滑らかな境界をもつSiegel円板

— Avila-Buff-Cheritat の論文紹介 —

稲生　啓行・上野　康平・川平　友規

はじめに

A.Avila, X.Buff, A.Cheritat は論文 [ABC] で，滑らかな境界をもつ Siegel 円板の存在を明解な議論とともに鮮やかに証明しました．この論文を読むのに必要な知識は，とりあえず Milnor の教科書 [Mi] 程度．一部，qc（擬等角写像）に関する知識が必要ではありますが，そんなに heavy なものではありません．

さて 2005 年 3 月，名古屋大学にて論文 [ABC] を読む勉強会（『ABC 勉強会』）を密かに行い，その証明をフォローしました．このノートは，勉強会の講演者，稲生啓行氏と上野康平氏，そして私が，講演レジュメとして作成したものに加筆したものです．

まず川平の担当分では，主に [ABC] の前半部分，3 章までの内容をまとめました．主に

- Main Theorem の紹介；
- その証明で中心的な役割を果たす Main Lemma の証明概略；
- Main Lemma の証明前半部分，特に Yoccoz の renormalization を駆使する部分

を解説します．

続く稲生氏のノートでは，[ABC] の 4 章以降と，この続編ともいえる Buff-Cheritat による論文 [BC] の内容がまとめられています．具体的には，

- Main Lemma の証明後半部分，特に parabolic explosion を駆使する部分；
- [BC] の主定理と応用（Siegel 円板の境界の regularity をほぼ任意に調整できる）；
- その証明（[ABC] Main Theorem の証明とほぼ同じ）

を解説します．

さらに上野氏のノートでは，[ABC] で用いられている連分数展開と，Yoccoz の renormalization[Y] で用いられる別の連分数展開との関係について解説されて

います．[ABC] では詳細に述べられていない部分なので，論文を読む助けになるでしょう．

この ABC 勉強会を行うにあたって，名古屋大学 21 世紀 COE プロジェクト『等式が生む数学の新概念』から補助をいただきました．この場を借りてお礼申し上げます.

川平　友規（名古屋大・多元数理）

References

[ABC] A.Avila, X.Buff and A.Cheritat. Siegel disks with smooth boundaries. *Acta Math.*, **193**(2004), 1–30.

[BC] X. Buff, A. Chéritat, *Boundaries of quadratic Siegel disks*, preprint.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures*. vieweg, 1999.

[Y] J.C.Yoccoz. Petit diviseurs en dimension I. *Astérisque* **231**(1995).

滑らかな境界をもつSiegel円板
— Avila-Buff-Cheritat の論文紹介 —
(とくにMain Lemma証明の前半部分について) *

川平　友規

Abstract

ここでは [ABC] の前半部分，3章までの内容をまとめました．主に

- Main Theorem の紹介,
- その証明で中心的な役割を果たす Main Lemma の証明概略,
- Main Lemma の証明前半部分，特に Yoccoz の renormalization を駆使する部分

を解説します．私自身の好みで「あとまわし」を多用した構成になっており，原論文の順序と前後する部分が多々あります．この構成がみなさんの理解を妨げないことを祈ってます.

1 Introduction

ここでは主定理の証明と，その証明の概略を述べる.

1.1 Main Theorem

無理的中立固定点をもつ 2 次式. 無理数 α に対し，$P_\alpha(z) := e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ とおく．このとき，$z = 0$ の周りでは $P_\alpha(z)$ の作用は無理的回転 $R_\alpha(z) := e^{2\pi i\alpha}z$ の作用に非常に近い．実際，α が後述する **Bruno 条件**[1]という条件を満たすとき，$P_\alpha(z)$ は原点のまわりで本当に $R_\alpha(z)$ だと思うことができるのである.

線形化と Siegel 円板.

α が Bruno 条件を満たす（“**Bruno 数**”）

$\iff$ 原点の周りである等角写像 ϕ_α が存在し，$\phi_\alpha(R_\alpha(z)) = P_\alpha(\phi_\alpha(z))$ を満たす.

*ABC 勉強会，2005 年 3 月 9-11 日，名古屋大学

[1]文献によっては Bryuno，Brjuno とも書かれる．ここでは原論文 [ABC] および [Y] の記法に従う.

（Yoccoz[Y] による．後者の条件をみたすとき，P_α は**線形化可能**と言う）．すなわち，ϕ_α というレンズを通して眺めると，P_α の作用は R_α に見える．特に，ϕ_α として原点での展開が $\phi_\alpha(z) = z + O(z^2)$ の形のものは unique に定まる．その収束半径を r_α と書き，$\Delta_\alpha := \phi_\alpha(B(0, r_\alpha))$ を P_α の **Siegel 円板**とよぶ．また，r_α を Δ_α の **conformal radius** と呼ぶことにする．すなわち，Δ_α は P_α が回転として作用していると思える最大の領域である．

練習　上の ϕ_α の uniqueness をチェックせよ．また，この Siegel 円板のの定義が通常の Siegel 円板の定義と一致していることをチェックせよ．

まめちしき．　ここで，Siegel 円板に関して知られていることをまとめておく．

- Siegel 円板 Δ_α は原点を含む Fatou 成分である．
- Δ_α の境界は postcritical set に含まれる．すなわち，$\mathbb{C}$ 上唯一の特異点 $\omega_\alpha := -e^{2\pi i\alpha}/2$ の前方軌道の閉包に含まれる．
- Bruno 数全体は $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で dense かつ full measure をもつ（すなわち，Lebesgue 測度が１．α をテキトーに選ぶとほぼ確実に Siegel 円板が存在する.）
- (Herman) もし α が **Herman 条件**とよばれる算術的な条件を満たすなら，$\omega_\alpha \in \partial\Delta_\alpha$ である.（これは確か 2 次多項式じゃなくてもよかったはず.）
- (Herman) Δ_α は quasidisk かつ $\omega_\alpha \notin \partial\Delta_\alpha$ となるものが存在する．
- (Herman) α が 2 次の Diophantine 数であれば，Δ_α は quasidisk かつ $\omega_\alpha \in \partial\Delta_\alpha$．さらに，このとき Julia 集合の Hausdorff 次元は 2 より小さい (McMullen)．また，特異点のまわりである種の自己相似性を持つ．
- (Petersen-Zakeri) Lebesgue a.e.-$\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ について，$\partial\Delta_\alpha$ は Jordan 曲線かつ ω_α を含む.（たしか，Jordan 曲線を境界にもたない Siegel 円板はまだ知られていないはず.）特に，この α が 2 次の Diophantine 数で**なければ**，$\partial\Delta_\alpha$ は quasicircle ではない.

問題　2 次多項式の Siegel 円板として，滑らかな境界を持つものは存在するか？

Perez-Marco は単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉関数で，滑らかな境界をもつ Siegel 円板の例を構成した（$\mathbb{D}$ 上の単葉関数に関する Siegel 円板の定義は後でやる.）

A.Avila, X.Buff, A.Cheritat は論文 [ABC] において，この問題についての肯定的結果を与えた：

Main Theorem [ABC]　任意の Bruno 数 α を固定し，任意の $r \in (0, r_\alpha)$，任意に小さい $\epsilon > 0$ をとる．このとき，ある別の Bruno 数 α' が存在して，以下を満たす：

- $|\alpha - \alpha'| < \epsilon$.
- $r_{\alpha'} = r$.
- $\phi_{\alpha'} : B(0,r) \to \Delta_{\alpha'}$ は境界まで連続に拡張できて，$\phi_{\alpha'} \mid \partial B(0,r) \to \partial\Delta_{\alpha'}$.

また，$u,\ v : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ を $u(t) = \phi_\alpha(re^{2\pi it})$ と $v(t) = \phi_{\alpha'}(re^{2\pi it})$ で定めると，

- $u,\ v$ は C^∞ 埋め込みである．特に，$\partial\Delta_\alpha$ は C^∞-Jordan 曲線.
- $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ を $C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{C})$ に入る距離とすると，$d(u,v) < \epsilon$.

ちなみに，$C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{C})$ はいわゆる Frechét 空間，すなわち可算個のセミノルムをもつ完備距離空間である．例えば，以下のようにして距離を入れる：まず，$\|u-v\|_n := \max_{t\in\mathbb{T}} |u^{(n)}(t) - v^{(n)}(t)|$ は n 階微分の差によるセミノルム（ノルムの性質から『$\|u\| = 0$ なら $u = 0$』をのぞいたもの）である．さらに，$d_n(u,v) := \|u-v\|_n/(1+\|u-v\|_n)$ とおくと，これは $[0,1)$ 区間に値をとる「距離もどき」である．さらに $d(u,v) := \sum_{n\geq 0} d_n(u,v)/2^n$ とすると，これは距離の性質を満たすことがわかる．$C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{C})$ がこの距離に関して完備（『Cauchy 列なら収束列』）になっていることは練習問題にしよう．

周期点による境界の近似.　Siegel 円板 Δ_α が **accumulated by cycles**（“周期点によって集積される”）とは，任意の $\overline{\Delta_\alpha}$ の近傍 W に対し，ある P_α の周期系で，その全体が近傍 W に含まれるようなものが存在するときをいう.（当たり前のことだが，Δ_α の中には原点以外の周期点は存在できないことを注意しておく.）実は上の定理に加え，

$\partial\Delta_{\alpha'}$ は accumulated by cycles であるように構成できる

ことが分かる（[ABC] の section 6.）特に，一定周期の周期点の個数は有限個なので，上の近傍 W を小さくしていくと，対応する周期系の周期は大きくなる．この accumulated by cycles という性質は，Siegel 円板の形を決定する重要な要素になっている．

Cremer 点とのアナロジー.　余談だが，P_α が線形化可能でないとき，原点は accumulated by cycles の性質を持つことが以前から知られていた (Yoccoz?)．実はこの場合でも，ϕ_α は形式的べき級数として存在する．これは収束半径 r_α が 0 に退化してしまった場合だと考えると，上の結果は自然な帰結といえる．

Corollary 1　特異点は $\Delta_{\alpha'}$ の境界上にはない

証明．　Main Theorem の $\Delta_{\alpha'}$ に関して，もしその滑らかな境界上に特異点 ω_α があったと仮定すると，その特異値 $P_\alpha(\omega_\alpha)$ も境界上にある．このとき，これらの点の周りの作用は局所的に $\zeta \mapsto \zeta' = \zeta^2$ とみなせるが，この作用で $\zeta' = 0$ を通る滑らかな曲線の逆像は $\zeta = 0$ で滑らとはならない．矛盾．■

原論文には解析的？な別証明もあるが，略.

Corollary 2　P_α が滑らかな Siegel 円板をもつ無理数 α は $\mathbb{R}$ 上 dense かつ非可算

証明．　証明は Main Theorem 中で $r \in (0, r_\alpha)$ の choice が非可算濃度で出来ることが決め手．任意に（小さい） $\mathbb{R}$ 上の開区間 I を定めると，その中にある Bruno 数 r_α が存在する．さらに任意の $r \in (0, r_\alpha)$ について，Main Theorem のような $\alpha' = \alpha(r)$ が I 内にとれて，$\Delta_{\alpha'}$ の境界は滑らか．■

1.2　Main Lemma と Main Theorem 証明の流れ

Main Theorem の証明には次の Main Lemma が鍵となる：

Main Lemma　任意の Bruno 数 α と $0 < r_1 < r_\alpha$ なる任意の r_1 について，Bruno 数の収束列 $\alpha[n] \to \alpha$ が存在して $r_{\alpha[n]} \to r_1$ とできる．

注．　特に，$\alpha[n]$ は bounded type に取ることができる．ただし，bounded と言っても n について一様というわけではない.

すなわち，Siegel 円板の conformal radius は $\alpha \in \mathbb{R}$ に関してまったく不連続であり，$\mathbb{R}$ の位相（$= \{P_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ の一様収束位相）を全然 respect していない．しかし，写像 $\alpha \mapsto r_\alpha$ を絶妙にコントロールすることはできる，というのが主張である．原論文の大部分はこの Main Lemma の証明に費やされている．さらに，次の事実も基本的かつ重要：

Fact（写像 $\alpha \mapsto r_\alpha$ の上半連続性）　$\theta_n \to \theta$ かつ $r_{\theta_n} \geq r$ がある $r > 0$ に対し成り立つと仮定．このとき，

- $r_\theta \geq r$
- $\phi_{\theta_n}|_{B(0,r)} \to \phi_{\theta_n}|_{B(0,r)}$　（コンパクト一様収束）

証明．　任意に小さい $\epsilon > 0$ を取り，$B := B(0, r - \epsilon)$ とおく．$r_{\theta_n} \geq r > 0$ より，$B \subset \Delta_{\theta_n}$ である．また，ϕ_{θ_n} は $\mathbb{D}$ 上単葉かつ $\phi'_{\theta_n}(0) = 1$ であるから，正規族をなす．すなわち，収束部分列が必ず存在する．そのような部分列をひとつとり，極限を ϕ とする．関係式 $\phi_{\theta_n}(R_{\theta_n}(z)) = P_{\theta_n}(\phi_{\theta_n}(z))$ より，関係式 $\phi(R_\theta(z)) = P_\theta(\phi(z))$ が B 上で成り立つ．線形化座標の一意性から，$\phi = \phi_\theta|_B$ でなくてはならない．すなわち，すべての部分列の極限は一致し，かつ $r_\theta > r - \epsilon$ であることが分かった．ϵ は任意であったから，上の Fact は本当に事実である．■

これより，次のことがいえる．

Claim: 任意のBruno数 α と $\epsilon > 0$ に対して，ある $\epsilon' > 0$ が存在し,「$|\theta-\alpha| < \epsilon'$ ならば $r_\theta < r_\alpha + \epsilon$」 を満たす.

