であれば D は $L = L(K)$-一様領域となり逆に L-一様領域であれば $K = K(L)$-quasidisk となる (cf. Gehring [28]). よって

系 3.1. 単連結な領域 $D \subset \mathbf{C}$, $D \neq \mathbf{C}$ について D が N-BMO 拡張領域であれば D は $K = K(N)$-quasidisk である. 逆に D が K-quasidisk であれば D は $N = N(K)$-BMO 拡張領

域となる.

後半は次のように直接証明できる. D を quasidisk とすると $\hat{\mathbf{C}}$ 上のある擬等角写像 g が存在して $D = g(H)$. $f \in BMO(D)$ に対し $h = f \circ g$ とおけば BMO の擬等角不変性から $h \in BMO(H)$. よって鏡像の原理により h の $\mathbf{C}$ への拡張 $\hat{h}$ を 実軸に関し値が対称となるようなものとして定めれば $\hat{h} \in BMO(H)$. よって再び BMO の擬等角不変性から $\hat{h} \circ g^{-1}$ は $BMO(\mathbf{C})$ 関数でしかも f の拡張となっている.

ここで拡張作用素が具体的に構成できる BMO 拡張領域の例をあげておく.

例 3.1. $D = \{r < |z| < r'\}$. $f \in BMO(D)$ とする. $a = r'/r$ とし

$$D_n = \{a^n r < |z| < a^{n+1} r\}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

とおく. f の $\mathbf{C}$ 上への拡張 $\hat{f}$ を以下のように定める. まず D_{2n}, $n \in \mathbf{Z}$ 上では $\hat{f}(z) = f(z/a^{2n})$ とおく. さらに D_{2n+1}, $n \in \mathbf{Z}$ 上では $\hat{f}(z) = \hat{f}(\tau_n(z))$ とおく. ここで τ は円 $\{|z| = a^{2n+1} r\}$ についての反転とする. そのとき $\hat{f}$ は円 $\{|z| = a^n r\}$, $n \in \mathbf{Z}$ による反転によって不変となっている. $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の $\mathrm{d}(B, 0) \geq C\mathrm{rad}(B)$ なる円板 B をとる. ただし $C > 0$ はこのような円板 B が円 $\{|z| = a^n r\}$, $n \in \mathbf{Z}$ の中の高々ひとつとしか交わらないような十分大きい定数とする. すると鏡像の原理 (及び BMO の等角不変性) によって $\hat{f}$ の B 上での mean oscillation は一様に評価できる. よって局所化定理により $\hat{f} \in BMO(\mathbf{C} \setminus \{0\})$. 故に一点の除去可能性定理により $\hat{f} \in BMO(\mathbf{C})$ となる.

もうひとつの例として $D = \mathbf{C} \setminus (\{2^n | n \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\})$. $f \in BMO(D)$ とし $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の $\mathrm{d}(B, 0) \geq C\mathrm{rad}(B)$ なる円板 B をとる. ただし $C > 0$ はこのような円板 B が点列 2^n, $n \in \mathbf{Z}$ の中の高々ひとつの点しか含まないような十分大きい定数とする. すると一点の除去可能性定理によって $\hat{f}$ の B 上での mean oscillation は一様に評価できる. よって局所化定理により $f \in BMO(\mathbf{C} \setminus \{0\})$. 故に再び一点の除去可能性定理により $f \in BMO(\mathbf{C})$ となる.

定理 3.1 の relative version である本章に於ける主定理 (定理 3.2) を述べる前に, 必要となる記号の説明及びそのためのいくつかの補題を用意する.

領域 D 内の正方形 Q は

$$\mathrm{d}(Q, \partial D) \geq 32 l(Q)$$

を満たすとき許容正方形といいその全体を $\mathcal{A}(D)$ と記す. D 内の許容正方形の列 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ は

$$Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{l(Q_i)}{l(Q_{i+1})} \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

なるとき 許容鎖と呼び, n をその長さという.

D 内の許容正方形 Q, Q' に対し

$$\delta_D(Q, Q') = \min\{n \geq 1 | Q = Q_0.Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{は許容鎖}\}$$

と定める．この最小値を達成する許容鎖を Q と Q' を結ぶ 測地許容鎖 と呼ぶ．計算の都合上常に $\delta_D(Q,Q') \geq 1$ と定めているため $\delta_D(\cdot,\cdot)$ は距離とはなっていないが三角不等式は成立する．

$\mathbf{R}^2$ の正方形 Q,Q' に対し

$$\psi(Q,Q') = \log\left(1+\frac{l(Q)+l(Q')+\mathrm{d}(Q,Q')}{l(Q)}\right)\left(1+\frac{l(Q)+l(Q')+\mathrm{d}(Q,Q')}{l(Q')}\right)$$

とするとき，

補題 3.1. 常に

$$\psi(Q,Q') \leq A_1\delta_D(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D),$$

逆に $Q\cup Q' \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が存在すれば，

$$\delta_D(Q,Q') \leq A_2\psi(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D),$$

特に $\mathbf{C}$ の任意の正方形 Q,Q' に対し

$$A_1{}^{-1}\psi(Q,Q') \leq \delta_{\mathbf{C}}(Q,Q') \leq A_2\psi(Q,Q')$$

(証明) まず前半の不等式を証明する．$Q,Q' \in \mathcal{A}(D)$ とする．$l(Q) \leq l(Q')$ と仮定してよい．$Q=Q_0,Q_1,\cdots,Q_n=Q'$ を任意の許容鎖として

(Case 1) $\mathrm{d}(Q_0,Q_n) \geq l(Q_n)$．このとき $\log \mathrm{d}(Q_0,Q_n)/l(Q_0) \leq An$ を証明すればよい．仮定より $l(Q_i) \leq 2^i l(Q_0),\ 0\leq i\leq n$．よって

$$\mathrm{d}(Q_0,Q_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{2}l(Q_i) \leq \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}2^i l(Q_0) \leq \sqrt{2}2^n l(Q_0)$$

(Case 2) $\mathrm{d}(Q_0,Q_n) > l(Q_n)$．このときは $\log l(Q_n)/l(Q_0) \leq An$ を証明すればよいが仮定より $l(Q_n) \leq 2^n l(Q_0)$ なのでこの式は成立する．

次に後半の仮定を満たす $\tilde{Q}$ が存在したとする．必要ならば $\tilde{Q}$ をより小さい正方形で置き換えることにより $l(\tilde{Q}) \leq l(Q)+l(Q')+\mathrm{d}(Q,Q')$ と仮定してよい．$2^m \leq l(\tilde{Q})/l(Q) \leq 2^{m+1},\ 2^{m'} \leq l(\tilde{Q})/l(Q') \leq 2^{m'+1}$ とするとき $Q=Q_0\subset Q_1\subset\cdots\subset Q_{m+1}=\tilde{Q},\ \ Q'=Q'_0\subset Q'_1\subset\cdots\subset Q'_{m'+1}=\tilde{Q}$ なる $\mathbf{C}$ 内の鎖とみての許容鎖 $Q=Q_0,Q_1,\cdots,Q_{m+1}=\tilde{Q}$ 及び $Q'=Q'_0,Q'_1,\cdots,Q'_{m'+1}=\tilde{Q}$ の存在が容易にわかるので $Q=Q_0,\ Q_1,\ \cdots,\ Q_m,\ Q_{m+1},\ Q'_{m'},\ Q'_{m'-1},\ \cdots,\ Q'_1,\ Q'_0=Q'$ は $\mathbf{C}$ 内の鎖とみての許容鎖でその長さは $m+m'+2$. そこでこの鎖をなす各正方形 Q_i (及び Q'_i) を縦横ともに 64 等分し 4096 個の正方形 $\{Q_{ij}\}_{j=1,2,\cdots,4096}$ に分割すれば

$$\mathrm{d}(Q_{ij},\partial D) \geq \mathrm{d}(Q_i,\partial D) \geq \frac{1}{2}l(Q_i) = 32l(Q_{ij})$$

となり各 Q_{ij} は D 内の許容正方形である．さらに Q,Q' はそれぞれの 4096 個の細分である正方形と高々長さ 6 の許容鎖で結べる．よって Q,Q' は高々長さ $6+64(m+n+1)+6$ の許容鎖で結べる．ゆえに

$$\delta_D(Q,Q') \leq 64m+64m'+76 \leq A\left\{1+\log\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q)}+\log\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q')}\right\} \leq A\log\frac{\mathrm{d}(Q,Q')}{l(Q)}.$$

Q. E. D.

補題 3.2. (cf. Stein [76]) $\alpha \geq 4$ に対し常に次の条件を満たす領域 D の dyadic な正方形の族 $\mathcal{D}(D) = \{Q_i\}, Q_i{}^\circ \cap Q_j{}^\circ = \emptyset, (i \neq j),\ \cup_i Q_i = D$ への分解が存在する.

$$\alpha \leq \frac{\mathrm{d}(Q_i, \partial D)}{l(Q)} \leq 2\alpha + 2,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{l(Q_i)}{l(Q_j)} \leq 2, \quad if\ Q_i \cap Q_j \neq \emptyset.$$

(証明) まず $\mathbf{C}$ を $[k, k+1] \times [l, l+1],\ k, l \in \mathbf{Z}$ なる dyadic な正方形の族に分割する. このようにして得られた dyadic な正方形 Q で $\mathrm{d}(Q, \partial D) < \alpha l(Q)$ なるものが存在すれば Q を 4 つの合同な正方形に分割する. そのときに得られる Q の分割 Q' に対しては

$$\frac{\mathrm{d}(Q', \partial D)}{l(Q')} \leq \frac{2\left(\mathrm{d}(Q, \partial D) + \frac{\sqrt{2}}{2} l(Q)\right)}{l(Q)} < 2\alpha + \sqrt{2} < 2\alpha + 2.$$

そこで以下 Q の分割により得られた正方形 Q'' で $\mathrm{d}(Q'', \partial D) < \alpha l(Q'')$ なるものが存在するかぎり同様の操作を繰り返せば Q は $\alpha \leq \mathrm{d}(Q''', \partial D)/l(Q''') \leq (2\alpha + 2)$ なる正方形 Q''' の族に分解できる.

次に $2\alpha + 2 < \mathrm{d}(Q, \partial D)/l(Q)$ なる Q があれば Q を含み $l(Q') = 2l(Q)$ なる dyadic な正方形 Q' をとるとき,

$$\mathrm{d}(Q', \partial D) \geq \mathrm{d}(Q, \partial D) - \sqrt{2} l(Q) \geq (2\alpha + 2 - \sqrt{2}) l(Q) > \alpha l(Q'),$$

特に $Q' \subset D$. そこで Q' 内の正方形は全て Q' に統合してしまう. 以下この操作を $2\alpha + 2 < \mathrm{d}(Q, \partial D)/l(Q)$ なる Q があるかぎり繰り返せばよい.

最後にこのようにして得られた正方形の族 $\mathcal{D}(D)$ について $Q, Q' \in \mathcal{D}(D), Q \cap Q' \neq \emptyset$ であれば

$$l(Q') \leq \alpha^{-1} \mathrm{d}(Q', \partial D) \leq \alpha^{-1} \left(\mathrm{d}(Q, \partial D) + \sqrt{2} l(Q)\right) \leq (2 + \frac{2 + \sqrt{2}}{\alpha}) l(Q) < 4 l(Q).$$

よって $l(Q') \leq 2l(Q)$. Q. E. D.

以下では $\mathcal{D}(D)$ といえばつねに $\alpha = 32$ として上記の方法により得られた族を表すものとしこの族を D の Whitney 分解と呼ぶことにする. $\mathcal{D}(D)$ の構成法より $D \subset D'$ であれば任意の $Q \in \mathcal{D}(D)$ に対し $Q \subset Q'$ なる $Q' \in \mathcal{D}(D')$ が存在する. また $Q \in \mathcal{D}(D)$ に対し $Q' \in \mathcal{D}(D)$ が $Q' \cap 21Q \neq \emptyset$ を満たせば $l(Q') \geq l(Q)/2$ である. 実際 もし $Q'' \in \mathcal{D}(D)$ が $l(Q'') \leq l(Q)/4$ を満たせば

$$\mathrm{d}(Q, Q'') \geq \mathrm{d}(Q, \partial D) - \mathrm{d}(Q'', \partial D) \geq 32 l(Q) - 66 \cdot \frac{1}{4} l(Q) > 15 l(Q).$$

このことより容易に $Q'' \cap 21Q = \emptyset$ がわかる.

$Q_0, Q_1, \cdots, Q_n \in \mathcal{D}(D)$ は $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ をみたすとき Whitney 鎖という．Whitney 鎖は許容鎖である．$Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$ に対し

$$W_D(Q, Q') = \min\{n \geq 1 | Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{は許容鎖}\}$$

と定め, この値を Q と Q' の Whitney 距離と呼ぶ. $W_D(Q, Q')$ も $\delta_D(Q, Q')$ 同様距離とはなっていないが三角不等式は成立する．またこの最小値を達成する Whitney 鎖 $Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q'$ を Q と Q' を結ぶ 測地 Whitney 鎖 と呼ぶ. 明らかに $\delta_D(Q, Q') \leq W_D(Q, Q'), Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$. 逆に

補題 3.3.

$$W_D(Q, Q') \leq A_3 \delta_D(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D).$$

(証明) $Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q'$ を 測地許容鎖とする．各 i に対し $\hat{Q} \cap Q_j \neq \emptyset$ なる $\hat{Q} \in \mathcal{D}(D)$ を考えると補題 3.2 の証明と同様にして $l(\hat{Q}) \geq l(Q_i)/4$ がわかり $\hat{Q} \cap Q_j \neq \emptyset$ なる $\hat{Q} \in \mathcal{D}(D)$ の個数は高々$(4+2)^2 = 36$ 個である．よって $W_D(Q, Q') \leq 36(n-1) + 1 \leq 36n = 36\delta_D(Q, Q')$.
Q. E. D.

領域 $D_2 \subset \mathbf{C}$ はある定数 $M \geq 1$ に対し

$$\delta_{D_1}(Q, Q') \leq M \delta_{D_2}(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D_1)$$

を満たすとき D_2 に関し一様であるということにする．またこの条件を満たす D_2 部分領域の全体を $\mathcal{U}(D_2, M)$ とあらわす．$D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M_1)$ かつ $D_2 \in \mathcal{U}(D_3, M_2)$ であれば $D_1 \in \mathcal{U}(D_3, M_2 M_1)$ である.

また領域 $D \subset \mathbf{C}$ はある定数 $M > 0$ に対し

$$W_D(Q, Q') \leq M \psi(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$$

なるとき一様領域という．(この定義は後に注意するように先の定義と同値である.) 補題 3.1 及び次の補題 3.4 により D が一様であるのは D が $\mathbf{C}$ に関し一様な場合に限る.

補題 3.4. D_2 部分領域 D_1 が

$$W_{D_1}(Q, Q') \leq M \delta_{D_2}(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D_1)$$

を満たせば

$$\delta_{D_1}(Q, Q') \leq A_4 M \delta_{D_2}(Q, Q') \quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D_1)$$

(証明) $\tilde{Q}, \tilde{Q}'$ を $\tilde{Q} \cap Q \neq \emptyset$, $\tilde{Q}' \cap Q' \neq \emptyset$ なる $\tilde{Q}, \tilde{Q}'$ で $W_{D_1}(\tilde{Q}, \tilde{Q}')$ が最小となるものとして取る.

(Case 1) $W_{D_1}(\tilde{Q}, \tilde{Q}') = 1$ なるとき $Q \cup Q' \subset \hat{Q} \subset 2\hat{Q} \subset D_1$ なる $\hat{Q}$ が存在するので補題 1 により

$$\delta_{D_1}(Q, Q') \leq A_2 \psi(Q, Q') \leq A_1 A_2 \delta_{D_2}(Q, Q')$$

(Case 2) $W_{D_1}(\tilde{Q},\tilde{Q}')\geq 2$ なるときまず $\delta_{D_1}(Q,Q')\geq A\log l(\tilde{Q})/l(Q)$ を示す. $l(Q)\geq l(\tilde{Q})/4$ ならば明らかなので $l(Q)<l(\tilde{Q})/4$ と仮定してよい. そのとき $Q'\cap 2\tilde{Q}=\emptyset$ より

$$\mathrm{d}(Q,Q')\geq \frac{1}{2}l(\tilde{Q})-l(Q)\geq \frac{1}{4}l(\tilde{Q})$$

他方 $Q=Q_0,Q_1,\cdots,Q_n=Q'$ を D_1 内の 許容鎖として

$$\mathrm{d}(Q,Q')\leq \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{2}l(Q_k)\leq \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{2}2^k l(Q)\leq \sqrt{2}2^n l(Q)$$

よって $l(\tilde{Q})\leq A2^n l(Q)$ となり $\delta_{D_1}(Q,Q')=n\geq A\log l(\tilde{Q})/l(Q)$.

以下同様にして

$$\delta_{D_1}(Q,Q')\geq A\log\frac{l(\tilde{Q}')}{l(Q')},\quad \delta_{D_2}(Q,Q')\geq A\log\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q)},\quad \delta_{D_2}(Q,Q')\geq A\log\frac{l(\tilde{Q}')}{l(Q')},$$

よって

$$\begin{aligned}\delta_{D_1}(Q,Q') &\leq \delta_{D_1}(Q,\tilde{Q})+\delta_{D_1}(\tilde{Q},\tilde{Q}')+\delta_{D_1}(\tilde{Q}',Q')\\ &\leq A+A\log\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q)}+A\log\frac{l(\tilde{Q}')}{l(Q')}+M\delta_{D_2}(\tilde{Q},\tilde{Q}')\\ &\leq A+A\delta_{D_2}(Q,Q')+M\left(\delta_{D_2}(\tilde{Q},Q)+\delta_{D_2}(Q,Q')+\delta_{D_2}(Q',\tilde{Q}')\right)\\ &\leq AM\delta_{D_2}(Q,Q').\end{aligned}$$

Q. E. D.

D 内の許容正方形 Q,Q' に対し

$$\hat{\delta}_D(Q,Q')=\begin{cases} W_D(\tilde{Q},\tilde{Q}')+\log\left(2+\dfrac{l(\tilde{Q})}{l(Q)}\right)\left(2+\dfrac{l(\tilde{Q}')}{l(Q')}\right), & \delta_D(\tilde{Q},\tilde{Q}')\geq 2,\\ \psi(Q,Q'), & \delta_D(\tilde{Q},\tilde{Q}')=1,\end{cases}$$

とおく. ここで $\tilde{Q},\tilde{Q}'\in\mathcal{D}(D)$ は $\tilde{Q}\cap Q\neq\emptyset$, $\tilde{Q}'\cap Q'\neq\emptyset$ なる条件のもとで $W_D(\tilde{Q},\tilde{Q}')$ を最小にする正方形とする. とのとき前補題の証明から容易に

$$\frac{1}{A}\hat{\delta}_D(Q,Q')\leq \delta_D(Q,Q')\leq A\hat{\delta}_D(Q,Q').$$

本章における目標は次の定理を証明することである.

定理 3.2. (主定理) 平面領域 D_2 及びその部分領域 D_1 に対し以下の 3 条件は同値である.
(1) D_1 上の BMO 関数は 常に D_2 上の BMO 関数に拡張できる.
(2) ある定数 $M>0$ が存在し

$$W_{D_1}(Q,Q')\leq M\delta_{D_2}(Q,Q'),\quad Q,Q'\in\mathcal{D}(D_1).$$

(3) D_1 は D_2 に関し一様な領域, すなわち, ある定数 $M \geq 1$ が存在し

$$\delta_{D_1}(Q,Q') \leq M\delta_{D_2}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D_1).$$

$BMO(D_1)$ 関数が $BMO(D_2)$ 関数に拡張できるかどうかは局所的な性質ではないことに注意すべきである. 実際, 以下の例でみるように領域 D_2 及び その部分領域 D_1 で

(1) D_2 内のすべての正方形 Q 及び $u \in BMO(D_1)$ に対し u の Q への拡張 $\hat{u}$ が存在するにもかかわらず,

(2) ある $BMO(D_1)$ 関数 についてはそれを $BMO(D_2)$ 関数に拡張できない,

なるものが存在する.

例 3.2. $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 8$ に対し

$$S_n = \{0 < x < \frac{1}{n},\ 0 < y < 1\} \cup \{1 - \frac{1}{n} < x < 1,\ 0 < y < 1\} \cup \{0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{n}\},$$

$$T_n = \{\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{4},\ \frac{7}{8} < y < 1\}, \quad U_n = \{\frac{3}{4} < x \leq 1 - \frac{1}{n},\ \frac{7}{8} < y < 1\},$$

$$V = \{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4},\ \frac{7}{8} < y < 1\}, \quad D_1^n = S_n \cup T_n \cup U_n, \ \ D_2^n = D_1^n \cup V,$$

とおく. そのとき BMO 関数に対する鏡像の原理 (補題 1.4) により D_2^n 内の任意の正方形 Q 及び 任意の $BMO(D_1^n)$ 関数 u に対し $\|\hat{u}\|_{*,Q} \leq A\|u\|_{*,D_1^n}$ なる u の Q 上への拡張が存在する.

他方 D_1^n 上の関数 u_n を

$$u_n(x,y) = \begin{cases} nx & (x,y) \in S_n, \\ 0 & (x,y) \in T_n, \\ n & (x,y) \in U_n, \end{cases}$$

と定めれば

$$\|u\|_{*,D_1^n} \leq \sup_{z_1,z_2 \in D_1^n} |u(z_2) - u(z_1)| \leq 1$$

さらに u_n の D_2^n 上への任意の拡張 $\hat{u}_n$ に対し

$$\|\hat{u}_n\|_{*,D_2^n} \to \infty, \quad n \to \infty$$

となる. (補題 3.5 参照) そこで $I_n = \{n+1\} \times (0, \frac{1}{n})$ とし

$$D_1 = \cup_{n=8}^{\infty} \{(D_1^n + n) \cup I_n\}, \quad D_2 = \cup_{n=8}^{\infty} \{(D_2^n + n) \cup I_n\}$$

とおけばこれらが求める領域となる.

ここで $W_{D_1}(Q,Q'), Q,Q' \in \mathcal{D}(D_1)$ は 先の quasi-hyperbolic metric k_{D_1} に対応しまた $\delta_{D_2}(Q,Q')$, $Q,Q' \in \mathcal{D}(D_1)$ は metric

$$j_{D_1,D_2}(z,z') = \begin{cases} k_{D_2}(z,z') + \log \dfrac{\mathrm{d}(z,\partial D_2)}{\mathrm{d}(z,\partial D_1)} \dfrac{\mathrm{d}(z',\partial D_2)}{\mathrm{d}(z',\partial D_1)}, & |z-z'| \geq \mathrm{d}(z,\partial D_2)/2, \\ \log\left(1 + \dfrac{|z-z'|}{\mathrm{d}(z,\partial D_1)}\right)\left(1 + \dfrac{|z-z'|}{\mathrm{d}(z',\partial D_1)}\right), & |z-z'| < \mathrm{d}(z,\partial D_2)/2, \end{cases}$$

に対応することに注意すれば 定理 3.2 の条件 (2) は

$$k_{D_1}(z,z') \leq Kj_{D_1,D_2}(z,z') + L, \quad z,z' \in D_1$$

と表わすことができる．特に $D_2 = \mathbf{C}$ なる場合 $j_{D_1,\mathbf{C}}$ は先の j_{D_1} に一致し Jones の定理 (定理 3.1) を得る．

§3.2. 主定理の証明

補題 3.5. $BMO(D)$ 関数 u に対し

$$|u_Q - u_{Q'}| \leq A_5 \|u\|_{*,D} \delta_D(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D).$$

(証明) $Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q'$ を D 内の測地許容鎖とする．まず $u_{Q_{i+1}} - u_{Q_i}$ を評価する．$l(Q_{i+1}) \leq l(Q_i)$ と仮定してよい．そのとき $Q_{i+1} \cup Q_i \subset 3Q_i \subset D$ よって

$$\begin{aligned} |u_{Q_i} - u_{3Q_i}| &\leq \frac{1}{m(Q_i)} \int_{Q_i} |u - u_{3Q_i}| dm \\ &\leq \frac{9}{m(3Q_i)} \int_{3Q_i} |u - u_{3Q_i}| dm \leq 9\|u\|_{*,D}. \end{aligned}$$

同様にして $|u_{3Q_i} - u_{Q_{i+1}}| \leq 36\|u\|_{*,D}$ を得るので,

$$|u_{Q'} - u_Q| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |u_{Q_i} - u_{Q_{i+1}}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} 45\|u\|_{*,D} = 45\|u\|_{*,D}\delta_D(Q,Q').$$

Q. E. D.

補題 3.6. $Q_0 \in \mathcal{D}(D)$ に対し関数 $F_{Q_0} \in L^1_{loc}(D)$ を

$$F_{Q_0}(x) = W_D(Q,Q_0), \quad x \in Q \in \mathcal{D}(D).$$

と定める．そのとき F_{Q_0} は $BMO(D)$ 関数でしかも $\|F_{Q_0}\|_{*,D} \leq A_6$.

