2次微分の幾何学的極限

§1. 序

このノートはMcMullenの論文［Mc］の補遺（Appendix）の解説である。

ここではRiemann面とその上の正則2次微分の幾何学的極限（geometric limit）について考察する。ここでのRiemann面の幾何学的極限とは，基点を一つ決めておいてそこでの単射半径が一定以上になるように調節してとった極限のことで，その結果，極限操作においてRiemann面が完全に消えてしまったり（total degeneration），又は2つ以上の成分に分かれたりするようなことは起こり得ない。本章では一貫してそのような"幾何学的極限"のみを取り扱う。

本章の主要結果は，(g,n)型点つきRiemann面上の可積分な正則2次微分の射影空間全体からなる空間 $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,n}$ のコンパクト化である（定理 3.1）。

このノートではMcMullenの原論文［Mc］ではやや不明確であった定義を出来るだけ明確にすることを第一の目標とした。そのために自分なりの解釈を加えた箇所もいくつかあり，原著者の意図にそぐわない点がないかとおそれている。また，この手の解説にはありがちなことかも知れないが，数学的に厳密に定式化しようとしたために，原論文のスマートさはかなり失われてしまった。従って一応このノートは原論文とは独立に読めるようにはした積もりだが，原論文を先に一読されることをお奨めする。

なお本章で例えば <u>2.1</u> とか，<u>定理 3.1</u> などは原論文の <u>A.2.1</u> や <u>Theorem A.3.1</u> に対応していることを言い添えておく。

§2 Riemann面達の幾何学的位相 (geometric topology)

<u>定義</u> $k\in[-1,1]$ に対して U_k 上の Riemann 計量

$$ds_k^2 = \left(\frac{4|dz|}{4+k|z|^2}\right)^2 \qquad (z\in U_k)$$

と定める。ただし、ここで

$$U_k = \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & (k>0 \text{ のとき}) \\ \mathbb{C} & (k=0 \text{ のとき}) \\ \{z\in\mathbb{C}\,;\ |z|<\frac{2}{\sqrt{-k}}\} & (k<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ds_k^2 は Gauss 曲率が一定値 k であり、U_k は ds_k^2 に関して完備である。特に $k=-1$ のときの計量 ds_{-1}^2 を <u>Poincaré 計量</u>と呼ぶ。ds_k から U_k に定まる完備距離を d_k と書くことにする。

<u>1°</u> $ds_k^2 \longrightarrow ds_0^2 = |dz|^2 = dx^2+dy^2$ (Euclid 計量) $(k\to 0)$

従って、$d_k(z_1,z_2) \longrightarrow |z_1-z_2|$ $(k\to 0)$

<u>2°</u> (変換則) U_k を普遍被覆面に持つ Riemann 面 X に対し、その被覆変換群の作用に対して計量 ds_k^2 は不変だから、自然に X にも Riemann 計量を誘導する。これもやはり ds_k^2 と書くことにしよう。X が双曲的 Riemann 面の場合、$k\in[-1,0)$ は任意に選べる訳だが、ds_k には次のような1次の関係がある:

$$ds_k = \frac{1}{\sqrt{-k}}\,ds_{-1}$$

従って ds_k から X に定まる距離をここでは d_k と書くことにすれば、

$$d_k(p_1,p_2) = \frac{1}{\sqrt{-k}}\,d_{-1}(p_1,p_2) \qquad (p_1,p_2\in X)$$

となる。

<u>記号</u> $\mathcal{X}_0 = \{(\Gamma,k)\,;\ k\in[-1,1],\ \Gamma$ は U_k に不連続かつ自由に作用する $PSL_2(\mathbb{C})$ の離散部分群$\}$

と定める。

$(\Gamma,k)\in\mathcal{X}_0$ に対して、$X=(U_k/\Gamma,\ ds_k^2)$ は定曲率

k の完備 Riemann 計量を持った Riemann 面と考えられる。今後、単に Riemann 面と言えばつねにこのような計量 ds_k^2 が定められているものとする。Riemann 面 X の曲率を $k = k(X)$ で表記する。

さて、Riemann 面 X に対して普遍被覆写像 $U_k \to X$ は $\mathrm{Aut}\, U_k$ の分だけ自由度があるから一意的には定まらない。そこで、それを一意的にするための付加的なデータを考えよう。

Riemann 面 X 上の接束 $T(X)$ から 0 切断を除いたものを、各 fiber ごとへの自然な $\mathbb{R}^+$ 作用で割って得られる X 上の S^1-束を $S^1(X)$ と書くことにする。(この各 fiber は $S^1 = \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$)
(計量を保つ)普遍被覆写像 $p : U_k \to X$ とするとその微分 (tangent map)

$$dp : T(U_k) = U_k \times \mathbb{C} \longrightarrow T(X)$$

は自然に写像

$$\bar{d}p : S^1(U_k) = U_k \times S^1 \longrightarrow S^1(X)$$

を誘導する。そこでこれによる U_k の原点の上の実軸の正の向きの接ベクトルの像を v とする。つまり、

$$v = \bar{d}p\,(0, 1) \quad \in S^1(X)$$

とする。$p(0) \in X$ を $\bar{v}$ とも書く。逆にデータ (X, v) $(v \in S^1(X))$ から $\bar{d}p\,(0,1) = v$ となるような $(\Gamma, k) \in \mathfrak{X}_0$ が一意的に決定される。従って、

$$\mathfrak{X}_0 = \{ (X, v) \ ; \ X \text{ は絶対値 1 以下の定曲率を持つ完備 Riemann 計量を備えた Riemann 面で、} v \in S^1(X) \} / \sim$$

とも見做すことができる。ただしここに $\sim$ は次の同値関係:

$(X, v) \sim (Y, w) \iff$ ある双正則写像 $f : X \to Y$ があって、$\bar{d}f\,(v) = w$ となる,

である。このような $v \in S^1(X)$ を基準枠 (base-frame) と呼ぶ。この v は X にある種の標識 (marking) を与えているとみられる。以下では $\mathfrak{X}_0$ に関するこれら 2 通りの定義を適宜使い分ける。

単射半径　$(X, v) \in \mathcal{X}_0$ に対し，$\lambda(X, v) \in (0, \infty]$ を X の $v \in X$ における単射半径とする。すなわち，

$$\lambda(X, v) = \sup\{\lambda > 0\ ;\ B_X(v, \lambda) \text{ は単連結領域}\}$$

とする。ここで，$d_X = d_k\ (k = k(X))$ と書くことにして，

$$B_X(v, \lambda) = \{x \in X\ ;\ d_X(v, x) < \lambda\}$$

とする。$(X, v) = (\Gamma, k)$ とすればあるいは，

$$\lambda(\Gamma, k) = \sup\{\lambda > 0\ ;\ 0 \text{ を中心とする } U_k \text{ の } d_k \text{ に関する } \lambda\text{-球上で標準射影 } U_k \longrightarrow U_k/\Gamma \text{ は単射}\}$$

とも表現できる。

記号　
$$\mathcal{X} = \{(\Gamma, k) \in \mathcal{X}_0\ ;\ \lambda(\Gamma, k) \geqq 1\}$$
$$= \{(X, v) \in \mathcal{X}_0\ ;\ \lambda(X, v) \geqq 1\}$$
と定める。

Chabauty位相　$G = PSL_2(\mathbb{C})$ とおく。位相群 G の離散部分群全体のなす集合を $S(G)$ で表す。$\Gamma \in S(G)$ に対し，

$$N(\Gamma, K, U) = \{\Gamma' \in S(G)\ ;\ \Gamma' \cap K \subset \Gamma U,\ \Gamma \cap K \subset \Gamma' U\}$$
$$(K \subset G：コンパクト,\ U \subset G：G \text{の単位元の開近傍})$$

の形の集合全体を Γ の基本近傍系として $S(G)$ に位相を入れる。この位相を Chabauty 位相と呼ぶ（[Cha], [Har]）。

$\mathcal{X}$の幾何学的位相　$\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0 \subset S(G) \times [-1, 1]$ とみなして，$S(G) \times [-1, 1]$ の直積位相から誘導される位相を $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0$ に入れる。この位相を幾何学的位相（geometric topology）と呼ぶ。この位相の具体的イメージについては，以下の説明や例を通しておいおい分かってくるであろう。

Dirichlet基本領域　$(\Gamma, k) \in \mathcal{X}_0$ とする。$k > 0$ なら $\Gamma = 1$（単位群）となってつまらないので $k \leqq 0$ と思ってよい。Γ の U_k における 0 を中心とする Dirichlet基本領域 $\omega = \omega_\Gamma$ は次のように

定義される。

$$\omega = \{ z \in \overline{U_K} \ ; \ d_K(z,0) \leqq d_K(z, \gamma(0)) \quad \text{for } {}^\forall \gamma \in \Gamma \}.$$

これについては，詳しくはFuchs群やKlein群の教科書を参照して頂きたい。（例えば［Leh］。）また，

$$\lambda(\Gamma, K) \geqq 1 \iff \omega_\Gamma \supset \overline{\Delta_1} = \{ |z| \leq 1 \}$$

であることに注意しておく。

これについて次の補題が成り立つことは比較的見易い。（後のLemma 3参照）

<u>Lemma 1</u>　$\mathfrak{X}_0$ の列 (Γ_n, K_n) が $(\Gamma, K) \in \mathfrak{X}_0$ に収束しているとすると，$\omega_n \longrightarrow \omega$ である。（ここで，$\omega_n = \omega_{\Gamma_n}$，$\omega = \omega_\Gamma$。）

すなわち，任意の $0 < k < \frac{2}{\sqrt{K}}$ に対し，$\Delta_k = \{ |z| < k \}$ として，Hausdorff距離に関して $\omega_n \cap \Delta_k \longrightarrow \omega \cap \Delta_k$，つまり

$$d_H(\omega_n \cap \Delta_k, \omega \cap \Delta_k) := \max\left(\sup_{z \in \omega_n \cap \Delta_k} \mathrm{dist}_K(z, \omega \cap \Delta_k), \sup_{z \in \omega \cap \Delta_k} \mathrm{dist}_K(z, \omega_n \cap \Delta_k) \right)$$
$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

<u>Flachsmeyer位相</u>　$S(G)$ に対して導入したChabauty位相は次の2つのタイプの開基から生成される位相と一致する（［Har］）。

$$\mathcal{A}_U = \{ \Gamma \in S(G) \ ; \ \Gamma \cap U \neq \emptyset \} \qquad (U \subset G : \text{開集合})$$
$$\mathcal{B}_K = \{ \Gamma \in S(G) \ ; \ \Gamma \cap K = \emptyset \} \qquad (K \subset G : \text{コンパクト})$$