すなわち,「Siegel円板の等角半径は不連続に減ることはない」．もし上のClaimを否定すると，$r_{\theta_n} \geq r_\alpha + \epsilon$ なる収束列 $\theta_n \to \alpha$ が取れる．しかし上のFactより，$r_\alpha \geq r_\alpha + \epsilon$ となって矛盾してしまう．このClaimは下のMain Theoremの証明でも使われる．

Main Theoremの証明 Main Lemmaを仮定すれば，Main Theoremの証明は帰納法ですぐにできる．詳細は稲生氏による解説に譲ることにして，ここでは大雑把に概要を述べておく．

壱：何でもよいので，$r_0 = r_\alpha,\ r_n \searrow r$ となる減少列を取る．これで，区間 (r, r_0) を一回転させて得られるannulusを開区間列 $\{(r_{n+1}, r_n)\}$ を一回転させて得られる無限個のannulusに分割しておく．

弐：Main Lemmaと先のFact，Claimより，$\{\alpha[n]\}_{n\geq 0}$ を

- $|\alpha[n] - \alpha[n+1]| < \epsilon/10^{n+1}$
- $r_{\alpha[n+1]} \in (r_{n+1}, r_n)$
- $u_n(t) := \phi_{\alpha[n]}(re^{2\pi it})$ とするとき，$d(u_{\alpha[n]}, u_{\alpha[n+1]}) < \epsilon/10^n$

となるように取ることができる．すなわちMain Lemmaにより，$\alpha[n]$ の十分近くに，conformal radiusが (r_{n+1}, r_n) の中に入るような $\alpha[n+1]$ を見つけることができる．さらに上のFactにより，$u_{\alpha[n]}$ と $u_{\alpha[n+1]}$ は十分近くできる．これらの写像による $\mathbb{T}$ の像はanalytic Jordan curvesであることに注意.

参：$\alpha[n] \in \mathbb{R}$, $u_n \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ はそれぞれCauchy列をなすから，完備性により極限が存在し，かつそれらはMain Theoremの条件をみたす．特に，得られるSiegel円板 $\Delta_{\alpha'}$ のsmoothなboundaryとは，上のanalytic Jordan curvesの極限である．

Main Lemmaの証明について． まず，BuffとCheritatがMain Lemmaの証明を[ABC, §5]のような形で与えた．さらに，後日Avilaが[ABC, §7]のような簡単な証明を与えたようである．しかし前者の証明は非常に示唆に富む（ような気がする）ので，今回の勉強会ではサボらずに手のかかる前者のほうを詳しく解説したい．

2　Main Lemmaの証明

以下では連分数展開に関する議論が多いので，例えば [Mi] の付録などを読んで手を動かしておき，多少感覚をつかんでおくと読みやすくなるだろう．

2.1　記号の準備

連分数展開．　詳しくは上野氏によるノートを参考にしてもらうことにして，ここでは簡単に記号の約束事を確認していく．

- 実数 x に対し，$\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数，$\{x\}$ でその小数部分 $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ を表すことにする．
- 整数 a_0 と自然数列 $a_1, a_2, \ldots$ からなる数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ に対し，連分数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

  を互いに素な整数 $p_k \in \mathbb{Z}$ と $q_k \in \mathbb{N}$ を用いて p_k/q_k と表すことにする．このとき，p_k/q_k は無理数に収束することが知られており，その極限の無理数 α を $[a_0, a_1, \ldots]$ で表すことにする．

- 逆に，任意の無理数 α に対し，

$$a_0 := \lfloor \alpha \rfloor, \quad \alpha_0 := \{\alpha\}, \quad \alpha_{k+1} := \left\lfloor \frac{1}{\alpha_k} \right\rfloor, \quad \alpha_{k+1} := \left\{ \frac{1}{\alpha_k} \right\},$$

  と定めると，数列 $\{a_k\}$ について $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ が成り立つ．これを α の**連分数展開**と呼ぶ．以下は主に $a_0 = 0$ の場合を扱う．

- $\beta_{-1} := 1,\ \beta_k := \alpha_0 \cdots \alpha_k$ とおく．このとき，以下が成り立つ：

  I: $q_{k+1}\beta_k + q_k\beta_{k+1} = 1$

  II: $\dfrac{1}{2q_{k+1}} < \beta_k < \dfrac{1}{q_{k+1}}$

  III: $\dfrac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left| \alpha - \dfrac{p_k}{q_k} \right| < \dfrac{1}{q_k q_{k+1}}$

  IV: $\alpha_k = [0, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$

これらの数の量的感覚．　実は，p_k，q_k は次の漸化式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = a_k \begin{pmatrix} p_{k-1} \\ q_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{k-2} \\ q_{k-2} \end{pmatrix}.$$

とくに，$q_k \geq q_{k-1}$，$q_k \geq 2q_{k-2}$ はすぐに分かるから，q_k は少なくとも指数関数的に増大する．上の II はそれに対応して，β_k が非常に早く減少することを示している．また III は，α の p_k/q_k による近似精度を計っている．10 進小数の感覚で言うと，値の一致する桁数は少なくとも k のオーダーで着実に増えていく．この p_k/q_k を α の k **階の近似分数**と呼ぶことにする．

Yoccoz 関数と Bruno 数．　無理数 α に対し，

$$\Phi(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}$$

とおく．また，有理数 α に関しては，$\Phi(\alpha) := +\infty$ と定める．この関数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ を **Yoccoz 関数**と呼ぶ．$\Phi(\alpha) < +\infty$ である無理数 α を **Bruno 数**と呼ぶ．

Bruno 条件．　無理数 α を上記のように連分数展開したとき，$\sum_{k\geq 0} q_k^{-1} \log q_{k+1} < +\infty$ であることを **Bruno 条件**と呼ぶ．実は，$\Phi(\alpha) < +\infty$ であることと Bruno 条件を満たすことは同値であることが知られている．([Y, pp.11–14] もしくは上野氏のノート参照）

　また Yoccoz 関数に関して，次が任意の $k \geq 1$ について成り立つことはすぐに分かる：

$$\mathrm{V}: \quad \Phi(\alpha) \;=\; \sum_{l=0}^{k+1} \beta_{l-1} \log \frac{1}{\alpha_l} \;+\; \underline{\beta_k \Phi(\alpha_{k+1})}$$

すなわち，$\Phi(\alpha)$ の収束・発散は下線の部分，特に $\Phi(\alpha_{k+1})$ の部分の発散・収束と同値である．

2.2　Buff と Cheritat による Main Lemma の証明

Step 1.　α を Bruno 数とし，上述のように連分数展開しておく．任意の $r_1 (< r_\alpha)$ に対し，$A := r_\alpha / r_1 > 1$ とおく．

Step 2.　$A_n := \lfloor A^{q_n} \rfloor$ とおき，bounded type の無理数 $\alpha[n]$ を次のように定める：

$$\alpha[n] := [a_0, a_1, \ldots, a_n, A_n, 1, 1, \ldots]$$

（この $\alpha[n]$ は Main Theorem の証明に時に出てくる $\alpha[n]$ とは無関係である．念のため.）このとき，$\alpha[n] \to \alpha$ $(n \to \infty)$ は次のようにしてわかる：まず，III より

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1} q_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

に注意しよう．$\alpha[n]$ を連分数展開すると，第 $n-1$ 階の近似分数までは α のそれと一致し，かつ上の式は α を $\alpha[n]$ に変えても成立する．よって

$$|\alpha-\alpha[n]| < \left|\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha[n]\right| < \frac{2}{q_{n-1}q_n} \to 0. \quad (n\to\infty)$$

Step 3 :『Proposition 2　上の $\alpha[n]$ について，

$$\Phi(\alpha[n]) \ \to \ \Phi(\alpha)+\log A \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ.』（証明はあとで.）

$\alpha[n]$ をうまく構成することで，Yoccoz 関数は制御できる，ということを主張している．

Step 4: 『**Corollary 3**　任意の Bruno 数の収束列 $\alpha[n]\to\alpha$ について，ある定数 $C\geq 0$ が存在して

$$\limsup_{n\to\infty}\Phi(\alpha[n]) \leq \Phi(\alpha)+C$$

を満たすならば，

$$\liminf_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \geq r_\alpha e^{-C}$$

が成りたつ.』（証明はあとで）

$C=\log A$ として上で構成した $\alpha[n]\to\alpha$ に適用すると，

$$\liminf_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \geq r_\alpha e^{-\log A} = r_1.$$

すなわち，conformal radius は下から制御できる．

Step 5.　さらに，$\alpha[n]$ は

$$\left|\alpha[n]-\frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} \ \to \ \frac{1}{A} \quad (n\to\infty)$$

をみたす．これは，

$$\frac{1}{(2q_nA_n)^{1/q_n}} < \left|\alpha[n]-\frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} < \frac{1}{(q_nA_n)^{1/q_n}}$$

であることと，$A^{q_n}/A_n\to 1$ であることから直ちに従う．

Step 6:『 **Corollary 4** 任意の Bruno 数 α について，前節のように連分数展開をしておく．もし

$$\left|\alpha[n] - \frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} \;\to\; \lambda < 1 \quad (n \to \infty)$$

となるような λ と実数列 $\alpha[n]$ が存在すれば，

$$\limsup_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \le \lambda r_\alpha$$

が成り立つ.』（証明は稲生氏が担当）

$\lambda = 1/A = r_1/r_\alpha$ として上で構成した $\alpha[n] \to \alpha$ に適用すると，

$$\limsup_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \le \frac{r_1}{r_\alpha} r_\alpha = r_1$$

すなわち，conformal radius は上からも制御できる．以上で Main Lemma は示された． ■

今後の目標． したがって，以降は Proposition 2 と Corollaries 3 と 4 の証明を完了されればよい．Corollary 4 に関しては稲生氏のノートを参照されたい．ここではまず Proposition 2 の証明を概説して，そのあと Corollary 3 の証明に入る．

2.3 Proposition 2 の証明

まず，$\alpha[n]$ についても α と同様に連分数展開し，$\alpha_k[n]$，$\beta_k[n] := \alpha_0[n] \cdots \alpha_k[n]$ を定義しておく．証明の方針は

A: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} \to \Phi[\alpha] \quad (n \to 0)$

B: $\displaystyle\beta_{n-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_n[n]} \to \log A \quad (n \to 0)$

C: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} \to 0 \quad (n \to 0)$

をそれぞれ示すことである．それぞれのステップは単純な計算による．この $\alpha[n]$ は Corollaries 3 と 4 が適用できるように人工的に構成したものであろう．

A の証明． $k \geq 0$ を固定すると，IV より $n \gg 0$ のとき

$$\alpha_k[n] = [0, a_{k+1}, a_{k+1}, \ldots, a_n, A_n, 1, 1, \ldots]$$

である．したがって $\alpha_k[n] \to \alpha_k$，ついでに $\beta_k[n] \to \beta_k$ もわかる．さて任意の $\epsilon > 0$ を固定すると，十分大きな N が存在して

$$\left| \Phi(\alpha) - \sum_{k \leq N} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} \right| < \epsilon$$

とできる.（ α は Bruno だから.）この N を一旦固定して，さらに $n \gg 0$ とすれば

$$\left| \sum_{k \leq N} \beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} - \sum_{k \leq N} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} \right| < \epsilon$$

ともできる．$n > N \gg 0$ としてよいので，このとき

$$\sum_{k=N+1}^{n} \beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} < \epsilon$$

とできることを示せば，あとは三角不等式で証明は終わる．

β_k の定義と III より， $\beta_k \leq \alpha_k$ と $1/(2q_k) < \beta_{k-1} < 1/q_k$ が成り立つ．今，$k \leq n$ ならば α の k 階近似分数は $\alpha[n]$ のそれと一致することに注意しよう．したがって，

$$\beta_{k-1}[n] < \frac{1}{q_{k-1}}, \qquad \frac{1}{\alpha_k[n]} \leq \frac{1}{\beta_k[n]} \leq 2q_{k+1}$$

が成り立つ．よって，$k \leq n-1$ のとき，

$$\beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} < \frac{1}{q_k} \log 2q_{k+1} = \frac{\log 2}{q_k} + \frac{\log q_{k+1}}{q_k} := Q_k$$