(証明) $Q \in \mathcal{A}(D)$ とすれば 補題 3.3 の証明より Q に交わる $\mathcal{D}(D)$ の正方形の個数は高々 36 個なので $\|u\|_{*,Q} \leq 36$. よって局所化定理により $\|u\|_{*,Q} \leq A \cdot 36 \cdot 32$. Q. E. D.

以上の 2 つの補題から F_{Q_0} は BMO 関数としてある意味で最大の増大度を持ったものであると言える．このことに関しては以下でも触れる (定理 3.2).

D_2 の部分領域 D_1 について任意の $BMO(D_1)$ 関数がある $BMO(D_2)$ 関数 の D_1 への制限となっているものとする．すると開写像定理によってある定数 $N \geq 1$ が存在し各 $u \in BMO(D_1)$ に対し

$$\|\hat{u}\|_{*,D_2} \leq N\|u\|_{*,D_1}.$$

なる u の D_2 への拡張 $\hat{u} \in BMO(D_2)$ をみいだせる.
以下 $\mathcal{E}(D_2, N)$ によりこのような D_2 の部分領域全体の集合を表すものとする.

補題 3.7. $\mathcal{E}(D_2, N) \subset \mathcal{U}(D_2, A_7 N)$.

(証明) $D_1 \in \mathcal{E}(D_2, N)$ とする. $Q_0 \in \mathcal{D}(D_1)$ に対し 補題 3.6 の関数 F_{Q_0} をとれば $\|F_{Q_0}\|_{*,D_1} \leq A_6$ であり仮定により F_{Q_0} の拡張 $\hat{F}_{Q_0}$ で $\|\hat{F}_{Q_0}\|_{*,D_2} \leq A_7 N$ なるものが取れる. よって $Q_1 \in \mathcal{D}(D_1)$ に対し 補題 3.5 より

$$W_{D_1}(Q_1, Q_0) - 1 \leq |(\hat{F}_{Q_0})_{Q_1} - (\hat{F}_{Q_0})_{Q_0}| \leq A_5 \|\hat{F}_{Q_0}\|_{*,D_2} \delta_{D_2}(Q_1, Q_0) \leq A_5 A_6 N \delta_{D_2}(Q_1, Q_0)$$

よって

$$\delta_{D_1}(Q_1, Q_0) \leq W_{D_1}(Q_1, Q_0) \leq 2A_5 A_6 N \delta_{D_2}(Q_1, Q_0).$$

Q. E. D.

この証明を見れば $F_Q^\alpha = \min\{F_Q, \alpha\}, \quad \alpha > 0$ とおくとき BMO の lattice 性より D_1 上の BMO 関数の族

$$\{F_Q^\alpha \mid Q \in \mathcal{D}(D_1),\ \alpha > 0\}$$

に対してのみ $\|\hat{F}_Q^\alpha\|_{*,\mathbf{C}} \leq N \|F_Q^\alpha\|_{*,D_1}$ を満たす F_Q^α の拡張 $\hat{F}_Q^\alpha$ が存在すれば十分である. さらに $Q \in \mathcal{D}(D_1)$ の中心を z_Q とおくとき quasi-hyperbolic 距離 $k_{D_1}(z, z')$ に対し $k_{D_1}^\alpha(z, z') = \min\{k_{D_1}(z, z'),\ \alpha\}$ と定めて

$$\frac{1}{A} F_Q^\alpha \leq k_{D_1}^\alpha(\cdot, z_Q) + 1 \leq A F_Q^\alpha,$$

なることから

系 3.2. 領域 $D_1 \subset D_2$ について ある定数 $N \geq 1$ が存在し D_1 上の 任意の有界連続関数 f に対し $\|\hat{f}\|_{*,D_2} \leq N \|f\|_{*,D_1}$ なる f の D_2 上への拡張 $\hat{f}$ が存在すれば D_1 は D_2 に関し一様な領域である.

以下において $B_1(M), B_2(M), \cdots$ はこの定数 M にのみ依存した正定数をあらわすものとする. また $B(M)$ は M にのみ依存した使われる場所毎に値の移り変わる正定数とする.

補題 3.8. $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ は $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ 内の測地 Whitney 鎖で

$$l(Q_0) = l(Q_n), \quad \mathrm{d}(Q_0, Q_n) \geq B_1(M) l(Q_0)$$

を満たすとする. さらに $Q_0 \cup Q_n \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D_2$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が取れるとすればこの測地 Whitney 鎖内に $l(Q_i) = 2l(Q_0)$ なるものが存在する.

(証明) 定数 $B_1(M) > 0$ を $t \geq B_1(M)$ なる全ての t に対し $t > 2\sqrt{2} M A_3 A_2 \log(3 + t)$ となるようなものとして取る. 補題 3.1 及び 3.3 より

$$n = W_{D_1}(Q_0, Q_n) \leq A_3 \delta_{D_1}(Q_0, Q_n) \leq M A_3 \delta_{D_2}(Q_0, Q_n)$$

$$\le MA_3A_2\psi(Q_0,Q_n) = 2MA_3A_2\log\left(3+\frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_0)}\right)$$

また, もし全ての i について $l(Q_i)\le l(Q_0)$ とすれば

$$\mathrm{d}(Q_0,Q_n) \le \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{2}l(Q_i) \le n\sqrt{2}l(Q_0)$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_0)} \le \sqrt{2}n \le 2\sqrt{2}MA_3A_2\log\left(3+\frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_0)}\right)$$

となりこれは $B_1(M)$ の取り方に反する. それゆえ $l(Q_i)=2l(Q_0)$ なる i が存在する. Q. E. D.

補題 3.9. $Q_0,Q_1,\cdots,Q_n$ は $D_1\in\mathcal{U}(D_2,M)$ 内の測地 Whitney 鎖で $l(Q_n)=2l(Q_0)$ かつ $l(Q_i)<l(Q_n)$, $0\le i\le n-1$ とする. さらに $Q_0\cup Q_1\cup\cdots\cup Q_n\subset\tilde{Q}\subset 2\tilde{Q}\subset D_2$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が取れるとする. そのとき

$$n\le B_2(M), \qquad \frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_0)}\le B_3(M).$$

(証明) $l(Q_{n-1})=l(Q_0)$ なので補題 3.8 を測地 Whitney 鎖 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{n-1}$ に適用すれば $\mathrm{d}(Q_0,Q_{n-1})<B_1(M)l(Q_0)$. よって

$$\mathrm{d}(Q_0,Q_n)\le\mathrm{d}(Q_0,Q_{n-1})+\sqrt{2}l(Q_{n-1})\le B(M)l(Q_0).$$

さらに

$$\begin{aligned} n = W_{D_1}(Q_0,Q_n) &\le MA_3A_2\psi(Q_0,Q_n) \\ &\le 2MA_3A_2\log\left(4+\frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_0)}\right) = 2MA_3A_2\log(4+B(M)). \end{aligned}$$

Q. E. D.

補題 3.11. $Q_0,Q_1,\cdots,Q_n$ は $D_1\in\mathcal{U}(D_2,M)$ 内の測地 Whitney 鎖で $l(Q_i)<l(Q_n)$, $0\le i\le n-1$ とする. さらに $Q_0\cup Q_1\cup\cdots\cup Q_n\subset\tilde{Q}\subset 2\tilde{Q}\subset D_2$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が取れるとする. そのとき

$$n\le B_4(M)\log\frac{l(Q_n)}{l(Q_0)}, \qquad \frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_n)}{l(Q_n)}\le B_5(M).$$

(証明) $l(Q_n)=2^m l(Q_0)$ とし

$$s_k=\min\left\{i \mid l(Q_i)=2^k l(Q_0)\right\}, \quad 0\le k\le m.$$

とおく. 補題 3.9 を測地 Whitney 鎖 $Q_{s_k},Q_{s_k+1},\cdots,Q_{s_{k+1}}$ に適用すれば

$$s_{k+1}-s_k\le B_2(M), \quad \frac{\mathrm{d}(Q_{s_{k+1}},Q_{s_k})}{l(Q_{s_k})}\le B_3(M),$$

よって

$$n = \sum_{k=0}^{m-1}(s_{k+1}-s_k) \le mB_2(M) \le B(M)\log\frac{l(Q_n)}{l(Q_0)}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(Q_0,Q_n) &\le \sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{d}(Q_{s_k},Q_{s_{k+1}}) + \sum_{k=1}^{m-1}\sqrt{2}l(Q_{s_k}) \\
&\le B_3(M)\sum_{k=0}^{m-1}l(Q_{s_k}) + \sum_{k=1}^{m-1}\sqrt{2}l(Q_{s_k}) \\
&\le (B_3(M)+\sqrt{2})\sum_{k=0}^{m-1}2^k l(Q_0) \le B_5(M)l(Q_n).
\end{aligned}$$

Q. E. D.

補題 3.12. $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ は $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ 内の測地 Whitney 鎖で $\hat{Q}$ をその鎖の中で最大の正方形のひとつとする. そのとき

$$\log\left(2+\frac{l(\hat{Q})}{l(Q_0)}\right)\left(2+\frac{l(\hat{Q})}{l(Q_n)}\right) \le A_9 n.$$

さらに $Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_n \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D_2$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が取れるならば

$$n \le B_6(M)\log\left(2+\frac{l(\hat{Q})}{l(Q_0)}\right)\left(2+\frac{l(\hat{Q})}{l(Q_n)}\right), \quad \mathrm{d}(Q_0,Q_n) \le B_7(M)l(\hat{Q}).$$

(証明) 最初の不等式は $1/2 \le l(Q_{i+1})/l(Q_i) \le 2$ により明らか.

次に $Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_n \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D_2$ なる正方形 $\tilde{Q}$ が取れると仮定する.

$$S = \{i \mid 0 \le i \le n,\ l(Q_j) = l(\hat{Q})\}, \quad i_1 = \min S, \quad i_2 = \max S$$

とおけば補題 3.10 より

$$i_1 \le B_4(M)\log\frac{l(Q_{i_1})}{l(Q_0)}, \qquad \frac{\mathrm{d}(Q_0,Q_{i_1})}{l(Q_{i_1})} \le B_5(M).$$

$$n-i_2 \le B_4(M)\log\frac{l(Q_{i_2})}{l(Q_n)}, \qquad \frac{\mathrm{d}(Q_{i_2},Q_n)}{l(Q_n)} \le B_5(M),$$

また補題 3.8 より

$$\frac{\mathrm{d}(Q_{i_1},Q_{i_2})}{l(Q_{i_1})} < B_1(M).$$

よって

$$\begin{aligned}
i_2 - i_1 &= W_{D_1}(Q_{i_1},Q_{i_2}) \le MA_3\delta_{D_2}(Q_{i_1},Q_{i_2}) \le MA_3A_2\psi(Q_{i_1},Q_{i_2}) \\
&= 2MA_3A_2\log\left(3+\frac{\mathrm{d}(Q_{i_1},Q_{i_2})}{l(Q_{i_1})}\right) \le 2MA_3A_2\log\left(3+B_1(M)\right) \le B(M).
\end{aligned}$$

以上により

$$n = (n-i_2) + (i_2 - i_1) + i_1 \leq B_4(M) \log \frac{l(Q_{i_2})}{l(Q_n)} + B(M) + B_4(M) \log \frac{l(Q_{i_1})}{l(Q_0)}$$

$$\leq B(M) \log \left(2 + \frac{l(\hat{Q})}{l(Q_0)}\right)\left(2 + \frac{l(\hat{Q})}{l(Q_n)}\right)$$

また

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(Q_0, Q_n) &\leq \mathrm{d}(Q_0, Q_{i_1}) + \sqrt{2} l(Q_{i_1}) + \mathrm{d}(Q_{i_1}, Q_{i_2}) + \sqrt{2} l(Q_{i_2}) + \mathrm{d}(Q_{i_2}, Q_n) \\ &\leq B_5(M) l(Q_{i_1}) + \sqrt{2} l(Q_{i_1}) + B_1(M) l(Q_{i_1}) + \sqrt{2} l(Q_{i_2}) + B_5(M) l(Q_{i_2}) \\ &\leq B(M) l(\hat{Q}). \end{aligned}$$

Q. E. D.

系 3.3 $D \in \mathcal{U}(\mathbf{C}, M)$, $Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$ とする．Q と Q' を結ぶ与えられた測地 Whitney 鎖のなかで大きさが最大のものを $\hat{Q}$ とすれば

$$B_6(M)^{-1} W_D(Q, Q') \leq \log \left(2 + \frac{l(\hat{Q})}{l(Q_0)}\right)\left(2 + \frac{l(\hat{Q})}{l(Q_n)}\right) \leq A_9 W_D(Q, Q').$$

補題 3.13. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$, $Q, Q' \in \mathcal{D}(D_1)$ とする．また

$$Q \cup Q' \subset \tilde{Q} \subset 6\tilde{Q} \subset D_2,\ \mathrm{d}(Q, Q') \geq \frac{1}{4} l(\tilde{Q}),$$

なる正方形 $\tilde{Q}$ が存在するとする．そのとき D_1 内の 測地 Whitney 鎖 $Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q'$ に対して常に

$$l(Q_i) \geq B_8(M) l(\tilde{Q}),\ Q_i \subset 3\tilde{Q}.$$

なる i が存在する．

(証明) まず $Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_n \subset 3\tilde{Q}$, であれば $2(3\tilde{Q}) = 6\tilde{Q} \subset D_2$ なので 補題 3.12 より

$$l(Q_i) \geq \frac{\mathrm{d}(Q_0, Q_n)}{B_7(M)} \geq \frac{l(\tilde{Q})}{4B_7(M)}.$$

なる i が取れる．

次に $Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_n \not\subset 3\tilde{Q}$ なる場合を考える．このときは

$$Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_m \subset 3\tilde{Q}, \quad Q_{m+1} \not\subset 3\tilde{Q}$$

なる m が取れる．ここでもし $l(Q_m) < l(\tilde{Q})/12$ であれば

$$l(\tilde{Q}) \leq \mathrm{d}(Q_0, \partial(3\tilde{Q})) \leq \mathrm{d}(Q_0, Q_m) + \sqrt{2} l(Q_m) + \sqrt{2} l(Q_{m+1})$$

$$\leq \mathrm{d}(Q_0, Q_m) + \frac{\sqrt{2}l(\tilde{Q})}{12} + \frac{2\sqrt{2}l(\tilde{Q})}{12} = \mathrm{d}(Q_0, Q_m) + \frac{\sqrt{2}l(\tilde{Q})}{4}$$

なので

$$(1 - \frac{\sqrt{2}}{4})l(\tilde{Q}) \leq \mathrm{d}(Q_0, Q_m).$$

よって 補題 3.12 を $Q_0 \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ に用いれば $\mathrm{d}(Q_0, Q_m) \leq B_7(M)l(Q_i)$ なる $i, 0 \leq i \leq m$ のとれることがわかる．よって

$$l(Q_i) \geq \frac{\mathrm{d}(Q_0, Q_m)}{B_7(M)} \geq \frac{(1 - \frac{\sqrt{2}}{4})l(\tilde{Q})}{B_7(M)} \geq \frac{l(\tilde{Q})}{4B_7(M)}.$$

以上により

$$B_8(M) = \min\{\frac{1}{4B_7(M)},\ \frac{1}{12}\}$$

と定めればよい. Q. E. D.

$D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ に対し以下 $D' = D_2 \backslash \overline{D_1}$ とおき $\mathcal{D}(D')$ をその Whitney 分解とする.

補題 3.14. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ とし Q を D_2 内の正方形とする．そのとき 正方形 $\tilde{Q}' \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')$ 及び dyadic な正方形 Q' で

$$Q' \subset \tilde{Q}' \cap Q, \quad l(Q') \geq B_9(M)l(Q)$$

なるものが存在する.

(証明) もし必要ならば最初から $(1/2)Q$ を考えることで $2Q \subset D_2$ と仮定してよい. $Q = [a, a+l] \times [b, b+l]$ とし

$$Q_\alpha = [a + \frac{1}{3}l, a + \frac{5}{12}l] \times [b + \frac{1}{3}l, b + \frac{5}{12}l],$$

$$Q_\beta = [a + \frac{7}{12}l, a + \frac{2}{3}l] \times [b + \frac{7}{12}l, b + \frac{2}{3}l].$$

とおく.

まず ${Q_\alpha}^\circ \subset D_1$ なる場合. Q' を Q_α の中心を含むような $\mathcal{D}(Q_\alpha)$ の正方形とする．そのとき

$$l(Q') \geq \frac{1}{66}\mathrm{d}(Q', \partial Q_\alpha) \geq \frac{1}{66}(\frac{l(Q_\alpha)}{2} - l(Q'))$$

なので $l(Q') \geq \frac{1}{134}l(Q_\alpha) = \frac{1}{1608}l(Q)$. また ${Q_\alpha}^\circ \subset D_1$ なので Q' を含むような正方形 $\tilde{Q}' \in \mathcal{D}(D_1)$ が存在する.

${Q_\alpha}^\circ \subset D'$, ${Q_\beta}^\circ \subset D_1$, ${Q_\beta}^\circ \subset D'$, なる場合も同様なのであと ${Q_\alpha}^\circ \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ かつ ${Q_\beta}^\circ \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ なる場合のみ考えればよい．この場合には ${Q'}_\alpha \subset Q_\alpha$, ${Q'}_\beta \subset Q_\beta$ なる ${Q'}_\alpha \in \mathcal{D}(D_1)$, ${Q'}_\beta \in \mathcal{D}(D_1)$ が取れる．それで $\hat{Q} = \frac{1}{3}Q$ とおけば

$$ {Q'}_\alpha \cup {Q'}_\beta \subset Q_\alpha \cup Q_\beta \subset \hat{Q}$$

$$\mathrm{d}(Q'_\alpha, Q'_\beta) \geq \mathrm{d}(Q_\alpha, Q_\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} l(\hat{Q}) \geq \frac{1}{4} l(\hat{Q}),$$

また $6\hat{Q} = 2Q \subset D_2$ なので 補題 3.13 により

$$Q' \subset 3\hat{Q} = Q, \quad l(Q') \geq B_8(M) l(\hat{Q}) = \frac{B_8(M)}{3} l(Q),$$

なる $Q'(= \tilde{Q}') \in \mathcal{D}(D_1)$ が存在する. Q. E. D.

特に $(\partial D_1) \cap D_2$ のどの点も $(\partial D_1) \cap D_2$ の密度点とはなっていないので

系 3.4. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ とすれば $m((\partial D_1) \cap D_2) = 0$.

補題 3.15. 領域 $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ について $\mathcal{D}(D_1)$ はいくらでも大きい正方形を含むとする. そのとき $\mathrm{d}(Q', \partial D_2) \geq B_{10}(M) \mathrm{d}(Q', \partial D' \cap D_2)$ なる正方形 $Q' \in \mathcal{D}(D')$ に対し常に次の様な正方形 $Q \in \mathcal{D}(D_1)$ 及び $\tilde{Q} \subset D_2$ が取れる.

$$l(Q) = l(Q'), \quad \mathrm{d}(Q, Q') \leq B_{11}(M) l(Q'), \quad Q \cup Q' \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D_2,$$

(証明) $L(M) = \max\{4B_7(M), 300\}$ とし定数 $B_{10}(M) \geq 1$ 及び $B_{11}(M) > 0$ を

$$32B_{10}(M) - 132 - \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2} L(M), \quad B_{11}(M) > \sqrt{2} L(M).$$

となるように選ぶ. そのときまず

$$\mathrm{d}(Q', \partial D_2) \geq B_{10}(M) \mathrm{d}(Q', \partial D' \cap D_2) \geq \mathrm{d}(Q', \partial D' \cap D_2)$$

により $\mathrm{d}(Q', \partial D' \cap D_2) = \mathrm{d}(Q', \partial D')$ であるから

$$\mathrm{d}(Q', Q_0) \leq 2\mathrm{d}(Q', \partial D'), \quad l(Q_0) \leq l(Q'),$$

なる正方形 $Q_0 \in \mathcal{D}(D_1)$ が取れる. よって 補題 3.2 より

$$\mathrm{d}(Q', Q_0) \leq 2\mathrm{d}(Q', \partial D') \leq 132 l(Q').$$

$\tilde{Q}$ を Q_0 と同じ中心 z_0 を持ち $l(\tilde{Q}) = L(M) l(Q')$ なる正方形とする. そのとき

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(z_0, \partial D_2) &\geq \mathrm{d}(\partial D_2, Q') - \mathrm{d}(Q', Q_0) - \frac{\sqrt{2}}{2} l(Q_0) \\ &\geq \left(32B_{10}(M) - 132 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) l(Q') > \frac{\sqrt{2}}{2} 2L(M) l(Q') = \frac{\sqrt{2}}{2} l(2\tilde{Q}). \end{aligned}$$

よって $2\tilde{Q} \subset D_2$. さらに

$$\frac{L(M)}{2} l(Q') = \frac{1}{2} l(\tilde{Q}) = \mathrm{d}(z_0, (\tilde{Q})^c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} l(Q_0) + \mathrm{d}(Q_0, Q') + \sqrt{2} l(Q') + \mathrm{d}(Q', (\tilde{Q})^c)$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{2} l(Q') + 132 l(Q') + \sqrt{2} l(Q') + \mathrm{d}(Q', (\tilde{Q})^c)$$

ゆえに

$$\mathrm{d}(Q', (\tilde{Q})^c) \geq \left(\frac{L(M)}{2} - 132 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) l(Q') > 0$$

なので $Q' \subset \tilde{Q}$. ここで $\mathcal{D}(D_1)$ はいくらでも大きい正方形を含むので

$$Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1} \subset \tilde{Q}, \quad Q_n \not\subset \tilde{Q}$$

なる 測地 Whitney 鎖 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ in D_1 が存在する. そこで $l(Q_i) = l(Q')$ なる $i, 0 \leq i \leq n-1$ が存在することを証明する. $l(Q_{n-1}) < l(Q')$ と仮定してよい. すると $l(Q_n) \leq l(Q')$ であり

$$\frac{L(M)}{2} l(Q') = \frac{1}{2} l(\tilde{Q}) = \mathrm{d}(z_0, \partial\tilde{Q}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} l(Q_0) + \mathrm{d}(Q_0, Q_{n-1}) + \sqrt{2} l(Q_{n-1}) + \sqrt{2} l(Q_n)$$

$$\leq \frac{5\sqrt{2}}{2} l(Q') + \mathrm{d}(Q_0, Q_{n-1})$$

よって

$$\mathrm{d}(Q_0, Q_{n-1}) \geq \left(\frac{L(M)}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) l(Q') \geq \frac{L(M)}{4} l(Q').$$

それゆえ 補題 3.11 を $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1} \subset \tilde{Q} \subset 2\tilde{Q} \subset D_2$, に用いれば

$$l(Q_j) \geq \frac{\mathrm{d}(Q_0, Q_{n-1})}{B_7(M)} \geq \frac{L(M)}{4B_7(M)} l(Q') \geq l(Q').$$

なる $j,\ 0 \leq j \leq n-1$ の取れることがわかる. よって $i,\ 0 \leq i \leq n-1$ なる $l(Q) = l(Q')$ が存在する.