特に $S(G)$ のChabauty位相は G の一様構造とは無関係に，単に位相構造のみにより定まることが分かる。（このことはHausdorff距離による位相とは様相を異にする。）

一般に T を位相空間とし，$\mathfrak{F}(T)$ を T の閉部分集合全体のなす集合とする。（空集合 $\emptyset$ も $\mathfrak{F}(T)$ に含まれることに注意。）

$$\mathcal{A}_U = \{ A \in \mathfrak{F}(T) \ ; \ A \cap U \neq \emptyset \}$$
$$\mathcal{B}_K = \{ A \in \mathfrak{F}(T) \ ; \ A \cap K = \emptyset \}$$

とおき，$\{ \mathcal{A}_U \ ; \ U \subset T : \text{開集合} \}$，$\{ \mathcal{B}_K \ ; \ K \subset T : \text{コンパクト} \}$ を開基として定まる $\mathfrak{F}(T)$ の位相を（［Fla］に従って）それぞ

れ $\mathfrak{T}_\ell$, $\mathfrak{T}_K$ と書くことにする。さらに $\mathcal{A}_U$, $\mathcal{B}_K$ の両方から生成される位相を $\mathfrak{T}_\ell \vee \mathfrak{T}_K$ と書き，（他に適当な呼称を知らないので）ここではこれを $\mathfrak{F}(T)$ の Flachsmeyer 位相と呼ぶことにする。以下では $\mathfrak{F}(T)$ の位相はつねにこの位相で考える。これは大体，各コンパクト集合上での Hausdorff 位相（つまり Hausdorff 距離から誘導される位相）という感じである。

$\mathfrak{F}(T)$ には他にも数々の位相（例えば，Vietoris 位相 (finite topology), 単函数位相 (simple function topology), 下半有限位相 (lower semifinite topology) etc. ）が用いられるようだが，この位相が最も適当であると思われる一つの根拠は，次の重要な結果が成立していることである。

定理（Flachsmeyer [Fla ; 3.8～10]）

1. T が T_1 位相空間ならば，$\mathfrak{F}(T)$ はコンパクトである。
2. T が Hausdorff空間（T_2 空間）ならば，次の条件は同値。
   (i) $\mathfrak{F}(T)$ は Hausdorff 空間
   (ii) T は局所コンパクト
3. T が Hausdorff 空間ならば次の条件は同値である。
   (i) $\mathfrak{F}(T)$ は距離付け可能
   (ii) T は局所コンパクト可分距離付け可能空間

系　$\tilde{\mathfrak{S}}(G)$ は Chabauty 位相（= Flachsmeyer 位相）に関して，コンパクト距離付け可能空間となる。ここで $\tilde{\mathfrak{S}}(G)$ は $G = PSL_2(\mathbb{C})$ の閉部分群全体のなす集合とする。

これには，$\tilde{\mathfrak{S}}(G)$ の点列 Γ_n が $\Gamma \in \mathfrak{F}(G)$ に収束するとすれば，Γ もやはり部分群であることに注意すればよい。

命題 2.1　$\mathfrak{X}$ は幾何学的位相に関して，コンパクト距離付け可能空間である。

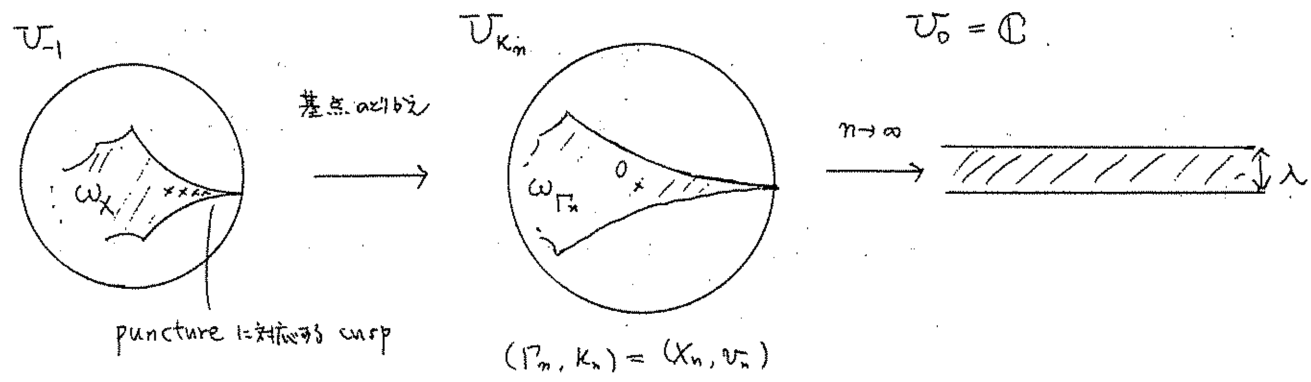
証明　$\mathfrak{X} \subset \tilde{S}(G)\times[-1,1]$ で $\tilde{S}(G)\times[-1,1]$ は先の系からコンパクト距離付け可能空間である。従って，$(\Gamma_n, K_n)\in\mathfrak{X}$ がある $(\Gamma, K)\in\tilde{S}(G)\times[-1,1]$ に収束しているとき，$(\Gamma, K)\in\mathfrak{X}$ であることを言えばよいが，これは Γ が torsion-free であること（このことは例えば後の Lemma 3 を用いれば分かる。）と，Lemma 1 を用いれば分かる。

注意　このように単射半径に関する条件から $\mathfrak{X}$ のコンパクト性が従う。$\mathfrak{X}_0$ の点列では一般に面の "degeneration" が起こってしまうので，$\mathfrak{X}_0$ はコンパクトではない。

例　puncture を持つ双曲的 Riemann 面 X を考える。X には，Poincaré 計量を入れておく。$v_n\in S^1(X)$ を $\bar{v}_n$ がその puncture に近づくような（適当に方向を揃えた）base-frame の列とする。すると，$\lambda(X, v_n)\longrightarrow 0$ ではあるが，曲率 $K_n<0$ を適当にとり，X の計量を $ds^2_{K_n}$ にとりかえた面を X_n として，

$$\lambda(X_n, v_n)=\frac{1}{\sqrt{-K_n}}\lambda(X, v_n)\longrightarrow\lambda\qquad(n\to\infty)$$

とできる。ここに $\lambda\in[1,\infty]$ は任意に与えられた値とする。すると (X_n, v_n) の極限は $\lambda<\infty$ なら円筒 (cylinder) $\mathbb{C}^*$，$\lambda=\infty$ なら平面 $\mathbb{C}$ となる。（下図参照）



§2.1. 有限型 Riemann面

Riemann面 X が<u>有限型</u>（finite type）とは，X がコンパクト Riemann面から有限個の点を除いたものであることをいう。除いた点を puncture といい，X に puncture を付け加えて得られるコンパクト Riemann面をしばしば $\overline{X}$（X の"完備化"）と書く。$\overline{X}$ の種数 (genus) を X の種数と呼ぶ。また，X の種数が g で，puncture を m 個持つとき，X の(有限)型は (g,m) であるという。(g,m)型 Riemann面 X が双曲的であるための必要十分条件は $2g-2+m>0$ であることが知られている。同様に，放物的 $\Leftrightarrow$ $(g,m)=(0,1),(0,2),(1,0)$；楕円的 $\Leftrightarrow$ $(g,m)=(0,0)$ である。さて，

$$\mathfrak{X}_{g,m} = \{(X,v)\in\mathfrak{X}\ ;\ X \text{ は有限型 } (g,m) \text{ を持つ}\}$$

とおく。$\mathfrak{X}_{g,m}$ は $\mathfrak{X}$ において閉包をとることによりコンパクト化できるが，そのコンパクト化 $\overline{\mathfrak{X}_{g,m}}$ は一種の cell 構造をもつ。

<u>命題 2.2</u>　$m>0$ ならば，　$\overline{\mathfrak{X}_{g,m}} = \bigcup\{\mathfrak{X}_{h,l}\ ;\ 2h+l\leqq 2g+m;\ 0\leqq h\leqq g,\ 1\leqq l\}$

$m=0,\ g>0$ ならば，　$\overline{\mathfrak{X}_{g,0}} = \mathfrak{X}_{g,0}\cup\overline{\mathfrak{X}_{g-1,2}}$

$m=0,\ g=0$ ならば，　$\overline{\mathfrak{X}_{0,0}} = \mathfrak{X}_{0,0}\cup\mathfrak{X}_{0,1}$

<u>略証</u>　一般に $(X,v)\in\mathfrak{X}$ とし，X 上の計量 ds_κ^2 から自然に定まる2次元測度 $dA_\kappa = \dfrac{16\,dx\wedge dy}{(4+\kappa|z|^2)^2}$ とする。すると Gauss−Bonnet の定理から

$$\int_X \kappa\, dA_\kappa = \begin{cases} 2\pi\cdot\chi(X) & (\kappa\neq 0)\\ 0 & (\kappa=0)\end{cases}$$

となる。ここに

$$-\chi(X) = \begin{cases} 2g-2+m & (X:\text{有限型}^{(g,m)}\text{のとき})\\ +\infty & (\text{そうでないとき})\end{cases}$$

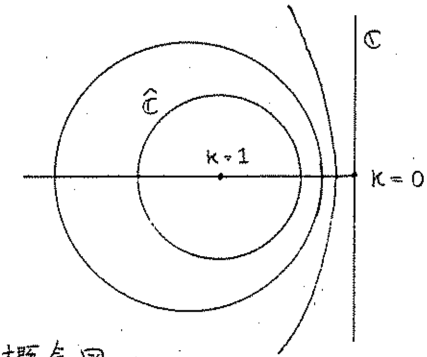
とする。

さて，まず双曲的な場合，すなわち $2g-2+m>0$ の場合に考えてみよう。$(X_n,v_n)\in\mathfrak{X}_{g,m}$，$(X_n,v_n)\longrightarrow(X,v)$ in $\mathfrak{X}$

とする。するとFatouのlemmaから，$k=k(X)$，$k_n=k(X_n)$として，

$$\int_X (-k)\,dA_k \le \varliminf_{n\to\infty} \int_{X_n}(-k_n)\,dA_{k_n} = 2\pi(2g-2+m)$$

従って特にXは有限型である。その型を(h,l)としよう。$k\neq 0$ならば，$2\pi(2h-2+l)\le 2\pi(2g-2+m)$より$2h+l\le 2g+m$となる。また極限操作で種数が増えないことと，非コンパクト面の極限はやはり非コンパクトであることに注意すると（Lemma 1）$0\le h\le g$，$1\le m \Rightarrow 1\le l$も分かる。$k=0$なら$(h,l)=(0,1),(0,2)$ $(1,0)$だが$(1,0)$にはならないから以上で$\overline{\mathfrak{X}_{g,m}}$が右辺の和集合に含まれることが分かる。$(g,m)$が他の場合も同様である。
逆を言うには，手術（surgery）をしてやればよいが，ここでは詳しくは述べられない。