である．Q_k は n によらない有限値であることに注意しよう．ここで $\sum_{k \geq 0} 1/q_k$ を考えると，q_k は少なくとも指数関数のオーダーで発散することから，収束する．さらに $\sum_{k \geq 0} \log q_{k+1}/q_k$ を考えると，α が Bruno 数であることから，これも収束する．したがって，$\sum Q_k$ は収束する．よって N を十分大きく取れば，任意の $n > N$ について

$$\sum_{k=N+1}^{n} \beta_{k-1}[n] \log \frac{1}{\alpha_k[n]} < \sum_{k=N+1}^{\infty} Q_k < \epsilon$$

とできる．

B の証明． IV と $\alpha[n]$ の定義より，$\theta = (\sqrt{5}+1)/2$ とおくと

$$\frac{1}{\alpha_n[n]} = A_n + [0, 1, 1, 1, \ldots] = A_n + \frac{1}{\theta}.$$

がわかる．$A=1$ のとき，$A_n=1$ より $\frac{1}{\alpha_n[n]}=1+1/\theta=\theta$ である．したがって，

$$\beta_{n-1}\log\frac{1}{\alpha_n[n]}=\beta_{n-1}\log\theta<\frac{1}{q_n}\log\theta$$

より $\beta_{n-1}\log\frac{1}{\alpha_n[n]}\to 0=\log A$ を得る．

次に $A>1$ のときを考える．

$$\log\frac{1}{\alpha_n[n]}=\log A_n\left(1+\frac{1}{A_n\theta}\right)=\log A_n+O(A_n^{-1})$$

であるから，$\log A_n=q_n\log A+O(A_n^{-1})$ および $\beta_{n-1}[n]<1$ より

$$\beta_{n-1}[n]\log\frac{1}{\alpha_n[n]}=\beta_{n-1}[n]\cdot q_n\log A+O(A_n^{-1}).$$

したがって，$\beta_{n-1}[n]\cdot q_n\to 1$ を示せば十分．

I より $\beta_{n-1}[n]\cdot q_n=1-\beta_n[n]\cdot q_{n-1}$ であるから，$\beta_n[n]\cdot q_{n-1}\to 0$ を示そう．まず

$$\beta_n[n]\cdot q_n=\beta_{n-1}[n]\alpha_n[n]\cdot q_n=\beta_{n-1}[n]\left(A_n+\frac{1}{\theta}\right)^{-1}\cdot q_n\asymp\frac{1}{A_n}\to 0$$

がわかる． $q_{n-1}<q_n$ より，$\beta_n[n]\cdot q_{n-1}\to 0$ も成り立つ．

C の証明． V より，

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_{k-1}[n]\log\frac{1}{\alpha_k[n]}=\beta_n[n]\Phi\left(\frac{1}{\theta}\right)<\frac{1}{q_{n+1}}\Phi\left(\frac{1}{\theta}\right)\to 0.$$

2.4 Corollary 3 の証明

この系は原論文では Theorem 3 の系として出てくる．以下はその Theorem 3 の解説と証明を行う．

R_α に tangent する正則関数の空間． まず無理数 $\alpha\in(0,1)$ に対し，$R_\alpha(z)$ は回転 $z\mapsto e^{2\pi i\alpha}z$ を表すことを思い出そう．以下ではこれを基準として．正則写像 f で $f(0)=0$，$f'(0)=e^{2\pi i\alpha}$ となるものの空間を 2 通り考える．

一般に，f を正則写像とするとき，その定義域を $U(f)$ と表すことにする．(これは原論文にはない記号だが，便利なので勝手に導入する．)．

- $\mathcal{O}_\alpha:=\{f:\text{holomorphic}\mid U(f)\subset\mathbb{D},f(0)=0,f'(0)=e^{2\pi i\alpha}\}$
- $\mathcal{S}_\alpha:=\{f:\text{univalent}\mid U(f)=\mathbb{D},f(0)=0,f'(0)=e^{2\pi i\alpha}\}$

明らかに $\mathcal{S}_\alpha\subset\mathcal{O}_\alpha$ である．これらの空間の位相を考えよう．$\mathcal{S}_\alpha$ に関しては，コンパクト一様収束の位相を入れる．また $\mathcal{O}_\alpha$ に関しては，$\mathcal{S}_\alpha$ の元，特に R_α との比較が重要なので，$f_n\in\mathcal{O}_\alpha$，$f\in\mathcal{S}_\alpha$ に対し，

> 任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{D}$ に対し，$n\gg 0$ のとき $K\subset U(f_n)$ かつ K 上で f_n は f に一様収束する

とき，これを $f_n\rightrightarrows f$ on $\mathbb{D}$ と書くことにする．

Siegel 円板と inner radius． α を Bruno 数，$f \in \mathcal{O}_\alpha$ とする．このとき，$z \in \mathbb{D}$ について前方軌道 $\{f^m(z)\}_{m\geq 0}$ が全て $U(f)$ に入っているとは限らない．一般に，$\{f^m(z)\}_{m\geq 0} \subset U(f)$ となるような $z \in U(f)$ 全体を K_f で表す．その内点集合 K_f° の 0 を含む連結成分 Δ_f が存在し，f は R_α と共役であることが知られている．この成分を Δ_f と表し，f の **Siegel 円板**と呼ぶことにする．さらに，Δ_f が含む原点中心かつ最大の円板の半径を $\mathrm{inrad}(\Delta_f)$ と表すことにする．要するに，Siegel 円板の内径である．この値に関しては，$f \in \mathcal{S}_\alpha$ である場合に限り，Yoccoz によりその大きさがある程度保障されていた：

Yoccoz の定理 (Theorem 1) ある普遍定数 $C_0 > 0$ が存在し，任意の Bruno 数 α と $f \in \mathcal{S}_\alpha$ に関して以下が成り立つ：

$$\mathrm{inrad}(\Delta_f) \geq \exp(-\Phi(\alpha) - C_0).$$

証明は [Y] 参照．ただし，連分数展開に関してはやや違った方法を取っているため，オリジナルの Yoccoz 関数はここで定義したものとある普遍定数程度の差がある．したがって，ここでの普遍定数 C_0 は Yoccoz のオリジナルとは別のものである.（ [Y] もしくは上野氏のノート参照）さて Theorem 3 はこの定理をより動きのある形に拡張したものになっている：

Theorem 3 $\alpha[n]$, α を Bruno 数とし，ある定数 $C \geq 0$ が存在して $\alpha[n] \to \alpha$ かつ

$$\limsup_{n\to 0} \Phi(\alpha[n]) \leq \Phi(\alpha) + C$$

と仮定する．このとき，任意の $f_n \in \mathcal{O}_{\alpha[n]}$ で $f_n \rightrightarrows R_\alpha$ on $\mathbb{D}$ となるものについて，

$$\liminf_{n\to 0} \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \geq e^{-C}$$

が成り立つ.

Corollary 3 の証明（Theorem 3 を仮定して）． まず $P_{\alpha[n]} \to P_\alpha$ に対し，

$$f_n(z) := \frac{1}{r_\alpha} \circ \phi_\alpha^{-1} \circ P_{\alpha[n]} \circ \phi_\alpha(r_\alpha z)$$

の形の関数を考えたい．これが $f_n \rightrightarrows R_\alpha$ on $\mathbb{D}$ を満たすように定義されることを示そう．$\mathbb{D}$ の任意のコンパクト部分集合 K を考える．このとき，$\phi(r_\alpha K) \subset \Delta_\alpha$ であるから，$P_\alpha \circ \phi(r_\alpha K) \subset \Delta_\alpha$ である．$P_{\alpha[n]} \to P_\alpha$ は広義一様収束だから，十分大きい n では $P_{\alpha[n]} \circ \phi(r_\alpha K) \subset \Delta_\alpha$ となる．したがって K 上で f_n は定義されることがわかる．これは $z \mapsto \phi_\alpha \circ (r_\alpha z)$ というレンズで $P_{\alpha[n]} \to P_\alpha$ を見ていることと同値である．特に K は任意であったから，$f_n \rightrightarrows R_\alpha$ on $\mathbb{D}$ を得る．

さてこの $f_n \rightrightarrows R_\alpha$ on $\mathbb{D}$ に Theorem 3 を適用しよう．

$$\liminf_{n\to 0} \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \geq e^{-C}$$

であるから，あとは $r_{\alpha[n]}/r_\alpha \leq \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n})$ を示せば十分である．これには，次の写像に Schwarz の補題を適用すればよい：

$$\mathbb{D} \ni w \;\longmapsto\; \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n})w = z \;\longmapsto\; \phi_\alpha(r_\alpha z) = Z \;\longmapsto\; \frac{1}{r_{\alpha[n]}}\phi_{\alpha[n]}^{-1}(Z) \in \mathbb{D}$$

これは原点を固定する $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への写像であるから，原点での微分の絶対値は 1 以下である．すなわち，

$$\mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \cdot r_\alpha \cdot \phi'_\alpha(0) \cdot \frac{1}{r_{\alpha[n]}} \cdot (\phi_{\alpha[n]}^{-1})'(0) \;\leq\; 1$$

となり，$r_{\alpha[n]}/r_\alpha \leq \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n})$ が得られる．■

2.5 Theorem 3 の証明

この定理の証明が前半の山場である．ここでは一部の証明を後回しにして，全体の流れを先に追っておく．

Step 1: まず，α と $\alpha[n]$ を連分数展開しておき，α_k，β_k，$\alpha_k[n]$，$\beta_k[n]$ をそれぞれ定義しておく．

Step 2: 各 $k \geq 0$ に対し，

$$\rho_k := \inf\left\{\liminf_{n\to\infty} \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n})\right\}$$

とする．ただし，inf は $\left\{f_n \in \mathcal{O}_{\alpha_k[n]}\right\}_{n\geq 0}$ で $f_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ となる全てのものについて取る．

Step 3: このとき,『$\rho_0 \geq -C$』を示せば定理の証明は終わる．なぜなら，このとき

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \leq \rho_0 \geq e^{-C}$$

が全ての $\left\{f_n \in \mathcal{O}_{\alpha[n]}\right\}_{n\geq 0}$ で $f_n \rightrightarrows R_\alpha$ on $\mathbb{D}$ となるものについて成り立つからである．

Step 4:『Lemma 3 任意の $k \geq 0$ に対し，

$$\log \rho_k \geq -\Phi(\alpha_k) - \frac{C}{\beta_{k-1}} - C_0$$

が成り立つ.』ただし，C_0 は Yoccoz の定理に出てくる普遍定数である．すなわち証明には一部 Yoccoz の定理を適用する．この定理は $f_n \in \mathcal{S}_{\alpha_k[n]}$ ならば適用できるが，今扱っているのは $f_n \in \mathcal{O}_{\alpha_k[n]}$ である．したがって，何らかのトリックが必要になる．証明は後まわしにして，先に進もう．

Step 6: 『**Lemma 5**　任意の $k \geq 0$ に対し，

$$\log \rho_k \geq \alpha_k \log \rho_{k+1}$$

が成り立つ.』証明は次節で．ここで，連分数展開の情報が活用されている．

Step 7:　Lemmas 3, 5 を仮定すると，任意に大きい k について

$$\begin{aligned}\log \rho_0 &\geq \alpha_0 \cdots \alpha_k \log \rho_{k+1} = \beta_k \log \rho_{k+1} \\ &\geq \beta_k \left(-\Phi(\alpha_{k+1}) - \frac{C}{\beta_k} - C_0 \right) \\ &\geq -\underline{\beta_k \Phi(\alpha_{k+1})} - C - \beta_k C_0.\end{aligned}$$

ここで，最後の項は $\beta_k \to 0$ $(k \to 0)$ より，0 に収束する．さらに下線部の項について，式 V の下線部を思い出せば，$\Phi(\alpha) < +\infty$ より

$$\underline{\beta_k \Phi(\alpha_{k+1})} = \Phi(\alpha) - \sum_{j=0}^{k+1} \beta_{j-1} \log \frac{1}{\alpha_j} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

よって $\log \rho_0 \geq -C$ が成り立つ．■

今後の目標.　したがって，あとは Lemma 3 と Lemma 5 を証明すればよい．これには renormalization に関する議論が必要なので，次節で扱うことにしよう．

3　Yoccoz の renormalization と Lemmas 3 and 5 の証明

Yoccoz の renormalization は，連分数展開の情報を力学系に反映させる基本的な道具である．まずは renormalization に関する一連の定義を述べて，そのあと一気に Lemmas の証明に取り掛かる．

3.1　Yoccoz の renormalization

原論文にしたがって，Yoccoz の renormalization に関しての必要事項を述べる．原論文や基本的な文献である [Y] には丁寧に書いてあるので，ここでは簡潔にまとめることにする．

$f \in \mathcal{S}_\alpha$ **のリフト.**　まず，$f \in \mathcal{S}_\alpha$ をひとつ固定する．すなわち，f は $\mathbb{D}$ 上単葉，かつ $f(0) = f'(0) - e^{2\pi i \alpha} = 0$ である．さて $\mathbb{H}$ を上半平面とする．このとき，以下の性質を満たす正則写像 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が一意的に定まる：

- $\wp(Z) := e^{2\pi i Z}$ とおくと，$\wp \circ F = f \circ \wp$.