さらに $Q' \cup Q_i \subset \tilde{Q}$ により

$$\mathrm{d}(Q', Q_i) \leq \sqrt{2} l(\tilde{Q}) \leq \sqrt{2} L(M) l(Q') \leq B_{11}(M) l(Q')$$

Q. E. D.

$\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含むような領域 $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ に対し以下

$$\mathcal{D}(D')_\alpha = \{Q' \in \mathcal{D}(D') \mid \mathrm{d}(Q', \partial D_2) \geq B_{10}(M) \mathrm{d}(Q', \partial D' \cap D_2)\}$$

$$\mathcal{D}(D')_\beta = \mathcal{D}(D') \setminus \mathcal{D}(D')_\alpha, \quad D'_\alpha = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}(D')_\alpha} Q, \quad D'_\beta = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}(D')_\beta} Q.$$

とおく. また各 $Q' \in \mathcal{D}(D)_\alpha$ に対しこの補題 により存在するところの 正方形 $Q \in \mathcal{D}(D_1)$ のひとつを $\tau(Q')$ とあらわすことにする.

我々は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含むという仮定のもと $BMO(D_1)$ から $BMO(D_2)$ への拡張作用素を 2 段に分けて構成する. その後この仮定を取り除く. 第 1 段では $BMO(D_1)$ か

ら $BMO(D_2 \setminus D'_\beta)$ への (線形な) 拡張作用素 $u \mapsto \tilde{u}$ を構成する. そして第 2 段では $\tilde{u}$ をさらに $BMO(D_2)$ 関数 $\hat{u}$ へ (非線形に) 拡張する.

まず $u \in L^1_{loc}(D_1)$ に対しその $D_2 \setminus D'_\beta$ への拡張 $\tilde{u}$ を D'_α 上では

$$\tilde{u}(z) = u_{\tau(Q')}, \quad z \in Q' \in \mathcal{D}(D')_\alpha$$

とおくことにより定める. $m((\partial D_1) \cap D_2) = 0$ であったので $\tilde{u}$ は $D_2 \setminus D'_\beta$ 上 ほとんどいたるところ定義されていることに注意.

補題 3.16. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含む領域とする. そのとき $u \in BMO(D_1)$ に対し

$$|\tilde{u}_{Q_2} - \tilde{u}_{Q_1}| \le B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D_2}(Q_2, Q_1), \quad Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')_\alpha$$

(証明) 他の場合は同様なので $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(D')_\alpha$ なる場合のみ証明する. 補題 3.1 及び 3.15 より

$$\begin{aligned}\delta_{D_2}(Q_1, \tau(Q_1)) \le A_2\psi(Q_1, \tau(Q_1)) &= 2A_2 \log\left(3 + \frac{\mathrm{d}(Q_1, \tau(Q_1))}{l(Q_1)}\right)\\ &\le 2A_2 \log(3 + B_{11}(M)) \le B(M).\end{aligned}$$

同様に $\delta_{D_2}(Q_2, \tau(Q_2)) \le B(M)$, よって

$$\begin{aligned}\delta_{D_2}(\tau(Q_2), \tau(Q_1)) &\le \delta_{D_2}(\tau(Q_2), Q_2) + \delta_{D_2}(Q_2, Q_1) + \delta_{D_2}(Q_1, \tau(Q_1))\\ &\le B(M) + \delta_{D_2}(Q_2, Q_1) \le B(M)\delta_{D_2}(Q_2, Q_1).\end{aligned}$$

よって 補題 3.5 より

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_{Q_2} - \tilde{u}_{Q_1}| &= |u_{\tau(Q_2)} - u_{\tau(Q_1)}| \le A_5\|u\|_{*,D_1}\delta_{D_1}(\tau(Q_2), \tau(Q_1))\\ &\le A_5\|u\|_{*,D_1}M\delta_{D_2}(\tau(Q_2), \tau(Q_1)) \le A_5\|u\|_{*,D_1}MB(M)\delta_{D_2}(Q_2, Q_1)\end{aligned}$$

Q. E. D.

補題 3.17. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含む領域とする. Q を $Q \subset D_2 \setminus D'_\beta$ かつ $2Q \subset D_2$ なる dyadic な正方形とする. そのとき $u \in BMO(D_1)$ に対し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |\tilde{u} - \tilde{u}_Q| dm \le B_{13}(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

(証明) $s > 0$ を $2^s B_9(M) > 1$ なる最小の整数とし Q を, その各辺を $N = 2^s$ 等分することにより N^2 個の合同な正方形に細分する. そのとき 補題 3.14 より それら正方形の中の少なくともひとつの正方形 $\hat{Q}$ についてはある $Q' \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')_\alpha$ が取れて

$$\hat{Q} \subset Q' \cap Q, \quad l(\hat{Q}) = \frac{1}{N}l(Q)$$

となる．$\hat{Q}$ を除く残りの正方形の全体を $\{Q_{j_1}\}_{j_1=1,2,\cdots,N^2-1}$ とおく．さらに各正方形 Q_{j_1} を同様に N^2 個の合同な正方形に細分する．そして $\hat{Q}_{j_1}$ 及び $Q'_{j_1} \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')_\alpha$ を同様に

$$\hat{Q}_{j_1} \subset Q'_{j_1} \cap Q_{j_1}, \quad l(\hat{Q}_{j_1}) = \frac{1}{N} l(Q_{j_1}).$$

なるものとして取り $\hat{Q}_{j_1}$ を除く Q_{j_1} の細分である残りの正方形の全体を $\{Q_{j_1 j_2}\}_{j_2=1,2,\cdots,N^2-1}$ とおく．以下この操作を繰り返すと

$$Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} = \cup_{j_n} Q_{j_1 j_2 \cdots j_n} \cup \hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}},$$

$$\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \subset Q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} \cap Q_{j_1 j_2 \cdots j_n}, \quad l(\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = \frac{1}{N} l(Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}).$$

なる dyadic な正方形の族 $Q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')_\alpha$ 及び $\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$, $Q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ をうる．そのとき

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} m(Q_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = (1 - \frac{1}{N^2}) \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} m(Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}})$$

$$= \cdots = (1 - \frac{1}{N^2})^{n-1} \sum_{j_1} m(Q_{j_1}) = (1 - \frac{1}{N^2})^{n} m(Q).$$

よって $n = 0$ のときは $Q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = Q$, $\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \hat{Q}$ と見做すことにして

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} m(\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = \frac{1}{N^2} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} m(Q_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = \frac{1}{N^2}(1 - \frac{1}{N^2})^{n} m(Q).$$

よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} m(\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = m(Q).$$

ゆえに 族 $\{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}\}$ は Q の分割となっている．

ここで $|\tilde{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}} - \tilde{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}}| \le B(M) \|u\|_{*.D_1}$. を証明しよう．

(Case 1) $Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}$. まず $Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \in \mathcal{D}(D_1)$ なる場合には

$$\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \cup \hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset 2Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset D_1$$

よって 補題 3.5 及び 3.1 により

$$|\hat{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}} - \hat{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}}| \le A_5 \|u\|_{*.D_1} \delta_{D_1}(\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}, \hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}})$$

$$\le A_5 A_2 \|u\|_{*.D_1} \psi(\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}, \hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}) \le A \|u\|_{*.D_1}.$$

次に $Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \in \mathcal{D}(D')_\alpha$ なる場合には $\hat{u}$ は $Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}$ 上定数となっているので $|\hat{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_n}} - \hat{u}_{\hat{Q}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}}| = 0.$

(Case 2) $Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}$. このとき $Q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} \subset Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}$, よって

$$Q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} \cup Q'_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset Q_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset Q \subset 2Q \subset D_2.$$

まず $Q'_{j_1j_2\cdots j_n}\in\mathcal{D}(D_1)$ なる場合には

$$
\begin{aligned}
|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}| &= |u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}| \\
&\le \frac{1}{m(\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n})}\int_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}|u-u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|dm \\
&\le N^4\frac{1}{m(Q'_{j_1j_2\cdots j_n})}\int_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|u-u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|dm \le N^4\|u\|_{*,D_1}.
\end{aligned}
$$

次に $Q'_{j_1j_2\cdots j_n}\in\mathcal{D}(D')_\alpha$ なる場合には $|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|=0$. いずれにせよ

$$
|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|\le N^4\|u\|_{*,D_1}
$$

同様にして

$$
|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}|\le N^2\|u\|_{*,D_1}
$$

を得る. ここで 補題 3.16 及び 3.1 より

$$
|\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}|\le B_{12}(M)A_2\psi(Q'_{j_1j_2\cdots j_n},Q'_{j_1j_2\cdots j_{n-1}})\le B(M)\|u\|_{*,D_1}.
$$

以上により

$$
\begin{aligned}
&|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}| \\
&\qquad\le |\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}|+|\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}|+|\tilde u_{Q'_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}| \\
&\qquad\le B(M)\|u\|_{*,D_1}.
\end{aligned}
$$

よって $|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}}|\le B(M)\|u\|_{*.D_1}$. が示された.
　よって

$$
|\tilde u_{\hat Q}-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}|\le\sum_{i=1}^{n}|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_i}}-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_{i-1}}}|\le nB(M)\|u\|_{*,D_1}.
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\int_Q|\tilde u-\tilde u_{\hat Q}|dm &\le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\int_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}\Big(|\tilde u-\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}|+|\tilde u_{\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}}-\tilde u_{\hat Q}|\Big)\,dm \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(\|u\|_{*,D_1}+nB(M)\|u\|_{*,D_1})\,m(\hat Q_{j_1j_2\cdots j_n}) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}nB(M)\|u\|_{*,D_1}\frac{1}{N^2}(1-\frac{1}{N^2})^n m(Q)\le B(M)\|u\|_{*,D_1}m(Q).
\end{aligned}
$$

Q. E. D.

補題 3.18. $u\in L^1_{loc}(Q)$ は次の条件を満たすとする;

$$
\frac{1}{m(Q')}\int_{Q'}|u-u_{Q'}|dm\le K,\quad Q'\in\mathcal{D}(Q),
$$

$$|u_{Q'} - u_{Q''}| \leq K, \quad if\ Q', Q'' \in \mathcal{D}(Q),\ Q' \cap Q'' \neq \emptyset.$$

そのとき $u \in L^1(Q)$ で

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |u - u_Q| dm \leq A_9 K.$$

(証明) $\mathcal{D}(Q)$ における最大の正方形を Q_0 とすし

$$\mathcal{F}_m = \left\{ Q' \in \mathcal{D}(Q) \mid l(Q') = \frac{1}{2^{m-1}} l(Q_0) \right\}, \quad 1 \leq m < \infty,$$

とおけば容易に

$$\sum_{Q' \in \mathcal{F}_m} m(Q') \leq A 2^{-m} m(Q),$$

$$W_Q(Q', Q_0) \leq Am, \quad Q' \in \mathcal{F}_m.$$

がわかるので

$$\begin{aligned}\int_Q |u - u_{Q_0}| dm &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{Q' \in \mathcal{F}_m} \int_{Q'} (|u - u_{Q'}| + |u_{Q'} - u_{Q_0}|) dm \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{Q' \in \mathcal{F}_m} (K + KAm) m(Q') \leq AK \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^m} m(Q) \leq AK m(Q),\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |u - u_Q| dm \leq \frac{2}{m(Q)} \int_Q |u - u_{Q_0}| dm \leq AK.$$

Q. E. D.

補題 3.19. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含む領域とする．Q を $Q \subset D_2 \setminus D'_\beta$ なる正方形 $u \in BMO(D_1)$ とすれば

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\tilde{u} - \tilde{u}_Q| dm \leq B_{14}(M) \|u\|_{*, D_1}.$$

(証明) $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(Q)$ が $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ 満たすとする．補題 3.17 及び 3.18 より

$$|\tilde{u}_{Q_1} - \tilde{u}_{Q_2}| \leq B(M) \|u\|_{*, D_1}.$$

を示せばよい．補題 3.17 の証明から

$$\hat{Q}_i \subset Q'_i \cap Q_i, \quad l(\hat{Q}_i) = \frac{1}{N^2} l(Q_i).$$

なる dyadic な正方形 $\hat{Q}_i,\ (i = 1, 2)$ 及び $Q'_i \in \mathcal{D}(D_1) \cup \mathcal{D}(D')_\alpha$ が存在する．

(Case 1) $l(Q_1') \geq 4l(Q_1)$ かつ $Q_1' \in \mathcal{D}(D_1)$ なるとき．このときは $Q_2 \subset 2Q_1'$ なので $Q_1' \cap Q_2' \neq \emptyset$, $Q_2 \subset Q_2'$ ．よって Q_1, Q_2 は D_1 内の許容鎖なので 補題 3.5 より

$$|\tilde{u}_{Q_1} - \tilde{u}_{Q_2}| \leq A_5 \|u\|_{*,D_1}.$$

(Case 2) $l(Q_1') \geq 4l(Q_1)$ かつ $Q_1' \in \mathcal{D}(D')_\alpha$ なるとき．Case 1 の場合と同様にして

$$Q_1', Q_2' \in \mathcal{D}(D')_\alpha,\ Q_1 \subset Q_1',\ Q_2 \subset Q_2',\ Q_1' \cap Q_2' \neq \emptyset.$$

がわかるので 補題 3.16 により

$$|\tilde{u}_{Q_1} - \tilde{u}_{Q_2}| = |\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_2'}| \leq B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1}.$$

$l(Q_2') \geq 4l(Q_2)$ の場合も同様なので最後に
(Case 3) $l(Q_1') \leq 2l(Q_1)$ かつ $l(Q_2') \leq 2l(Q_2)$ のとき．まず $Q_1' \subset Q_1$ なる場合には 補題 3.16 により

$$|\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_1}| \leq \frac{1}{m(Q_1')} \int_{Q_1'} |\tilde{u} - \tilde{u}_{Q_1}| dm \leq \frac{N^2}{m(Q_1)} \int_{Q_1} |\tilde{u} - \tilde{u}_{Q_1}| dm \leq N^2 B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1}.$$

次に $Q_1 \subset Q_1'$ なる場合にも 補題 3.16 より $|\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_1}| \leq 4B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1}$ ．よって何れの場合においても

$$|\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_1}| \leq B(M) \|u\|_{*,D_1}$$

同様にして

$$|\tilde{u}_{Q_2'} - \tilde{u}_{Q_2}| \leq B(M) \|u\|_{*,D_1}.$$

さらに $l(Q_2') \leq 2l(Q_2) \leq 4l(Q_1)$ なので $Q_1' \cup Q_2' \subset 9Q_1 \subset 18Q_1 \subset D_2$ ．よって 補題 3.16 及び 3.1 より

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_2'}| &\leq B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1} \delta_{D_2}(Q_1', Q_2') \leq B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1} A_2 \psi(Q_1', Q_2') \\ &\leq B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1} A_2 \psi(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2) \leq B(M) \|u\|_{*,D_1}.\end{aligned}$$

よって

$$|\tilde{u}_{Q_1} - \tilde{u}_{Q_2}| \leq |\tilde{u}_{Q_1} - \tilde{u}_{Q_1'}| + |\tilde{u}_{Q_1'} - \tilde{u}_{Q_2'}| + |\tilde{u}_{Q_2'} - \tilde{u}_{Q_2}| \leq B(M) \|u\|_{*,D_1}$$

Q. E. D.

$D_2 = \mathbf{C}$ なる場合, すなわち D_1 が一様領域である場合には $\mathcal{D}(D')_\beta = \emptyset$ なので (まだ $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含むという条件付きではあるが) 一様領域 D_1 に対し $BMO(D_1)$ から $BMO(\mathbf{C})$ への線形な拡張作用素が構成できたことになる．

補題 3.20. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含む領域とする．$u \in BMO(D_1)$ 及び $Q \in \mathcal{D}(D')_\beta$ に対し

$$S(u, Q) = \sup \{\tilde{u}(Q') - B_{12}(M) \|u\|_{*,D_1} \delta_{D'}(Q, Q') \mid Q' \in \mathcal{D}(D')_\alpha\}$$

($B_{12}(M)$ は 補題 3.16 における定数) とおけば $S(u,Q)<\infty$ でありしかも $\tilde{u}$ の D_2 への拡張 $\hat{u}$ を D'_β 上において

$$\hat{u}(z)=S(u,Q),\quad x\in Q\in\mathcal{D}(D')_\beta,$$

により定める. そのとき

$$|\hat{u}_{Q_2}-\hat{u}_{Q_1}|\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}W_{D'}(Q_2,Q_1),\quad Q_1,Q_2\in\mathcal{D}(D').$$

(証明) $Q\in\mathcal{D}(D')_\beta$ とする. まず $S(u,Q)<\infty$ を示す. Q_0,Q_1 を $\mathcal{D}(D')_\alpha$ の任意の正方形とするとき補題 3.15 より

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{Q_1}-\tilde{u}_{Q_0}&\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D_2}(Q_1,Q_0)\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_1,Q_0)\\&\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\left(\delta_{D'}(Q_1,Q)+\delta_{D'}(Q,Q_0)\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tilde{u}_{Q_1}-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q',Q)\leq\tilde{u}_{Q_0}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q,Q_0).$$

ゆえに $S(u,Q)\leq\tilde{u}_{Q_0}+\delta_{D'}(Q,Q_0)$.

次に Q_1,Q_2 を $\mathcal{D}(D')_\beta$ 内の隣接する正方形とすると $Q'\in\mathcal{D}(D')_\alpha$ に対し $\hat{u}_{Q_1}\geq\tilde{u}(Q')-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_1,Q')$ よって

$$\begin{aligned}\hat{u}_{Q_1}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}&\geq\tilde{u}(Q')-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}(\delta_{D'}(Q_1,Q')-\delta_{D'}(Q_1,Q_2))\\&\geq\tilde{u}(Q')-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q',Q_2).\end{aligned}$$

ゆえに $\hat{u}_{Q_1}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\geq\hat{u}_{Q_2}$. よって Q_1,Q_2 の対称性から

$$|\hat{u}_{Q_1}-\hat{u}_{Q_2}|\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

次に $Q_1\in\mathcal{D}(D')_\beta$, 及び $Q_2\in\mathcal{D}(D')_\alpha$ を互いに隣接する正方形とする. そのとき

$$\hat{u}_{Q_1}\geq\tilde{u}_{Q_2}-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_1,Q_2)=\tilde{u}_{Q_2}-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

よって $Q'\in\mathcal{D}(D')_\alpha$ とすれば 補題 3.16 により

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_{Q'}-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_1,Q')\\&\qquad\leq(\tilde{u}_{Q_2}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_2,Q'))-B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}\delta_{D'}(Q_1,Q')\\&\qquad\leq\tilde{u}_{Q_2}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}.\end{aligned}$$

よって $\hat{u}_{Q_1}\leq\tilde{u}_{Q_2}+B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}$ なので $|\hat{u}_{Q_1}-\hat{u}_{Q_2}|\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}$.

以上の結果及び 補題 3.16 より隣接する任意の $Q_1,Q_2\in\mathcal{D}(D')$ に対し $|\hat{u}_{Q_1}-\hat{u}_{Q_2}|\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}$ それゆえ

$$|\hat{u}_{Q_2}-\hat{u}_{Q_1}|\leq B_{12}(M)\|u\|_{*,D'}W_{D'}(Q_2,Q_1),\quad Q_1,Q_2\in\mathcal{D}(D').$$

Q. E. D.

補題 3.21. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ は $\mathcal{D}(D_1)$ がいくらでも大きい正方形を含む領域, $u \in BMO(D_1)$ とする. そのとき $\hat{u} \in BMO(D_2)$ でしかも $\|\hat{u}\|_{*,D_2} \le B_{15}(M)\|u\|_{*,D_1}$.

(証明)

$$L(M) = 4(66B_{10}(M) + \sqrt{2}).$$

とおく. $Q \subset D_2$ を $L(M)l(Q) \le \mathrm{d}(Q_1, \partial D_2)$ なる正方形とする.
(Case 1) $Q \subset D_2 \setminus D'_\beta$ なるとき. このときは 補題 3.19 により

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\hat{u} - \hat{u}_Q| dm \le B_{14}(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

(Case 2) $Q \not\subset D_2 \setminus D'_\beta$ なるとき. $Q_0 \cap Q \ne \emptyset$ なる正方形 $Q_0 \in \mathcal{D}(D')_\beta$ が存在する. ここでもし $\mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) \le \mathrm{d}(Q_0, \partial D' \cap D_2)$ であれば

$$\mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) = \mathrm{d}(Q_0, \partial D') \le 66 l(Q_0).$$

また $\mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) > \mathrm{d}(Q_0, \partial D' \cap D_2)$ であれば

$$\mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) \le B_{10}(M)\mathrm{d}(Q_0, \partial D' \cap D_2) = B_{10}(M)\mathrm{d}(Q_0, \partial D') \le 66B_{10}(M)l(Q_0).$$

いずれにせよ $\mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) \le 66B_{10}(M)l(Q_0)$ よって

$$66B_{10}(M)l(Q_0) \ge \mathrm{d}(Q_0, \partial D_2) \ge \mathrm{d}(Q, \partial D_2) - \sqrt{2}l(Q_0) \ge L(M)l(Q) - \sqrt{2}l(Q_0).$$

それゆえ

$$l(Q_0) \ge \frac{L(M)}{66B_{10}(M) + \sqrt{2}} l(Q) \ge 4l(Q).$$

なので e Q は Q_0 及び Q_0 に隣接する $\mathcal{D}(D')$ の正方形によって覆える. それらの個数は高々 4 個なので補題 3.20 より

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\hat{u} - \hat{u}_Q| dm \le \sup_{z_1, z_2 \in Q} |\hat{u}(z_2) - \hat{u}(z_1)| \le 4B_{12}(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

よって局所化定理 (定理 1.X) によって $\hat{u} \in BMO(D_2)$ でしかも

$$\|u\|_{*,D_2} \le A_8 \max\{B_{13}(M), 4B_{12}(M)\} L(M)\|u\|_{*,D_1}.$$

Q. E. D.

以下において領域 D_1 に対する制限を除こう.

補題 3.22. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$, $z_0 \in D_1$ とする. $D'_1 = D_1 \setminus \{z_0\}$, $D'_2 = D_2 \setminus \{z_0\}$ とおくとき $D'_1 \in \mathcal{U}(D'_2, A_{10}M)$.

(証明)　$u \in BMO(D_1')$ とすると 1 点の除去可能性定理より u は $BMO(D_1)$ 関数でかつ $\|u\|_{*,D_1} \leq A\|u\|_{*,D_1'}$. よって $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}(D_1')$ に対し 補題 3.7 より

$$\delta_{D_1'}(Q_1, Q_2) \leq AA_8\delta_{D_1}(Q_1, Q_2) \leq AA_8M\delta_{D_2}(Q_1, Q_2) \leq AA_8M\delta_{D_2'}(Q_1, Q_2)$$

となり $D_1' \in \mathcal{U}(D_2', AA_8M)$. 　　Q. E. D.

補題 3.23. $f : D \to D'$ を等角写像, $Q_i,\ (i = 1, 2)$ を z_i を中心とする D' 内の許容正方形とする. $Q_i',\ (i = 1, 2)$ を $f(z_i)$ を中心とし $\mathrm{d}(Q_i', \partial D')/l(Q_i') = \mathrm{d}(Q_i, \partial D)/l(Q_i)$ なる D' 内の許容鎖とする. そのとき

$$\frac{1}{A_{11}}\delta_D(Q_1, Q_2) \leq \delta_{D'}(Q_1', Q_2') \leq A_{11}\delta_D(Q_1, Q_2)$$

(証明) Q を D 内の z_0 を中心とする許容正方形とし, Q' を $f(z_0)$ を中心とし $\mathrm{d}(Q', \partial D')/l(Q') = \mathrm{d}(Q, \partial D)/l(Q)$ なる D' 内の許容正方形とする. そのとき Koebe の 歪曲定理 によって

$$\frac{1}{A}Q' \subset f(Q) \subset AQ'$$

このことから以下容易に証明できる. 　　Q. E. D.

補題 3.24. $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$, $f : D_2 \to D_2'$ を等角写像とする. そのとき $D_1' = f(D_1)$ とおけば $D_1' \in \mathcal{U}(D_2', A_{12}M)$.

(証明) $Q_1', Q_2' \in \mathcal{A}(D')$ とし Q_1, Q_2 を 補題 3.23 により Q_1', Q_2' に対応する D ないの許容鎖とする. そのとき

$$\delta_{D_1'}(Q_1', Q_2') \leq A_{12}\delta_{D_1}(Q_1, Q_2) \leq A_{12}M\delta_{D_2}(Q_1, Q_2) \leq {A_{12}}^2M\delta_{D_2'}(Q_1', Q_2')$$

よって $D_1' \in \mathcal{U}(D_2', {A_{12}}^2M)$. 　　Q. E. D.