$\overline{\mathfrak{X}_{0,0}} = \mathfrak{X}_{0,0}\cup\mathfrak{X}_{0,1}$ の概念図

§2.2 万有曲線（universal curve）

$\mathfrak{X}$上に，$(X,v)\in\mathfrak{X}$の上のfiberがX自身であるような，"万有曲線（universal curve）" $\mathcal{C}$を定義しよう。まず，

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(z,\Gamma,k)\ ;\ (\Gamma,k)\in\mathfrak{X},\ z\in U_k\} \subset \hat{\mathbb{C}}\times\mathfrak{X}$$

とおけば，普遍被覆のbundle $\tilde{\mathcal{C}}\longrightarrow\mathfrak{X}$が得られる。$(\Gamma,k)\in\mathfrak{X}$上のfiber U_kをΓの作用で割ることにより，$\mathcal{C}\longrightarrow\mathfrak{X}$を得る。$\tilde{\mathcal{C}}$には$\hat{\mathbb{C}}\times\mathfrak{X}$の直積位相から局所コンパクトで距離付け可能な位相が誘導される。さらに$\mathcal{C}$には商位相を導入する。

<u>Lemma 2</u>　$\tilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}$は局所同相写像である。従って特に，$\mathcal{C}$は局所コンパクトで第1可算公理を満たす。

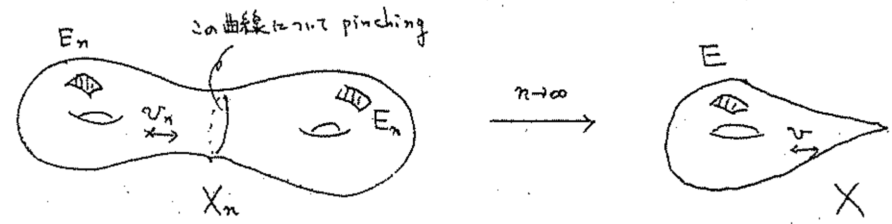
証明　$(X, v) = (\Gamma, \kappa) \in \mathfrak{X}$，$Q_0 \in X$ とする。$z_0 \in \tilde{U}_\kappa$ を Q_0 の上にある点とし，ω を z_0 を中心とする Γ の Dirichlet 基本領域とする。基本領域は $\mathfrak{X}$ の位相に関して連続に動くから（Lemma 1）z_0 の十分小さい開近傍 V（$V \Subset \omega^\circ$）をとれば，(X, v) の近傍 $N \subset \mathfrak{X}$ があって，$(\Gamma', \kappa') \in N$ ならば Γ' の z_0 を中心とする Dirichlet 基本領域が V を含む。従って標準射影 $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ の制限

$$V \times N \longrightarrow \mathcal{C}$$

は中への同相写像で，その像は $(Q_0, X, v) \in \mathcal{C}$ の近傍を与える。//

この万有曲線を用いて直感的には明白な概念を定式化することができる。例えば，$(X_n, v_n), (X, v) \in \mathfrak{X}$ に関して，閉集合 $E \subset X$ が閉集合の列 $E_n \subset X_n$ の幾何学的極限（geometric limit）とは，E_n が E に $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ において収束することを言う。（より正確には，$E_n \times \{(X_n, v_n)\} \longrightarrow E \times \{(X, v)\}$ とすべきである。）さらにこの収束が忠実（faithful）であるとは，$E \times \{(X, v)\}$ を含む $\mathcal{C}$ の任意の開集合 V に対し，十分大きな n について，$E_n \times \{(X_n, v_n)\} \subset V$ となることをいう。

忠実でない収束の例.



次に Z を位相空間として，連続函数列 $f_n : X_n \longrightarrow Z$ が連続函数 $f : X \longrightarrow Z$ に幾何学的に収束するとは，これらのグラフが $\mathfrak{F}(\mathcal{C} \times Z)$ において収束することを言う。ただし，ここで例えば f のグラフとは

$$\mathrm{graph}(f) = \{ (x, (X, v), f(x)) \in \mathcal{C} \times Z \ ; \ x \in X \}$$

のことである。

§ 2.3. 正則２次微分

Riemann面 X 上の標準束（canonical bundle）を K_X と書くことにする。 $K_X \otimes K_X$ の正則な大域切断全体を $\mathcal{Q}_X = H^0(K_X \otimes K_X)$ と書く。これは X 上の正則２次微分全体のなすベクトル空間である。 $\phi \in \mathcal{Q}_X$ に対し $|\phi|$ は (1,1) 形式となり面積分が定義できるが，特に $\int_X |\phi| < \infty$ となるものは<u>可積分</u>であると呼ばれ，X 上の可積分な正則２次微分全体のなす Banach 空間をしばしば $A_2(X)$ と書く。

さて，正則２次微分全体からなる空間 $\mathcal{Q} \to \mathcal{T}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Q} = \{ (X, v, \phi) \ , \ (X, v) \in \mathcal{T} \ , \ \phi \in \mathcal{Q}_X \}$$

この $\mathcal{Q}$ に以下のように幾何学的位相を定義する。

$\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ は $\mathcal{L} \to \mathcal{C} \to \mathcal{T}$ の $(X, v) \in \mathcal{T}$ の上の fiber が標準束 $K_X \to X$ であるような $\mathcal{C}$ 上の連続な直線束とする。つまり，$\tilde{\mathcal{L}} = \mathbb{C} \times \tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{\mathcal{C}}$ とし，これを $\tilde{\mathcal{L}} \to \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{T}$ の $(\Gamma, k) \in \mathcal{T}$ 上の fiber $\mathbb{C} \times U_k$ への Γ 作用：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} \times U_k) \times \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{C} \times U_k \\ (\xi, z) \times \gamma & \longmapsto & (\xi \cdot \gamma'(z)^{-1} \ , \gamma(z)) \end{array}$$

で割った bundle が $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ である。

$\mathcal{L}$ には勿論 $\tilde{\mathcal{L}}$ からの商位相を入れる。同様にして連続な直線束 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ も構成できる。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{L}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

$\mathcal{Q}$ には次のように位相を入れる。 $(X_n, v_n, \phi_n), (X, v, \phi) \in \mathcal{Q}$ として（これらをしばしば単に ϕ_n, ϕ とも書く。），

$$\phi_n \to \phi \quad \text{in } \mathcal{Q} \iff (X_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \to (X \xrightarrow{\phi} \mathcal{L} \otimes \mathcal{L})$$

（幾何学的に収束）

と定める。実はこの収束は次のようにも表現できる。

$(X_n, v_n) = (\Gamma_n, K_n)$, $(X, v) = (\Gamma, K)$ として，ϕ_n，ϕ の U_{K_n}, U_K への持ち上げをそれぞれ $\tilde{\varphi}_n(z)dz^2$, $\tilde{\varphi}(z)dz^2$ とするとき，

$$\phi_n \to \phi \quad \text{in } \mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma_n, K_n) \to (\Gamma, K) \quad \text{かつ} \quad \tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi} \ (\text{広義一様})$$

§2.4 被覆空間の空間

$\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ を“普遍被覆空間”とする。すなわち，
$\mathcal{Y} = \{(Y, w) \times (X, v) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$; ある被覆 $p: Y \to X$ が存在して $dp(w) = v\}$
と定める。ここで，$(Y, w) \times (X, v) \in \mathcal{Y}$ に対し，$dp(w) = v$ となる（不分岐正則）被覆写像 $p: Y \to X$ は一意的に定まることに注意する。従ってしばしば $\mathcal{Y}$ の元を $p: (Y, w) \to (X, v)$ の形で書く。また，$\mathcal{Y}$ は次のようにも記述できる。

$\mathcal{Y} = \{(\Gamma', K) \times (\Gamma, K) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$; Γ' は Γ の部分群 $\}$

$\mathcal{Y}$ には $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ から（距離付け可能な）位相が誘導される。

$\Gamma_n' < \Gamma_n$ で $\Gamma_n \to \Gamma$, $\Gamma_n' \to \Gamma'$ なら当然 $\Gamma' < \Gamma$ だから次の命題が成立する。

命題 2.3　$\mathcal{Y}$ は幾何学的位相に関してコンパクトである。

§2.5. Poincaré 級数

$p: (Y, w) \to (X, v) \in \mathcal{Y}$ とする。また，$\phi \in \mathcal{Q}_Y$ とする。このとき，ϕ に対し（適当な条件の下に）p による push-forward $p_*\phi$ が次のように定義される。X の座標円板 B 上では $p_*\phi$ を $(p^{-1})^*\phi$ の $p^{-1}: B \to Y$ のすべての分枝にわたる和として定める。

あるいは，2次微分を普遍被覆面への持ち上げで考えれば，

$$p_*\phi = \sum_{[\gamma] \in \Gamma_X / \Gamma_Y} \gamma^*\phi$$

と表現できる。（このような和が Poincaré 級数と呼ばれる。）
この p による push-forward $p_*\phi$ は X の各コンパクト集合 K に対

し，$\int_{p^{-1}(K)}|\phi|<\infty$ である限り well-defined である。このような ϕ は fiber ごとに可積分である（fiberwise integrable）と呼ばれる。

このPoincaré級数は与えられたデータに対し連続だろうか？例えば次のような例を考えてみよう。X を双曲的コンパクトRiemann面とし，普遍被覆 $p: U_K \to X$ の被覆変換群を Γ_X とする。ϕ を U_K 上の可積分な正則2次微分とする。$\gamma \in \Gamma_X \setminus \{1\}$ とし $\phi_n = (\gamma^n)^* \phi$ とおくと，コンパクト集合 $K \subset U_K$ に対し，

$$\int_K |\phi_n| = \int_{\gamma^n(K)} |\phi| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

だから，幾何学的に $\phi_n \to 0$ である。一方，$P_*(\phi_n) = P_*\phi$ だからあらかじめ ϕ を $P_*\phi \neq 0$ となるようにとっておけば，$P_*\phi_n$ は 0 には収束しない。よってこの場合連続ではない。このようなことが起こらないようにするには，ϕ_n の "mass" がどこか無限のかなたに消え去ってしまわないように何らかの制約をする必要がある。

被覆の列 $p_n: (Y_n, w_n) \to (X_n, v_n) \in \mathcal{Y}$ が $p: (Y, w) \to (X, v) \in \mathcal{Y}$ に収束しているとする。また，$\phi_n \in \mathcal{Q}_{Y_n}$，$\phi \in \mathcal{Q}_Y$ として，$\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{Q}$ とする。さらに ϕ_n, ϕ はいずれも fiber ごとに可積分であるとする。この仮定の下に次の定義を行う。