- $u(Z) := F(Z) - (Z+\alpha)$ とおくと，$u(Z+1) = u(Z)+1 \quad (Z \in \mathbb{H})$, $u(Z) \to 0 \ \ (\operatorname{Im} Z \to +\infty)$.

とくに，$f = R_\alpha$ ならば $u(Z) \equiv 0$ であることに注意しよう．

$\mathcal{S}_\alpha^\delta$ の定義． 任意の $\delta > 0$，$0\alpha < 1$ に対し，

$$\mathcal{S}_\alpha^\delta := \{f \in \mathcal{S}_\alpha : \forall Z \in \mathbb{H},\ |u(Z)| < \delta\alpha \text{ and } |u'(Z)| < \delta\}$$

たとえば f が十分 R_α に近ければ，この条件は満たされる．また，括弧内の $u(Z)$ に関する条件は

F : $|F(Z) - (Z+\alpha)| < \delta\alpha$

F' : $|F'(Z) - 1| < \delta$

と読み替えておくほうが分かりやすい．また，$\{R_\alpha\} = \bigcap_{\delta>0} \mathcal{S}_\alpha^\delta$ であることも一応注意しておく．

帯状領域 $\mathcal{U}$． 以後，$0 < \delta < 1/2$ と仮定する．このとき，f, F は境界まで拡張される．

さて $\mathbb{R}_+$ で正の実数を表すことにして，$L_0 := i\mathbb{R}_+$, $L_0' := F(L_0)$ と定める．このとき，

$$L_0 \cup L_0' \cup [0, F(0)] \cup \{\infty\}$$

というリーマン球面上の閉曲線を考えよう．これは自己交差せず，Jordan 曲線になるだろうか？ $\operatorname{Im} Z \gg 0$ のとき F はほとんど平行移動 $Z \mapsto Z + \alpha$ に近いから，L_0 と L_0' はほとんど平行である．問題は実軸に近い部分である．

上の条件 F と F' より，「線分 $[F(Z), Z]$ と実軸正方向のなす角」と $\arg F'(Z)$ はともに $\arcsin\delta < \pi/6$ より小さいことがわかる．したがって，もし $Z \in L_0$ ならば，$F(Z) \in L_0'$ を中心に，水平方向左側 $\pm\pi/6$ の範囲に線分 $[Z, F(Z)]$ は存在し，また垂直方向上下から $\pm\pi/6$ の角度の範囲に L_0' は存在することがわかる．（上向きの速度ベクトルが高々 $\pm\pi/6$ だけ回転するので.）よって上の閉曲線は自己交差せず，Jordan 曲線である．

この Jordan 曲線に囲まれる部分を U と表し，$\mathcal{U} := L_0 \cup U$ と定める．また，$\mathcal{U}$ の $\mathbb{C}$ 内での閉包を $\overline{\mathcal{U}}$ で表す．

擬等角写像 H． 帯状領域 $B_0 := \{Z \in \mathbb{H} : 0 < \operatorname{Re} Z < 1\}$ にたいし，擬等角写像 $H : \overline{B_0} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{U}}$ を以下のように定める．（個人的な好みで，擬等角写像に対しては $\to$ でなく $\rightsquigarrow$ を用いる.）まず，$Z = X + Yi \in \overline{B_0}$ とする．Yi と $1+Yi$ を $X : 1-X$ に内分する点が Z である．H はこれを，αYi と $F(\alpha Yi)$ を $X : 1-X$ に内分する点へと写す．すなわち，

$$H(X+Yi) := (1-X)\alpha Yi + XF(\alpha Yi)$$

である．この写像が同相写像であること，擬等角写像であることは簡単な計算により分かるので，原論文を参照されたい．特に，H は $K_\delta = 1/(1-2\delta)$-qc である．

$\mathcal{V}$ の uniformization. $\overline{\mathcal{U}}$ に対し，$Z \in L_0$ と $F(Z) \in L_0'$ を同一視してできる曲面を $\overline{\mathcal{V}}$ と表すことにする．この同一視を実現する自然な射影を $\iota : \overline{\mathcal{U}} \to \overline{\mathcal{V}}$ と書く．とくに，$\partial\mathcal{V} := \iota([0, F(0)])$, $\mathcal{V} := \overline{\mathcal{V}} - \partial\mathcal{V}$ と定める．$\overline{\mathcal{V}}$ は明らかに，閉円板から中心を除いたもの（$\overline{\mathbb{D}}^*$ と書く）に同相である．実際，$\mathcal{V}$ から $\mathbb{D}^*$ への等角写像 ("uniformizing map") が存在する．

この uniformizing map の構成は以下のようにやればよい．今，B_0 上で Yi と $Yi+1$ を同一視する操作は，H というレンズを通すと αYi と $F(\alpha Yi)$ を同一視する操作に対応する．これから，自然に $\mathbb{H}/\mathbb{Z}$ から $\mathcal{V}$ への擬等角写像ができる．このとき，$\mathbb{D}^*$ から $\mathbb{H}/\mathbb{Z}$ への擬等角写像で，$\mathbb{D}^* \rightsquigarrow \mathbb{H}/\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathcal{V}$ と写すと歪曲度がキャンセルされるようなものが存在するから，その逆写像を uniformizing map $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{D}^*$ とすればよい．この写像は境界まで自然に拡張できる.（$\partial\mathcal{V}$ 上はカラテオドリの定理から，中心の穴に関しては，removable singularity として穴を埋めることができる.）

$\mathcal{U}$ の正規化. $\mathcal{V}$ の uniformization に対応して，$\mathcal{U}$ も正規化しておこう．まず，$\mathbb{D}^*$ の universal covering として $\wp : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ を考える．このとき，$\mathbb{D}^*$ に対応する基本領域として $B_0 = \{Z \in \mathbb{H} : 0 \leq \mathrm{Re}\, Z < 1\}$ を取ることができる．これを用いて，$\wp|_{B_0}^{-1} \circ \phi \circ \iota$ から定まる自然な同相写像 $K : \mathcal{U} \to B_0$ が存在し，境界を除けば等角である．特に，K は境界まで自然に拡張するので，$K(0) = 0$ とすればこのような K は unique に定まる．この構成法より，$Z \in L_0$ のとき $K(F(Z)) = K(Z) + 1$ が成り立つことに注意しよう．したがって，$\iota : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ は自然な射影 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ と compatible である.（ちなみに L_0 の K による像は一般に L_0 ではない．念のため.）

3.2 renormalized map $\mathcal{R}(f)$ の構成

次に，$f \in \mathcal{S}_\alpha^\delta$ から連分数展開の情報を引き出すために，renormalized 写像を構成する．

部分領域 $\mathcal{U}'$. $\mathcal{U}$ の帯状領域 $\mathcal{U}'$ を

$$\mathcal{U}' := \{Z \in \mathcal{U} : \mathrm{Im}\, Z > 5\delta\}$$

で定義する．さらに，$\overline{\mathcal{V}}' := \iota(\overline{\mathcal{U}}')$，その内点集合を $\mathcal{V}'$ と定義しておく．

$Z \in \mathcal{U}'$ の軌道. いま，$Z \in \mathcal{U}'$ に対し，$Z_m := F^m(Z-1)$ と定める．もし $\mathrm{Im}\, Z \gg 0$ であれば，F の作用はほとんど平行移動であるから，$Z_m \approx Z - 1 + m\alpha$ であろう．しかし実軸近辺では $u(Z)$ 分のズレが大きい．一般に条件 F より，$Z - 1$ から水平方向 $\pm \arcsin(\delta)$ の範囲に軌道は入る．また，$\mathrm{Re}\, F(Z) \leq \mathrm{Re}\, Z + \alpha/2$ も条件 F よりすぐにわかるから，軌道は確実に右方向へ進んでいく．したがって，$Z_m \in \mathbb{H}$ であり，かつ $\mathrm{Re}\, Z_m \geq 0$ である最小の m が存在するので，それを n と表すことにする．

Claim: $Z_n \in \mathcal{U}$.

証明． まず，$Z_0 := Z-1 \in \mathcal{U}$ のとき，$n=0$ とすればよい．$Z-1 \notin \mathcal{U}$ のとき，これは $\mathrm{Re}\, Z-1 \le 0$ を意味する．このとき，$\mathrm{Re}\, Z_{n-1} < 0$ である．今 $\delta < 1/2$ であるから，$\tan(\arcsin \delta) < 2\delta$ がわかる．したがって，$\mathrm{Im}\, Z_{n-1} > \mathrm{Im}\,(Z-1) - 2\delta > 3\delta$ である．

次に Z_{n-1} から L_0 への垂線を I とおき，その足を Z' をおく．このとき，$F(I)$ は $F(Z')$ を中心に水平方向から $\pm\pi/6$ の間にはいり，L_0 は上下垂直方向から $\pm\pi/6$ の間に入る．したがって，Z_n を含めて $F(I)$ が L_0 より右側に行くことはない．さらに，$Z'' \in I$ とすると，$\mathrm{Im}\, F(Z'') = \mathrm{Im}\, Z'' + \mathrm{Im}\, u(Z'') > 3\delta - \alpha\delta > 2\delta$ である．一方，$\mathrm{Im}\, F(0) = \mathrm{Im}\, u(0) < \alpha\delta < \delta$ であるから，$F(I)$ はすべて $[0, F(0)]$ より上側にある．以上より，$Z_n \in \mathcal{U}$.■

First return map. 上の $Z \in \mathcal{U}'$ と $Z_n \in \mathcal{U}$ に対し，$G(Z) := Z_n$ と定める．この $G : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ を first return map と呼ぶ．この写像は一般に不連続である．（たとえば，$Z-1 \in \mathcal{U}$ となる部分の近くなど.）しかしこの写像を張り合わせ ι と uniformized map ϕ を通して $\phi(\mathcal{V}') \subset \mathbb{D}^*$ から $\mathbb{D}^*$ への写像とみなすと，次のものが得られる：

Claim: G は単葉写像 $g : \phi(\mathcal{V}') \to \mathbb{D}^*$ で，$g \circ \phi \circ \iota = \phi \circ \iota \circ G$ なるものを induce する．また，g は原点の周りまで正則に拡張できて，$g'(0) = e^{-2\pi i/\alpha}$.

証明は [Y, Chapitre I, §2-3] を参照．g の単葉性は自明でないが，原点での微分に関しては，$f = R_\alpha$，$F : Z \to Z + \alpha$ の場合を考えることで感覚的に理解できる．この場合，$\mathcal{U} := \{Z \in \mathbb{H} : 0 \le \mathrm{Re}\, Z < \alpha\}$ である．これより，$G(Z) = Z - 1 + n\alpha$ となる n が一意的に定まる．この作用を $\phi \circ \iota(Z) = \wp(Z/\alpha)$ を通して眺めると，$g(z) = e^{2\pi i (Z-1+n\alpha)/\alpha} = e^{-2\pi i/\alpha} z$ となる．f が R_α に近い場合も，原点の近傍ではほぼ同様の計算が行われると考えてよい．

renormalized map. この単葉関数 g にたいし，$\mathcal{R}(f)(z) := \overline{g(\bar{z})}$ で定義される正則写像を f の renormalized map と呼ぶ．このとき，$\mathcal{R}(f)'(0) = e^{2\pi i/\alpha}$ が成り立つことはすぐにわかる．特に α を連分数展開し α_k を定義しておくと，$f \in \mathcal{S}_{\alpha_k}$ のとき $\mathcal{R}(f) \in \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}}$ が成り立つ．

3.3 Lemma 3 の証明

以下ではもう一度前節 Theorem 3 の証明の設定に戻る．$\alpha[n] \to \alpha$ について連分数展開し，$\alpha_k[n]$，$\beta_k[n]$，α_k，β_k が定義されていたことを思い出しておこう．ここではまず，Lemma 3 を証明する．Yoccoz の定理を適用するためのトリックが重要である．

Step 1: 『**Lemma 1**　任意の $k \geq 0$ に対し，

$$\limsup_{n\to 0} \Phi(\alpha_k[n]) \leq \Phi(\alpha_k) + \frac{C}{\beta_{k-1}}$$

が成り立つ.』ちなみに定理中には $k = 0$ の場合が仮定として出てくる．その一般化である.