補題 3.25. $\mathcal{U}(D_2, M) \subset \mathcal{E}(D_2, B_{16}(M))$.

(証明) $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ とする. $z_0 \in D_1$ とし $D_1' = D_1 \setminus \{z_0\}$, $D_2' = D_2 \setminus \{z_0\}$ とおけば 補題 3.22 より $D_1' \in \mathcal{U}(D_2', A_{10}M)$. そこで

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0},\quad D_1'' = f(D_1'),\quad D_2'' = f(D_2')$$

とおけば 補題 3.24 より $D_1'' \in \mathcal{U}(D_2'', A_{12}A_{10}M)$. そこで $u \in BMO(D_1)$ とすれば BMO の等角不変性 (定理 1.X) より

$$\|u \circ f\|_{*,D_1''} \leq A\|u\|_{*,D_1'} \leq A\|u\|_{*,D_1}$$

よって 補題 3.21 より $u \circ f$ の D_2'' への拡張 v で

$$\|v\|_{*,D_2''} \leq B_{15}(A_{12}A_{10}M)\|u \circ f\|_{*,D_1''}.$$

なるものが存在する. よって $\hat{u} = v \circ f^{-1}$ は u の D_2 への拡張で

$$\|\hat{u}\|_{*,D_2} \leq A\|u\|_{*,D_2'} \leq A\|v\|_{*,D_2''} \leq AB_{15}(A_{12}A_{10}M)\|u\|_{*,D_1}.$$

Q. E. D.

以上により 定理 3.1 は証明された. ここでは領域 $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ に対し $BMO(D_1)$ から $BMO(D_2)$ への線形でない拡張作用素を構成した. 線形な拡張作用素が構成できるかどうかは不明である.

$\Phi(t),\ t \geq 1$ を $\Phi(t) \geq 1,\ \log(\Phi(t)) = o(t),\ t \to \infty$ なる単調非減少関数とするとき. 補題 3.8 において条件 $D_1 \in \mathcal{U}(D_2, M)$ はより弱い条件 $\delta_{D_1}(Q, Q') \leq \Phi(\delta D_2(Q, Q')),\quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D_1)$ に置き換えることができる. そのとき (補題 3.17 等はそれに応じて変更する必要があるが) 補題 3.19 は同様に証明できるので 特に $D_2 = \mathbf{C}$ の場合を考えれば

系 3.5. $\mathbf{C}$ の部分領域 D_1 について以下の条件は全て同値である.
(1) D_1 上の BMO 関数は 常に $\mathbf{C}$ 上の BMO 関数に拡張できる.
(2) ある定数 $M > 0$ が存在し

$$W_{D_1}(Q, Q') \leq M\psi(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D_1).$$

(3) D_1 は 一様領域である, すなわち, ある定数 $M \geq 1$ が存在し

$$\delta_{D_1}(Q, Q') \leq M\psi(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D_1).$$

(4) $\Phi(t) \geq 1, \log(\Phi(t)) = o(t), t \to \infty$ なるある単調非減少関数 $\Phi(t),\ t \geq 0$ に対し

$$W_{D_1}(Q, Q') \leq \Phi(\psi(Q, Q')), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D_1).$$

(5) $\Phi(t) \geq 1, \log(\Phi(t)) = o(t), t \to \infty$ なるある単調非減少関数 $\Phi(t),\ t \geq 0$ に対し

$$\delta_{D_1}(Q, Q') \leq \Phi(\psi(Q, Q')), \quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D_1).$$

この系に関してはまた Gehring and Osgood [29] 定理 1, 定理 2 (及びその証明) を参照して欲しい.

他方一般の D_2 に対しては (補題 3.17. を変更してしまうと) もはや補題 3.20. が証明できないため, 同様の主張が成立するかどうかは不明である.

領域 D 上の 有界かつ Dirichlet 積分有限な正則関数のなす空間を $ABD(D)$ とあらわす.

定理 3.3.(Shiga [73]) 単連結な領域 $D \subset \mathbf{C},\ D \neq \mathbf{C}$ についてある定数 $L \geq 1$ が存在し任意の $ABD(D)$ 関数 f に対し常に $\|\hat{f}\|_{*,\mathbf{C}} \leq L\|f\|_{*,D}$ なる f の $\mathbf{C}$ 上への拡張 $\hat{f}$ が存在すれば D は $K = K(L)$-quasidisk である.

(証明) $h_\Delta(z,z')$ を 単位円板 Δ 上の hyperbolic 距離とする. 一般に Δ 上の Dirichlet 積分有限な調和函数 h に対し $f=\sum_n a_n z^n$ を $\mathrm{Re}f=h$ なる正則関数として

$$|h(z)-h(0)|^2 \le |f(z)-f(0)|^2 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right|^2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\|h\|_{I,\Delta}^2 \log\frac{1}{1-|z|^2} = \frac{2}{\pi}\|h\|_{I,\Delta}^2 \log\cosh h_\Delta(0,z).$$

また $h(\zeta)=\log|1-\bar{z}\zeta|$ なるとき等号が成立しこの h に対応する f は $ABD(\Delta)$ 関数である. よって D 上の各点 z, z' に対しある $f\in ABD(D)$, $\|f\|_{I,D}\neq 0$ が存在し $h=\mathrm{Re}f$ は

$$|h(z)-h(z')|^2 = \frac{2}{\pi}\|h\|_{I,D}^2 \log\cosh h_D(z,z')$$

を満たす.

D は単連結なので D 上の quasi-hyperbolic 距離 $k_D(z,z')$ と hyperbolic 距離 $h_D(z,z')$ には $k_D(z,z')/4 \le h_D(z,z') \le k_D(z,z')$ なる関係があり, さらに z_Q を 正方形 $Q\in\mathcal{D}(D)$ の中心とするとき

$$\frac{1}{A}W_D(Q,Q') \le k_D(z_Q,z_{Q'}) \le AW_D(Q,Q'), \quad Q,Q'\in\mathcal{D}(D)$$

となることから, 各 $Q,Q'\in\mathcal{D}(D)$, に対し

$$|h(z_Q)-h(z_{Q'})|^2 \ge \|h\|_{I,D}^2 \frac{2}{\pi}\log\cosh AW_D(Q,Q')$$

なる $h=h_{Q,Q'}$, $\|h\|_{I,D}\neq 0$ が存在する. 以下 Q,Q' 及びこの様な h を固定するものとする. F をその実部が h である様な D 上の正則関数とすれば $F\in ABD(D)$ なので仮定から $\|\hat{F}\|_{*,\mathbf{C}} \le L\|F\|_{*,D}$ なる F の $\mathbf{C}$ 上への拡張 $\hat{F}$ が存在する. すると補題 3.5 及び 補題 3.1 より

$$|\hat{F}_Q-\hat{F}_{Q'}| \le A\|\hat{F}\|_{*,\mathbf{C}}\psi(Q,Q') \le AL\|F\|_{*,D}\psi(Q,Q').$$

さらに B を Q に外接する円板とすると

$$|\hat{F}_Q - F(z_Q)| = |F_Q - F_B| \le A\|F\|_{*,D}.$$

同様にして $|\hat{F}_Q - F(z_Q)| \le A\|F\|_{*,D}$. よって 系 1.5 に注意すれば

$$\begin{aligned}|F(z_Q)-F(z_{Q'})| &\le |F(z_Q)-\hat{F}_Q| + |\hat{F}_Q-\hat{F}_{Q'}| + |\hat{F}_{Q'}-F(z_{Q'})| \\ &\le A\|F\|_{*,D} + AL\|F\|_{*,D}\psi(Q,Q') + A\|F\|_{*,D} \\ &\le AL\|F\|_{*,D}\psi(Q,Q') \le AL\|h\|_{*,D}\psi(Q,Q')\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}(AL\|h\|_{*,D}\psi(Q,Q'))^2 &\ge |F(z_Q)-F(z_{Q'})|^2 \ge |h(z_Q)-h(z_{Q'})|^2 \\ &\ge \|h\|_{I,D}^2\frac{2}{\pi}\log\cosh AW_D(Q,Q') \ge \|h\|_{I,D}^2\frac{2}{\pi}(AW_D(Q,Q')-\log 2)\end{aligned}$$

となり

$$W_D(Q,Q') \le AL^2\psi^2(Q,Q') + A$$

よって 系 3.5 によって D は $K = K(L)$-quasidisk である. Q. E. D.

§3.3. BMO multiplier の特徴付け等

領域 D 上の関数 ϕ は 任意の $f \in BMO(D)$ に対し $\phi f \in BMO(D)$ となるとき BMO multiplier という. $L^\infty(D)$ 関数は一般に BMO multiplier とはなっていない. 例えば $z_0 \in D$ として $f(z) = \log|z - z_0|$, 及び集合 $\{z \mid \mathrm{Re}(z - z_0) > 0\}$ の特性関数 ϕ を考えれば $f \in BMO(D)$ であるが $\phi f \notin BMO(D)$ である. 今 D 上の正方形 $Q_0 \in \mathcal{D}(D)$ をひとつ固定する. BMO multiplier を考察するにあたっては定数関数を 0 と見做さない norm

$$\|f\|_{**,D} = \|f\|_{*,D} + |f|_{Q_0}$$

を採用するほうが扱いよい. ($\|\cdot\|$ を norm とすると作用素 $f \mapsto \phi f$ は ϕ が定数関数でないかぎり f の代表元の取り方によって値が変わり $BMO(D)$ 上の作用素としては well defined でない.) ϕ が $BMO(D)$ miltiplier であるとき閉グラフ定理によって $f \mapsto \phi f$ が, この norm に関し有界作用素となっていることが分かる. その作用素 norm を $\|\phi\|$ と表すことにする. まず定数関数が BMO 関数なることから $BMO(D)$ multiplier は $BMO(D)$ 関数でなければならないがさらに

補題 3.26. $\phi \in L^1_{loc}(D)$ が $BMO(D)$ multiplier ならばあれば $\phi \in L^\infty(D)$ かつ $\|\phi\|_\infty \le 3\|\phi\|$.

(証明) $z \in D$ とし $Q_t \subset D$ を z 中心 $l(Q) = t$ なる正方形とする. $a(z)$ を

$$|a| = \frac{1}{m(Q_t)}\chi_{Q_t}, \quad \int_D adm = 0$$

なる D 上の有界関数としさらに $b = \overline{\mathrm{sgn}}(\phi a)$ とおく ($\phi a = 0$ なる点では 0 とおく) とき $\|b\|_\infty \le 1$ より $\|b\|_{**} \le 3$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q_t)}\int_{Q_t}|\phi|dm &= \int_D b\phi adm = \int_D \{\phi b - (\phi b)_{Q_t}\}adm \\ &\le \frac{1}{m(Q_t)}\int_{Q_t}|\phi b - (\phi b)_{Q_t}|dm \le \|b\phi\|_* \le 3\|\phi\|.\end{aligned}$$

$t \to 0$ とすれば Lebesgue の定理より証明は終わる. Q. E. D.

補題 3.27. $f \in BMO(D)$, $\phi \in L^\infty(D)$ とするとき D 上の任意の正方形 Q に対し

$$\left| |f_Q| \frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi_Q|dm - \frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi f - (\phi f)_Q|dm \right| \le 2\|\phi\|_\infty \|f\|_*.$$

(証明)

$$\left| |f_Q| \frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi - \phi_Q| dm - \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f\phi - (f\phi)_Q| dm \right|$$
$$\leq \frac{1}{m(Q)} \int_Q (|(f - f_Q)\phi| + |f_Q \phi_Q - (f\phi)_Q|) dm$$
$$\leq \|\phi\|_\infty \|f\|_* + \left| \frac{1}{m(Q)} \int_Q (f - f_Q)\phi dm \right| \leq 2\|\phi\|_\infty \|f\|_*.$$

Q. E. D.

定理 3.4. 領域 $D(\neq \mathbf{C})$ 上の L^1_{loc} 関数 ϕ について ϕ が $BMO(D)$ multiplier であるための必要十分条件は

$$\|\phi\|_\infty \leq L,$$
$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq \frac{L}{\delta_D(Q, Q_0)}, \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$

なる定数 $L > 0$ の存在することである．またこのとき $\|\phi\| \leq AL$ となる．逆に $BMO(D)$ multiplier ϕ に対しては $L \leq A\|\phi\|$ となるような $L > 0$ をとることができる．

(証明) まず ϕ が定理の条件を満たすとする．補題 3.5 に注意すれば $f \in BMO(D)$ に対し

$$|f_Q| \frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq \{|f_{Q_0}| + A\|f\|_{*,D} \delta_D(Q, Q_0)\} \frac{L}{\delta_D(Q, Q_0)}$$
$$\leq AL\{|f|_{Q_0} + \|f\|_{*,D}\} \leq AL\|f\|_{**,D}.$$

よって先の補題により

$$\sup_{Q \in \mathcal{A}(D)} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi f - (\phi f)_Q| dm \leq AL\|f\|_{**,D} + 2\|\phi\|_\infty \|f\|_* \leq AL\|f\|_{**,D}.$$

よって局所化定理により $\|\phi f\|_{*,D} \leq AL\|f\|_{**,D}$．さらに $|\phi f|_{Q_0} \leq \|\phi\|_\infty |f|_{Q_0} \leq L\|f\|_{**,D}$ なので $\|\phi f\|_{**,D} \leq AL\|f\|_{**,D}$ を得る．

逆に ϕ が $BMO(D)$ multiplier であるとする．各 $Q_1 \in \mathcal{A}(D)$ に対し, z_1 をその中心として D 上の関数 G を

$$G(z) = \log^+ \frac{\mathrm{d}(z_1, \partial D)}{2|z - z_1|}$$

と定めさらに $f = F_{Q_0} + G$ とおく．ここで F_{Q_0} は補題 3.6 の関数とする．そのとき $|G|_{Q_0} \leq A$ に注意すれば $\|f\|_{**,D} \leq A$ であることがわかる．z_1 を含む $\mathcal{D}(D)$ の正方形を $\tilde{Q}_1$ とするとき

$$G_{Q_1} \geq \log \frac{\mathrm{d}(z_1, \partial D)}{\sqrt{2} l(Q_1)} \geq \log \frac{l(\tilde{Q}_1)}{l(Q_1)} - A \geq A\delta_D(\tilde{Q}_1, Q_1) - A$$

また

$$(F_{Q_0})_{Q_1} \geq W_D(\tilde{Q}_1, Q_0) - A \geq A\delta_D(\tilde{Q}_1, Q_0) - A$$

よって

$$f_{Q_1} \geq A(\delta_D(\tilde{Q}_1, Q_0) + \delta_D(\tilde{Q}_1, Q_1)) - A \geq A\delta_D(Q_1, Q_0) - A$$

ゆえに前補題より

$$(A\delta_D(Q_1,Q_0)-A)\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|\phi-\phi_{Q_1}|dm \le |f_{Q_1}|\frac{1}{m(Q_1)}\int_{Q_1}|\phi-\phi_{Q_1}|dm$$

$$\le \|\phi f\|_{**,D}+2\|\phi\|_\infty\|f\|_* \le A\|\phi\|\|f\|_{**,D} \le A\|\phi\|.$$

それゆえ

$$\delta_D(Q_1,Q_0)\frac{1}{m(Q)}\int_Q|\phi-\phi_Q|dm \le A\|\phi\|.$$

Q. E. D.

$\mathcal{D}(D)$ 上の関数 F はある定数 $L>0$ に対し $F\ge L^{-1}$ かつ

$$L^{-1}\le\frac{F(Q)}{F(Q')}\le L,\quad Q\cap Q'\ne\emptyset,\ Q,Q'\in\mathcal{D}(D).$$

を満たすとき admissible と言うことにする. admissible な F に対し $\mathcal{A}(D)$ 上の関数 $\hat{F}$ を

$$\hat{F}(Q)=F(\tilde{Q})+\log(2+\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q)})$$

により定める. ここで $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q}\cap Q\ne\emptyset$ なる $\mathcal{D}(D)$ の正方形の一つとする.

定理 3.5. 領域 $D(\ne\mathbf{C})$ に関する admissible な関数 F に対し以下の条件は同値である.

(1) ある定数 $L>0$ が存在し

$$\delta_D(Q,Q_0)\le L\hat{F}(Q),\quad Q\in\mathcal{A}(D).$$

(2) ある定数 $L>0$ が存在し

$$W_D(Q,Q_0)\le LF(Q),\quad Q\in\mathcal{D}(D).$$

(3) $L^\infty(D)$ 関数 ϕ についてある定数 $L>0$ が存在し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|\phi-\phi_Q|dm\le\frac{L}{\hat{F}(Q)},\quad Q\in\mathcal{A}(D)$$

であれば ϕ は BMO multiplier.

(証明) まず $\delta_D(Q,Q_0)$ と $W_D(Q,Q_0)+\log(2+\frac{l(\tilde{Q})}{l(Q)})$, $Q\in\mathcal{A}(D)$ が比較可能な量なることから (2) → (1). また前定理により (1) → (3). 最後に (3) → (2) を証明しよう.

原点中心辺長 1 なる正方形上に support を持つ $\mathbf{C}$ 上の, 恒等的には 0 とはならない C^∞ 関数 h で $|h|\le 1$, $\int hdm=0$ なるものを取り固定する. 関数 h_Q, $Q\in\mathcal{D}(D)$ を, Q の中心を z_0 として $h_Q(z)=h((z-z_0)/l(Q))$ により定める. さらに D 上の関数 ϕ を $\phi(z)=h_Q(z)/F(Q)$, $z\in Q\in\mathcal{D}(D)$ と定める. ϕ は有界な $C^\infty(D)$ 関数であり

$$|\nabla\phi(z)|\le\frac{C}{F(Q)l(Q)},\quad z\in Q\in\mathcal{D}(D).$$

よって $Q \in \mathcal{A}(D)$ に対し $\tilde{Q} \cap Q \neq \emptyset$ なる $\tilde{Q} \in \mathcal{D}(D)$ を取れば z_0 を Q の中心として

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq \frac{2}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi(z_0)| dm$$

$$\leq \frac{2}{m(Q)}\int_Q \frac{C}{F(\tilde{Q})l(\tilde{Q})} l(Q) dm \leq \frac{C}{F(\tilde{Q})}\frac{l(Q)}{l(\tilde{Q})} \leq \frac{C}{\hat{F}(Q)}.$$

よって仮定より ϕ は BMO multiplier. また $Q \in \mathcal{D}(D)$ に対しては

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi_Q| dm = \frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi| dm \geq \frac{C}{F(Q)}.$$

なので前定理と合わせれば $\delta_D(Q, Q_0) \leq C\hat{F}(Q), \quad Q \in \mathcal{D}(D)$. Q. E. D.

特に $F(Q) = \psi(Q, Q_0)$ と置けば

系 3.6. 領域 D について以下の条件は同値である;

(1) ある定数 $L > 0$ が存在し

$$\delta_D(Q, Q_0) \leq L\psi(Q, Q_0), \quad Q \in \mathcal{A}(D).$$

$$(\Longleftrightarrow W_D(Q, Q_0) \leq L\psi(Q, Q_0), \quad Q \in \mathcal{D}(D).)$$

(2) ある定数 $L > 0$ に対し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq L\frac{C}{\psi(Q, Q_0)}, \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$

であるような $\phi \in L^\infty(D)$ は常に BMO multiplier.

領域 D はある定数 $L > 0$ に対し

$$\delta_D(Q, Q_0) \leq L\log(2 + \frac{1}{l(Q)}), \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$

なるとき Hölder 領域という.

補題 3.28. D が Hölder 領域であれば D は有界でしかもある定数 $L > 0$ が存在して

$$\delta_D(Q, Q_0) \leq L\psi(Q, Q_0), \quad Q \in \mathcal{A}(D).$$

(証明) D が有界であることだけ示せば十分である. まず, 与式及び $\psi(Q, Q_0) \leq A\delta_D(Q, Q_0)$ により $l(Q) \to 0, \ \ Q \to \infty$. Q_0 は $\mathcal{D}(D)$ において大きさが最大の正方形と仮定しよい. さらに $l(Q_0) = 1$ と仮定してよい. $Q \in \mathcal{D}(D), \ \ l(Q) = 2^{-N}$ に対し $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q$ を Q_0 と Q を結ぶ Whitney 鎖とし $n_0 = 0$, $n_k = \max\{n \mid l(Q_n) = 2^{-k}\}$, $1 \leq k \leq N$ とおく. Q_{n_k} の中心を z_k とし $d_k = |z_k - z_{k-1}|$ とおけば $n_k - n_{k-1} \geq A2^k d_k$. よって

$$\sum_{k=1}^m 2^k d_k \leq A\sum_{k=1}^m (n_k - n_{k-1}) \leq An_m \leq AW_D(Q_m, Q_0) \leq C\log(2 + \frac{1}{l(Q_{n_m})}) \leq Cm.$$

よって

$$2^N \sum_{k=1}^{N} d_k = \sum_{k=1}^{N} 2^k d_k + \sum_{m=1}^{N-1} (2^{N-m-1} \sum_{k=1}^{m} 2^k d_k) \leq C2^N.$$

よって $d(Q, Q_0) \leq A \sum_{k=1}^{N} d_k \leq C$ となり D は有界である. Q. E. D.

定理 3.6. 領域 D について以下の条件は同値である;

(1) D は Hölder 領域, 即ちある定数 $L > 0$ が存在し

$$\delta_D(Q, Q_0) \leq L \log\left(2 + \frac{1}{l(Q)}\right), \quad Q \in \mathcal{A}(D).$$

$$(\Longleftrightarrow W_D(Q, Q_0) \leq L \log\left(2 + \frac{1}{l(Q)}\right), \quad Q \in \mathcal{D}(D))$$

(2) D は 有界かつある定数 $L > 0$ が存在し

$$\delta_D(Q, Q_0) \leq L\psi(Q, Q_0), \quad Q \in \mathcal{A}(D).$$

$$(\Longleftrightarrow W_D(Q, Q_0) \leq L\psi(Q, Q_0), \quad Q \in \mathcal{D}(D))$$

(3) ある定数 $L > 0$ に対し

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq L \left(\log\left(2 + \frac{1}{l(Q)}\right)\right)^{-1}, \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$

となる $\phi \in L^\infty(D)$ は常に BMO multiplier.

(4) ある定数 $L > 0$ が存在し D 上の任意の正方形 Q に対し

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |\phi - \phi_Q| dm \leq L \left(\log\left(2 + \frac{1}{l(Q)}\right)\right)^{-1}$$

となる $\phi \in L^\infty(D)$ は常に BMO multiplier.

(証明) (1), (2) の同値性は前補題による. (2),(3) の同値性は前定理による. (4) $\rightarrow$ (3) は明らか. 最後に (3) $\rightarrow$ (4) は局所化定理による. Q. E. D.

系 3.8. 単位円板 Δ 上の関数 ϕ が $BMO(\Delta)$ multiplier となるための必要十分条件は $\phi \in L^\infty(\Delta)$ かつある定数 $L > 0$ が存在し Δ 上の任意の円板 B に対し

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |\phi - \phi_B| dm \leq L \left(\log \frac{2}{\mathrm{rad}(B)}\right)^{-1}$$

となることである.

単位円周上の BMO 空間 $BMO_\theta(D)$ の multiplier に対しても同じ論法が利用できる. この場合にはさきの Q_0 に相当する $\partial\Delta$ 上の区間 (もしくは $\partial\Delta$ 自身) I_0 をひとつ固定しておくと任意の区間 I に対し, 先ほどの $\delta_D(\cdot, \cdot)$ に相当する量が $\log(4\pi/|I|)$ であることが分かる. よって ϕ が $BMO_\theta(D)$ multiplier であるための必要十分条件は $\phi \in L^\infty$ かつ

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\phi - \phi_I| d\theta \leq L \left(\log \frac{4\pi}{|I|}\right)^{-1},$$

となることである (Stegenga [78]). $BMO(\mathbf{C})$ の multiplier についても $BMO(\mathbf{C}) = BMO(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ を用いれば前定理が適用できるが, それよりもこの空間を $BMO_\sigma(\hat{\mathbf{C}})$ と思えば $BMO_\theta(D)$ の場合と同様の, よりすっきりした特徴付けが得られる. 具体的な評価については Nakai-Yabuta [58] を参照して欲しい.