<u>定義</u>　収束 $\phi_n \to \phi$ が<u>忠実</u>（faithful）である $\Leftrightarrow$ $\int_{Y_n} |\phi_n| \to \int_Y |\phi|$

これは次のことと同値である：任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mathcal{C}$ のコンパクト部分集合 K で十分大きな n に対し $\int_{Y_n \setminus K} |\phi_n| < \varepsilon$ が成り立つようなものが存在する。

<u>命題 2.4</u>　忠実な収束に関してPoincaré級数は連続である。つまり，$\phi_n \to \phi$ が忠実ならば，$(p_n)_*\phi_n \to P_*\phi$ in $\mathcal{Q}$ である。

$\phi_n \to \phi$ が忠実であるためには特に ϕ_n, ϕ は可積分でなければならない。そこで次のようなやや弱い形の収束でも Poincaré 級数の連続性が従うことが分かる。

<u>定義</u>　収束 $\phi_n \to \phi$ が <u>fiberごとに忠実</u>（fiberwise faithful）$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $X_n \to X$ のコンパクト集合の任意の忠実な収束列 $K_n \to K$ に対し，$\int_{p_n^{-1}(K_n)} |\phi_n| \longrightarrow \int_{p^{-1}(K)} |\phi|$ が成り立つ。

<u>注意</u>　先の忠実性の概念と異なり，“fiberごとに忠実”という概念は被覆の列 $p_n \to p$ に依存する概念である。

<u>命題 2.5</u>　収束 $\phi_n \to \phi$ が fiber ごとに忠実ならば $(p_n)_* \phi_n \longrightarrow p_* \phi$ in Q である。

命題 2.4 及び 2.5 を証明するために，形式的には少し弱い収束の概念を導入する。（これは便宜上のもので原論文にはない。）

<u>定義</u>　$\phi_n \to \phi$ が <u>☆－収束</u>する $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ U_K 内の Γ_X に関する任意の単射閉円板 B に対し，$K = p_X(B) \subset X$，$K_n = p_{X_n}(B)$　(n：十分大) とおく。このとき，$\int_{p_n^{-1}(K_n)} |\phi_n| \longrightarrow \int_{p^{-1}(K)} |\phi|$

ここに $p_X : U_K \to X$，$p_{X_n} : U_{K_n} \to X_n$ は標準的被覆とする。（すなわち，$\partial p_X(0,1) = v$，etc.）

証明は次の図式のように進める。

$$\begin{tikzcd}
\text{忠実に収束} \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Lemma4}"] & & & \\
& \text{☆－収束} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Lemma 5}"] & \text{Poincaré 級数は連続} \\
\text{fiberごとに忠実に収束} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{明らか}"'] & &
\end{tikzcd}$$

まず次の簡単な補題から始めよう。

Lemma 3 Γ_n, Γ は $G = PSL_2(\mathbb{C})$ の離散部分群で，$\mathfrak{F}(G)$ において $\Gamma_n \to \Gamma$ であるとする。このとき各 $\gamma \in \Gamma$ に対し列 $\gamma_n \in \Gamma_n$ がとれて $\gamma_n \to \gamma$ $(n\to\infty)$ とできる。

証明 $\gamma \in \Gamma$ とし，V を γ の任意の開近傍とする。すると十分大きい n に対し，$\Gamma_n \in \mathcal{A}_V$ となる。つまり $\Gamma_n \cap V \neq \emptyset$。このことから主張が従う。 //

注意 $(\Gamma_n, K_n), (\Gamma, K) \in \mathfrak{X}$，$\Gamma_n \to \Gamma$ のときは上の $\gamma_n \to \gamma$ なる列の選び方は本質的に一意的である。つまり，そのような列が2つあったとすると十分先の方の n では一致していなければならない。実際，d を $PSL_2(\mathbb{C})$ の左不変距離として（このような距離の存在は Lie 群の一般論から分かる）$(\Gamma, K) \in \mathfrak{X}$ に対し，$\delta_\Gamma = \inf_{\gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'} d(\gamma, \gamma')$ とおけば，単射半径に関する条件から

$$\delta_0 = \inf_{(\Gamma, K) \in \mathfrak{X}} \delta_\Gamma > 0$$

となることが分かるのである。そこで上の証明の V として，d-直径が δ_0 よりも小さいものをとっておけば，$V \cap \Gamma_n \ni \gamma_n$ なるものは高々1つしか存在しない。

Lemma 4 収束 $\phi_n \to \phi$ が忠実ならば，これは $\mathfrak{X}$-収束する。

証明 B, K, K_n は $\mathfrak{X}$-収束の定義におけるものとする。さらに $E = X \setminus K$，$E_n = X_n \setminus K_n$ とおく。仮定より

$$\int_{Y_n} |\phi_n| \longrightarrow \int_Y |\phi| \qquad \text{——— (1)}$$

である。Γ_X, Γ_{X_n} の，B の d_K に関する中心を中心とする Dirichlet 基本領域を ω, ω_n とする。$\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ を Γ_X / Γ_Y の代表系の中の任意の有限個の元とする。Lemma 3 より $\gamma_j^{(n)} \in \Gamma_{X_n}$ で $\gamma_j^{(n)} \to \gamma_j$ $(j=1, \cdots, N)$ なるものがとれる。すると Fatou の lemma から，

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(E_n)}|\phi_n| = \varliminf_{n\to\infty}\sum_{[\gamma]\in\Gamma_{X_n}/\Gamma_{Y_n}}\int_{\omega_n\setminus B}|\gamma^*\phi_n|$$
$$\geqq \varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\int_{\omega_n\setminus B}|(\gamma_j^{(n)})^*\phi_n| \geqq \sum_{j=1}^{N}\int_{\omega\setminus B}|\gamma_j^*\phi|$$

ここで N は任意だから結局

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(E_n)}|\phi_n| \geqq \int_{p^{-1}(E)}|\phi| \qquad \text{——(2)}$$

全く同様にして，

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(K_n)}|\phi_n| \geqq \int_{p^{-1}(K)}|\phi| \qquad \text{——(3)}$$

を得る。一方，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(K_n)}|\phi_n| = \varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_{Y_n}|\phi_n| - \int_{p_n^{-1}(E_n)}|\phi_n|\right)$$
$$\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\int_{Y_n}|\phi_n| - \varliminf_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(E_n)}|\phi_n|$$
$$\leqq \int_Y|\phi| - \int_{p^{-1}(E)}|\phi| \qquad ((1),(2)\text{ より})$$
$$= \int_{p^{-1}(K)}|\phi| \qquad \text{——(4)}$$

(3), (4) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{p_n^{-1}(K_n)}|\phi_n| = \int_{p^{-1}(K)}|\phi|$ が言える。 //

<u>Lemma 5</u> $\phi_n\to\phi$ が $\mathfrak{P}$-収束すれば，$(p_n)_*\phi_n\to p_*\phi$ in $\mathcal{Q}$ である。

<u>証明</u> B, K, K_n は $\mathfrak{P}$-収束の定義におけるものとする。また ϕ_n, ϕ は普遍被覆面への持ち上げとして考える。任意の $\varepsilon>0$ に対し，Γ_X/Γ_Y の代表系の有限部分集合 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$ があって

$$\int_B\left|p_*\phi-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j^*\phi\right| \leqq \sum_{\gamma\neq\gamma_j,\,[\gamma]\in\Gamma_X/\Gamma_Y}\int_K|\gamma^*\phi| < \varepsilon$$

とできる。Lemma 3 より列 $\gamma_j^{(n)}\in\Gamma_n$ で $\gamma_j^{(n)}\to\gamma_j$ なるものがとれる。すると，次の不等式を得る。

$$\int_B|(p_n)_*\phi_n-p_*\phi| \leqq \int_B\left|\sum_{j=1}^{N}(\gamma_j^{(n)})^*\phi_n-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j^*\phi\right| + \int_B\left|\sum_{(n)}{}'\gamma^*\phi_n\right| + \int_B\left|p_*\phi-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j^*\phi\right|$$

ただしここに $\sum_{(n)}'$ は $[\gamma]\in\Gamma_{X_n}/\Gamma_{Y_n}$ で $\gamma\neq\gamma_j^{(n)}$ なるもの全体の和とする。さて明らかに（第1項）$\to 0$，（第3項）$<\varepsilon$ である。一方，（第2項）$\leqq \sum_{(n)}'\int_B|\gamma^*\phi_n|$ で，$\mathfrak{P}$-収束の仮定から，

$$\sum_{[\gamma]\in\Gamma_{X_n}/\Gamma_{Y_n}}\int_B|\gamma^*\phi_n| = \int_{p_n^{-1}(K_n)}|\phi_n| \longrightarrow \int_{p^{-1}(K)}|\phi| = \sum_{[\gamma]\in\Gamma_X/\Gamma_Y}\int_B|\phi|$$

でこの両辺から $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\int_B|(\gamma_j^{(n)})^*\phi_n| \longrightarrow \sum_{j=1}^{N}\int_B|\gamma_j^*\phi|$ を引き算すれば

$$\sum_{(n)}{}'\int_B|\gamma^*\phi_n| \longrightarrow \sum_{\gamma\neq\gamma_j,\,[\gamma]\in\Gamma_X/\Gamma_Y}\int_B|\gamma^*\phi| \quad (<\varepsilon)$$

であることが分かる。以上の考察から，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_B |(P_n)_* \phi_n - P_* \phi| \leqq 0 + \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ は任意だったから，これより $\int_B |(P_n)_*\phi_n - P_*\phi| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ が言え，従って $(P_n)_*\phi_n$ が $\overline{U}_K$ 上 $P_*\phi$ に広義一様収束することが分かる。 //

以上で命題 2.4 及び 2.5 の証明のプログラムが完了した。

§2.6. 単純閉曲線の系の空間

X を Riemann 面とし，$\mathcal{S}_X$ を X 内の可縮でない単純閉曲線の isotopy 類全体とする。さらに

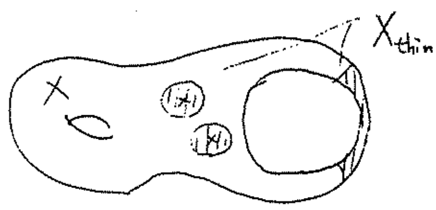
$$\mathcal{S} = \{ (X, v, S) \ ; \ (X, v) \in \mathfrak{X},\ S \subset \mathcal{S}_X \text{ : 空でない有限集合} \}$$

とおく。$\mathcal{S}$ に幾何学的位相を導入しよう。

$\varepsilon_0 > 0$ を十分小さくとり固定しておく。双曲的 Riemann 面 X に対し，

$$X_{thin} = \{ x \in X \ ; \ x \text{ における Poincaré 計量に関する単射半径} \leqq \varepsilon_0 \}$$