証明.　まず

$$\begin{aligned}&\Phi(\alpha[n]) - \Phi(\alpha)\\ &= \sum_{j\leq k-1}\left(\beta_{j-1}[n]\log\frac{1}{\alpha_j[n]} - \beta_{j-1}\log\frac{1}{\alpha_j}\right) + \beta_{k-1}[n]\Phi(\alpha_k[n]) - \beta_{k-1}\Phi(\alpha_k)\end{aligned}$$

であるが，$j \leq k$ を固定すると $n \to \infty$ のとき $\alpha_j[n] \to \alpha_j$ および $\beta_j[n] \to \beta_j$ より，$\sum_{j\leq k-1}$ の部分は任意に小さくできる．よって証明すべき Theorem 3 の仮定より，

$$\begin{aligned}C &\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\Phi(\alpha[n]) - \Phi(\alpha)\right)\\ &= \limsup_{n\to\infty}\left(\beta_{k-1}[n]\Phi(\alpha_k[n]) - \beta_{k-1}\Phi(\alpha_k)\right)\\ &= \beta_{k-1}\left(\limsup_{n\to\infty}\Phi(\alpha_k[n]) - \Phi(\alpha_k)\right)\end{aligned}$$

■

Step 2:　各 $k \geq 0$ に対し，

$$\rho'_k := \inf{}'\left\{\liminf_{n\to\infty} \operatorname{inrad}(\Delta_{f_n})\right\}$$

とする．ただし，$\inf'$ は，$\left\{f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}\right\}_{n\geq 0}$ で $\delta_n \to 0$ かつ $f_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ となる全てのものについて取る．明らかに，$\rho_k \leq \rho'_k$ である.

注.　実際，この $\inf'$ を attain する列 $\{f_n\}$ が存在することを確認しておこう．例えば上の $\inf'$ の条件を満たす列 $\{f_n\} =: \hat{f}$ に対し，$\rho(\hat{f}) := \liminf_{n\to\infty}\operatorname{inrad}(\Delta_{f_n})$ と表すことにする．ρ'_k の定義から，ある $\hat{f}_j = \{f_{j,n}\}$ が存在して，$\rho(\hat{f}_j) \to \rho'_k$ $(j \to \infty)$ とできる．このとき $\hat{f} := \{f_{n,n}\}$ とすれば，$\rho(\hat{f}) = \rho'_k$ を満たす.

Step 3:『**Lemma 2**　各 $k \geq 0$ に対し，$\rho_k = \rho'_k$ である.』

証明　これには $\rho_k \geq \rho'_k$ を示せば十分である．任意の $f_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ なる $f_n \in \mathcal{O}_{\alpha_k[n]}$ に対し，なんでも良いので，$\lambda_m \nearrow 1$ および $\delta_m \searrow 0$ となる列を固定する．このとき各 $m > 0$ が存在して $N_m \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_m$ のとき

- $B(0, \lambda_n) \subset U(f_n)$，よって $g_n(z) = \dfrac{1}{\lambda_m} f_n(\lambda_m z)$ が $\mathbb{D}$ 上定義でき，

- $g_n \in \mathcal{S}^{\delta_m}_{\alpha_k[n]}$

とできる．このとき，$g_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ であるから，上の $\inf'$ の条件を満たす．$N_m \le n < N_{m+1}$ のとき $\lambda'_n := \lambda_m$ とおくと，$\lambda_n \nearrow 1$ かつ $\lambda'_n \Delta_{g_n} \subset \Delta_{f_n}$ より，

$$\begin{aligned}\liminf \mathrm{inrad}\Delta(f_n) &\ge \liminf \lambda'_n \cdot \mathrm{inrad}\Delta(g_n)\\ &\ge 1 \cdot \liminf \mathrm{inrad}\Delta(g_n)\\ &\ge \rho'_k\end{aligned}$$

f_n は任意であったから，$\rho_k \ge \rho'_k$ を得る．■

Step 4: では Lemma 3 の証明を完結させよう．Lemma 2 より，f_n として $f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}$ の形のものを考えれば十分である．これには Yoccoz の定理が適用できるから，log をとって

$$\log \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \ge -\Phi(\alpha_k[n]) - C_0.$$

一方 Lemma 1 より

$$-\liminf_{n\to 0} \left(-\Phi(\alpha_k[n])\right) \le \Phi(\alpha_k) + \frac{C}{\beta_{k-1}}$$

であるから，上の不等式と合わせて

$$\liminf_{n\to 0} \log \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) \ge -\Phi(\alpha_k) - \frac{C}{\beta_{k-1}} - C_0$$

をえる．左辺の log と lim inf は交換可能（log は単調増加な連続関数）であること，右辺は f_n および n によらないことからから，題意の不等式を得る．■

3.4 Lemma 5 の証明（Theorem 3 の証明の完結）

Step 1: $k \ge 0$ を固定する．このとき，$\left\{f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}\right\}_{n\ge 0}$ で $\delta_n \to 0$ かつ $f_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ となるものをひとつとる．$n \gg 0$ のとき $0 < \delta_n < 1/2$ と仮定してよいので，それぞれの n について Yoccoz の renormalization が適用できる．上でやったように，$f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ のリフトを $F_n : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$，$u_n(Z) := F_n(Z) - (Z - \alpha_k[n])$，帯状領域 $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}'_n$，これらを張り合わせてできるリーマン面 $\mathcal{V}_n$，$\mathcal{V}'_n$，その張り合わせ写像 $\iota_n : \overline{\mathcal{U}_n} \to \overline{\mathcal{V}_n}$，擬等角写像 $H_n : \overline{B_0} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{U}_n}$, uniformization $\phi_n : \overline{\mathcal{V}_n} \to \mathbb{D}^*$ などを定義する．さらに，K_n，$G_n, g_n, \mathcal{R}(f_n)$ も定義する．このとき，$\mathcal{R}(f_n) \in \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}[n]} - \mathcal{S}_{\alpha_{k+1}[n]}$ であることに注意.

Step 2: 『**Lemma 4** $B_{\alpha_k} := \{Z \in \mathbb{H} : 0 \ge \mathrm{Re}\,(Z) < \alpha_k\}$ とする．このとき，写像 $\phi_n \circ \iota_n : \mathcal{U}_n \to \mathbb{D}^*$ は $n \gg 0$ のとき B_{α_k} の任意のコンパクト集合で定義され，その上で $Z \mapsto e^{2\pi i Z/\alpha_k}$ に一様収束する.』

証明. $f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}$ および $\delta_n \to 0$ より，$\overline{\mathbb{H}}$ 上一様に $u_n(Z) \to 0$ すなわち $F_n(Z) \to Z + \alpha_k$ である．いま

$$H_n : Z = X + Yi \mapsto H_n(Z) = \alpha_k[n]Z + Xu_n(\alpha_k[n]Yi)$$

と書けることから，$B_{\alpha_k[n]}$ 上一様に H_n は $\alpha_k Z$ に収束する．また，$K_n \circ H_n$ は

- $Z \in L_0$ のとき $K_n \circ H_n(Z+1) = K_n \circ H_n(Z) + 1$;
- K_{δ_n}-qc かつ 0, 1 を固定する

ことがわかる．したがって，この関係式を用いて $K_n \circ H_n$ を $\overline{\mathbb{H}}$ 上の擬等角写像として拡張できる．特に，拡張された写像は 0, 1, ∞ を固定する．$\delta_n \to 0$ より $K_{\delta_n} = 1/(1-2\delta_n) \to 1$ であるから，この写像は identity へとコンパクト一様収束する．すなわち，任意のコンパクト集合 $E \subset B_{\alpha_k}$ を固定すると，K_n は E 上一様に $Z \mapsto Z/\alpha_k$ へと収束する．したがって，$\phi_n \circ \iota_n = \wp \circ K_n$ は E 上一様に $Z \mapsto e^{2\pi i Z/\alpha_k}$ へと収束する．■

Step 3　最後に，Lemma 5 の証明に取り掛かかろう．まず $\rho_k = 1$ のとき，$\log \rho_k = 0 \leq \alpha_k \log \rho_{k+1}$ は明らか．よって以下は $\rho_k < 1$ と仮定する．

今，$\delta_n \to 0$ と $f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}$ をうまく選んで，$f_n \rightrightarrows R_{\alpha_k}$ on $\mathbb{D}$ かつ $\lim \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n}) = \rho_k$ となるようにできる.（Lemma 3 の証明，Step 2 の注参照.）このとき，各 $\mathbb{D} - \Delta_{f_n}$ の中にある z_n が存在して，

- $|z_n| \to \rho_k$;
- $|z_n| > \mathrm{inrad}(\Delta_{f_n})$; かつ
- z_n の f_n による軌道は $\mathbb{D}$ を出る

ものが存在する．ここで，それぞれの f_n に $-\arg z_n$ 分の回転で共役をとる．このとき，やはり $f_n \in \mathcal{S}^{\delta_n}_{\alpha_k[n]}$ であることに注意しよう．これにより，$z_n \in (0,1)$ かつ $z_n \to \rho_k$ を仮定してもよい．

それぞれの z_n に対し，$L_0 = i\mathbb{R}_+$ 上の点 Z_n で $\wp(Z_n) = z_n$ なるものを考える．このとき，$Z_n \to -i \log \rho_k/(2\pi)$ となるが，$\delta_n \to 0$ より $n \gg 0$ ならば $Z_n \in \mathcal{U}'_n$ である．さらに Lemma 3 により，$\log \rho_k > -\infty$ すなわち $(1 >)\rho_k > 0$ であることは保障されている．したがって，Z_n は $n \gg 0$ のとき，B_{α_k} 内のあるコンパクト集合に含まれる.（B_{α_k} は虚軸の上半分を含む．念のため.）よって Lemma 4 が適用できて，

$$z'_n := \phi_n \circ \iota_n(Z_n) = \wp \circ K_n(Z_n) \sim e^{2\pi i Z_n/\alpha_k} = (z_n)^{1/\alpha_k}$$

が成り立つ．すなわち，$|z'_n| \to \rho_k^{1/\alpha_k}$ である．

さて力学系のほうに注目しよう．今，z_n の軌道は f_n の反復で $\mathbb{D}$ を出る．よって，Z_n の軌道は F_n の反復で $\mathbb{H}$ を出る．したがって，z'_n の軌道は $\mathcal{R}(f_n)$ の反

復で $\phi_n(\mathcal{V}_n) \subset \mathbb{D}^*$ を出る．これより，$|z'_n| \geq \mathrm{inrad}\Delta_{\mathcal{R}(f_n)}$ を得る．すなわち，

$$\begin{aligned}\log \rho_k = & \lim_{n\to\infty} \log |z_n| = \alpha_k \lim_{n\to\infty} \log |z'_n| \\ \geq & \quad \alpha_k \log \left(\liminf_{n\to\infty} \mathrm{inrad}(\Delta_{\mathcal{R}(f_n)}) \right) \\ \geq^* & \quad \alpha_k \log \rho_{k+1}\end{aligned}$$

を得る．最後の不等式 $\geq^*$ の部分は，$\mathcal{R}(f_n) \rightrightarrows R_{\alpha_{k+1}}$ on $\mathbb{D}$ であることから従うので，チェックしておこう．今 $\delta_n \to 0$ より，任意のコンパクト集合 E に関して，$n \gg 0$ ならば $E \subset \mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ が従う．よって，E 上 $\phi_n \circ \iota_n$ が定義されて，$\phi_n \circ \iota_n(E)$ 上 $\mathcal{R}(f_n)$ が定義される．さらに Lemma 4 より $g_n \circ \phi_n \circ \iota_n = \phi_n \circ \iota_n \circ G_n$ は $Z \mapsto e^{2\pi i Z/\alpha_k} = e^{2\pi i \alpha_{k+1} Z}$ に $\phi_n \circ \iota_n(E)$ 上一様に収束する．よって，$\phi_n \circ \iota_n(E)$ 上 $g_n(z)$ は $R_{\alpha_{k+1}}$ に一様収束する．■

References

[ABC] A.Avila, X.Buff and A.Cheritat. Siegel disks with smooth boundaries. *Acta Math.*, **193**(2004), 1–30.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures.* vieweg, 1999.

[Y] J.C.Yoccoz. Petit diviseurs en dimension I. *Astérisque* **231**(1995).

Parabolic explosion と Siegel disk の境界について

(Siegel disks with smooth boundaries の後半部の紹介) *

稲生 啓行

2005 年 3 月 9 日-11 日
ABC 勉強会 (於 名古屋大学)

1 Introduction

2 次多項式 $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ を考える. α が無理数のとき, 形式的巾級数 $\phi_\alpha(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$ が一意的に存在して,

$$\phi_\alpha(e^{2i\pi\alpha}z) = P_\alpha(\phi_\alpha(z))$$

となる. r_α を ϕ_α の収束半径とする, つまり ϕ_α の定義域は $B(0, r_\alpha) = \{|z| < r_\alpha\}$ である.

示したいのは以下の主定理である.

定理 1. $\alpha \in \mathbb{R}$ を *Bruno* 数とし, $r \in]0, r_\alpha[$, $\varepsilon > 0$ を任意に選ぶ. $u : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を $u(t) = \phi_\alpha(re^{2i\pi t})$ で定める. このときある *Bruno* 数 α' が存在して以下をみたす.