最後に補題 3.6 の応用例をもう一つ上げておこう.

定理 3.7. (Staples [77]) D を $\mathbf{C}$ 内の領域, $1 \le p < \infty$, $Q_0 \in \mathcal{D}(D)$ とし F_{Q_0} を 補題 3.6 の関数

$$F_{Q_0}(x) = W_D(Q, Q_0), \qquad x \in Q \in \mathcal{D}(D).$$

とする. そのとき以下の 3 条件は同値である.

(1) $F_{Q_0} \in L^p(D)$.

(2) $BMO(D) \subset L^p(D)$.

(3) $BMO(D) \subset L^p(D)$ かつある定数 $L > 0$ が存在し

$$\left(\frac{1}{m(D)}\int_D |f - f_D|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \le L\|f\|_{*,D}, \quad f \in BMO(D).$$

(証明) $F_{Q_0} \ge 1$ 及び定数関数が BMO 関数であることからいずれの場合においても D は面積有限でなければならない. まず (3) → (2) は明らか. また $F_{Q_0} \in BMO(D)$ より (2) → (1). 最後に (1) とする. 系 1.4 及び 補題 3.5 を用いれば, $f \in BMO(D)$ に対し定理 1.1 の証明と同様にして

$$\begin{aligned}
\int_D |f - f_{Q_0}|^p dm &\le \sum_{Q\in\mathcal{D}(D)} \int_Q (|f - f_Q| + |f_Q - f_{Q_0}|)^p dm \\
&\le \sum_{Q\in\mathcal{D}(D)} \int_Q 2^p(|f - f_Q|^p + |f_Q - f_{Q_0}|^p) dm \\
&\le 2^p \sum_{Q\in\mathcal{D}(D)} \left\{ C_p\|f\|_{*,D}^p m(Q) + A\|f\|_{*,D}^p W_D^p(Q, Q_0) m(Q) \right\} \\
&\le C_p'\|f\|_{*,D}^p \sum_{Q\in\mathcal{D}(D)} W_D^p(Q, Q_0) m(Q) = C_p'\|f\|_{*,D}^p \int_D F_{Q_0}^p dm.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{m(D)}\int_D |f - f_D|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} &\le 2\left(\frac{1}{m(D)}\int_D |f - f_{Q_0}|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C_p''\|f\|_{*,D}\left(\frac{1}{m(D)}\int_D F_{Q_0}^p dm\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Q. E. D.

ここで Q_0 内の点 z_0 をとるとき $F_{Q_0}(x)$ は点 z と z_0 の quasi-hyperbolic 距離 $k_D(z, z_0)$ に対応しており

$$\frac{1}{A}F_{Q_0}(x) \le k_D(z, z_0) + 1 \le AF_{Q_0}(x)$$

が容易に示せるので $\int_D k_D(z,z_0)^p dm(z) \geq Am(D)$ に注意すれば定理の条件 (1) は $k_D(\cdot,z_0) \in L^p(D)$ とあらわせまたこのとき

$$\left(\frac{1}{m(D)}\int_D |f-f_D|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \leq L_p\|f\|_{*.D}\left(\frac{1}{m(D)}\int_D k_D^p(z,z_0)dm(z)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in BMO(D),$$

が成立する．Δ を単位円板とし $K_0 = m(\Delta)^{-1}\int_\Delta k_\Delta(z,0)dm(z)$ とおく．定数 $K, K \geq K_0$ に対し 領域 D の面積有限な部分領域 G で

$$\frac{1}{m(G)}\int_G k_G(z,z_0)dm(z) \leq K$$

を満たすものの全体を $\mathcal{F}_K(D)$ とおく．$\mathcal{F}_K(D)$ は D 内の全ての開円板を含み 系 1.2 の一般化として

系 3.9. $f \in BMO(D)$ とすれば

$$\sup_{G\in\mathcal{F}_K(D)}\frac{1}{m(G)}\int_G |f-f_G|dm \leq L(K)\|f\|_{*,D}.$$

ここで $L(K) > 0$ は K にのみ依存する定数.

第 4 章. Riemann 面上の BMO 空間

§4.1. BMO 写像 (その 1)

R を普遍被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$ ($\tilde{R} = \Delta,\ \mathbf{C},\ \hat{\mathbf{C}}$). を持つ Riemann 面とする. R 上の BMO 空間 $BMO_*(R)$ を

$$BMO_*(R) = \{f \in L^1_{loc}(R) | f \circ \pi \in BMO(\tilde{R})\}$$

により定義し $f \in BMO_*(R)$ の norm は $\|f\|_{*,R,*} = \|f \circ \pi\|_{*,\tilde{R}}$ と定める.

また Δ を普遍被覆とする Riemann 面 R に対して BMO 空間 $BM0_\lambda$, $BMO_\theta(R)$ 及びそれらの norm $\|\cdot\|_{*,R,\lambda}$, $\|\cdot\|_{*,R,\theta}$ も同様に定めることにする. 以上に於て調和関数, 正則関数のなすそれぞれの部分空間は “BMOH”, “BMOA” と表すことにする.

$f \in BMO_\lambda(R)$ の norm $\|f\|_{*,R,\lambda}$ は普遍被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$ の取り方によらず定まる. 他方 $f \in BMO_*(R)$ の norm $\|f\|_{*,R,*}$ 及び $f \in BMO_\theta(R)$ の norm $\|f\|_{*,R,\theta}$ は普遍被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$ の取り方によって変わるるものの BMO の等角不変性から $BMO_\lambda(R)$, $BMO_*(R)$ 空間自体は取り方によらず定まりしかも絶対定数 $A \geq 1$ が存在し他の普遍被覆 $\pi' : \tilde{R} \to R$ に対し

$$\frac{1}{A}\|f \circ \pi\|_{*,R,\theta} \leq \|f \circ \pi'\|_{*,R,\theta} \leq A\|f \circ \pi\|_{*,R,\theta}, \quad f \in BMO_\theta(R).$$

($BMO_*(R)$ についても同様.) この意味において norm $\|f\|_{*,R,\theta}$, $\|f\|_{*,R,*}$ は 普遍被覆の取り方によらず定まる.

他方平面領域 D に対する空間 $BMO(D)$ の定義はそのままでは一般の Riemann 面に適用できるものではないがここで新たに次のような定義を導入する.

Riemann 面 R 上の局所可積分な関数 f について f が $BMO_{**}(R)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{**,R} = \sup_{\phi} \|f \circ \phi\|_{*,\Delta} < \infty$$

なることとする. ここで sup は 単位円板 Δ から R への中への等角写像 ϕ の全体について取るものとする. 定義より $R \subset R'$ であれば $\|f\|_{**,R} \leq \|f\|_{**,R'}$ となりまた

$$\|f\|_{**,R} = \sup_{G \subset R} \|f\|_{**,G}$$

が成立する. ここで sup は R 内の全ての単連結領域 G の全体について取るものとする.

このように $\|f\|_{**,R}$ を定義するとき 特に R が $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域である場合 BMO の等角不変性 (及び 系 1.2) より

$$\frac{1}{A}\|f\|_{*,R} \leq \|f\|_{**,R} \leq A\|f\|_{*,R}.$$

よって $BMO_{**}(R)$ は $BMO(D)$ の一般化であると言えるので以下, この絶対定数倍の違いから生じる曖昧さは無視して $\|\cdot\|_{**,R}$ を $\|\cdot\|_{*,R}$ と表わし $BMO_{**}(R)$ も $BMO(R)$ と表わすことにする. (以下 $\hat{\mathbf{C}}$ の部分領域 R については $\|\cdot\|_{*,R}$ と記せば場所によっては $\|\cdot\|_{**,R}$ のことでありまた場所によっては 今までの $\|\cdot\|_{*,R}$ を表わすということである.) まず

補題 4.1. 常に $BMO_*(R) \subset BMO(R)$.

(証明) $f \in BMO_*(R)$ とする. $\phi : \Delta \to R$ を中への等角写像とする. $\pi^{-1}(\phi(\Delta))$ の成分のひとつを G とすれば $\phi^{-1} \circ \pi$ は G 上の等角写像なので BMO の等角不変性より

$$\|f \circ \phi\|_{*,\Delta} \le A\|(f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \pi)\|_{*,\Delta} \le A\|f\|_{*,R,*}.$$

よって $\|f\|_{*,R} \le A\|f\|_{*,R,*}$. Q. E. D.

$g : D \to D'$ を平面領域の間の等角写像とするとき Koebe の定理から

$$\frac{|dz|}{4d(z,\partial D)} \le \frac{|df(z)|}{d(f(z),\partial D')} \le \frac{4|dz|}{d(z,\partial D)}.$$

よって quasi-hyperbolic 距離は等角不変である. $\rho_R(z)|dz|$ により Δ を普遍被覆とする Riemann 面 R 上の hyperbolic 距離を表すものとする. また, $h_R(z,z'),\ z,z' \in R$ を hyperbolic 距離による 2 点間の距離とし, $z \in R,\ t > 0$ に対し $B^R_{z,t} = B_{z,t} = \{\zeta \in R | h_R(z,\zeta) < t\}$ と定める. 一般の Riemann 面 R に対しその上の Hahn 距離 $\hat{\rho}_R(z)|dz|$ を

$$\hat{\rho}_R(z) = \inf_G \rho_G(z)\ (\ge \rho_R(z))$$

により定める. ここで inf は 点 z を含む R 内の全ての単連結領域 G の全体について取るものとする. 或いは次のように定めても同じである

$$\hat{\rho}_R(z) = \inf_\phi |\phi'(0)|^{-1}$$

ここで inf は $\phi(0) = z$ なる Δ から R の中への等角写像 ϕ の全体について取るものとする. また $\hat{h}_R(z,z'),\ z,z' \in R$ を Hahn 距離による 2 点間の距離とし. $z \in R,\ t > 0$ に対し $\hat{B}^R_{z,t} = \hat{B}_{z,t} = \{\zeta \in R | \hat{h}_R(z,\zeta) < t\}$ と定める.

平面領域 D に対しては Koebe の定理から ($d(z,\partial D) = \infty$ なる場合も含め)

$$\frac{|dz|}{4d(z,\partial D)} \le \hat{\rho}_D(z)|dz| \le \frac{|dz|}{d(z,\partial D)}, \quad z \in D$$

よって Hahn 距離は quasi-hyperbolic 距離の一般化となっている. Hahn 距離は連続な距離となるが微分可能性については知られていない. 二重連結な Riemann 面上の Hahn 距離については Minda [55] によって詳しく調べられている. 以下しばらくは Hahn 距離について考察する.

補題 4.2. $\pi : D \to R$ を平面領域 D から一般の Riemann 面 R への非分枝非有界な被覆をなす正則写像とする. l_z を, z 中心 Euclid 半径 l なる D 上の円板の π による像が単連結となるような最大の l とする. そのとき ($l_z = \infty$ なる場合も含め)

$$\frac{|dz|}{4l_z} \le \hat{\rho}_R(\pi(z))|d\pi(z)| \le \frac{|dz|}{l_z}$$

特に $D \ne \mathbf{C}$ であれば

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}(z,\partial D)}{l_z}\hat{\rho}_D(z)|dz| \le \frac{|dz|}{4l_z} \le \hat{\rho}_R(\pi(z))|d\pi(z)| \le \frac{|dz|}{l_z} \le 4\frac{\mathrm{d}(z,\partial D)}{l_z}\hat{\rho}_D(z)|dz|$$

(証明) $l_z = \infty$ なる場合も同様なので $l_z < \infty$ のときのみ示す. $\phi_0(\zeta) = \pi(z + l_z\zeta)$ と置けば $\phi_0 : \Delta \to R$ は中への等角写像で $\phi_0(0) = \pi(z)$. よって $\hat{\rho}_R(\pi(z))|\pi'(z)| \le |\pi'(z)|/|\phi_0'(0)| = 1/l_z$. 次に $\phi : \Delta \to R$ を $\phi(0) = \pi(z)$ なる任意の中への等角写像とし, G を $\pi^{-1}(\phi(\Delta))$ の z を含む成分とする. 等角写像 $g = \pi^{-1} \circ \phi : \Delta \to G$ に Koebe の定理を用いれば $|\pi'(z)|/|\phi'(0)| = 1/|g'(0)| \ge 1/4l_z$. 後半は先ほどの評価から分かる. Q. E. D.

特に Hahn 距離は $\hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ 以外の Riemann 面上では退化しないことが分かる.

補題 4.3. R を $\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面, $\phi : \Delta \to R$ を $\phi(0) = z$ なる中への等角写像とする. その時常に

$$\phi(\{|\zeta| < t\}) \subset \hat{B}_{z,4t/3}, \quad 0 < t \le \frac{1}{2}.$$

また $\phi_0(0) = z$ なるある中への等角写像 $\phi_0 : \Delta \to R$ に対しては

$$\hat{B}_{z,t/8} \subset \phi_0(\{|\zeta| < t\}), \quad 0 < t \le 1.$$

(証明) 仮定を満たす ϕ をとると ϕ により Δ は R の部分領域とみなせる. そのとき $\hat{\rho}_R(\zeta) \le \rho_\Delta(\zeta)$, $\zeta \in \Delta$. よって $\hat{\rho}_R(\zeta) \le 4|d\zeta|/3$, $|\zeta| \le 1/2$ となり前半の不等式を得る.

次に普遍被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$, ($\tilde{R} = \mathbf{C}$ or $\hat{\mathbf{C}}$) により $\{\zeta||\zeta - z| < l_z\} \subset \tilde{R}$ を R の部分領域とみなせば $\{|\zeta - z| < l_z\}$ 上 $l_\zeta \le 2l_z$ なので補題 4.2 より $|d\zeta|/8l_z \le \hat{\rho}_R(\zeta)|d\zeta|$, $|\zeta - z| < l_z$. よって $\hat{B}_{z,t/8} \subset \{|\zeta - z| < l_z t\}$, $0 < t \le 1$ となるので $\phi_0(\zeta) = z + l_z\zeta$ とおけば後半の不等式を得る. Q. E. D.

Δ を普遍被覆として持つ Riemann 面 R 上の点 z に対し r_z により原点を中心とし hyperbolic 半径が r である円板の π による像が単連結となるような最大の r を表すものとしこの値を点 z の単射半径と呼ぶ. また 原点を中心とし hyperbolic 半径が r_z である円板の Euclid 半径 (すなわち普遍被覆 $\pi : \Delta \to R$ を $\pi(0) = z$ となるように選んだときの l_z) を L_z とおく. そのとき補題 4.2 より特に

補題 4.4. R を普遍被覆 Δ を持つ Riemann 面とすれば

$$\frac{\rho(z)|dz|}{4L_z} \le \hat{\rho}(z)|dz| \le \frac{\rho(z)|dz|}{L_z}, \quad z \in R.$$

$z \in R$ に対し r_z' により Δ 上の, 原点を中心とし Euclid 半径が $L_z/2$ である円板の hyperbolic 半径を表すものとする. そのとき

補題 4.5. R を普遍被覆 Δ を持つ Riemann 面とすれば

$$\hat{B}_{z,1/12} \subset B_{z,r_z'}, \quad z \in R.$$

$$\hat{B}_{z,t/8} \subset B_{z,L_z t} \subset \hat{B}_{z,2t}, \quad z \in R, \ \ 0 < t < \frac{1}{24}.$$

(証明) 証明は補題 4.2 のそれとほとんど同じである．$z \in R$ とし普遍被覆 $\pi : \Delta \to R$ を $\pi(0) = z$ なるものとして取る．そのとき $\{|\zeta| < L_z\}$ 上 π は単射なのでこの円板を R の部分領域とみなすことにする．$\{|\zeta| < L_z/2\}$ 上では $L_z/2 \le l_\zeta \le 3L_z/2$ なので前補題より

$$\frac{|d\zeta|}{6L_z} \le \hat{\rho}_R(\zeta)|d\zeta| = \frac{2|d\zeta|}{L_z}, \qquad |d\zeta| \le \rho_R(\zeta)|d\zeta| \le \frac{|d\zeta|}{1-(L_z/2)^2} \le \frac{4|d\zeta|}{3}.$$

ゆえに $\hat{h}_R(z, \partial B_{z,r'_z}) \ge (L_z/2)(1/6L_z) = 1/12$ となり $\hat{B}_{z,1/12} \subset B_{z,r'_z}$．さらに $\{|\zeta| < L_z/2\}$ 上 $\rho_R(\zeta)/8L_z \le \hat{\rho}_R(\zeta) \le 2\rho_R(\zeta)/L_z$ となるので後半の関係式を得る． Q. E. D.

補題 4.6. R を $\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面, γ を R 上の一点に homotopic でない閉曲線とする．そのとき

$$\int_\gamma \hat{\rho}_R(z)|dz| \ge \frac{1}{4}.$$

(証明) $z \in \gamma$ とすると補題 4.3 により $\phi_0(0) = z$ なる中への等角写像 $\phi_0 : \Delta \to R$ で $\hat{B}_{z,1/8} \subset \phi(\Delta)$ なるものが存在する．よって γ は $\hat{B}_{z,1/8}$ に完全に含まれない閉曲線なので主張は容易に従う． Q. E. D.

補題 4.7. R を $\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面とする．R 上の関数 f についてある $K, L > 0$ が存在し任意 の $z \in R$ に対し f は $\hat{B}_{z,L}$ 上 BMO 関数でかつ $\|f\|_{*,\hat{B}_{z,L}} \le K$ であるとする．そのとき f は $BMO(R)$ 関数となりしかも L にのみ依存した定数 $C(L) > 0$ が存在し $\|f\|_{*,R} \le C(L)K$.

(証明) $\phi : \Delta \to R$ を中への等角写像とするとき $G = \phi(\Delta)$ として

$$\phi(B^\Delta_{z,L}) = B^G_{f(z),L} \subset \hat{B}^R_{f(z),L}, \quad z \in \Delta.$$

よって $f \circ \phi$ は $B^\Delta_{z,L}$ 上の BMO 関数でありあとは局所化定理を用いればよい． Q. E. D.

補題 4.8. R を $\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面とする．R 上の (有限又は無限) 点列 $\{z_n\}_n$ についてある定数 $L, M > 0$ が存在し

$$\#(\hat{B}^R_{z,L} \cap (\cup_n \{z_n\})) \le K, \quad z \in R$$

であるとする．すると $R_0 = R \backslash \cup_n \{z_n\}$ とおくとき $BMO(R_0)$ 関数は常に $BMO(R)$ 関数となりしかも $\|f\|_{*,R} \le C(K,L)\|f\|_{*,R}$, $f \in BMO(R_0)$. また $R = \mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ なる場合については R 上の高々 K 個の点列 $\{z_n\}_n$ について $R_0 = R \backslash \cup_n \{z_n\}$ とおくとき $BMO(R_0)$ 関数は常に $BMO(R)$ 関数となりしかも $\|f\|_{*,R} \le C(K)\|f\|_{*,R}$, $f \in BMO(R_0)$.

(証明) 前半については前補題より f の各 $\hat{B}^R_{z,L}$ 上での BMO norm を評価できればよいがそれは BMO についての一点の除去可能性定理を繰り返し (高々 K 回) 用いることで示される．後半

についても同様. Q. E. D.

ここで R が $\mathbf{C}$ または $\hat{\mathbf{C}}$ であれば $H(R)$ は退化しまたそれ以外の R に対しては G を R の単連結な部分領域, h を R 上の調和関数として定理 1.6 より

$$\frac{1}{A}\|h\|_{*,G} \leq \sup_{z\in G}\frac{|\nabla h(z)|}{\rho_G(z)} \leq A\|h\|_{*,G}.$$

なのでこの様な $G \subset R$ について sup を取れば

補題 4.9. R を $\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面とする. そのとき R 上の調和函数 h に対し h が $BMOH(R)$ 関数であるための必要十分条件は $|\nabla h(z)| \leq K\hat{\rho}_R(z)$, $z \in R$ なる定数 $K \geq 0$ の存在することである. またこのとき

$$\frac{1}{A}\|h\|_{*,R} \leq \sup_{z\in R}\frac{|\nabla h(z)|}{\hat{\rho}_R(z)} \leq A\|h\|_{*,R}$$

ここで先のふたつの空間 BMO, BMO_* の関係を調べる前にもう少し問題を一般化し Riemann 面間の正則写像 $f : R \to R'$ がどのような条件を満たすとき任意の $f \in BMO(D')$ に対し $f \circ g \in BMO(D)$ となるかを調べる. Riemann 面 R, R' 及びその間の, 零集合の逆像が常に零集合となるような可測な写像 $g : R \to R'$ について任意の $f \in BMO(R')$ (resp. $BMOH(R')$, $BMOA(R')$) に対し $f \circ g \in BMO(R)$ ($BMOH(R')$, $BMOA(R')$) となるとき g を BMO (BMOH, BMOA) 写像と呼ぶことにする. 補題 4.1 より普遍被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$ を持つ Riemann 面 R について $BMO_*(R) = BMO(R)$ が成立するのは π が BMO 写像となるときに限る.

非定数正則写像 $g : R \to R'$ は各 $z \in R'$ に対し $g^{-1}(z)$ が (重複度を考慮して) 高々 p 個の点からなるとき p 葉であるという.

補題 4.10. R を $\hat{\mathbf{C}}$ と異なる Riemann 面, $g : \Delta \to R$ を p 葉の正則写像とする. そのとき各 $\alpha > 0$ に対し α と p にのみ依存した定数 $L(\alpha, p) > 0$ が存在し Δ 上の hyperbolic 半径が α 以下であるような任意の円板 B に対し B 上での g の分枝点の個数は $L(\alpha, p)$ 個以下となる. また さらに g が Δ 上局所単葉となっていれば p にのみ依存した定数 $L(p) > 0$ が存在し Δ 上の hyperbolic 半径が $L(p)$ 以下であるような任意の円板 B 上 g は単葉となる.

(証明) まず R が平面領域である場合. 単位円板 Δ 上の p 葉の正則関数 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で $\max\{|a_n| \; |0 \leq n \leq p\} = 1$ なるものの全体は正規族をなす (cf. Hayman [39]) ので前半は正規族に対する通常の議論から従う. また単位円板 Δ 上の p 葉かつ局所単葉な正則関数の全体もやはり同じ正規化条件のもとで正規族をなすことから後半も同様に示せる.

次に R が一般のとき. $\pi : \tilde{R} \to R$ ($\tilde{R} = \mathbf{C}$, or Δ) を普遍被覆とし $\tilde{g} : \Delta \to \tilde{R}$ を g の lift とする. すると $\tilde{g}$ はやはり p 葉なので g の分枝点の個数, 即ち $\tilde{g}$ の分枝点の個数は平面領域の場合と同じ定数によって評価できることになる. さらに g が局所単葉であるとする. そのとき $\tilde{g}$ も局所単葉なので平面領域の場合の結果よりある $l_p > 0$ が存在し $\{|z| < l_p\}$ 上 $\tilde{g}$ は単葉. ここで $\tilde{g}(0) = 0$ と仮定してよい. $r = |\tilde{g}'(0)|l_p/4$ とおくとき Koebe の定理より $\tilde{g}(\{|z| < l_p\}) \supset \{|w| < r\}$. すると円板 $\{|w| < r/2p\}$ 内には異なる同値な 2 点は存在しない. 実際もし $\{|w| < r/2p\}$ 内に異な

る同値な 2 点 w_1, w_2 が存在するとすれば T を $T(w_1)=w_2$ なる被覆変換として $p+1$ 個の点 $T^n(w_1)$, $0\le n\le p$ が $\{|w|<r\}$ 内に存在することになり矛盾. そこで再び Koebe の定理を用いれば $\{|z|<(r/2p)/(4|\tilde{g}'(0)|)\}\subset\tilde{g}^{-1}(\{|w|<r/2p\})$ となり $\tilde{g}(\{|z|<l_p/32p\})\subset\{|w|<r/2p\})$. よって円板 $\tilde{g}(\{|z|<l_p/32p\})$ の hyperbolic 半径を $L(p)$ と定めればよい. Q. E. D.