と定める。これは X の thin part と呼ばれ，この各成分の基本群は $\mathbb{Z}$ と同型になる。さらに $\gamma \in \mathcal{S}_X$ に対し $K_\gamma \subset X$ を γ が X_{thin} のある成分の基本群の生成元になるときその成分とし，そうでないとき γ に自由ホモトピー同値な X の測地線とする。



そこで $(X, v, S) \in \mathcal{S}$ に対し $K(S) \subset X$ を

$\kappa(X) < 0$ のとき $\quad K(S) = \bigcup_{\gamma \in S} K_\gamma$

$\kappa(X) = 0$ のとき $\quad K(S) = X$

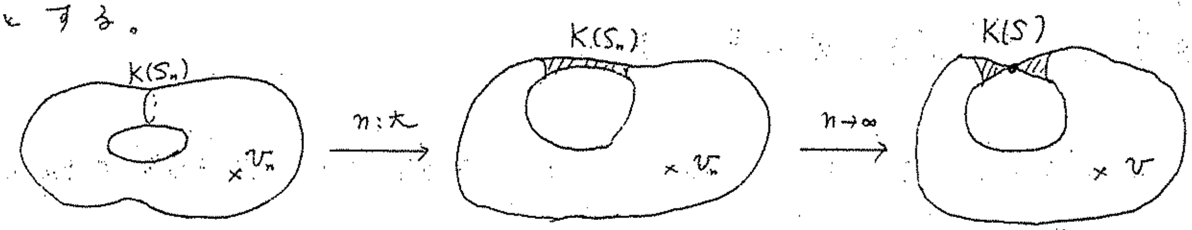
と定める。（つねに $\kappa(X) \leqq 0$ であることに注意。）さらに

$$(X_n, v_n, S_n) \longrightarrow (X, v, S) \iff \begin{cases} (X_n, v_n) \to (X, v) \\ \text{忠実に } K(S_n) \to K(S) \end{cases}$$

とすることにより $\mathcal{S}$ に位相を入れる。

<u>注意</u>　$\mathcal{S}_X$ は $\pi_1(X)=\Gamma_X$ の共役類全体の部分集合とみなすこともできる。

<u>例</u>　(X_n, v_n) を $(1,1)$ 型 Riemann 面の列で、一つの測地線 S_n に沿って pinching して $(0,3)$ 型 Riemann 面 (X, v) に収束しているとする。



この場合 (X_n, v_n, S_n) の極限 (X, v, S) の S は新しく出来た2つの puncture のまわりをまわる2つの曲線となっている。このようなことは非分離曲線に沿って pinching したとき、つねに起こる。

§2.7　有限葉有理型函数の空間

$\mathrm{Rat}_d = \{\, f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$: 有理函数, $\deg f \le d \,\}$　($f\equiv\infty$ も含める。)

とし、Rat_d の位相を

$f_n\to f \iff \hat{\mathbb{C}}$ のある有限部分集合 E が存在して

$f_n\to f$　($\hat{\mathbb{C}}\setminus E$ 上広義一様)

で定める。ここで次数は下半連続であることに注意する。つまり $f_n\to f$ ならば、$\deg f \le \varliminf_{n\to\infty} \deg f_n$ である。Rat_d はこの位相によりコンパクトになる。これを一般化してここでは次のような空間を考えよう。

<u>記号</u>　$\mathcal{R}_d = \{(X,v,f)\ ;\ (X,v)\in\mathfrak{X},\ f:X\to\hat{\mathbb{C}}$ は定数又は高々 d 葉の有理型函数$\}$　と定める。

$\mathcal{R}_d$ の幾何学的位相を次のように定義する。

$(X_n, v_n, f_n) \to (X, v, f) \iff (X_n, v_n) \to (X, v)$ かつ，X のある有限部分集合 E があって，$f_n \to f$ （$X-E$ 上広義一様）

ここで "$f_n \to f$: $X-E$ 上広義一様" とは厳密には次の意味に解する。$p_{X_n}: U_{K_n} \to X_n$，$p_X: U_K \to X \in \mathcal{Y}$ として，$\tilde{f}_n = f_n \circ p_{X_n}$，$\tilde{f} = f \circ p_X$ とおけば $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ （$U_K \setminus p_X^{-1}(E)$ 上広義一様）

$f \in \mathcal{R}_d$ に対し，$f \not\equiv \infty$ のとき f を有理型函数，$f \not\equiv 0$ のとき，f は可逆である，という。

<u>定理 2.6.</u> $\mathcal{R}_d$ は幾何学的位相に関してコンパクトである。さらに可逆な有理型函数の列 $(X_n, v_n, f_n) \in \mathcal{R}_d$ に対して適当な $\mathbb{C}^*$ の列 c_n をとれば $c_n f_n$ が可逆な有理型函数に収束する部分列をもつようにできる。

<u>証明</u> 厳密には持ち上げで考えるべきだが，その修正は容易なのでここではやや粗っぽいまま証明を行う。$(X_n, v_n, f_n) \in \mathcal{R}_d$ とする。$\mathcal{X}$ はコンパクトだからはじめから $(X_n, v_n) \to (X, v)$ としてよい。(f_n) が定数函数からなる部分列を含めば結論は明白だからそうでないとしてよい。$E_n = f_n^{-1}(\{0,1,\infty\})$ とおくと $\#E_n \leqq 3d$ である。$\mathcal{F}(\mathbb{C})$ はコンパクトだから，ある $E \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ に対し，$E_n \to E$ となるが，明らかに $E \subset X$ で $\#E \leqq 3d$ である。（ただし収束 $E_n \to E$ は忠実とは限らない。）f_n は $X_n \setminus E_n$ 上 $0, 1, \infty$ に値をとらないから Montel の定理より $X \setminus E$ 上広義一様収束する部分列をもつ。明らかに極限函数は定数または高々 d 葉だからこれで前半が示された。後半は $x_n \in X_n \setminus E_n$ を $x \in X \setminus E$ に収束する点列とし，$c_n = 1/f_n(x_n)$ とおけば $c_n f_n$ はある $f \in \mathcal{R}_d$ に収束する部分列をもつが，$f(x) = \lim_{n\to\infty} c_n f_n(x_n) = 1$ より可逆な有理型函数であり，これで示された。 //

§3. 2次微分のなすコンパクト空間

定義　$\mathcal{Q} \setminus$ (0切断) を各fiberへの $\mathbb{C}^*$ 作用で割った空間を $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ で表す。これには $\mathcal{Q}$ からの商位相を入れておく。また、

$$\mathcal{Q}_{g,m} = \{ (X, v, \phi) \in \mathcal{Q} \ ; \quad (X, v) \in \mathcal{X}_{g,m}, \quad \int_X |\phi| < \infty \}$$

とおき、$\mathcal{Q}_{g,m} \setminus$ (0切断) の $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ における像を $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}$ と書く。

$(X, v, \phi) \in \mathcal{Q}_{g,m}$ とすると、ϕ はpunctureで高々1位の極しか持たない X 上の正則2次微分（$\overline{X}$ 上の有理型2次微分）である。次が本章の主定理である。

定理 3.1　$\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}$ は $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ において相対コンパクトである。

注意 1°　$\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}$ をコンパクト化する2次微分は $\partial\mathcal{X}_{g,m}$ のある点 (X, v) の上にあるわけだが、これらはpunctureで1よりも高い位数の極を持つこともある（§4の例参照）。ただし、$\overline{X}$ 上の有理型2次微分にはなる。

注意 2°　$\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m} \to \mathcal{X}_{g,m}$ のfiberは射影空間になるが、コンパクト化 $\overline{\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}} \longrightarrow \overline{\mathcal{X}_{g,m}}$ のfiberは後で具体例でみるように必ずしもそうではない。（しかし、射影空間の位相的直和にはなっているように筆者には思える。）

注意 3°　このコンパクト化はDeligne – Mumford, Bers, Masur, Earle – Mardenらによるそれと勿論密接に関連はするが、同じものではない。

注意 4°　$\mathbb{P}\mathcal{Q}$ 自身はコンパクトではない。例えば $X = \mathbb{U}_1$, $v = (0, 1)$ とすると列 $[z^n dz^2]$ は $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ 内に集積点を持たない。

§3.1 単純閉曲線から生ずる2次微分

Yを $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$ となるRiemann面とする。すると、ある双正則写像 $h : Y \to A(r,R) = \{z \in \mathbb{C} ; r < |z| < R\}$ $(0 \leq r < R \leq \infty)$ が存在する。そこで次のように定義する。

$$\phi(Y) = h^*\left(\frac{dz^2}{z^2}\right)$$

<u>Lemma 6.</u> $\frac{dz^2}{z^2}$ は $A(r,R)$ の解析的自己同型群の作用で不変。

<u>証明</u> 定数倍 $w = cz$，反転 $w = \frac{1}{z}$ で不変なことに注意すればよい。 //

このLemmaから $\phi(Y)$ がwell-definedであることが分かる。

<u>定義</u> $(X, \nu, S) \in \mathcal{S}$, $S = \{[\gamma_1], \cdots, [\gamma_s]\}$ とする。ここに $[\gamma]$ は $\gamma \in \pi_1(X) = \Gamma_X$ の Γ_X における共役類とする。各 γ_i による円環被覆 (annular covering) $p_i : Y_i \to X$ とする。(つまり，$Y_i = U_X / \langle \gamma_i \rangle$ である。) そこで

$$\theta(X, \nu, S) = \sum_{i=1}^{s} (p_i)_* \phi(Y_i)$$

と定める。これは $[\gamma_i]$ の代表元 γ_i のとり方によらず定まる。

<u>命題 3.2</u> $\theta = \theta(X, \nu, S) \in \mathcal{Q}_X$ で，これは X のpunctureで高々2位の極しか持たない。しかも $\theta \neq 0$ である。

<u>証明</u> Y_i が真の円環のとき；つまり $Y_i \cong A(r,R)$ $(0 < r < R < \infty)$ のとき $\phi(Y_i)$ は可積分だから $p_i^* \phi(Y_i) \in A_2(X) \subset \mathcal{Q}_X$。そうでないとすると $Y_i = \mathbb{C}^*$ 又は $\Delta^* = \{0 < |z| < 1\}$ としてよい。$Y_i = \mathbb{C}^*$ のときは直接計算により直ちに分かる（この場合 $X = \mathbb{C}^*$ 又はトーラス）。$Y_i = \Delta^*$ のときは十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し制限 $A(0,\varepsilon) \xrightarrow{p_i} X$ は単射。よってこの部分の寄与は正則になり，対応するpunctureで真に2位の極を与える。$\Delta^* - \overline{A(0,\varepsilon)} = A(\varepsilon, 1)$