- $|\alpha' - \alpha| < \epsilon$,
- $r_{\alpha'} = r$,
- 線型化座標 $\phi_{\alpha'} : B(0, r) \to \Delta_{\alpha'}$ は境界まで連続に拡張できる.
- 関数 $v : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を $v(t) = \phi_{\alpha'}(re^{2i\pi t})$ で定めると, これは C^∞ 埋めこみになっている. 特に $P_{\alpha'}$ の *Siegel disk* $\Delta_{\alpha'}$ の境界は滑らかな *Jordan* 曲線である.
- u と v は *Fréchet* 空間 $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ の中で ε 以下しか離れていない.

主定理は以下の主補題より得られる.

主補題. 任意の *Bruno* 数 α と $0 < r_1 < r_\alpha$ なる r_1 に対し, ある列 $\alpha[n] \to \alpha$ が存在して $r_{\alpha[n]} \to r_1$ となる.

ここで元の論文の前半 (§1 〜 §3) の内容について簡単に復習しておく. 整数の列 $(a_k)_{k\geq 0}$ に対し,

$$[a_0, a_1, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

* 注: 手抜きなので, ほとんどもとの論文の日本語訳になっています. 元の論文が丁寧でよく書けているということにして勘弁してやってください.

と書く. またこのとき帰納的に p_k, q_k $(k \geq -1)$ を

$$p_{-1} = 1, \qquad p_0 = a_0, \qquad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},$$
$$q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

と定める. $k \geq 1$ のとき $a_k \geq 1$ の場合はさらに,

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$$

となる. ただし右辺は上の無限列の連分数を a_k までで打ちきったものである ($a_{k+1} = \infty$ と思ってもよい).

無理数 α に対し, α の整数部分 (α を越えない最大の整数) を $\lfloor\alpha\rfloor$, 小数部分を $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ と書く. さらに数列 (α_k), (a_k) を,

$$a_0 = \lfloor\alpha\rfloor, \qquad \alpha_0 = \{\alpha\},$$
$$a_{k+1} = \lfloor\alpha_k^{-1}\rfloor, \qquad \alpha_{k+1} = \{\alpha_k^{-1}\}$$

と定める. このとき $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ である. また $\beta_k = \alpha_0 \cdots \alpha_k$ とおく.

定義 1 (Yoccoz 関数). 無理数 α に対し,

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}$$

を **Yoccoz 関数**と呼ぶ. α が有理数のときは $\Phi(\alpha) = \infty$ とする. $\Phi(\alpha) < \infty$ のとき $\alpha \in \mathbb{R}$ を **Bruno 数**という.

定義 2. Bruno 数 $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ と任意の数 $A \geq 1$ と整数 $n \geq 1$ に対し,

$$\mathcal{T}(\alpha, A, n) = [a_0, a_1, \ldots, a_n, A_n, 1, 1, \ldots]$$

とおく. ただし $A_n = \lfloor A^{q_n} \rfloor$ である.

命題 2. *Bruno* 数 α と実数 $A \geq 1$ に対し, $\alpha[n] = \mathcal{T}(\alpha, A, n)$ とおくと $\alpha[n] \to \alpha$ であり,

$$\Phi(\alpha[n]) \to \Phi(\alpha) + \log A$$

が成り立つ.

前半部分で最も重要なのは以下の定理 (元の論文では Theorem 3 の系) である.

定理 3. α を *Bruno* 数とし, $\alpha[n] \to \alpha$ を *Bruno* 数の列であって, ある $C \geq 0$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi(\alpha[n]) \leq \Phi(\alpha) + C$$

をみたすとする. このとき

$$\liminf_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \geq r_\alpha e^{-C}$$

が成り立つ.

2 Parabolic explosion for quadratic polynomials

$\alpha = p/q$ のとき (以下このように書いたら常に p と q は互いに素であると仮定する), 0 は $P_{p/q}$ の放物的不動点となる. このとき, ある $A \in \mathbb{C}^*$ に対して,

$$P_{p/q}^{\circ q}(z) = z + Az^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$$

となる.

定義 3. 上の $P_{p/q}^{\circ q}$ の式における z^{q+1} の係数を $A(p/q)$ と書く.

定義 4. 有理数 p/q に対し, $\mathcal{P}_{p/q}$ を $P_\alpha^{\circ q}$ が微分が 1 の放物型不動点持つパラメータ $\alpha \in \mathbb{C}$ 全体の集合とし, $R_{p/q}$ を $p/q \in \mathcal{P}_{p/q}$ と $\mathcal{P}_{p/q} \setminus \{p/q\}$ の間の距離とする.

命題 4 ([BC1, Proposition 2]).

$$R_{p/q} \geq \frac{1}{q^3}.$$

Proof. $q = 1$ の場合は $\mathcal{P}_{p/q} = \mathbb{Z}$ より明らか. $q \geq 2$ とする. $\alpha \in \mathcal{P}_{p/q}$ に対し, 0 が $P_\alpha^{\circ q}$ の微分が 1 の放物型不動点である場合, ある $p' \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha = p'/q$ となるため, この場合は p/q からの距離は $1/q$ 以上である. 0 でない不動点が放物型である場合, その点の P_α による周期軌道 $z_0, \ldots, z_{q_1-1}$ を考える. この軌道の immediate basin に P_α の critical point は含まれるため, 0 は反発的な不動点となる. つまり $\operatorname{Im}\alpha < 0$ である. 従って 0 には有限個の external ray が land する. 0 の combinatorial rotation number を p'/q' とする. このとき 0 にはちょうど q' 本の ray が land し, これらは P_α の作用で反時計回りに p' だけまわる. 簡単な組み合わせの議論で, $q' < q$ であることがわかる (詳細は [BC1, Lemma 1] を参照).

Yoccoz の不等式により, α は次の式を満たす:

$$\frac{-\operatorname{Im}\alpha}{2\pi|\alpha - p'/q'|^2} = \frac{\operatorname{Re} 2i\pi\alpha}{|2i\pi\alpha - 2i\pi p'/q'|^2} \geq \frac{q'}{2\log 2}.$$

つまり, α は p'/q' で実軸に p'/q' で接する半径 $\log 2/(2\pi q')$ の円の内部になければならない.

これと p/q との距離は

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \sqrt{\left(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{\log 2}{2\pi q'}\right)} - \frac{\log 2}{2\pi q'}$$

となることがわかり, これが $1/q^3$ 以上であることは $q' < q$ と $q \geq 2$ を使えば簡単な計算で確かめることができる. □

α が p/q に近いと, $P_{p/q}^{\circ q}$ は 0 のまわりに q 個の不動点を持ち, これらは $\alpha \notin \mathcal{P}_{p/q}$ に関して正則に動く. $\alpha = p/q$ は特異点になっているが, このまわりでのふるまいを記述するのが次の命題である. 以下,

$$\rho_{p/q} = \left|\frac{2\pi q R_{p/q}}{A(p/q)}\right|^{1/q}$$

とおく.

命題 5 ([C, Proposition 2.2]). 有理数 p/q に対し, 以下をみたす正則写像 $\psi : B(0, \rho_{p/q}) \to \mathbb{C}$ が一意的に存在する.

(1) $\psi(0) = 0$.

(2) $\psi'(0) = 1$.

(3) 任意の $\delta \in B(0, \rho_{p/q})$ に対し,

$$\psi(\delta), \psi(\zeta\delta), \ldots, \psi(\zeta^{q-1}\delta)$$

は P_α の周期 q の周期軌道をなす.

ただし $\zeta = e^{2i\pi p/q}$ であり,

$$\alpha = \frac{p}{q} - \frac{A(p/q)}{2i\pi q}\delta^q$$

である. 特に, 任意の $\delta \in B(0, \rho_{p/q})$ に対し,

$$\psi(\zeta\delta) = P_\alpha(\psi(\delta))$$

となる.

最後の式で, δ によって α も変化することに注意すること.

Proof. $F(\alpha, z) = (P_\alpha^{\circ q}(z) - z)/z$ とおく. $P_\alpha^{\circ q}(0) = 0$ より, これは $\mathbb{C}^2$ 上の関数に拡張できる. $\mathcal{A} = \{(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2;\ F(\alpha, z) = 0\}$ とし, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap B(p/q, R_{p/q}) \times \mathbb{C}$ とする. 定義より, $(\alpha, z) \in \mathcal{A}$ というのは z が $P_\alpha^{\circ q}$ の不動点であることと同値である. $B(p/q, R_{p/q})$ 内には p/q 以外に $P_\alpha^{\circ q}$ の放物型不動点で微分が 1 となるものは存在しないことから, $\alpha \neq p/q$ なら, $\mathcal{A}'$ の局所座標として α がとれることは容易にわかる.

そこで $(p/q, 0)$ のまわりの $\mathcal{A}'$ の局所座標について考える.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(p/q, 0) &= \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{P_\alpha^{\circ q}(z) - z}{z}\right)\right|_{(\alpha,z)=(p/q,0)} \\ &= \left.\left(2i\pi q e^{2i\pi q\alpha} + O(z)\right)\right|_{(\alpha,z)=(p/q,0)} \\ &= 2i\pi q \neq 0.\end{aligned}$$

よって陰関数定理より, z が局所座標を与えることがわかる.

いま $\Pi_1(\alpha, z) = \alpha$, $\Pi_2(\alpha, z) = z$ とおくと, $\mathcal{A}'$ の $(p/q, 0)$ の近傍では Π_2 が局所座標を与える. それ以外の点では Π_1 が局所座標を与えることから, Π_1 は $\mathcal{A}'$ 上では $(p/q, 0)$ 以外に分枝点をもたない. このことから, ある中への等角同型写像 $\Phi : B(0, r) \to \mathcal{A}'$ と自然数 n で, $\Phi(0) = (p/q, 0)$, $\Pi_1(\Phi(\delta)) = p/q + \delta^n$ かつ $(\Pi_2 \circ \Phi)'(0) \neq 0$ となるものが存在する.

さて, F は $(p/q, 0)$ の近くでは,

$$F(p/q + \varepsilon, z) = 2i\pi q\varepsilon + A(p/q)z^q + O(\varepsilon z) + O(z^{q+1})$$

と書ける. $F(\Phi(\delta)) \equiv 0$ なので, $\Phi(\delta) = (p/q + \delta^n, z)$ とすると,

$$2i\pi q\delta^n + A(p/q)z^q + O(\delta z) + O(z^{q+1}) = 0$$

となる. $\frac{dz}{d\delta} = (\Pi_2 \circ \Phi)'(0) \neq 0$ なので, $n = q$ でなければならない. $\chi = \Pi_2 \circ \Phi$ とおくと, $\chi'(0)^q = -2i\pi q/A(p/q)$. $\mathcal{A}'$ は $(p/q, 0)$ 以外では α が局所座標としてとれ, $B(0, R_{p/q}^{1/q}) \setminus \{0\}$ 上 $\delta \mapsto p/q + \delta^q$ (これは 0 の近傍では $\Pi_1 \circ \Phi(\delta)$ に等しい) は被覆になっているので, χ は $\chi : B(0, R_{p/q}^{1/q}) \to \mathcal{A}'$ に拡張できる.

$\delta \in B(0, R_{p/q}^{1/q})$ に対し, $\alpha = p/q + \delta^q$ とおく. $P_\alpha(\chi(\delta))$ を考えると, これは $P_\alpha^{\circ q}$ の不動点であり, δ が十分小さいとき, また $P_\alpha(\chi(\delta))$ は 0 に十分近い. 従って $P_\alpha(\chi(\delta)) = \chi(\zeta^k \delta)$ と書ける. 両辺の 0 での微分を考えると, $e^{2i\pi p/q}\chi'(0) = \zeta^k \chi'(0)$ となり, $k \equiv 1 \mod q$ がわかる.

あとは $\psi(\delta) = \chi(\delta/\chi'(0))$ とおけば, $\psi(0) = 0, \psi'(0) = (\chi'(0))^{-1}\chi'(0) = 1$ であり,

$$\Pi_1 \circ \psi(\delta) = \frac{p}{q} + \left(\frac{\delta}{\chi'(0)}\right)^q = \frac{p}{q} - \frac{A(p/q)}{2i\pi q}\delta^q$$

となり, 題意をみたすことがわかる. □

補題 6 ([J1][*1]). 無理数 α に対し, P_α が *Siegel disk* Δ_α をもつとし, $p_k/q_k \to \alpha$ を連分数展開による α の有理数近似とする. このとき, $P_{p_k/q_k}^{\circ q_k}$ は Δ_α 上恒等写像に広義一様収束する.

この補題を使うと次がわかる.