単位円板 Δ 上の正則関数 g はその Schwartz 微分

$$S_g(z)=\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2$$

が $|S_g(z)|\le 2/(1-|z|^2)^2,\ \ z\in\Delta$ を満たせば Δ 上単葉となる (Nehari [59]). このことから容易に

補題 4.11. 平面領域 D $(\ne\mathbf{C})$ 上の正則関数 g に対しその Schwartz 微分 S_g が

$$|S_g(z)|\le\frac{K}{\mathrm{d}(z,\partial D)^2},\quad z\in D$$

を満たせば K にのみ依存した定数 $L(K)>0$ が存在し $\mathrm{d}(B,\partial D)\ge L(K)\mathrm{rad}(B)$ なる D 内の任意の円板 B 上 g は単葉となる. (具体的には例えば $L(K)=\sqrt{K/2}$ と取れる.)

定理 4.1. D を $\mathbf{C}$ と一致しない平面領域とする. 非定数正則関数 $g:D\to D'$ に対し以下の条件は同値である.

(1) g は BMO 写像.

(2) ある定数 $L>0$ 及び自然数 p が存在し $\mathrm{d}(B,\partial D)\ge L\mathrm{rad}(B)$ なる D 上の任意の円板 B 上 g は p 葉.

(3) $\log|g'|\in BMO(D)$.

(4) $\sup_{\zeta\in\mathbf{C}}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

(5) $\sup_{\zeta\in D'}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

また D' が Green 関数 $g_{D'}(z,\zeta)$ を持つ場合は以下とも同値.

(6) $\sup_{\zeta\in D'}\|g_{D'}(g,\zeta)\|_{*,D}<\infty$.

(証明) まず (1) なるとき, 閉グラフ定理から $f\mapsto f\circ g$ は有界作用素となるので $\log|z|$ が $BMO(\mathbf{C})$ 関数であることから (1) → (4) が成立. (4) → (5) は明らか. (5) → (2) を示そう. 関数 $-\log|g-\zeta|$, $\zeta\in D'$ は優調和で

$$\Delta(-\log|g-\zeta|)=2\pi\sum_{z\in g^{-1}(\zeta)}\delta_z$$

を満たす. ここで δ_z は点 z における dirac 測度を表わし, $\sum$ は重複度を込めて取るものとする. よって補題 1.10 用いれば $\mathrm{rad}(B)=\mathrm{d}(B,\partial D)$ なる D 内の円板 B に対し B 内の g の ζ 点の個数は一様に評価でき (2) が成立する.

次に (2) → (1) 及び (2) → (3) を示そう. (2) が成立しているとする. $\mathrm{d}(B,\partial D)\ge L\mathrm{rad}(B)$ なる D 上の円板 B を取る. 補題 4.10 より B 上にある g の分枝点の集合 S の個数はある定数

$C_1(L,p)>0$ により押さえられる．$G=B\setminus S$ とおくとき g は G 上局所単葉なので再び補題 4.10 よりある定数 $C_1(p)>0$ が存在し $\mathrm{d}(B',\partial G)\geq C_1(p)\mathrm{rad}(B')$ なる G 内の任意に円板 B' 上 g は単葉となる．よって BMO の等角不変性より $f\in BMO(D')$ に対し $\|f\circ g\|_{*,B'}\leq A\|f\|_{*,D'}$. ゆえに局所化定理から $\|f\circ g\|_{*,G}\leq C_2(p)\|f\|_{*,D'}$. さらに一点の除去可能性定理を S の一点一点に繰り返し用いれば

$$\|f\circ g\|_{*,B}\leq A^{C_1(L,p)}C_2(p)\|f\|_{*,D'}=C_2(L,p)\|f\|_{*,D'}.$$

最後に再び局所化定理を用いれば (1) の証明は完了する．また B' の中心を z' とすれば Bieberbach の定理より

$$\left|\frac{g''(z')}{g'(z')}\right|\leq\frac{4}{\mathrm{rad}(B')}\leq\frac{C_3(p)}{\mathrm{d}(z',\partial G)}$$

となり $\log|g'|$ は G 上 Bloch 型の調和函数．よって定理 1.6 より $\|\log|g'|\|_{*,G}\leq C_4(p)$. そこで先ほどと同等に局所化定理及び一点の除去可能性定理を用いれば $\|\log|g'|\|_{*,D}\leq C_5(p)$ となり (3) が成立.

次に 条件 (1) $\to$ (6) $\to$ (2) を示そう．それには今の証明から $\sup_{\zeta\in D'}\|g_{D'}(\cdot,\zeta)\|_{*,D'}<\infty$ を示せば十分である．$\zeta\in D'$ 上の Dirac 測度の $\partial D'$ 上への掃散によって得られる測度を μ_ζ とするとき

$$g_{D'}(z,\zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}-\int_{\partial D'}\log\frac{1}{|z-w|}d\mu_\zeta(w)$$

なので $\|g_{D'}(\cdot,\zeta)\|_{*,D'}\leq 2\|\log|z|\|_{*,\mathbf{C}}$ が成立する.

最後に (3) $\to$ (1) を示そう．$\log|g'|\in BMO(D)$ とすれば (5) $\to$ (2) の証明と同様にして補題 1.10 より $\mathrm{rad}(B)=\mathrm{d}(B,\partial D)$ なる D 内の円板 B に対し B 内の g の 分枝点の個数は ある定数 $C_6(p)>0$ により押さえられる．そこで $G=B\setminus S$ とおくとき $\log|g'|$ は G 上調和なので定理 1.6 より $|g''(z)/g'(z)|\leq C_7(p)/\mathrm{d}(z,\partial G)$, $z\in G$. よって g の Schwartz 微分 S_g に対し $|S_g(z)|\leq C_8(p)/\mathrm{d}(z,\partial G)^2$, $z\in G$. ゆえに 補題 4.11 からある定数 $C_9(p)>0$ が存在し $\mathrm{d}(B',\partial G)\geq C_9(p)\mathrm{rad}(B')$ なる G 内の任意の円板 B' 上 g は単葉となる．後は (2) $\to$ (1) での議論を繰り返せば (1) を得る．　Q. E. D.

$D=\mathbf{C}$ の場合に対し定理 4.1 の証明を繰り返してみれば g が BMO 写像となるための必要十分条件は "g が $\mathbf{C}$ 内の任意の円板上一様に有限葉" であることが分かる．よって

系 4.1. 非定数整関数 $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ もしくは $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}\setminus\{0\}$ について g が BMO 写像となるための必要十分条件は g が多項式となることである.

定理 4.2. Riemann 面 R, R', $(R\neq\mathbf{C},\hat{\mathbf{C}})$ 及びその間の非定数正則写像 $g:R\to R'$ に対し以下の条件を考える.

(1) g は BMO 写像.

(2) ある定数 $L>0$ 及び自然数 p が存在し任意の $z\in R$ に対し g は $\hat{B}_{z,L}$ 上 p 葉.

そのとき常に (2) $\to$ (1) が成立する．また R' が compact でないならば逆に (1) $\to$ (2) が成立する．さらに R' が Green 関数 $g_{R'}(z,\zeta)$ を持つ場合はこれらの条件は次の (3) とも同値である.

(3) $\sup_{\zeta\in R'}\|g_{R'}(g,\zeta)\|_{*,R}<\infty$.

(証明) ((2) → (1)). (2) とする. R' 上の点 w_0 を適当に取り $R_0' = R' \backslash \{w_0\},\ R_0 = R \backslash g^{-1}(\{w_0\})$ とおく. $\phi : \Delta \to R_0$ を中への等角写像とし $G = \phi(\Delta)$ とおくとき

$$B_{z,L}^{G} \subset \hat{B}_{z,L}^{R_0} \subset \hat{B}_{z,L}^{R}, \quad z \in G$$

なので $g \circ \phi$ は各 $B_{z,L}^{\Delta}$, $z \in \Delta$ 上 p 葉. よって補題 4.10 を用い定理 4.1 (2) → (1) の論法を繰り返せば $f \in BMO(R)$ に対し $\|f \circ g\|_{*,R_0} \le C(p,L)\|f\|_{*,R_0'} \le C(p,L)\|f\|_{*,R'}$. さらに点列 $g^{-1}(\{w_0\}) \subset R$ に除去可能性定理 (補題 4.8) を用いれば $\|f \circ g\|_{*,R} \le C'(p,L)\|f \circ g\|_{*,R_0}$. よって (2) が成立する.

次に R' が compact でない ならば各 $\zeta \in R'$ に対して常に以下はの様な関数 p_ζ が存在する.

i) $R' \setminus \{\zeta\}$ 上調和.

ii) ζ に於て (ζ が局所座標によって原点に対応しているとして) $-\log|z|$ なる特異性を持つ.

iii) 任意の $s \in \mathbf{R}$ に対し

$$\int_{\{p_\zeta = s\}} |^* dp_\zeta| \le 2\pi$$

例えば R' が Green 関数を持てば ζ に曲を持つ Green 関数がそうでありまた R' が Green 関数を持たない場合には Evans-Selberg potential がそうである. $\phi : \Delta \to R' \setminus \{\zeta\}$ を中への等角写像とする. $p_\zeta \circ \phi$ を実部とする Δ 上の正則関数 f については p_ζ の性質 iii) より f の逆関数の Riemann 面は半径 π 以上の単葉円板を含まない. よって系 1.5 より $\|p_\zeta \circ \phi\|_{*,\Delta} \le A\|f\|_{*,\Delta} \le A$. ゆえに $\|p_\zeta\|_{*,R' \setminus \{\zeta\}} \le A$, $\zeta \in R'$ となり一点の除去可能性定理を用いれば $\|p_\zeta\|_{*,R'} \le A$, $\zeta \in R'$. ここで補題 4.3 より各 $z \in R$ に対し $\phi_0(0) = z$ かつ $\hat{B}_{z,1/16} \subset \phi_0(\{|\zeta| < 1/2\})$ なる中への等角写像 $\phi_0 : \Delta \to R$ が存在する. 仮定より

$$\|p_\zeta \circ g \circ \phi_0\|_{*,\Delta} \le \|p_\zeta \circ g\|_{*,R} \le C\|p_\zeta\|_{*,R} \le C.$$

そこで補題 1.10 を用いれば $\{|\zeta| < 1/2\}$ 上における $p_\zeta \circ g \circ \phi_0$ の ζ 点の個数は一様に評価でき, $\hat{B}_{z,1/16}$ 上での g の ζ 点の個数も一様に評価できることになる. よって g は $\hat{B}_{z,1/16}$ 上一様に有限様となり (2) が示された. 以上により特に R' が Green 関数を持てば (1) → (3) 及び (3) → (2) も示された. Q. E. D.

一般に非定数正則写像 $g : R \to R'$ において R' が compact とならないものは

(1) $R \ne \mathbf{C},\ \hat{\mathbf{C}}$ となるか或は

(2) $R = \mathbf{C}$ でしかも R' は $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ のいずれか

である. よって定理 4.2 及び系 4.1 により R' が compact でない非定数正則写像 $g : R \to R'$ についてはそれが BMO 写像となるための特徴付けが得られたことになる.

系 4.2. R, R' を任意の Riemann 面, $g : R \to R'$ を p 葉の正則写像とすると g は常に BMO 写像でありしかもその作用素 norm は p にのみ依存する定数によって評価できる. 特に compact Riemann 面間の正則写像は常に BMO 写像である.

(証明) $g(R)$ 上の異なる 2 点 w_1, w_2 を適当に取り $R_0' = R' \backslash \{w_1,\ w_2\},\ R_0 = R \backslash g^{-1}(\{w_1,\ w_2\})$

とおくと $g|R_0 : R_0 \to R_0'$ は前定理の仮定 (2) を満たすので $g|R_0$ は BMO 写像. あとは BMO の除去可能性定理 (補題 4.3) を用いればよい. Q. E. D.

系 4.3. 非定数正則写像 $g : R \to R'$ において g が BMO 写像であるという性質は R' の取り方によらない. すなわち $g : R \to R'$ を非定数正則写像, R_0, R_1 を $g(R)$ を含む R' の部分領域とするとき, もし $g : R \to R_0$ が BMO 写像であれば $g : R \to R_1$ も BMO 写像でありしかもそれらの作用素 norm は互いに他の作用素 norm にのみ依存した定数で評価できる.

(証明) $g : R \to R_0$ を BMO 写像とする. R_0 が compact でない場合は定理 4.2 または系 4.1 より $g : R \to R_1$ も BMO 写像であることがわかる. 次に R_0 が compact である場合には R_1 は R_0 の 真部分領域としてよい. そこで $R_0 \setminus R_1$ 上の点 z_0 を取り $R_0' = R_0 \setminus \{z_0\}$ とおけば一点の除去可能性より $BMO(R_0)$ と $BMO(R_0')$ は同一視できるので $g : R \to R_0'$ も BMO 写像. よってこの場合も R_0 が compact でない場合に帰着される. Q. E. D.

系 4.3 におけるこれら BMO 写像の作用素 norm が互いに他の絶対定数倍で評価できるかどうかについては平面領域の場合においてさえ不明である. またやはり定理 4.2 及び系 4.2 により

系 4.4. 非定数正則写像 $g : R \to R'$ 及び $h : R' \to R''$ において R'' は compact でなく $h \circ g : R \to R''$ は BMO 写像とする. そのとき $g : R \to R'$ も BMO 写像.

(注) $h : R' \to R''$ については一般には BMO 写像とはならない.

ここで Δ 以外の (自明でない) 普遍被覆を持つ Riemann 面 R に対し $BMO_*(R) = BMO_*(R)$ が成立するかどうかをまとめておこう.

まず $R = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ なる場合. 普遍被覆 $\pi(z) = e^z : \mathbf{C} \to R$ は多項式ではないので系 4.1 より $BMO_*(R) \neq BMO(R)$. 具体的には $h(z) = \log|z|$ とおけば h は $BMOH(R)$ 関数. 他方 $h \circ \pi(z) = \mathrm{Re} z$ は $BMO(\mathbf{C})$ 関数ではない.

またに R が torus の場合. $\pi : \mathbf{C} \to R$ を普遍被覆, f を $BMO(R)$ 関数とする. ある定数 $r_0 > 0$ が存在し $\mathbf{C}$ 上の半径が r_0 以上の任意の円板上 π は単葉. よってそのような円板上での $f \circ \pi$ の mean oscillation は一様に評価できる. 他方円板 B の半径が ∞ に発散するとき, $f \circ \pi$ の周期性によって $m(B)^{-1} \int_B |f \circ \pi| dm$ は周期平行四辺形 R_0 上での積分平均 $m(R_0)^{-1} \int_{R_0} |f \circ \pi| dm$ に収束する. よって $m(B)^{-1} \int_B |f \circ \pi - (f \circ \pi)_B| dm \leq 2m(B)^{-1} \int_B |f \circ \pi| dm$ より f は $BMO_*(R)$ 関数となる. よってこの場合は $BMO_*(R) = BMO(R)$.

例 4.3. 楕円関数 $\mathcal{P} : \mathbf{C} \to \hat{\mathbf{C}}$ は対応する torus を R とするとその普遍被覆 $\mathbf{C} \to R$ 及び 2 葉の (分岐) 非有界な正則写像 $g_0 : R \to \hat{\mathbf{C}}$ によって $\mathcal{P} = \pi \circ g_0$ と表わせる. ここで系 4.2 より g_0 は BMO 写像でありまた先程見たように π も BMO 写像である. よって $\mathcal{P} : \mathbf{C} \to \hat{\mathbf{C}}$ も BMO 写像である. $\mathcal{P}$ はまた $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への BMO 写像にもなっているので (孤立) 真性特異点を持つ BMO 写像の存在することがわかる. また $g_1 : \Delta \to R$ を $g_1(z) = g_0(1/(z-1))$ により定めれば g_1 は BMO map であるがどのように大きい定数 $L > 0$ を取っても $\mathrm{d}(B, \partial\Delta) \geq L\mathrm{rad}(B)$ なる円板上での g_1 の葉数を一様に評価することはできない. よって定理 4.2 において R' が torus である場合には (1) → (2) が成立せず “ R' は compact でない ” という仮定は外せないことが分か

る. 同様にして $g_2:\Delta\to\hat{\mathbf{C}}$ を $g_2(z)=\mathcal{P}(1/(z-1))$ により定めればこの写像は定理 4.2 の (1) $\to$ (2) が $R'=\hat{\mathbf{C}}$ の場合の於ても成立しない例となっている.

§4.2. BMO 写像 (その 2)

本節では R' が compact である場合のなかで最も簡単であると思われる, 有理函数 $g:\hat{\mathbf{C}}\to\hat{\mathbf{C}}$ についてその BMO 写像としての性質を調べてみよう. 系 4.2 によれば g の葉数を p とするとき g の BMO 写像としての作用素 norm は p にのみ依存した定数で評価できた. まず問題はこの逆が成立するかどうか, すなわち g の葉数が g の BMO 写像としての作用素 norm にのみ依存した定数で評価できるかどうかである.

$z_n\in\Delta,\ 1\le n\le N$ を零点とする Blaschke 型の有理函数 $F:\hat{\mathbf{C}}\to\hat{\mathbf{C}}$

$$F(z)=\prod_{n=1}^{N}\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}$$

についてその BMO 写像としての作用素 norm を $\|F\|$ とおく. また F の零点の導く Δ 上の Carleson 測度 $\sum_{n=1}^{N}(1-|z_n|^2)d\delta_{z_n}$ の Carleson 定数 (補題 1.12 (3) における sup の値をここでは便宜上 Carleson 定数と呼ぶことにする.) を $\mathrm{Car}(F)$ と表わす. さらに $\zeta\in\Delta$ に対し $F_\zeta=(F-\zeta)/(1-\bar{\zeta}F)$ とおき $\mathrm{Car}^*(F)=\sup_{\zeta\in\Delta}\mathrm{Car}(F_\zeta)$ と定める. そのとき

定理 4.3. $\mathrm{Car}^*(F)$ にのみ依存した定数 $L_1(\mathrm{Car}^*(F))$ 及び $\|F\|$ にのみ依存した定数 $L_2(\|F\|)$ が存在し

$$\|F\|\le L_1(\mathrm{Car}^*(F)),\quad \mathrm{Car}^*(F)\le L_2(\|F\|).$$

証明の前に Δ 上の補間点列について知られた結果を思い出しておこう. Δ 上の (有限又は無限) 点列 $\{z_n\}_n$ は

$$I(\{z_n\}_n)=\inf_k\prod_{j\ne k}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_k z_j}\right|>0$$

なるとき補間点列であるという. $\{z_n\}$ をその零点とする Blaschke 積を $F(z)$ とするとき

$$I(\{z_n\}_n)=\inf_n(1-|z_n|^2)|B'(z_n)|.$$

命題 4.1.(Mckenna [53]) Δ 上の (有限又は無限) 点列 $\{z_n\}_n$ について, 対応する測度 $\mu=\sum_n(1-|z_n|^2)\delta_{z_n}$ が Carleson 測度であれば $\{z_n\}_n$ は以下のような $s, s\le\alpha$ 個の点列 $\{z_n^k\}_n$, $1\le k\le s$ に分割できる.

(1) $\{z_n\}_n=\cup_{k=1}^{s}(\{z_n^k\}_n)$, (重複度を考慮して disjoint union)

(2) 各 $\{z_n^k\}_n$ は $I(\{z_n^k\}_n)\ge\beta$ なる補間点列.

ここで $\alpha,\beta>0$ は $\mathrm{Car}(\mu)$ にのみ依存する定数である.

命題 4.2.(Hoffman [42]) $\{z_n\}_n$ を Δ 上の補間点列, $F(z)$ を対応する Blachke 積とする. その

ときある $\varepsilon = \varepsilon(I(\{z_n\}_n)) > 0$ が存在し $F^{-1}(\{|z| < \varepsilon\}) = \cup_n U_n, \ \ z_n \in U_n$ と disjoint union にあらわされかつ $F : U_n \to \{|z| < \varepsilon\}$ は等角となる．

補題 4.12. $F(z)$ を有限 Blaschke 積, B を $\mathrm{d}(B, \partial\Delta) = \mathrm{rad}(B)$ なる Δ 上の円板とする．そのとき B 内の $\mathrm{rad}(B') > \alpha \mathrm{rad}(B)$ なる円板 B' で B' 上 F が等角写像となりしかも B' の中心を z' として

$$\beta \mathrm{d}(F(z'), \partial\Delta) \leq \max_{z \in \partial B'} |F(z) - F(z')| \leq \gamma \min_{z \in \partial B'} |F(z) - F(z')|.$$

$$\delta^{-1}|F'(z')| \leq |F'(z)| \leq \delta |F'(z')|, \quad z \in B'.$$

となるものが存在する．ここで α, β, γ, $\delta > 0$ は $\mathrm{Car}^*(F)$ にのみ依存する定数である．

(証明) B を $\mathrm{d}(B, \partial\Delta) = \mathrm{rad}(B)$ なる Δ 上の円板とする．一般に $(1-|z|^2)d\mu$ が Carleson 測度である時 $d\mu$ は Δ 上の一様局所有限な測度であった．よって仮定よりまず F は B 上 $p = p(\mathrm{Car}^*(F))$ 葉となる．よって補題 4.6 より B 内に $\mathrm{rad}(B_0) > \alpha \mathrm{rad}(B)$ なる円板 B_0 で B_0 上 F が等角写像となるものが存在する．よって $B' = (1/2)B_0$ と定めれば $\beta \mathrm{d}(F(z'), \partial\Delta) \leq \max_{z \in \partial B'} |F(z) - F(z')|$ 以外の主張は全て満たされる．残ったこの主張を証明するには $(1-|z'|^2)|F'(z')|$ を下から評価すれば十分である．ここで必要なら F のかわりに $(F - F(z')/(1 - \overline{F(z')}F)$ を考えることで $F(z') = 0$ と仮定してよい．F の零点の集合を $\{z_n\}_n$, $z_1 = z'$ とする．命題 4.1 を用いてこの点列を s この点列 $\{z_n^k\}_n$, $1 \leq k \leq s$ に分割しそれぞれに対応する Blaschke 積を F_k とすれば $F = \prod_{k=1}^s F_k$. ここで z' は F_1 の零点となっているとする．そのとき $(1 - |z'|^2)|F_1'(z')| \geq C(\mathrm{Car}^*(F)) > 0$. また命題 4.2 より $|F_k(z')| \geq C'(\mathrm{Car}^*(F)) > 0$, $2 \leq k \leq s$. よって

$$(1 - |z'|^2)|F'(z')| = (1 - |z'|^2)|F_1'(z')| \prod_{k=2}^{s} |F_k(z')| \geq C''(\mathrm{Car}^*(F)) > 0.$$

Q. E. D.

補題 4.13. $BMO(\Delta)$ 関数 f について $\|f\|_{*,\Delta} \leq K, \ \ \sup_B |f|_B \leq K$ が成立しているとする．ここで sup は $\mathrm{d}(B, \partial\Delta) = \mathrm{rad}(B)$ なる Δ 上の全ての円板 B について取るものとする．そのとき f を, $\mathbf{C} \setminus \Delta$ 上では値 0 と置くことにより $\mathbf{C}$ 上に拡張した関数を $\hat{f}$ とすれば $\hat{f}$ は $BMO(\hat{\mathbf{C}})$ 関数となりしかも $\|\hat{f}\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq AK$.

この補題は定理 1.11 (1) $\to$ (2) の証明と同様になされる．

(定理 4.3 の証明) まず右辺の不等式を証明する．$\zeta \in \Delta$ に対し $\hat{\mathbf{C}}$ 上の関数 f_ζ を

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{z - \zeta} \right|, & z \in \Delta, \\ 0, & z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \Delta, \end{cases}$$

と定めれば BMO の lattice 性より $\|f_\zeta\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq A$. また Δ 上の測度 $\mu_\zeta = \sum\{\delta_z | z \in F^{-1}(\zeta)\}$ ($\sum$ は重複度を考慮して取る) に対し $f_\zeta \circ F = P^{\mu_\zeta}$ となっている．ここで P^{μ_ζ} は μ_ζ の Green potential を $\hat{\mathbf{C}} \setminus \Delta$ 上へは 0 として延ばした $\hat{\mathbf{C}}$ 上の関数である．よって定理 1.11 より

$$\mathrm{Car}(F_\zeta) = \mathrm{Car}((1 - |z|^2)d\mu_\zeta) \leq C(\|P^{\mu_\zeta}\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}) \leq C(\|F\| \|f_\zeta\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}) \leq C(\|F\| A)$$

よって $\mathrm{Car}^*(F) \leq C(\|F\|A)$.