では $\phi(Y_i)$ は可積分だからやはり正則である。従っていずれの場合も $(P_i)^*\phi(Y_i) \in \mathcal{Q}_X$ が分かった。

$\theta \neq 0$ を言うには，$K(X)=0$ のときは直接計算からすぐ分かるのでXは双曲的としてよい。すると実は $(P_i)_*\phi(Y_i)$ $(i=1,\cdots,s)$ は1次独立になっている。これは $A_2(X)$ をXのTeichmüller空間の余接空間と見做したとき，Wolpert [Wol; Theorem 3.7] によれば，γ_i に対応するFenchel-Nielsenひねりベクトル場 (twist vector field) と完全対をなす，ということから分かる。(Wolpertはコンパクト面に対してしか証明を与えていないが，一般の場合に拡張するのは容易である。) //

§3.2 写像 $\theta: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{Q}$ の連続性

命題 3.3　$\theta: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{Q}$ は連続である。

定義から $\theta(X, v, S_1 \cup S_2) = \theta(X, v, S_1) + \theta(X, v, S_2)$ である。従って $(X_n, v_n, S_n) \longrightarrow (X, v, S)$, $\# S_n = 1$ と仮定して $\theta(X_n, v_n, S_n) \longrightarrow \theta(X, v, S)$ を示せば十分である。(実際，あとで定理3.1を示すのにこの命題を用いるときもこの場合しか必要とはしない。証明に入る前に円環領域に関して基本的な性質を補題として述べておく。

Lemma 7　Yを双曲的円環とし，Poincaré距離を入れておく。するとthin partを定義する時に用いた $\varepsilon_0 > 0$ にのみ依存する定数Mがあって次が成り立つ。$E_Y(L) = \{z \in Y;\ \mathrm{dist}(z, Y_{thin}) > L\}$ とおけば，

$$\int_{E_Y(L)} |\phi(Y)| \leq M e^{-\frac{2}{\varepsilon_0}L},$$

特に $L=0$ として

$$\int_{Y - Y_{thin}} |\phi(Y)| \leq M .$$

証明　$Y = A(r,1)$ としてよい。まず $0<r$ を仮定しよう。Y の普遍被覆面を上半平面 $\mathbb{H}$，被覆変換群を $\langle\gamma\rangle$，$\gamma(z)=\lambda z$ $(\lambda>1)$ となるようにとる。具体的には被覆写像 $f(z)=e^{\frac{2\pi i \log z}{\log\lambda}}$ $(z\in\mathbb{H})$ にとれる。従って特に $r=e^{-\frac{2\pi^2}{\log\lambda}}$，$\log\lambda = -\frac{2\pi^2}{\log r}$ である。さて，$r<s<1$ として曲線 $\{|z|=s\}$ の Y における Poincaré length を計算しよう。$e^{-\frac{2\pi\varphi}{\log\lambda}}=s$ となる $\varphi\in(0,\pi)$ をとれば $\alpha: t\mapsto te^{i\varphi}$ $(t\in[1,\lambda])$ がこの曲線の一つの持ち上げになっている。よって

$$\int_{|z|=s} ds_{-1} = \int_\alpha \frac{|dz|}{y} = \int_1^\lambda \frac{dt}{t\sin\varphi} = \frac{\log\lambda}{\sin\varphi}$$

特に $\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ の条件の下で，$\frac{2}{\pi}\varphi\leqq\sin\varphi$ だから

$$\int_{|z|=s} ds_{-1} < \varepsilon_0 \Leftrightarrow \frac{\log\lambda}{\sin\varphi}<\varepsilon_0 \Leftarrow \frac{\log\lambda}{\varepsilon_0} < \frac{2}{\pi}\varphi = \frac{1}{\pi^2}\log\lambda\log\frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{\varepsilon_0} < \log\frac{1}{s}$$

よって $Y_{thin}=\{r_1<|z|<s_1\}$ とすれば，$\frac{\pi^2}{\varepsilon_0}\geqq\log\frac{1}{s_1}$ ―― (＊)

同様に $E_L=\{s_2<|z|<1\}\cup\{r<|z|<\frac{r}{s_2}\}$ と書ける。さて Y_{thin} と s_2 とを結ぶ最短の測地線は明らかに線分 $[s_1,s_2]$ で，この $\mathbb{H}$ への持ち上げは $\beta:\varphi\mapsto e^{i\varphi}$ $(\varphi_2\leqq\varphi\leqq\varphi_1)$ で与えられる。ただしここで，$\varphi_j=\frac{1}{2\pi}\log\lambda\log\frac{1}{s_j}=\pi\cdot\log\frac{1}{s_j}\Big/\log\frac{1}{r}\in(0,\frac{\pi}{2})$

従って，$L=\mathrm{dist}(s_2,Y_{thin})=\int_\beta\frac{|dz|}{y}=\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\leqq\frac{\pi}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{\pi}{2}\log\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$

$\therefore\ \varphi_2\leqq\varphi_1 e^{-\frac{2}{\pi}L}$

ここで，

$$\int_{E_Y(L)}|\phi(Y)| = 2\iint_{s_2<|z|<1}\frac{2\,dx\,dy}{|z|^2} = 4\cdot2\pi\int_{s_2}^1\frac{dr}{r} = 8\pi\log\frac{1}{s_2} = 8\varphi_2\log\frac{1}{r}$$
$$\leqq 8\varphi_1\log\frac{1}{r}\cdot e^{-\frac{2}{\pi}L} = 8\pi\log\frac{1}{s_1}\cdot e^{-\frac{2}{\pi}L}$$
$$\leqq \frac{(2\pi)^3}{\varepsilon_0}e^{-\frac{2}{\pi}L} \qquad (\text{(＊)による。})$$

だから $r>0$ の場合は主張が示された。$r=0$ の場合は，$r\downarrow0$ のときの極限だと思ってもよいし，直接計算により示してもよい（$r>0$ の場合よりは容易である）。 //

命題3.3の証明　$(X_n,v_n,S_n)\to(X,v,S)$，$\#S_n=1$ とする。

I. $\#S=1$ のとき

適当な S_n に関する円環被覆をとって $\left((Y_n, w_n) \xrightarrow{p_n} (X_n, v_n)\right) \to \left((Y, w) \xrightarrow{p} (X, v)\right)$ in $\mathcal{Y}$ とできる。$\phi_n = \phi(Y_n)$, $\phi = \phi(Y)$ とおく。さらに $Y_n = A(r_n, R_n)$, $Y = A(r, R)$, $r_n \to r$, $R_n \to R$; $w_n \to w$ in $S^1(Y)$ と考えてよい。この場合 $\phi_n = \frac{dz^2}{z^2}$ となる(形は n にはよらない。)

Lemma 5 より $\phi_n \to \phi$ が ☆-収束することを言えば十分である。

((case 1)) X がトーラスのとき。X_n もトーラスだから明らか。

((case 2)) $X = \mathbb{C}^*$ のとき

(a) $X_n = \mathbb{C}^*$ $({}^\forall n)$ のとき、自明。

(b) $k_n = k(X_n) < 0$ のとき。

$K_n \to K$ を $X_n \to X$ のコンパクト部分集合の忠実な収束列とする。すると十分大きな n に対し、$K_n \subset (X_n)_{thin}$ となる。$(Y_n)_{thin}$ では被覆 $p_n : Y_n \to X_n$ は単射だから p_n による K_n の逆像の一つの成分 $\tilde{K}_n$ は $(Y_n)_{thin}$ に含まれ、それ以外の成分は $(Y_n)_{thick} = Y_n \setminus (Y_n)_{thin}$ に含まれる。ここで $p_n(\partial(Y_n)_{thin}) \subset \partial(X_n)_{thin}$ と Poincaré 距離の単調性に注意すると、$L_n = \mathrm{dist}_{Y_n}(p_n^{-1}(K_n) \setminus \tilde{K}_n, \partial(Y_n)_{thin})$ として

$$L_n \geq \mathrm{dist}_{X_n}(K_n, \partial(X_n)_{thin}) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

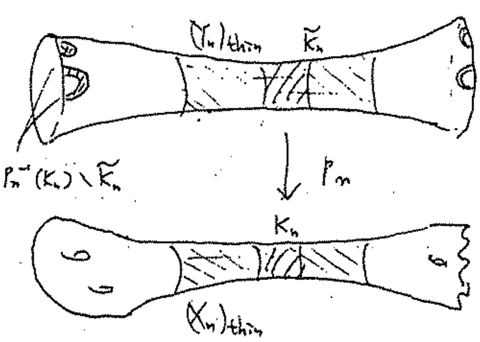
より $L_n \to \infty$ である。$p_n^{-1}(K_n) \setminus \tilde{K}_n \subset \overline{E_{Y_n}(L_n)}$ より、Lemma 7 から $\int_{p_n^{-1}(K_n) \setminus \tilde{K}_n} |\phi_n| \leq \int_{E_{Y_n}(L_n)} |\phi(Y_n)| \leq M e^{-\frac{2}{3}L_n} \to 0$

一方、明らかに $\int_{\tilde{K}_n} |\phi_n| \to \int_K |\phi|$.

ゆえに

$\int_{p_n^{-1}(K_n)} |\phi_n| \to \int_K |\phi| = \int_{p^{-1}(K)} |\phi|$

で、$\phi_n \to \phi$ は fiber ごとに忠実、従って、☆-収束することが分かった。



((case 3)) X が双曲的のとき。

(a) S が X の測地線のとき。Poincaré length $\ell(S_n) \to \ell(S)$ で $\int_{Y_n} |\phi_n|$ は $\ell(S_n)$ について連続だから $\lim_{n\to\infty} \int_{Y_n} |\phi_n| = \int_Y |\phi|$ よって $\phi_n \to \phi$ は忠実、従って ☆-収束する。

(b) S, S_n ともに puncture に対応するとき。$K_n \to K$ を $X_n \to X$ のコンパクト部分集合の忠実な収束列とする。この場

合 $\gamma_n = r = 0$ としてよい。p_n は $(Y_n)_{thin}$ 上単射だから明らかに

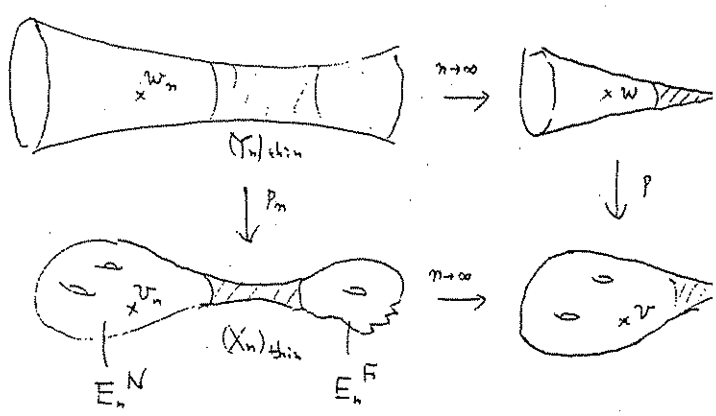
$$\int_{p_n^{-1}(K_n)\cap (Y_n)_{thin}} |\phi_n| \to \int_{p^{-1}(K)\cap Y_{thin}} |\phi|$$