命題 7. P_α が *Siegel disk* を持つような無理数 α に対し, $p_k/q_k \to \alpha$ を連分数展開による有理数近似とする. このとき,

$$\liminf_{k\to\infty} \rho_{p_k/q_k} \geq r_\alpha.$$

補題 *6* の証明. 任意の $r < r_\alpha$ に対し, $P_\alpha(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$ であることから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $|\theta - \alpha| < \varepsilon$ なら $P_\theta(\overline{\Delta}) \subset \Delta_\alpha$ となる. ここで, $F_\theta(z) = \phi_\alpha^{-1} \circ P_\theta \circ \phi_\alpha(z)$ を考える. 上のことより, F_θ は $B(0, r)$ で定義されている. $F_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ なので,

$$F_\theta(z) = e^{2i\pi\theta}z + (\theta - \alpha)z^2 H_\theta(z)$$

と書ける. ここで H_θ は $|\theta-\alpha| < \varepsilon, |z| < r$ で定義されていて, θ, z について正則である. いま $c = \sup\{|z^2 H_\theta(z)|; |\theta-\alpha| < \varepsilon, |z| < r\}$ とおく. p_k/q_k は α の連分数展開による近似であることから, $|\alpha - p_k/q_k| < (q_k q_{k+1})^{-1}$ をみたすので, k が十分大きいとき,

$$|F_{p_k/q_k}(z) - e^{2i\pi p_k/q_k} z| < \frac{c}{q_k q_{k+1}}$$

である. 従って,

$$|F_{p_k/q_k}^{\circ q_k}(z) - z| < \frac{c}{q_{k+1}}$$

となるので, $k \to \infty$ とすればよい. □

命題 *7* の証明. $g_k = F_{p_k/q_k}$ (上の補題の証明のもの) とすると,

$$g_k^{\circ q_k}(z) = z + A(p_k/q_k)z^{q_k+1} + O(|z|^{q_k+2})$$

となる. 補題より $k \to \infty$ のときこれは恒等写像に $B(0, r_\alpha)$ 上広義一様収束する. 任意の $r < r_\alpha$ に対し, k が十分大きければ,

$$|A(p_k/q_k)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=r} \frac{g_k^{\circ q_k}(z)}{z^{q_k+2}} dz\right| \leq \frac{r_\alpha}{r^{q_k+1}}$$

である. 従って,

$$|A(p_k/q_k)|^{1/q_k} \leq \frac{1}{r}\left(\frac{r_\alpha}{r}\right)^{1/q_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{r}$$

[*1] [ABC] には [J1] からの引用と書いてあるが, 筆者は手に入れていないので不明. ここの証明は [J2, Theorem 1] の証明をもとに再構成したものである.

となるので, $1/q \geq R_{p/q} \geq 1/q^3$ を使うと,

$$\liminf_{k\to\infty} \rho_{p_k/q_k} = \liminf_{k\to\infty} \left| \frac{2\pi q R_{p_k/q_k}}{A(p_k/q_k)} \right|^{1/q_k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{|A(p_k/q_k)|^{1/q_k}} \geq r.$$

あとは $r \to r_\alpha$ とすればよい. □

命題 8. *P_α が Siegel disk Δ_α を持つような無理数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, p_k/q_k を連分数展開による近似とすると,*

- $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{p_k/q_k} = r_\alpha$.
- $\psi_{p_k/q_k} : B(0, \rho_{p_k/q_k}) \to \mathbb{C}$ は $B(0, r_\alpha)$ 上広義一様に $\phi_\alpha : B(0, r_\alpha) \to \Delta_\alpha$ に収束する.

Proof. 前の命題により, 任意の $r < r_\alpha$ に対し, k が十分大きければ ψ_{p_k/q_k} は $B(0, r)$ 上定義されている. いま有理数 p/q と $\beta \in B(p/q, R_{p/q})$ に対し, z が P_β の周期点だとすると, 簡単な計算で $|z| < 1 + e^{2\pi}$ がわかる. 従って関数列 $(\psi_{p_k/q_k} : B(0, r) \to B(0, 1 + e^{2\pi}))$ は正規族をなす. $\psi : B(0, r) \to \mathbb{C}$ をこの極限として得られる関数とする.

$$\beta = p_k/q_k - \frac{A(p_k/q_k)}{2i\pi q_k} \delta^{q_k}$$

として,

$$\psi_{p_k/q_k}(e^{2i\pi p_k/q_k}\delta) = P_\beta \circ \psi_{p_k/q_k}(\delta)$$

の $k \to \infty$ での極限をとると,

$$\left| \frac{A(p_k/q_k)}{2i\pi q_k} \delta^{q_k} \right| \leq \frac{r_\alpha}{2\pi r q_k} \left(\frac{|\delta|}{r} \right)^{q_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

であることより,

$$\psi(e^{2i\pi\alpha}\delta) = P_\alpha \circ \psi(\delta)$$

となる. つまり ψ は P_α の 0 での線型化座標であり, $\psi'(0) = 1$ である. 線型化座標の一意性より $B(0, r_\alpha)$ 上 $\psi = \phi_\alpha$ であることがわかる.

次に $\lim \rho_{p_k/q_k} = r_\alpha$ を示す. $\limsup \rho_{p_k/q_k} = r \geq r_\alpha$ とおく. 上の議論より部分列をとると, ψ_{p_k/q_k} は $B(0, r)$ 上収束し, そこで P_α の線型化座標を与える. これは $r \leq r_\alpha$ でないとありえない. □

系 9. *α を Bruno 数とし, p_k/q_k を連分数展開による近似列とする. 数列 $\alpha[n] \in \mathbb{R}$ が*

$$\left| \alpha[n] - \frac{p_k}{q_k} \right|^{1/q_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda < 1$$

をみたすとする. このとき

$$O_n = \psi_{p_n/q_n}\left(\left\{ \delta_n e^{2i\pi k/q_n};\ k = 1, \ldots, q_n \right\} \right)$$

が Hausdorff 位相で $\phi_\alpha(\partial B(0, \lambda r_\alpha))$ に収束するように δ_n がとれる. さらに, $P_{\alpha[n]}$ の Siegel disk の conformal radius $r_{\alpha[n]}$ は

$$\limsup_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \leq \lambda r_\alpha$$

をみたす.

Proof. δ_n を,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{A(p_n/q_n)}{2i\pi q_n}\delta_n^{q_n} = \alpha[n]$$

となるようにとる. 定義より O_n は $P_{\alpha[n]}$ の周期軌道となる. $n \to \infty$ のとき,

$$|\delta_n| = \left|\alpha[n] - \frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} \cdot \left|\frac{2\pi q_n}{A(p_n/q_n)}\right|^{1/q_n} \to \lambda r_\alpha$$

となる. 従って, 前の命題より,

$$O_n = \psi_{p_n/q_n}\left(\left\{\delta_n e^{2i\pi k/q_n};\ k = 1, \ldots, q_n\right\}\right) \to \phi_\alpha(\partial B(0, \lambda r_\alpha))$$

であることがわかる.

今 $r_{\alpha[n]}$ の部分列 $r_{\alpha[n_k]}$ が r に収束したとする. 任意の $r' < r$ に対し, k が十分大きければ線型化座標 $\phi_{\alpha[n_k]}$ は $B(0, r')$ 上定義され単葉である. $\phi_{\alpha[n_k]}(e^{2i\pi\alpha[n_k]}) = P_{\alpha[n_k]} \circ \phi_{\alpha[n_k](z)}$ なので, 上の命題と同様にして $B(0, r')$ 上 $\phi_{\alpha[n_k]} \to \phi_\alpha$ がわかる. また, $\phi_{\alpha[n_k]}$ の値域は $\Delta_{\alpha[n_k]}$ に含まれるので, 特に O_{n_k} とは交わらない. このことから $\phi_\alpha(B(0, r'))$ は $\phi_\alpha(\partial B(0, \lambda r_\alpha))$ と交わらないことがわかり, $r' < \lambda r_\alpha$ を得る. あとは $r' \to r$ とすればよい. □

3 First proof of the main lemma

α を Bruno 数とし, $r_1 < r_\alpha$ を 1 つ固定する. $n \geq 1$ に対して,

$$\alpha[n] = \mathcal{T}(\alpha, r_\alpha/r_1, n)$$

とおく. このとき命題 2 より,

$$\Phi(\alpha[n]) \to \Phi(\alpha) + \log\frac{r_\alpha}{r_1}$$

である. さらに

$$\alpha[n] = \left[a_1, \ldots, a_n, \left\lfloor\left(\frac{r_\alpha}{r_1}\right)^{q_n}\right\rfloor, 1, 1, \ldots\right]$$

であることから,

$$\begin{aligned}
\left|\alpha[n] - \frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} &< \frac{r_1}{q_n^{1/q_n} r_\alpha} \to \frac{r_1}{r_\alpha}, \\
\left|\alpha[n] - \frac{p_n}{q_n}\right|^{1/q_n} &> \frac{r_1}{(2q_n)^{1/q_n} r_\alpha} \to \frac{r_1}{r_\alpha},
\end{aligned}$$

となる. つまり $|\alpha[n] - p_n/q_n|^{1/q_n} \to r_1/r_\alpha$ である.

定理 3 より,

$$\liminf_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \geq r_\alpha e^{-\log(r_\alpha/r_1)} = r_1,$$

また系 9 より

$$\limsup_{n\to\infty} r_{\alpha[n]} \leq \frac{r_1}{r_\alpha} r_\alpha = r_1.$$

よって主補題は示された.

4 Accumulation by cycles

この節では主定理の証明に少し手を加えることで Siegel disk の境界が滑らかで周期軌道が集積している (周期点は常に集積していることに注意) ものが存在することを示している.

ほとんどの部分がもとの証明と同じなので詳細は割愛するが, 変更部分は帰納法の仮定に $P_{\alpha(n)}$ の反発的な周期軌道 C_n で $\phi_\alpha(n)(B(0, r_n))$ からの距離が ε_n 以下のものが存在する, という条件をつけ加えて, さらに induction を進めるときに (つまり $m > n$ であるような $P_{\alpha(m)}$ に対して) 常に C_n から距離 ε_n 以下のところに対応する反発的な周期軌道が残るように摂動を小さくとるだけである. このような周期軌道の存在は系 9 によって保証されているので, これによって $\alpha' = \lim \alpha(n)$ に対して $P_{\alpha'}$ の周期軌道が Siegel disk の境界の集積していることが示される.

5 Second proof of the main lemma

有理数の列 $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ で $p_n/q_n \nearrow \alpha$ となるものをとる.

$$\alpha[n] = \inf\{\theta \in]p_n/q_n, \alpha] \setminus \mathbb{Q};\ r_\theta \geq r_1\} \in [p_n/q_n, \alpha]$$

を考える. このとき $\alpha[n] \nearrow \alpha$ であり, $\alpha \mapsto r_\alpha$ の上半連続性より $r_{\alpha[n]} \geq r_1$ なので $P_{\alpha[n]}$ は 0 で線型化可能である. 従って任意の n について $r_{\alpha[n]} \leq r_1$ を示せばよい.

まず Yoccoz の定理より $\alpha[n]$ は Bruno 数である. 数列 θ_m を $p_n/q_n < \theta_m < \alpha[n]$ で $\theta_m \nearrow \alpha[n]$, かつ $\lim \Phi(\theta_m) = \Phi(\alpha[n])$ をみたすものとする. このようなものは補題 2 より存在することがわかる. $\alpha[n]$ の定義より $r_{\theta_m} < r_1$ であり, 定理 3 を $C = 0$ で用いると $\liminf r_{\theta_m} \geq r_{\alpha[n]}$ なので, $r_{\alpha[n]} < r_1$ である.

6 Conclusion

簡単に元の論文に挙げられている未解決問題を引用しておく.

問題 1. 整数 $k \geq 0$ に対し, Siegel disk で境界が C^k だが C^{k+1} でないものが存在するか?

これは [BC2] で証明されている.

問題 2. Siegel disk の境界の Hausdorff 次元が 2 であるような 2 次多項式は存在するか?

元の論文によれば, Siegel disk の境界で critical point を含まず, packing 次元が 2 であるものの存在は証明できたと思う, とのことである.

問題 3. 2 次多項式の Siegel disk の境界に周期軌道が集積しないことがあるか?

ちなみに Pérez-Marco によって単位円上の単葉関数の場合にはこのようなものの存在は示されている.

問題 4. 2 次多項式の Siegel disk の境界に critical point がないという条件を arithmetic に与えよ. また, 境界が滑らかという条件はどうか?

参考文献

[ABC] A. Avila, X. Buff, A. Chéritat, *Siegel disks with smooth boundaries*, Acta Math., **193** (2004), 1–30.

[BC1] X. Buff, A. Chéritat, *Upper bound for the size of quadratic Siegel disks*, Invent. Math., **156** (2004), 1–24.

[BC2] X. Buff, A. Chéritat, *Boundaries of quadratic Siegel disks*, preprint.

[C] A. Chéritat, *Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive*, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay (2001).

[J1] H. Jellouli, *Sur la densité intrinsèque pour la mesure de Lebesgue et quelques problèmes de dynamique holomorphe*, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay, (1994).