次に左辺の不等式を証明する．以下 $C > 0$ は $\mathrm{Car}^*(F)$ にのみ依存した定数とする．定理 4.2 よりまず $\|F|\Delta\|$, $\|F|(\hat{\mathbf{C}} \setminus \bar{\Delta})\| \leq C_1$. p を $\partial\Delta$ についての反転とし $f \in BMO(\hat{\mathbf{C}})$ に対し f_1, f_2 を

$$f_1(z) = \begin{cases} f(p(z)), & z \in \Delta, \\ f(z), & z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \Delta, \end{cases} \qquad f_2(z) = \begin{cases} f(z) - f(p(z)), & z \in \Delta, \\ 0, & z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \Delta, \end{cases}$$

と定める．すると鏡像の原理より $\|f_1\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq A\|f\|_{*,\Delta} \leq A\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}$. ゆえに $f = f_1 + f_2$ より $\|f_2\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq A\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}$. 他方 $f \circ F = f_1 \circ F + f_2 \circ F$ において $(f_1 \circ F) \circ p = f_1 \circ p \circ F = f_1 \circ F$ なることから再び鏡像の原理より

$$\|f_1 \circ F\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq A\|f_1 \circ F\|_{*,\Delta} \leq C\|f_1\|_{*,\Delta} \leq C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$

よって最初から $f \in BMO(\hat{\mathbf{C}})$ としては Δ の外では恒等的に 0 となっているものだけを考えれば十分である．そのような f をとる．$\mathrm{d}(B, \partial\Delta) = \mathrm{rad}(B)$ なる円板 B に対し補題 4.8 の円板 $B' \subset B$ を取りその中心を z' とすれば B_0 を $F(z')$ 中心半径 $\max_{z \in \partial B'} |F(z) - F(z')|$ の円板として

$$(|f| \circ F)_{B'} \leq C\frac{1}{m(F(B'))}\int_{F(B')} |f| dm \leq C|f|_{B_0}$$

ここで B_0 と $\partial\Delta$ に関し鏡像の位置関係にある円板 B_1 をとれば補題 3.5, 及び補題 3.1 より

$$|f|_{B_0} = ||f|_{B_1} - |f|_{B_0}| \leq C\||f|\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$

同様にして

$$|(|f| \circ F)_B - (|f| \circ F)_{B'}| \leq C\||f| \circ F\|_{*,\Delta} \leq C\|f \circ F\|_{*,\Delta} \leq C\|f_{\|}*, \Delta \leq C\|f_{\|}*, \hat{\mathbf{C}}.$$

以上の結果をまとめれば $(|f| \circ F)_B \leq C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}$. よって補題 4.9 を用いれば $\|f \circ F\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \leq C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}$.

Q. E. D.

この証明を見れば F は必ずしも有限 Blaschke 積でなくとも destructive な Blaschke 積, すなわち, 任意の $\zeta \in \Delta$ に対し F_ζ が再び Blaschke 積となるような Blaschke 積でさえあればよい. (そのとき F は一般に $\partial\Delta$ 上では値を持たないがその測度は 0 であり F を BMO 写像として扱うかぎり無視できる.)

$C_\Delta(z, \zeta)$, $z, \zeta \in \Delta$ を補題 1.12 の関数

$$C_\Delta(z, \zeta) = C(z, \zeta) = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \bar{\zeta}z|^2},$$

とする．普遍被覆 $\pi : \Delta \to R$ を持つ Riemann 面 R に対し $C_R(z, \zeta)$, $z, \zeta \in R$ を

$$C_R(\pi(z), \pi(\zeta)) = \sum_{A \in \Gamma} C_\Delta(z, Az), \quad z, \zeta \in \Delta$$

により定める．ここで Γ は被覆変換群とする．C_Δ が $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$ 不変なることより C_R は well-defined となっている．また

$$\frac{1}{2}C_\Delta(z, \zeta) \leq \min\{g_\Delta(z, \zeta),\ 1\} \leq \frac{e^2}{e^2 - 1}C_\Delta(z, \zeta)$$

より C_R が収束するのは R が Green 関数を持つときに限りまた $C_R(z,\zeta) \le 2g_R(z,\zeta)$ が成立する．R 上の測度 μ に対し

$$C_R^{\mu}(z) = \int_R C_R(z,\zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in R$$

と置くとき容易に

補題 4.14. μ_R を R 上の正測度, μ_Δ を μ_R の普遍被覆写像による lift となっている Δ 上の測度とする．そのとき $C_R^{\mu_R} \circ \pi = C_\Delta^{\mu_\Delta}$ が成立する．特に $(1-|z|^2)d\mu_\Delta$ が Carleson 測度となるための必要十分条件は $C_R^{\mu_R}$ が R 上の有界関数となることである．

C_R の有界性については

補題 4.15. C_R が有界となるための必要十分条件は R が Green 関数を持ちしかもある定数 $M > 0$ が存在し任意の $z \in R$ に対し領域 $\{\zeta \in R \mid g_R(\zeta,z) > M\}$ が単連結となることである．

(証明) まず C_R が有界と仮定する．すると C_Δ が $\min\{g_\Delta,\ 1\}$ と比較可能なることからある定数 $K > 0$ が存在し領域 $\Omega_{z,K} = \{z \in R \mid \rho_R(\zeta,z) < K\}$ は単連結となる．そこで $\Omega_{z,K}$ を R の普遍被覆 Δ 上の部分領域と同一視すればある定数 $L > 0$ が存在し任意の被覆変換 A に対し $g_\Delta(\zeta, Az) \le LC_\Delta(\zeta, Az)$, $\zeta \in R \setminus \Omega_{z,K}$ よって $A \in \Gamma$ について和を取れば $g_R(\zeta,z) \le LC_R(\zeta, Az)$, $\zeta \in R \setminus \Omega_{z,K}$. 故に仮定よりある定数 $M > 0$ が存在し $g_R(\zeta,z) \le M$, $\zeta \in R \setminus \Omega_{z,K}$ となり最後に最大値の原理を用いれば領域 $\{\zeta \in R \mid g_R(\zeta,z) > M\}$ は単連結となる．

逆にある定数 $M > 0$ が存在し任意の $z \in R$ に対し領域 $U_{z,M} = \{\zeta \in R \mid g_R(\zeta,z) > M\}$ が単連結であるとする．やはり $U_{z,M}$ を R の普遍被覆 Δ 上の領域と同一視する．まず $C_R(\zeta,z) \le 2K$, $\zeta \in R \setminus U_{z,M}$. また $\sum_{A \ne id} g_\Delta(\zeta, Az)$ は $U_{z,M}$ の単連結性から $U_{z,M}$ 上の調和関数を定める．よって最大値原理から $\zeta \in U_{z,M}$ なるとき $\sum_{A \ne id} C_\Delta(\zeta, Az) \le 2\sum_{A \ne id} g_\Delta(\zeta, Az) \le 2K$. ゆえに $C_R(\zeta,z) \le 2K+1$, $\zeta \in U_{z,M}$. 以上により R 上 $C_R \le 2K+1$. Q. E. D.

系 4.5. $z \in R$ に対し Δ 上の測度を μ_z を $\mu_z = \sum\{\delta_w \mid \pi(w) = z\}$ により定めるとき $\sup_{z \in R} \mathrm{Car}((1-|\zeta|^2)d\mu_z(\zeta)) < \infty$ なるための必要十分条件は R が前補題の条件を満たすことである．

よって

系 4.6. R を補題 4.11 の条件を満たす Riemann 面とし $g : R \to \Delta$ を (分岐) 非有界な有限葉の被覆となる正則関数とする．そのとき $F = g \circ \pi : \Delta \to \Delta$ は destructive な Blaschke 積でしかも $\mathrm{Car}^*(F) < \infty$ となる．特に g の自然な拡張として得られる $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への写像は BMO 写像となる．

例 4.4. 上半平面上 H の Blaschke 積

$$F(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{z - 2^{-n}i}{z + 2^{-n}i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^n i - z}{2^n i + z}$$

は 円環 H/Γ, (Γ は $A(z) = 4z$ により生成される $\mathrm{M\ddot{o}b}(H)$ の部分群) 上の 2 葉の被覆写像と H/Γ の普遍被覆写像の合成である．よって系 4.6 より $\mathrm{Car}^*(F) < \infty$ となり $F : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ は BMO 写

像である.

定理 4.3 によって葉数だけによって F の作用素 norm が評価できないことも容易にわかる. (また系 4.7 参照.)

また一般の有理関数に対しては, その BMO 写像としての作用素 norm の評価についてはほとんどなにもわかっていない. このように正則写像 $g: R \to R'$ において R' が compact でない場合比較的簡単に BMO 写像の特徴付けが得られたのとは対照的に R' が compact である場合については, それが有理関数である場合においてさえもその作用素 norm を評価することは簡単ではないようである.

ここで R' が compact な場合について, g の値の分布の, Hahn 距離的にみてのある種の一様性を示す補題を挙げておく.

補題 4.16. 非定数正則写像 $g: R \to R'$ について R' は compact かつ g は BMO 写像であるとする. k を Δ 上の compact な support を持つ C^1 級の関数, $\phi: \Delta \to R$ を中への等角写像とする. そのとき $\|g\|$ を作用素 norm として任意の異なる 2 点 $z_1,\ z_2 \in R'$ に対し

$$\left| \sum_{w \in (g\circ\phi)^{-1}(z_1)} k(w) - \sum_{w \in (g\circ\phi)^{-1}(z_2)} k(w) \right| \le A\|g\| \|\Delta k\|_\infty$$

(証明) z_1, z_2 において互いに逆符号の, flux が 2π であるような対数的特異性を持つ $R' \setminus \{z_1, z_2\}$ 上の調和関数を考えると定理 4.2 の証明と同様にしてその関数の $BMO(R')$ norm は絶対定数により評価できることがわかる. よってあとは補題 1.11 の証明を繰り返せばよい. Q. E. D.

絶対値の中の各項毎には評価できないが差は評価できるということである.

次の例は BMO 写像となる正則写像の特徴付けの困難さを示している.

定理 4.4. 任意に与えられた平面領域 D 及び D 上の内部に集積しない点列を $\{z_n\}_n$ に対し $\{z_n\}_n$ においてのみ極を持つ有理型関数 $g: D \to \hat{\mathbf{C}}$ で BMO 写像となるものが常に存在する.

(証明) $\varepsilon_n > 0$ を十分小さく取れば関数

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{z - z_n}$$

が求めるものとなっていることを示そう. D 上の各 z_n を中心とする disjoint な円板列 B_n' を取り $B_n = (1/3)B_n'$ とおく. $D_0 = D \setminus \cup_n B_n$ と定めるとき $\varepsilon_n > 0$ を十分小さく取れば $g|D_0$ は D 上への擬等角拡張 $\tilde{g}$ を持つような等角写像となる. f を $BMO(\hat{\mathbf{C}})$ 関数とすると BMO の擬等角普遍性により $f \circ \tilde{g}$ は $BMO(D)$ 関数でかつ $\|f \circ \tilde{g}\|_{*,D} \le C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}$. また g は B_n' 上 2 葉の被覆となっているので系 4.2 より g は各 B_n' 上 BMO 写像でありその作用素 norm は一様に評価できる. B_n に接し B_n と同じ半径を持つ円板 B_n'' をとれば $B_n'' \subset B_n'$ なので

$$|(f\circ g)_{B_n} - (f\circ\tilde{g})_{B_n}| \le |(f\circ g)_{B_n} - (f\circ g)_{B_n''}| + |(f\circ\tilde{g})_{B_n''} - (f\circ\tilde{g})_{B_n}| \le C\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$

ゆえに

$$\int_{B_n} |(f\circ g)-(f\circ\tilde{g})|dm \le \int_{B_n} |(f\circ g)-(f\circ g)_{B_n}|dm + \int_{B_n} |(f\circ\tilde{g})-(f\circ\tilde{g})_{B_n}|dm$$
$$+\int_{B_n} |(f\circ g)_{B_n}-(f\circ\tilde{g})_{B_n}|dm \le Cm(B_n)\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$

D 内の円板 B についてまず
(Case 1) $B\cap B_n\neq\emptyset$ なるある B_n に対し $\mathrm{rad}(B)\le\mathrm{rad}(B_n)$ となるとき．そのとき $B\subset\tilde{B}_n$ なので g が $\tilde{B}_n$ 上 2 葉なることから $f\circ g$ の B 上での mean oscillation は評価できる．
(Case 2) $B\cap B_n\neq\emptyset$ なる全ての B_n に対し $\mathrm{rad}(B)\ge\mathrm{rad}(B_n)$ となるとき．このような B_n に対しては $B_n\subset 5B$ なので $\sum_{B_n\cap B\neq\emptyset} m(B_n)\le m(5B)=25m(B)$．よって

$$\int_B |(f\circ g)-(f\circ\tilde{g})_B|dm \le \int_B |(f\circ g)-(f\circ\tilde{g})|dm + \int_B |(f\circ\tilde{g})-(f\circ\tilde{g})_B|dm$$
$$\le \sum_{B_n\cap B\neq\emptyset}\int_{B_n} |(f\circ g)-(f\circ\tilde{g})|dm + Cm(B)\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$
$$\le \sum_{B_n\cap B\neq\emptyset} Cm(B_n)\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} + Cm(B)\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}} \le Cm(B)\|f\|_{*,\hat{\mathbf{C}}}.$$

以上によって $f\circ g\in BMO(D)$. Q. E. D.

系 4.7. 任意に与えられた $\hat{\mathbf{C}}$ 上の有限個の点列 $\{z_n\}_n$ に対し $\{z_n\}_n$ にのみ極を持つ有理関数 $g:\hat{\mathbf{C}}\to\hat{\mathbf{C}}$ でその BMO 写像としての norm が絶対定数で評価できるようなものが存在する．

(証明) ∞ はこの点列の点であるとしてよい．定理 4.4 の証明において g の作用素 norm が擬等角写像 $\tilde{g}$ の maximal dilatation にのみ依存することに注意すれば先と同様に $\varepsilon_n>0$ を十分小さく取るとき関数

$$g(z)=z+\sum_{z_n\neq\infty}\frac{\varepsilon_n}{z-z_n}$$

が求めるものとなっていることがわかる． Q. E. D.

このように正則写像 $g:R\to R'$ において R' が compact でない場合比較的簡単に BMO 写像の特徴付けが得られたのとは対照的に R' が compact である場合については, それが有理関数である場合においてさえもその作用素 norm を評価することは簡単ではないようである．

§4.3. BMO 写像 (その 3)

次に BMOH 写像となる正則写像について考察しよう．非定数正則関数 $g:D\to D'$ に於て $D'=\mathbf{C}$ であれば $BMOH(\mathbf{C})$ が退化することから g は常に BMOH 写像である．また

定理 4.5. 非定数正則関数 $g:D\to D'$, $(D'\neq\mathbf{C})$ に対し以下の条件は同値である．

(1) g は BMOH 写像.

(2) ある定数 $K > 0$ が存在し

$$\frac{|dg(z)|}{\mathrm{d}(g(z), \partial D')} \leq K \frac{|dz|}{\mathrm{d}(z, \partial D)}, \quad z \in D.$$

(3) ある定数 $L > 0$ が存在し $\mathrm{d}(B, \partial D) \geq L\mathrm{rad}(B)$ なる任意の円板 $B \subset D$ に対し $g(B)$ は $\partial D'$ を分離しない.

(4) $\sup_{\zeta \in \mathbf{C} \setminus D'} \| \log |g - \zeta| \|_{*,D} < \infty$.

(5) $\sup_{\zeta \in \partial D'} \| \log |g - \zeta| \|_{*,D} < \infty$.

(証明) (2) $\to$ (1) は定理 1.6 より直接わかる. (1) なるときやはり閉グラフ定理によって $h \mapsto h \circ g$ は有界作用素. よって $\log |w - \zeta|$, $\zeta \in \mathbf{C} \setminus D'$ が $BMOH(D')$ 関数なることから (4) が成立. (4) $\to$ (5) は明らか.

((5) $\to$ (2)). (5) とすれば $z_0 \in D$ に対し $d(g(z_0), \partial D') = d(g(z_0), \zeta)$ なる点 $\zeta \in \partial D'$ をとるとき定理 1.6 から $|g'(z)|/|g(z) - \zeta| \leq C/\mathrm{d}(z, \partial D)$. よって $z = z_0$ とおけば (2) を得る.

((2) $\to$ (3)). (2) なるとき L を $L > K$ と取れば (3) が成立することを示す. もし (3) が成立しないならば $\mathrm{d}(B, \partial D) \geq L\mathrm{rad}(B)$ なるある円板 $B \subset D$ に対し $g(B)$ は $\partial D'$ を分離する. よって $g(\partial B)$ も $\partial D'$ を分離する. w_0 を $g(\partial B)$ によって囲まれる $\partial D'$ 上の点とし $w - w_0 = re^{i\theta}$ とおくとき

$$2\pi \leq \int_{g(\partial B)} \frac{r|d\theta|}{r} \leq \int_{g(\partial B)} \frac{|dw|}{|w - w_0|} \leq \int_{g(\partial B)} \frac{|dw|}{\mathrm{d}(w, \partial D')} = \int_{\partial B} \frac{K|dz|}{\mathrm{d}(z, \partial D)}$$

$$\leq \frac{K}{\mathrm{d}(B, \partial D)} \int_{\partial B} |dz| = \frac{2\pi K \mathrm{rad}(B)}{\mathrm{d}(B, \partial D)} \leq \frac{2\pi K}{L} < 2\pi.$$

これは矛盾.

((3) $\to$ (2)). (3) とすると $\mathrm{d}(B, \partial D) \geq L\mathrm{rad}(B)$ なる円板 $B \subset D$ をとるとき $g(B)$ は $\partial D'$ を分離しないので $g(B) \subset G' \subset D'$ なる単連結領域 G' が存在する. よって z を B の中心とし Schwartz の補題を用いれば

$$\frac{|dg(z)|}{\mathrm{d}(g(z), \partial D')} \leq \frac{|dg(z)|}{\mathrm{d}(g(z), \partial G')} \leq 4\rho_{G'}(g(z))|dg(z)| \leq 4\rho_B(z)|dz| = \frac{4|dz|}{\mathrm{rad}(B)} \leq \frac{4(L+1)|dz|}{\mathrm{d}(z, \partial D)}$$

Q. E. D.

定理 4.6. Riemann 面 R, R', $(R' \neq \mathbf{C},\ \hat{\mathbf{C}})$ 及びその間の非定数正則写像 $g : R \to R'$ に対し以下の条件を考える.

(1) g は BMOH 写像.

(2) ある定数 $K > 0$ が存在し $\quad \hat{\rho}_{R'}(g(z))|dg(z)| \leq K \hat{\rho}_R(z)|dz|, \quad z \in R.$

(3) ある定数 $L > 0$ が存在し任意の $z \in R$ に対し $g(\hat{B}_{z,L})$ は R' に於て可縮.

そのとき常に (2) と (3) は同値でありまた (2), (3) $\to$ (1) が成立する. 特に R' が平面領域 $(\neq \mathbf{C})$ であればこれら 3 条件及び以下の 2 条件は全て同値である.

(4) $\sup_{\zeta \in \mathbf{C} \setminus D'} \| \log |g - \zeta| \|_{*,R} < \infty$.

(5) $\sup_{\zeta\in\partial D'} \|\log|g-\zeta|\|_{*,R} < \infty$.

(証明) 前定理の証明をほぼそのまま繰り返せばよい．(2) → (1) は補題 4.9 による．

次に (2) とすると $L=1/8K$ と定めるとき $z\in R$ に対し補題 4.3 より $\phi_0(0)=g(z)$ なる中への等角写像 $\phi_0:\Delta\to R'$ で $g(\hat{B}_{z,L})\subset \hat{B}_{g(z),1/8}\subset\phi_0(\Delta)$ なるものが存在する．よって (3) が成立する．

逆に (3) とすれば $g(\hat{B}_{z,L})\subset G\subset R'$ なる単連結領域 G が取れるので

$$\hat{\rho}_{R'}(g(z))|dg(z)| \le \rho_G(g(z))|dg(z)| \le \rho_{\hat{B}_{z,L}}(z)|dz|.$$

ここで $L\le 2/3$ と仮定してよくこのとき補題 4.3 より $\phi(0)=z$ なる任意の中への等角写像 $\phi:\Delta\to R'$ に対し $\phi(\{|\zeta|<3L/4\})\subset\hat{B}_{z,L}$. よって

$$\rho_{\hat{B}_{z,L}}(z) \le \rho_{\phi(\{|\zeta|<3L/4\})}(z) = \frac{4}{3L|\phi'(0)|}.$$

そこで ϕ について inf を取れば $\rho_{\hat{B}_{z,L}}(z)\le 4\hat{\rho}_R(z)/3L$. 以上によって

$$\hat{\rho}_{R'}(g(z))|dg(z)| \le \frac{4\hat{\rho}_R(z)|dz|}{3L}.$$

最後に R' が平面領域である場合についての全ての主張の同値性は前定理と同様に対数関数を利用することによって示される． Q. E. D.

一般にこの定理の条件 (1) から (2), (3) が導けるかどうかは不明である．その証明には例えば ($BMOH(R')$ が退化しない Riemann 面 R' について) 次の様な $BMOH(R')$ 関数族 $\{h_\zeta\}_{\zeta\in R'}$ が存在すればよい．

i) $\{h_\zeta\}_{\zeta\in R'}$ の $BMOH(R')$ norm は有界,

ii) ある定数 $K>0$ が存在し　$|\nabla h_\zeta(\zeta)|\ge K\hat{\rho}_{R'}(\zeta)$,　$\zeta\in R'$.

R が平面領域であれば常にこのような調和関数の族が存在した．しかし一般にはこのような族は存在しない．例えば R を種数 1 以上の compact な Riemann 面から 2 点を除いて得られる Riemann 面とすれば $BMOH(R)$ はそれら 2 点において対数的特異性を持つものの全体でありその次元は 1 である．よってそのような調和関数族の共通の臨界点において ∇h は恒等的に 0 となる．

Riemann 面 R 上の正則関数 f に対しては f が $BMOA(R)$ 関数であるのは f の逆関数の Riemann 面が任意に大きい半径を持った単葉円板を含まないときに限るので

定理 4.7. 正則写像 $R\to R'$ は常に BMOA 空間を保存する．さらに絶対定数 $A>0$ が存在し $\|f\circ g\|_{*,R}\le A\|f\|_{*,R'}$, $f\in BMOA(R')$.

系 4.8. 正則関数 $g:D\to D', (D'\ne \mathbf{C})$ が非分岐非有界な被覆をなしていれば以下の条件は同値である．

(1) 任意の $f\in BMO(D')$ に対し $f\circ g\in BMO(D)$.

(2) 任意の $h\in BMOH(D')$ に対し $h\circ g\in BMOH(D)$.

(3) ある定数 $L>0$ が存在し $\mathrm{d}(B,\partial D)\ge L\mathrm{rad}(B)$ なる D 上の任意の円板 B 上 f は単葉.

(4) ある定数 $L>0$ が存在し $\mathrm{d}(B,\partial D)\geq L\mathrm{rad}(B)$ なる任意の円板 $B\subset D$ に対し $g(B)$ は $\partial D'$ を分離しない.

(5) ある定数 $K>0$ が存在し

$$\frac{|dg(z)|}{\mathrm{d}(g(z),\partial D')}\leq K\frac{|dz|}{\mathrm{d}(z,\partial D)},\quad z\in D.$$

$$(\Longleftrightarrow \rho_D(z)\mathrm{d}(z,\partial D)\leq K\rho_{D'}(z)\mathrm{d}(z,\partial D'),\quad z\in D.\ \ (D'\neq \mathbf{C}\setminus\{0\}\ \text{なるとき.}))$$

(6) $\log|g'|\in BMOH(D)$.