である。一方，$(Y_n)_{thick}$ では $R_n \to R < \infty$ より，Lebesgue の収束定理から

$$\int_{p_n^{-1}(K_n)\cap (Y_n)_{thick}} |\phi_n| \longrightarrow \int_{p^{-1}(K)\cap Y_{thick}} |\phi|$$

である。以上を合わせて $\int_{p_n^{-1}(K_n)} |\phi_n| \to \int_{p^{-1}(K)} |\phi|$ を得る。

(c) S_n が分離的な測地線で S が puncture に対応するとき。$r=0$,



$(Y_n)_{thin} = A(a_n, b_n)$, $Y_{thin} = A(0, b)$ とすると，$a_n \to 0$, $b_n \to b$ 。$K_n \to K$ を $X_n \to X$ のコンパクト部分集合の忠実な収束列とする。$X_n \setminus K(S_n)$ の成分で，$\overline{v_n}$ のある方を E_n^N (near end) ない方を E_n^F (far end) とすると，$L_n := \mathrm{dist}_{X_n}(K_n, E_n^F) \to \infty$ $(n\to\infty)$。よって，

$\tilde{K}_n^F = p_n^{-1}(K_n) \cap \{0<|z|<a_n\}$ とおけば，$\mathrm{dist}_{Y_n}(\tilde{K}_n^F, (Y_n)_{thin}) \geq L_n$

従って Lemma 7 より

$$\int_{\tilde{K}_n^F} |\phi_n| \leq \int_{E_{Y_n}(L_n)} |\phi(Y_n)| \leq M e^{-\frac{2}{\pi}L_n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

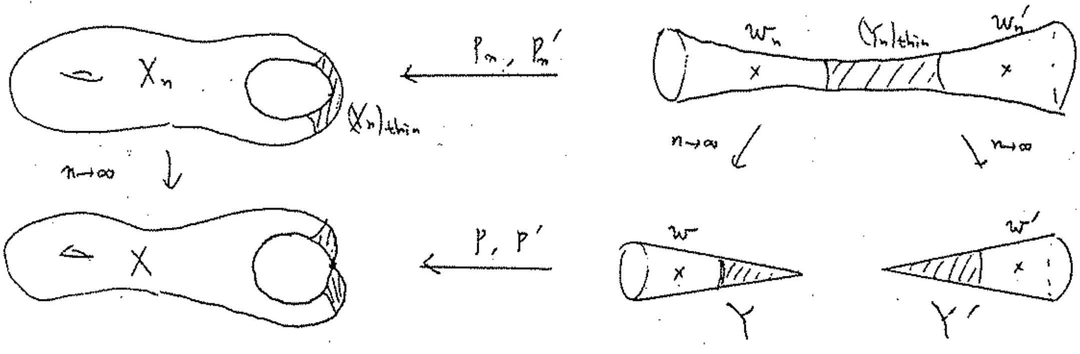
一方，(b) と同様に Lebesgue の定理から

$$\int_{p_n^{-1}(K_n)\setminus \tilde{K}_n^F} |\phi_n| \to \int_{p^{-1}(K)} |\phi| \quad (n\to\infty)$$

を得，この 2 つを合わせて，$\phi_n \to \phi$ が fiber ごとに忠実であることが言える。

<u>II　$\# S = 2$ のとき</u>

(d) S_n が非分離測地線で，S が 2 つの puncture に対応する。



(Y, w), (Y', w') を S の2つの元に対応する円環被覆とする。
また、S_n に対応する円環被覆 (Y_n, w_n), (Y_n', w_n') を、
$(Y_n, w_n) \to (Y, w)$, $(Y_n', w_n') \to (Y', w')$ となるようにとる。
以前同様、$Y_n = A(r_n, R_n)$, $Y_n' = A(r_n', R_n')$, $Y = A(0, R)$, $Y' = A(0, R')$
$w_n \to w$, $w_n' \to w'$, $r_n \to 0$, $R_n \to R < \infty$, $r_n' \to 0$, $R_n' \to R' < \infty$
なるようにしておく。ここで無論 $\frac{R_n}{r_n} = \frac{R_n'}{r_n'}$ である。

さて B を P_X に関する U_K 上の単射閉円板とし、$K = P_X(B)$,
$K_n = P_{X_n}(B)$ とおく。

S_n の測地線を l_n とすれば十分大きな n に対して $K_n \cap l_n = \emptyset$
であることに注意して、

$$\tilde{K}_n = P_n^{-1}(K_n) \cap \{|z| > \sqrt{r_n R_n}\}$$
$$\tilde{K}_n' = (P_n')^{-1}(K_n) \cap \{|z| > \sqrt{r_n' R_n'}\}$$

とおく。($P_n : Y_n \to X_n$, $P_n' : Y_n' \to X_n$ は対応する被覆写像とする。) ここである双正則写像 $f_n : Y_n \to Y_n'$ があって

$$P_n = P_n' \circ f_n \quad ; \quad d f_n(w_n) = w_n'$$

となっていることに注意すると明らかに $P_n^{-1}(K_n) = \tilde{K}_n \cup f_n^{-1}(\tilde{K}_n')$
$\tilde{K}_n \cap f_n^{-1}(\tilde{K}_n') = \emptyset$ であり、やはり I (case 3)) (b) と同様に Lebesgue の収束定理から

$$\begin{cases} \int_{\tilde{K}_n} |\phi_n| \longrightarrow \int_{P^{-1}(K)} |\phi| \\ \int_{P_n^{-1}(K_n) \setminus \tilde{K}_n} |\phi_n| = \int_{f_n^{-1}(\tilde{K}_n')} |f_n^* \phi_n'| = \int_{\tilde{K}_n'} |\phi_n'| \longrightarrow \int_{(P')^{-1}(K)} |\phi'| \end{cases}$$

この2つの data を用いてあとは Lemma 5 の証明と全く同じ方法によって

$$\int_B |(P_n)_* \phi_n - P_* \phi - P'_* \phi'| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を示すことができ、これより $(P_n)_* \phi_n \to P_* \phi + P'_* \phi'$ すなわち、
$\Theta(X_n, v_n, S_n) \to \Theta(X, v, S)$ が従う。 //

§3.3. $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}$ が相対コンパクトであることの証明

<u>定理 3.1 の証明</u> $(X_n, v_n, [\phi_n])$ を $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{g,m}$ における点列とす

る。はじめから $(X_n, v_n) \to (X, v) \in \overline{\mathfrak{X}_{g,m}}$ としてよい。

((case 1)) $k(X) < 0$ で X の単純測地線の自由ホモトピー類 S が存在するとき(つまり X が $(0,3)$ 型でない双曲的面のとき)。この時は，ある $S_n \in \mathcal{S}_{X_n}$ があって $(X_n, v_n, S_n) \to (X, v, S)$ となる。従って θ の連続性から

$$\theta_n = \theta(X_n, v_n, S_n) \longrightarrow \theta = \theta(X, v, S)$$

である。そこで，$f_n = \phi_n / \theta_n$，とおくと，f_n は X_n 上の有理型函数で，ϕ_n, θ_n を $\overline{X_n}$ 上の有理型 2 次微分と見做したとき，

$$\deg(\phi_n)_\infty \leqq m$$

$$\deg(\theta_n)_0 = \deg\theta_n + \deg(\theta_n)_\infty = 2\cdot(2g-2) + \deg(\theta_n)_\infty \leqq 4g-4+2m$$

だから，$\deg f_n = \deg(\phi_n)_\infty + \deg(\theta_n)_0 \leqq 4g-4+3m$ (有界)

従って定理 2.6 より $\mathbb{C}^*$ の列 c_n があって $c_n f_n$ が可逆な有理型函数に収束する部分列を持つ。よってはじめから，

$c_n f_n \longrightarrow f \quad (f \neq 0, \infty)$ としてよい。つまり X のある有限部分集合 E があって $c_n f_n \longrightarrow f$ ($X - E$ 上広義一様) となる。一方 $\theta_n \to \theta$ だったから，$c_n\phi_n \to \phi = f\cdot\theta$ ($X \setminus E$ 上広義一様) であるが，もともと ϕ_n は X_n 上正則なのだから，実は $c_n\phi_n \to \phi$ (X 上広義一様) となっている。ゆえに $[\phi_n] \to [\phi]$ in $\mathbb{PQ}$ でこれで収束する部分列がとれることが分かった。

((case 2)) $X = \mathbb{C}^*$ 又は $X = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{3点\}$ かつ $3g-3+m > 0$ のとき。X の適当な puncture のまわりの単純閉曲線の自由ホモトピー類を 1 つ又は 2 つとり S とすると，ある $S_n \in \mathcal{S}_{X_n}$ ($\# S_n = 1$) で $(X_n, v_n, S_n) \longrightarrow (X, v, S)$ なるものがとれる。あとは ((case 1)) と全く同様にして証明できる。

<u>注意</u> $\# S = 2$ とする必要があるのは $X = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{3点\}$, $(g,m) = (1,1)$ のときのみである (§2.6 例 参照)。

((case 3)) $X =$ トーラス 又は $X = \mathbb{C}$ かつ $2g-2+m \leqq 0$ 又は $X = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{3点\}$ かつ $(g,m) = (0,3)$ のとき。自明。

《case 4》 $X = \mathbb{C}$ かつ $2g-2+m>0$ のとき。 $k_n = k(X_n) < 0$

$\lambda_n = \lambda(X_n, v_n) \geqq 1$ とおく。X_n の計量を曲率 $a_n k_n = k_n'$ のものにおきかえた面を X_n' とする。$a_n \geqq 1$ とし，さらに

$$\begin{cases} k_n' = a_n k_n \leqq -1 \\ \lambda_n' = \lambda(X_n', v_n) = \dfrac{\lambda_n}{\sqrt{a_n}} \geqq 1 \end{cases} \iff a_n \leqq \min\left(\lambda_n^2, \frac{-1}{k_n}\right)$$

をみたせば，$(X_n', v_n) \in \mathfrak{X}$ となる。今は部分列を問題だから次の2通りの場合を考えれば十分である。

① $\lambda_n^2 \geqq -\frac{1}{k_n}$ $({}^\forall n)$ のとき。 $a_n = -\frac{1}{k_n}$ にとる。

② $\lambda_n^2 \leqq -\frac{1}{k_n}$ $({}^\forall n)$ のとき。 $a_n = \lambda_n^2$ にとる。

さて，やはり $(X_n', v_n) \longrightarrow (X', v')$ としてよいが，①のときは $k(X') = \lim_{n\to\infty} k_n' = -1$，②のとき $\lambda(X', v') = \lim_{n\to\infty} \lambda_n' = 1$ だからいずれにせよ $X' \neq \mathbb{C}$。よって case 1, 2, 3 から，

$(X_n', v_n, [\phi_n']) \longrightarrow (X', v', [\phi'])$ としてよい。必要なら定数倍を調節して $\phi_n' \to \phi'$ としてよい。今は便宜上 ϕ_n', ϕ' は持ち上げて $U_{k_n'}, U_{k'}$ $(k' = k(X'))$ 上の正則2次微分とみなす。さらに $\phi_n(z) = \phi_n'\left(\frac{z}{\sqrt{a_n}}\right)$ と思ってよい。ϕ' の 0 における位数を $k \geqq 0$ として $\phi'(z) = b_k z^k + \cdots$ とすると，$\phi_n'(z) = b_0^{(n)} + b_1^{(n)} z + \cdots$ としたとき，$b_j^{(n)} \to 0$ $(j = 0, 1, \dots, k-1)$，$b_k^{(n)} \to b_k \neq 0$ である。
そこで $\hat{\phi}_n(z) = b_0^{(n)} + b_1^{(n)} \frac{z}{\sqrt{a_n}} + \cdots + b_k^{(n)} \left(\frac{z}{\sqrt{a_n}}\right)^k$ とおくと，
$[\hat{\phi}_n]$ は $\mathbb{P}\langle 1, z, \dots, z^k\rangle_{\mathbb{C}}$ で収束する部分列をもつ。よってはじめから適当な列 $c_n \in \mathbb{C}^*$ をとって $c_n \hat{\phi}_n \longrightarrow \phi \in \langle 1, z, \dots, z^k\rangle_{\mathbb{C}}$
$\phi \neq 0$ としてよい。すると特に $\frac{c_n b_k^{(n)}}{(\sqrt{a_n})^k}$ は収束列だから，

$$c_n = O(\sqrt{a_n}^{\,k}) \quad (n \to \infty)$$

このことから容易に $c_n(\phi_n - \hat{\phi}_n) \to 0$ （広義一様）

従って $c_n \phi_n \to \phi$ （広義一様）

ゆえに $(X_n, v_n, [\phi_n]) \to (X, v, [\phi])$ である。

<u>注意</u> この証明から特に，$\deg \phi \leqq k = \mathrm{ord}_0 \phi'$ である。

§4 低次元での例

1. $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{0,4}$ ここでは $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{0,4}$ の完全な記述を行う。まず，$\overline{\mathfrak{X}_{0,4}} = \mathfrak{X}_{0,1} \cup \mathfrak{X}_{0,2} \cup \mathfrak{X}_{0,3} \cup \mathfrak{X}_{0,4}$ に注意する。$(X, v) \in \mathfrak{X}_{0,4}$ とすると $\mathbb{P}\mathcal{Q}_X = \{1点\}$ 例えば $X = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $(a_j \neq \infty)$ のとき，

$$\phi = \frac{dz^2}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}$$

とおけば $\mathbb{P}\mathcal{Q}_X = \{[\phi]\}$ である。これは X において零を持たないから極限においてもそうである。puncture の寄り方に従って $\mathfrak{X}_{0,4}$ の境界の Riemann 面上に現れる $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{0,4}$ の元の形は次のようになる。

$X_3 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{3点\}$ のとき，極の位数 $(1, 1, 2)$

$X_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{2点\}$ のとき，極の位数 $(1, 3)$ 又は $(2, 2)$

$X_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{1点\}$ のとき，極の位数 4

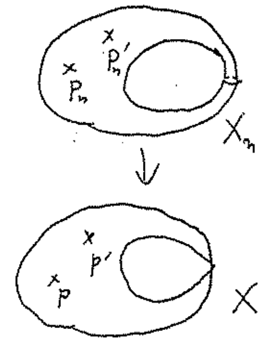
ここで，$\overline{\mathbb{P}\mathcal{Q}_{0,4}}$ の X_3, X_2 の上の fiber は 3点からなる。よって射影空間ではない。X_1 の上の fiber は 1点からなる。

2. $\mathbb{P}\mathcal{Q}_{1,2}$ Γを 2次元格子群とし，$\mathbb{C}/\Gamma$ を考える。$z_1, z_2, P_1, P_2 \in \mathbb{C}/\Gamma$ とするとき，Abel の定理から

$z_1 + z_2 - P_1 - P_2$ を因子 (divisor) に持つ $\mathbb{C}/\Gamma$ 上の有理型函数が存在する $\iff$ $z_1 + z_2 - P_1 - P_2 = 0$ ($\mathbb{C}/\Gamma$ を Abel 群とみなして) であった。さて $(X_n, v_n) \in \mathfrak{X}_{1,2}$ が $(X, v) \in \mathfrak{X}_{0,4}$ に一つの単純閉曲線によって pinching して収束しているとする。

$X_n = \mathbb{C}/\Gamma_n - \{P_n, P_n'\}$

$X = \mathbb{C}/\Gamma - \{P, P'\}$



とし，$\Gamma_n \to \Gamma = \langle A \rangle$ $(A(z) = z + 2\pi i)$ であるとする。さらに $\phi_n \in A_2(X_n) \setminus 0$ が $\phi \in \mathcal{Q}_X \setminus 0$ に幾何学的に収束しているとする。ここで ϕ_n は P_n, P_n' で極を持つとし，ϕ_n の

零点を z_n, z_n' とする。状況を簡単にするため，さらに $z_n \to z \in X$, $z_n' \to z' \in X$ と仮定する。

またここで z を Γ_n, Γ で割る前の $\mathbb{C}$ の座標として，

$$\psi_n = dz^2 \in Q_{X_n}, \quad \psi = dz^2 \in Q_X$$

とおく。そこで有理型函数 $f_n = \phi_n/\psi_n$, $f = \phi/\psi$ と定めると f は P, P' に1位の極を持ち，z, z' で0になるが，$\deg f \leqq \varliminf_{n\to\infty} \deg f_n = 2$ だから f は他には零点を持たない。従って f の因子は

$z + z' - P - P'$ である。また先の Abel の定理から

$$z_n + z_n' = P_n + P_n' \quad \text{in } \mathbb{C}/\Gamma_n$$

だったから，$n \to \infty$ として

$$z + z' = P + P' \quad \text{in } \mathbb{C}/\Gamma$$

を得る。$\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}^*$ と見做せばこの式は単に次の積についての関係式

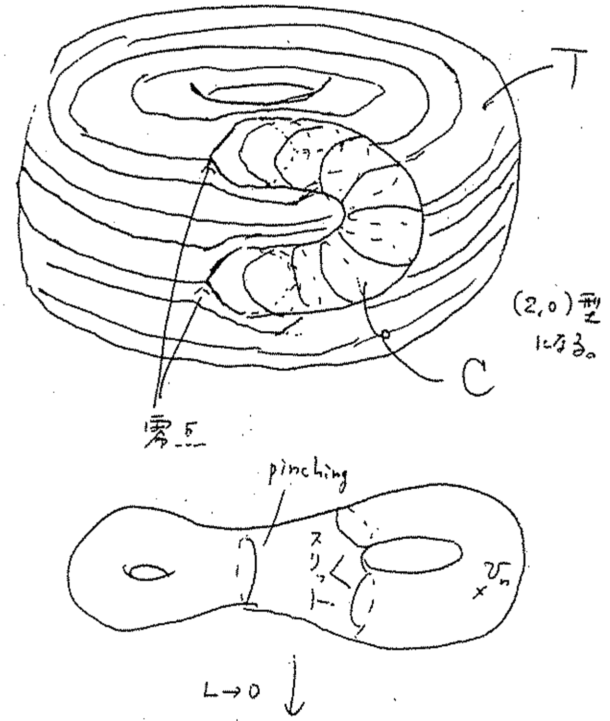
$$z \cdot z' = P \cdot P'$$

と同値になる。また ψ はこの見方では $\psi = \frac{dw}{w^2}$ $(w \in \mathbb{C}^*)$ と表せる。このように極限として得られる2次微分 $\psi = f(w)\frac{dw^2}{w^2}$ は特殊な形をしており，任意の f（$\deg f = 2$，f は P, P' に1位の極を持つ）に対して $f(w)\frac{dw^2}{w^2}$ $(w \in \mathbb{C}^* \setminus \{P, P'\})$ の形の2次微分が極限に現れる訳ではない。

3. $(2,0)$型 Riemann 面上の2次微分のある族の構成　トーラス $T = \mathbb{C}/\Gamma$ を考え T 上に2次微分 dz^2 を固定しておく。dz^2 に関して長さ L の水平線分（horizontal segment）を2つとり，この線分に沿って T を切り開いて次の円筒（cylinder）をはりつける：$C = \{0 < \mathrm{Im}\, z < H\} / \mathrm{mod}\,(2L)$。この円筒には2次微分 dz^2 を与えておく。この2次微分による C の高さは H，周長は $2L$ である。従ってこの2つの2次微分はうまくはり合わさって，新しい Riemann 面 X 上の正則2次微分が得られる。この2次微分を ϕ とすると葉層構造の入り方から明らかに，ϕ

は切り開いたスリットの両端点に1位の割合4個の零点を持つ。

ここで，2つのスリットは正方形の対辺となるようにとり，H/Lは固定して $L\to 0$ とし，このとき base-frame は円筒C上にあるようにする。するとこの操作は右図のような pinching に対応し，$\overline{\mathbb{PQ}_{2,0}}$ での $[\phi]$ の極限の2次微分は，スリットの端点に4つの零点を残しているので，新しく出来た puncture に4位の極を持つ。



以下さらに残る測地線の一つで pinching してつぶせば(0,3)型の Riemann 面の上の極の位数(4,2,2)の2次微分が得られ，さらにつぶせば $\mathbb{C}^*$ 上の極の位数(4,4)の2次微分，$\mathbb{C}$ 上の極の位数8の2次微分も得られる。

References

[Cha] C. Chabauty, *Limites d'ensembles et géometorie des nombres*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 143-151.

[Fla] J. Flachsmeyer, *Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Mengen*, Math. Nachr. **26** (1964), 321-337.

[Har] W.J. Harvey, *Spaces of discrete groups*, in *Discrete groups and automorphic forms*, Academic Press, New York, 1977.

[Leh] J. Lehner, "A short course in automorphic functions," Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.

[Mc] C. McMullen, *Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps*, Invent. Math. **97** (1989), 95-127.

[Wol] S. Wolpert, *The Fenchel-Nielsen deformation*, Ann. Math. **115** (1982), 501-528.