(7) $\sup_{\zeta\in\mathbf{C}}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

(8) $\sup_{\zeta\in D'}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

(9) $\sup_{\zeta\in\mathbf{C}\setminus D'}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

(10) $\sup_{\zeta\in\partial D'}\|\log|g-\zeta|\|_{*,D}<\infty$.

また D' が Green 関数 $g_{D'}(z,\zeta)$ を持つ場合は以下とも同値.

(11) $\sup_{\zeta\in D'}\|g_{D'}(g,\zeta)\|_{*,D}<\infty$.

(証明) (1),(3),(6),(7),(8),(11) の同値性は定理 4.1 による. ((3) については補題 4.10 に注意.) また (2),(4),(5),(9),(10) の同値性は定理 4.5 による. さらに (3) と (4) の同値性は明らか. Q. E. D.

系 4.9. を普遍被覆 $\pi:\Delta\to D$ をもつ平面領域 D に対して常に

$$BMO_*(D)\subset BMO(D),\quad BMO_*(D)\subset BMO(D),\quad BMOA_*(D)=BMOA(D).$$

また D に対し以下の条件は同値である.

(1) $BMO_*(D)=BMO(D)$.

(2) $BMOH_*(D)=BMOH(D)$.

(3) $\inf_{z\in D}r_z>0$.

(4) ある定数 $K>0$ が存在し

$$\frac{|dw|}{\mathrm{d}(w,\partial D)}\leq K\rho_D(w)|dw|,\quad w\in\Delta.$$

(5) $\log|\pi'|\in BMOH(\Delta)$.

(6) $\log\rho_D\in BMO_*(D)$.

(7) $\sup_{\zeta\in\mathbf{C}}\|\log|\cdot-\zeta|\|_{*,D,*}<\infty$.

(8) $\sup_{\zeta\in D}\|\log|\cdot-\zeta|\|_{*,D,*}<\infty$.

(9) $\sup_{\zeta\in\mathbf{C}\setminus D}\|\log|\cdot-\zeta|\|_{*,D,*}<\infty$.

(10) $\sup_{\zeta\in\partial D}\|\log|\cdot-\zeta|\|_{*,D,*}<\infty$.

また D が Green 関数 $g_D(z,\zeta)$ を持つ場合は以下とも同値.

(11) $\sup_{\zeta\in D}\|g_D(\cdot,\zeta)\|_{*,D,*}<\infty$.

(証明) (5), (6) の同値性は $-\log(1-|z|^2) = \log\rho_D(\pi(z)) + \log|\pi'(z)|$ において $-\log(1-|z|^2)$ が $BMO(\Delta)$ 関数なることによる．また (5), (6) の同値性は補題 4.5 による．他の条件の同値性は系 4.8 よりわかる． Q. E. D.

条件 (4) はまた次の条件とも同値であることが知られている (Beardon-Pommerenke [9]).

(12) ある定数 $K > 0$ が存在し ∂D を分離するような D 内の任意の環状領域 R に対し $M(R) \le K$.

定理 4.8. 普遍被覆 $\pi : \Delta \to R$ を持つ Riemann 面 R に対し以下の条件は同値である.

(1) $BMO_*(R) = BMO(R)$.

(2) $\inf_{z\in R} r_z > 0$.

(3) ある定数 $K > 0$ が存在し $\hat{\rho}_R(z)|dz| \le K\rho_R(z)|dz|, \quad z \in R$.

また R が Green 関数 $g_R(z,\zeta)$ を持つ場合は以下とも同値.

(4) $\sup_{\zeta\in R} \|g_R(\cdot,\zeta)\|_{*,R,*} < \infty$.

(証明) (2) $\leftrightarrow$ (3) は補題 4.4 による．(2) $\to$ (1) は定理 4.2 による．ここで R が compact でない場合には定理 4.2 から (1) $\to$ (2) が成立しまた R が compact な場合は (2) が成立しているので (1), (2), (3) の同値性が示された．最後に (4) についてはやはり定理 4.2 による． Q. E. D.

以上の証明に於て R が compact であるときについては条件 (1) での π の作用素 norm を用いての主張 (2), (3), (4) の量的評価は得られておらずそのような評価が可能かどうかは不明である．

Riemann 面 R が補題 4.15 における "ある定数 $M > 0$ が存在し任意の $z \in R$ に対し領域 $U_{z,M} = \{\zeta \in R \mid g_R(\zeta, z) > M\}$ は単連結" なる条件を満たせば $\inf_{z\in R} r_z > 0$ なることが容易に分かる．しかしこの逆は成立しない (Taniguchi [80]).

§4.4. 種々の BMO 空間, HD, AD 空間の関係

定理 4.9. 普遍被覆 Δ を持つ compact な Riemann 面 R に対し常に $BMO_\lambda(R) = BMO_*(R)$.

(証明) $\pi : \Delta \to R$ を普遍被覆写像とし, R_0 を Δ 上の原点を中心とする Dirichlet 基本領域とする．仮定より R_0 は Δ 上の相対 compact な領域である．原点中心 hyperbolic 半径 r_0 なる円盤 B_0 で $R_0 \subset B_0$ なるものを取る．f を $BMO_*(R)$ 関数とし $F = f\circ\pi$ と置く．そのとき B_0 上で $d\lambda$ と dm が比較可能なことから

$$\frac{1}{\lambda(R_0)}\int_{R_0} |F - F_{B_0}|d\lambda \le \frac{C}{\lambda(B_0)}\int_{B_0} |F - F_{B_0}|d\lambda \le \frac{C}{m(B_0)}\int_{B_0} |F - F_{B_0}|dm \le C\|f\|_{*,R,*}.$$

B を Δ 内の任意の円盤とする．B の hyperbolic 半径を r とする．まず $r > r_0$ なる場合, B' を B と同じ hyperbolic での中心を持ち hyperbolic 半径が $r + 2r_0$ なる円板とする．S を被覆変換群

の元 A で AR_0 が B と共通部分を持つものの全体とする．すると $B \subset \cup_{A\in S} AR_0 \subset B'$. よって

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |F - F_{B_0}|d\lambda \le \frac{1}{\lambda(B)}\sum_{A\in S}\int_{AR_0}|F - F_{B_0}|d\lambda \le C\|f\|_{*,R,*}\frac{1}{\lambda(B)}\sum_{A\in S}\lambda(AR_0)$$

$$\le C\|f\|_{*,R,*}\frac{\lambda(B')}{\lambda(B)} = C\|f\|_{*,R,*}\frac{\pi\sinh^2(r+2r_0)}{\pi\sinh^2 r} \le C\|f\|_{*,R,*}.$$

また $r \le r_0$ なる場合は B 上で $d\lambda$ と dm が比較可能なことから同様の評価を得る．よって $f \in BMO_\lambda(R)$. Q. E. D.

系 4.10. Δ を普遍被覆とする Riemann 面 R に対し常に

$$BMO_\lambda(R) \subset BMO_*(R) \subset BMO(R).$$

また R が compact であれば

$$BMO_\lambda(R) = BMO_*(R) = BMO(R).$$

最後に 有限な Dirichlet 積分を持つ調和関数及び正則関数のなす空間 $HD(R)$, $AD(R)$ との関係を調べよう．平面領域 D は 正則関数 $f:\Delta \to D$ が常に $BMOA_\theta(\Delta)$ 関数となるとき BMO_θ 領域であるという．同様に正則関数 $f:\Delta \to D$ が常に $BMOA(\Delta)$ 関数となるとき BMO 領域であるという．まず定理 1.6. 及び 命題 1.1 から容易に

補題 4.17. 平面領域 D に対し以下の条件は同値である;
(1) D は BMO 領域.
(2) 普遍被覆 $\pi:\Delta \to D$ は $BMOA(\Delta)$ 関数.
(3) D は Euclid 半径のいくらでも大きい円板を含まない.

BMO_θ 領域について対応する主張を証明するためにまず

補題 4.18. 任意の正則関数 $\omega:\Delta\to\Delta$ 及び $BMOH_\theta$ 関数 h に対し常に $h\circ\omega$ は $BMOH_\theta$ 関数となりしかも $\|h\circ\omega\|_{*,\Delta,\theta} \le A\|h\|_{*,\Delta,\theta}$.

(証明) 一般に $h \in h^2(\Delta)$ 及び正則関数 $\omega:\Delta\to\Delta$, $\omega(0)=0$ に対し $\|h\circ\omega\|_2 \le \|h\|_2$ が成立することに注意すれば T を $T(0)=\omega(0)$ なる Δ 上の Möbius 変換として $\|h\circ\omega - h\circ\omega(0)\|_2 \le \|h\circ T - h\circ T(0)\|_2$ となるので定理 1.7 より従う. Q. E. D.

定理 4.10. (cf. Bearnstein II [11]) 平面領域 D に対し以下の条件は同値である;
(1) D は BMO_θ 領域.
(2) 普遍被覆 $\pi:\Delta\to D$ は $BMOA_\theta(\Delta)$ 関数.
(3) D 上の Green potential $P^m(z) = \int_D g_D(z,\zeta)dm(\zeta)$ は D 上有界.

(証明) 正則関数 $f:\Delta\to D$ は常にある正則関数 $\omega:\Delta\to\Delta$ によって $f=\pi\circ\omega$ と表せた.

よって補題 4.18 より (2) → (1) が成立. (1) → (2) は明らか. また

$$\frac{1}{\pi}\int_\Delta g_\Delta(z,\zeta)d\pi(\zeta)\wedge{}^*\overline{d\pi(\zeta)}=\frac{1}{\pi}\int_D g_D(\pi(z),\zeta)d\zeta\wedge{}^*\overline{d\zeta}$$

なので系 1.8 より (2) ↔ (3) が成立. Q. E. D.

特に D が面積有限な領域であれば $\int_D g_D(z,\zeta)dm(\zeta)$ は有界となることから

系 4.11. 面積有限な領域は BMO_θ 領域である. よって $m(f(\Delta))<\infty$ なる Δ 上の正則関数は常に $BMOA_\theta(\Delta)$ 関数である. 特に $AD(\Delta)\subset BMOA_\theta(\Delta)$.

この最後の主張については定理 1.10 に於ても証明されていた.

Riemann 面 R 上の正則関数 f についても $f\in AD(R)$ とすれば $m(f(\pi(\Delta)))<\infty$ なので

系 4.12. (Metzger [54]) 任意の Riemann 面 R に対し常に $AD(R)\subset BMOA_\theta(R)$.

系 4.13. (Kusunoki-Taniguchi [51]) R を任意の Riemann 面, $h\in HD(R)$ とする. もしある $w\in\mathbf{C}$ が存在し R 上の任意の閉曲線 α に対し $\int_\alpha {}^*dh$ が w の整数倍となっていれば (言い換えれば R 上のある正則関数 f 及び定数 $a\in\mathbf{C}$ に対しの対し $h=a\log|f|$ と表せるならば) $h\in BMOH_\theta(R)$.

R_0 を普遍被覆 $\pi:\Delta\to R$ による R の基本領域 (相対境界を含む) とする. Δ 上の $\mathrm{Re}f=h\circ\pi$ なる正則関数 f に対し $S=f(R_0)$ とおけば $m(S)<\infty$ となりしかも $f(\Delta)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(S+nw)$ ここで定理 4.10 に注意すれば面積有限の集合 S によってこの形に表せる領域は常に BMO_θ 領域であることがわかるので $f\in BMOA_\theta(\Delta)$. よって $h\in BMOH_\theta(R)$. Q. E. D.

次に定理 1.9 より有限な Dirichlet 積分を持つ R 上の関数は $BMO(R)$ 関数である. 特に常に $HD(R)\subset BMOH(R)$ が成立する. よって定理 4.8 から $\inf_{z\in R} r_z>0$ なる R に対しては $HD(R)\subset BMOH_*(R)$ が成立することになる. 他方

定理 4.11. 平面領域 D で $HD(D)$ が $BMOH_*(R)$ に含まれないものが存在する.

(証明) まず $\Omega=\{r_1<|z|<r_2\}$ 上の調和関数 $h(z)=\log|z|$ について $\pi:\Delta\to\Omega$ を Ω の普遍被覆, f を $\mathrm{Re}f=h\circ\pi$ なる Δ 上の関数正則関数とするとき f の逆関数の Riemann 面の含む単葉円板の半径の最大値は $(\log(r_2/r_1))/2$ なので命題 1.1 より

$$\|h\|_{,*,D,*}=\|h\circ\pi\|_{,*,\Delta}\geq A\|f\|_{,*,\Delta}\geq A\log\frac{r_2}{r_1}$$

となることに注意する. そこで Δ 上の hyperbolic 半径が一定のであるような disjoint な円板の列 $\{B'_n\}_n$ をとりさらに各 B'_n 内に, B'_n と同じ hyperbolic の中心をもちしかもその hyperbolic の半径が十分速く 0 に収束するような円板 B_n をとる. そして $D=\Delta\setminus\cup_n B_n$ とおく. B_n の hyperbolic の中心を 0 に移す Δ 上の Möbius 変換 T_n をとり $h_n=\log|T_n|$ とおけば $T(B'_n)$ の Euclid の半径を r_0, $T(B_n)$ の Euclid の半径を r_n とおくとき $\|h_n\|_{I,D}^2\leq 2\pi\log(1/r_1)$. また補題 4.18 に注意すれば先ほどの評価より $\|h_n\|_{*,D}\geq\|h_n\|_{*,{B'}_n^o\setminus B_n}\geq A\log\frac{r_0}{r_n}$. よって定数 α_n をうまく取れば $h=\sum_n\alpha_n h_n\in HD(D)\setminus BMO(D)$ とできる. Q. E. D.

定理 4.12. Riemann 面 R 上の Green 関数 $g_R(z,\zeta)$ に対しある定数 $M>0$ が存在し R の任意の点 z に対し領域 $\Omega_{z,M}=\{\zeta\in R: g_R(z,\zeta)>M\}$ が単連結となるならば

$$HD(R)\subset BMOA_\theta(R).$$

(証明) $h\in HD(R)$ とすると $\Omega_{z,M}$ が単連結なること及び定理 1.10 から

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_{z,M}} g_{\Omega_{z,M}}(z,\zeta)dh(\zeta)\wedge{}^*\overline{dh(\zeta)}\le A\int_{\Omega_{z,M}} dh(\zeta)\wedge{}^*\overline{dh(\zeta)}\le A\|h\|^2_{I,R}.$$

よって

$$\frac{1}{\pi}\int_R g_R(z,\zeta)dh(\zeta)\wedge{}^*\overline{dh(\zeta)}\le\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_{z,M}}(M+g_{\Omega_{z,M}}(z,\zeta))dh(\zeta)\wedge{}^*\overline{dh(\zeta)}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{R\setminus\Omega_{z,M}} Mdh(\zeta)\wedge{}^*\overline{dh(\zeta)}\le(M+A)\|h\|^2_{I,R}.$$

ゆえに $z\in R$ について sup を取れば $\|h\|^2_{*,R,\theta}\le A(M+A)\|h\|^2_{I,R}$ を得る.　　Q. E. D.

compact な Riemann 面はこの仮定を満たし, また孤立点は HD の意味においても BMO_θ の意味においても除去可能なことから

系 4.14. 有限型の Riemann 面 R に対しては常に　$HD(R)\subset BMOA_\theta(R)$.

参考文献

[1] L. Ahlfors, Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrand, 1966.

[2] J. M. Anderson, J. Clunie and C. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, J. Reine Angew. Math., 270 (1974), 12-37.

[3] K. Astala, A remark on quasi-conformal mappings and BMO-functions, Michigan Math. J., 30 (1983), 209-212.

[4] K. Astala and F. W. Gehring, Injectivity criteria and the quasidisk, Complex Variables, 3 (1984), 45-54.

[5] K. Astala and M. Zinsmeister, Teichmüller spaces and $BMOA$, Math. Ann. 289 (1991), 613-625.

[6] K. Astala and F. W. Gehring, Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space, J. D'analyse Math., 46 (1986), 16-57.

[7] R. Aulaskari, On VMOA for Riemann surfaces, Canadian J. Math., 40 (1988), 1174-1185.

[8] R. Aulaskari and P. Lappan, Some results on $BMOH$ and $VMOH$ on Riemann surfaces, Michigan Math. J. 38 (1991), 33-42,

[9] A. F. Beardon and C. Pommerenke, The Poincaré metric of plane domains, J. London Math. Soc., (2) 18 (1978), 475-483.

[10] A. Bearnstein II, Univalence and bounded mean oscillation, Michigan Math. J., 23 (1976), 217-223.

[11] A. Bearnstein II, Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspect of contemporary complex analysis, Academic Press, (1980), 3-36.

[12] B. Bojarski and T. Iwaniec, Analytic foundation of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbf{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 8 (1983), 257-324.

[13] L. Brown and A. L. Shields, Multipliers and cyclic vectors in the Bloch space, Michigan Math. J. 38 (1991), 141-146.

[14] L. Carleson, Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1967.

[15] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math., 22 (1976), 269-277.

[16] P. Caraman, n-dimensional quasi-conformal (qcf) mappings, Editura Academiei Romanê Bucharest, 1974.

[17] J. A. Cima and G. Schober, Analytic functions with bounded mean oscillation and logarithms of H^p functions, Math. Z., 151 (1976), 295-300.

[18] J. A. Cima and J. Graham, Removable singularities for Bloch and BMO functions, Illinois J. Math., 27 (1983), 691-703.

[19] R. R. Coifmann, R. Rochberg, and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math., (2) 103 (1967), 611-635.

[20] C. Constantinescu and A. Cornea, Ideal Ränder Riemannscher Flachen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[21] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.

[22] R. Durret, Brownian motion and Martingales in Analysis, Wadsworth, 1984.

[23] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.

[24] J. B. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, 1981.

[25] J. B. Garnett and P. Jones, The distance in BMO to L^∞, Ann. of Math. 108 (1978), 373-393.

[26] F. W. Gehring, The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, Acta Math., 130 (1973), 265-277.

[27] F. W. Gehring, Charastaristic properties of quasidisks, Séminaire de Mathématiques Supérieures, 84, Presses del'Université de Montreal, Que., 1982.

[28] F. W. Gehring, Uniform domains and the Ubiquitous Quasidisk, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 89 (1987), 88-103.

[29] F. W. Gehring and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Analyse. Math., 36 (1979), 50-74.

[30] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surface, J. Math. Kyoto Univ., 25 (1985), 331-339.

[31] Y. Gotoh, On BMO property for potentials on Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., 27 (1987), 349-365.

[32] Y. Gotoh, On some extension property for BMO functions on Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 141-152.

[33] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with analytic functions, J. Math. Kyoto Univ., 29 (1989), 309-315.

[34] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with meromorphic functions, J. Math. Kyoto Univ., to appear.

[35] Y. Gotoh, BMO extension theorem for relative uniform domains, J. Math. Kyoto Univ., to appear.

[36] K. T. Hahn, Some remarks on a new pseudo-differential metric, Ann. Polon. Math., 39 (1981), 71-81.

[37] D. H. Hamilton, On the Poincaré inequality, Complex Variables theory Appl., 5 (1986), 256-270.

[38] D. H. Hamilton, BMO and Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 14 (1989), 213-224.

[39] W. K. Hayman, Multivalent Functions, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no 48, Cambridge Univ. Press, 1967.

[40] W. K. Hayman and C. Pommerenke, On analytiv functions of bounded mean oscillation, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 219-224.

[41] M. Heins, Hardy classes on Riemann surfaces, Lecture notes in Math., 98, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[42] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. of Math., 86 (1967), 74-111.

[43] S. Janson, On functions with conditions on the mean oscillation, Arc. Mat., 14 (1976), 189-196.

[44] J. John and L. Nirenberg, On the functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure appl. Math., 14 (1961), 415-426.

[45] P. Jones, Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

[46] R. Kaufman, Hausdorff measure, BMO, and analytic functions, Pacific J. Math. 102 (1982), 369-371.

[47] R. Kaufman and J.-M. Wu, Removable singularities for analytic or subharmonic functions, Arkiv for Mat., 18 (1980), 107-116,

[48] S. Kobayashi, On a classification of plane domains for $BMOA$, Kodai Math. J., 7 (1984), 111-119.

[49] S. Kobayashi, Range sets and BMO norms of analytic functions, Canadian J. Math., 36 (1984), 745-755.

[50] P. Koosis, Introduction to H^p spaces, London Math. Society Lecture Notes Series, 40, Cambrige Univ. Press, London and New York, 1980.

[51] Y. Kusunoki and M. Taniguchi, Remarks on functions of bounded mean oscillation on Riemann surfaces, Kōdai Math. J., 6 (1983), 434-442.

[52] I. Laine and E. Posti (eds.), Bounded mean oscillation in complex analysis, Univ. of Joensuu. Publications in Science, 1989.

[53] P. McKenna, Discrete Carleson measures and some interpolation problems, Michigan Math. J., 24 (1977), 311-319.

[54] T. A. Metzger, On $BMOA$ for Riemann surfaces, Canadian J. Math., 33 (1981), 1255-1260.

[55] C. D. Minda, The Hahn metric on Riemann surfaces, Kd̄ai Math. J., 6 (1983), 57-69.

[56] C. D. Minda, Extremal length and harmonic functions on Riemann surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972), 1-22.

[57] C. D. Minda, Bloch and normal functions on general planar regions, Holomorphic functions and Moduli I, Springer, (1988), 101-110.

[58] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 207-218.

[59] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schilicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 545-551.

[60] U. Neri, Some properties of functions with bounded mean oscillation, Studia Math., 61 (1977), 63-75.

[61] B. G. Osgood, Some properties of f''/f' and the Poincaré metric, Indiana Univ. Math. J., 31 (1982), 449-461.

[62] K. E. Petersen, Brownian motion, Hardy spaces, and bounded mean oscillation. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.

[63] C. Pommerenke, On Bloch functions, J. London Math. Soc., (2) 2 (1970), 689-695.

[64] C. Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Comm. Math. Helv., 52 (1977), 591-602.

[65] C. Pommerenke, On univalent functions, Bloch functions and VMOA, Math. Ann., 236 (1978), 199-208.

[66] C. Pommerenke, Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, Arch. Math. (Basel), 32 (1979), 192-199.

[67] C. Pommerenke, Uniformly perfect sets and Fuchsian groups, Analysis, 4 (1984), 299-321.

[68] H. M. Reimann, Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, Comm. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

[69] H. M. Reimann, On the parametric representation of quasiconformal mappings, Comm. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

[70] H. M. Reimann and T. Rychener, Funktionen beschränkter mittelerer Oszillation, Lecture Notes in Math. 489, Springer, 1975.

[71] D.Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc., 207 (1975), 391-405.

[72] D.Sarason, Function theory on the Unit Circle, Virginia Poly. Inst. and State Univ., Blacksburg, Virginia, 1979.

[73] H. Shiga, Characterization of quasi-disks and Teichmüller spaces, Tōhoku Math. J., 37 (1985), 541-552.

[74] K. Shimomura, A characterization of the inner NTA domain by the quasi-hyperbolic metric, to appear.

[75] W. Smith and D. Stegenga, Hölder domains and Poincaré domains, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990), 67-100.

[76] E. M. Stein, Sngular Integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[77] S. G. Staples, L^p-averaging domains and the Poincaré inequality, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 14 (1989), 103-127.

[78] D. A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math., 98 (1976), 573-589.

[79] D. A. Stegenga, A geometric condition which implies $BMOA$, Michigan Math. J., 27 (1980), 247-252.

[80] M. Taniguchi, An example of an open Riemann surface not uniformly large with respect to Green's functions, Kodai Math. J., 10 (1987), 209-213.

[81] J. Väisälä, Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., 229, springer-Verlag, 1971.

[82] H. Wallin, Existence and properties of Riesz potentials satisfying Lipschitz conditions, Math. Scand., 19 (1966), 151-160.

[83] S. Yamashita, Functions of uniformly bounded characteristic, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 7 (1982), 349-367.

[84] S. Yamashita, Some unsolved problems on meromorphic functions of uniformly bounded characteristic, Internat. J. Math. and Math. Sci., 8 (1985), 477-482.

[85] K. Zhu, Multipliers for BMO in the Bergman Metric with application to Toeplitz Opetators, J. Funct. Anal., 87 (1989), 31-50.