[J2] H. Jellouli, *Perturbation d'une fonction linéarisable*, London Math. Soc. Lect. Note **274**, Ed. Tan Lei, Cambridge Univ. Press (2000), 227-252.

Boundaries of quadratic Siegel disks

(Buff-Cheritat の結果 [BC] の紹介)

稲生 啓行

2005 年 3 月 9 日-11 日
ABC 勉強会 (於 名古屋大学)

$\mathbb{U} = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ とし, $r\mathbb{U} = \{|z| = r\}$ 等とする. $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$P_\theta(z) = \exp(i2\pi\theta)z + z^2$$

とする. P_θ が $z = 0$ が線型化可能なとき, その Siegel disk を $\Delta(\theta)$ と書き, $r(\theta)$ をその conformal radius, $\phi_\theta : r(\theta)\mathbb{D} \to \Delta(\theta)$ を線型化座標, つまり等角写像で $\phi_\theta(0) = 0$, $\phi_\theta'(0) = 1$, かつ $\phi_\theta(e^{i2\pi\theta}z) = P_\theta \circ \phi_\theta(z)$ となるものとする. 線型化可能でない場合は, $\Delta(\theta) = \emptyset$, $r(\theta) = 0$ とする.

C^0 を $\mathbb{D}$ 上の正則関数で $\overline{\mathbb{D}}$ 上まで連続に拡張できるもの全体とする. これは sup norm で Banach 空間になる. C^ω を C_0 の元で $\overline{\mathbb{D}}$ の近傍まで正則に拡張できるもの全体とする. $\varepsilon > 0$ に対して C^ω_ε を $(1+\varepsilon)\mathbb{D}$ 上の正則関数全体とすると, これは Fréchet 空間であり, $C^\omega = C^\omega_\varepsilon$ となる. C^ω 自体は Fréchet 空間にならないので, C^ω の位相は特に考えない.

ここで簡単に Fréchet 空間について復習しておく. **Fréchet 空間**とは, 無限個の seminorm を持ち, それについて完備になるような線型位相空間である. 基本的な例としては, コンパクト多様体上の C^∞ 級関数全体の空間がある. seminorm としては 各偏導関数の sup norm を考えればよい.

Fréchet 空間は距離づけ可能である. 以下では断わらなくても Fréchet 空間には適当な距離が入っているものとして考える.

定理 1. *F を Fréchet 空間で*

$$C^\omega \subset F \subset_0 C^0$$

をみたすとする. ただし $\subset_0$ は包含写像が連続な単射となることを意味するものとする. $n \geq 1$ に対して, K_n を F のコンパクト集合とする. このとき任意の Bruno 数 θ と, 任意の $r < r(\theta)$, $\varepsilon > 0$ に対して, ある Bruno 数 θ' が存在して以下をみたす.

(1) $|\theta' - \theta| < \varepsilon$
(2) $r < r(\theta') < r + \varepsilon$
(3) 写像 $z \mapsto \phi_{\theta'}(r(\theta')z)$ は F の元だがどの K_n にも含まれない.
(4) $z \mapsto \phi_{\theta'}(r(\theta')z)$ と $z \mapsto \phi_\theta(rz)$ の F での距離は ε 以下である.
(5) $\phi_{\theta'}$ は $r(\theta')\overline{\mathbb{D}}$ まで連続に拡張できる. (以下拡張したものを ψ と書く.)
(6) $\mathbb{U}$ 上で $\|\psi(r(\theta')z) - \phi_\theta(rz)\|_\infty < \varepsilon$.
(7) $\Delta(\theta')$ の境界 $\psi(r(\theta')\mathbb{U})$ は Jordan 曲線である.

(8) $\Delta(\theta')$ の境界 $\psi(r(\theta')\mathbb{U})$ は *critical point* を含まない.

証明は [ABC] の主補題を用いる.

補題 2 ([ABC, Main Lemma]). 任意の *Bruno* 数 θ と $r < r(\theta)$ に対して, ある *bounded type* の無理数の列 θ_n があって, $\theta_n \to \theta$ かつ $r(\theta_n) \to r$ をみたす.

Herman [H] の結果によって, θ が bounded type の無理数のとき, P_θ の Siegel disk は境界に critical point を持つ. (実際 Herman はもっと強いことを証明しているがここでは触れない).

1 Applications

1. 境界が滑らかな Siegel disk を得るには, $F = C^\infty$, $K_n = \emptyset$ とすればよい.
2. B を Banach 空間か Fréchet 空間とし,

$$C^\omega \subset B \subset_c F \subset_0 C^0$$

と仮定する. ただし $\subset_c$ は包含写像がコンパクト (有界集合の像がコンパクトな閉包を持つ) な単射であることを意味するものとする. K_n を B の 0 を中心とする 半径 $n+1$ の球の, F 内での閉包とすると, Siegel disk で, その線型化座標 $\phi_{\theta'}(r(\theta' z)) : \mathbb{D} \to \Delta(\theta')$ が F に入るが B には入らないものを得ることができる.

3. 可算個の Banach 空間または Fréchet 空間 B_n で $C^\infty \subset B_n \subset_c F$ についても 2 と同様のことができる.
4. $F = C^0$, $B_n = C^{1/n}$ $(n \geq 2)$ とすると, Siegel disk の境界が Jordan 曲線で, critical point を含まず, quasicircle ではないものが得られる. 実際, quasidisk の Riemann 写像は常に Hölder 連続であることが知られている [P]. (Siegel disk の境界が quasicircle でなく, critical point を含む場合は [PZ] で得られている.)
5. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $F = C^n$, $B = C^{n+1/2}$ とすると, 境界が C^n 埋め込みだが C^{n+1} 埋め込みではないものが得られる. ($B = C^{n+1}$ では上の議論が適用できない.)
6. $\beta > 0$ に対し, $F = \bigcup_{\alpha \in [0,\beta[} C^\alpha$, $B = C^\beta$.
7. $\alpha \geq 0$ に対し, $F = C^\alpha$, $B_n = C^{\alpha+1/n}$.
8. 整数 $n \geq 0$ に対し, $F = \bigcap_{\alpha \in [0,n+1[} C^\alpha$, $B = C^{n+\mathrm{Lip}}$.

2 Outline of the proof

コンパクト集合 K_n に入らない, という条件をみたすように作るのはかなり technical な議論が多いので, ここでは簡単のために $K_n = \emptyset$ の場合のみ証明する. そうでない場合は元の論文 [BC] を参照していただきたい[*1]. この場合はさらに強く, 定理の (2) を $r(\theta') = r$ とおきかえたものが証明できる.

帰納的に $\theta_n, \varepsilon_n > 0$ を決めていくことを考える. まず, $r_n \searrow r$ となる減少列 r_n で, $r_0 = r(\theta)$ となるものを 1 つとる. $\theta_0 = \theta$, $\varepsilon_0 = \varepsilon/10$ とする. 次に θ_n, ε_n まで決まって, $r_n < r(\theta_n) < r_{n-1}$ をみたすと仮定する. $\varepsilon_{n+1} < \epsilon_n/10$ を, $|\alpha - \theta_n| < \varepsilon_{n+1}$ ならば $r(\alpha) < r(\theta_n) + \varepsilon_n$ であるようにとる ($r(\alpha)$ の上半連続性よりこれは可能). θ_{n+1} を, $|\theta_{n+1} - \theta_n| < \epsilon_{n+1}/10$ で以下をみたすようにとる:

[*1] $K_n = \emptyset$ を仮定すると [ABC] の証明そのままになってしまいます. [BC] はこれを一般化している部分が新しいので, この論文の紹介としては実は不適切なわけですが, 今回の勉強会のテーマは [ABC] を理解することです. なのでこのレジュメの実際の目的は, [ABC] の Main Lemma から Main Theorem の証明の説明をするついでに [BC] の紹介もする, というものなので, あえてこう仮定して話を進めてしまいます.

- $r_{n+1} < r(\theta_{n+1}) < r_n$. (補題 2 を使う.)
- C^ω 級関数 $u_{n+1}(z) = \phi_{\theta_{n+1}}(rz)$ と $u_n(z) = \phi_{\theta_n(rz)}$ の F $(\supset C^\omega)$ 上の距離は ε_{n+1} 以下. (任意の $\varepsilon' > 0$ に対して $C^\omega_{\varepsilon'} \subset_0 F$ [BC, Lemma 5] を用いる.)

作り方から $m > n$ なら $|\theta_m - \theta_n| < \varepsilon_n$ なので, $\theta' = \lim \theta_n$ を考える. もちろん $|\theta' - \theta_n| < \varepsilon_n$ が成り立つ. 従って $r(\theta') < r_{\theta_n} + \varepsilon_n < r_{n-1} + \varepsilon_n$ であり, $n \to \infty$ として, $r(\theta') \leq r$ を得る. 一方, 上半連続性から, $r(\theta') \geq \lim r(\theta_n)$ なので, $r(\theta') = r$ でなければならない. u_n も F の Cauchy 列をなすので, Fréchet 空間の完備性から $u_n \to v \in F$ となる. これは $\phi_{\theta'} : r\mathbb{D} \to \Delta(\theta')$ が $r\mathbb{U}$ 上まで拡張でき, $r\mathbb{U}$ 上では v に等しいことを意味する. $\phi_{\theta'}$ は $r\mathbb{D}$ より大きな領域まで正則に拡張することはできないことから, $v \notin C^\omega$ であることに注意.

参考文献

[ABC] A. Avila, X. Buff, A. Chéritat, *Siegel disks with smooth boundaries*, Acta Math., **193** (2004), 1–30.

[BC] X. Buff, A. Chéritat, *Boundaries of quadratic Siegel disks*, preprint.

[H] M. Herman, *Are there critical points on the boundaries of singular domains?*, Comm. Math. Phys. **99** (1985), 593–612.

[P] C. Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 299, Springer-Verlag.

[PZ] C. L. Petersen, S. Zakeri, *On the Julia Set of a Typical Quadratic Polynomial with a Siegel disk*, preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (2000).

２つの連分数展開(ABCとYoccoz)

京都大学大学院・人環M２　上野康平

平成17年5月1日

目標はABC(Avila,Buff,Cheritat)の論文の「定理１ (Yoccoz)の注意」を確認すること。つまり、定理３を示すために定理１ (Yoccoz)を使うのだが「ABCの連分数展開とYoccozが使っていた連分数展開は正確には同じではない。しかし、それぞれの連分数展開で定義されるYoccoz関数の差は一様な定数で押えられるので定理１ (Yoccoz)を使うことができる」ことを確認しよう。ABCに関してはABCの論文とMilnorの教科書を、Yoccozに関してはJ.C.Yoccoz,*Petits diviseurs en dimesion* 1, S.M.F.,Asterisque 231(1995),11-14を参考にした。

目 次

1　定義

ABCの連分数展開とYoccozが使っていた連分数展開の定義を述べる。以下、α は無理数とする。

1.1 (ABC)

川平氏、稲生氏のレジュメと同じだと思う。

次の記号を使って連分数展開を行う。$\lfloor\alpha\rfloor$ は $\max\{n\in\mathbb{Z}|n\le\alpha\}$、$\{\alpha\}$ は $\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$ を表し、$a_0=\lfloor\alpha\rfloor, \alpha_0=\{\alpha\}, a_{k+1}=\lfloor\frac{1}{\alpha_k}\rfloor, \alpha_{k+1}=\{\frac{1}{\alpha_k}\}$ とおく。このとき、$a_0\in\mathbb{Z}, a_k\ge 1, \alpha_k\in(0,1), k\ge 1$

$$\frac{1}{\alpha_k}=a_{k+1}+\alpha_{k+1} \tag{1}$$

$$\Phi(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{k-1}\log\frac{1}{\alpha_k}:\ \text{(ABC) の Yoccoz 関数}$$

$$\beta_{-1}=1,\ \beta_k=\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_k\ (k\ge 0)$$

(1) より次の等式が成立

$$\begin{aligned}\alpha &= a_0+\alpha_0=a_0+\cfrac{1}{a_1+\alpha_1}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\alpha_2}}\\ &= \cdots=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots}}}}=[a_0,a_1,\cdots]\end{aligned}$$

1.2 (Yoccoz)

上と区別するために ˜ をつける。

次の記号を使って連分数展開を行う。$<\alpha>$ は α に最も近い整数、$\|\alpha\|$ は $\min(\{\alpha\},1-\{\alpha\})$ を表し、$\tilde{a}_0=<\alpha>, \tilde{\alpha}_0=\|\alpha\|, \tilde{a}_{k+1}=<\frac{1}{\tilde{\alpha}_k}>, \tilde{\alpha}_{k+1}=\|\frac{1}{\tilde{\alpha}_k}\|$ とおく。このとき、$\tilde{a}_0\in\mathbb{Z}, \tilde{a}_k\ge 1, \tilde{\alpha}_k\in(0,\frac{1}{2}), k\ge 1$

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_k}=\tilde{a}_{k+1}+\varepsilon_{k+1}\tilde{\alpha}_{k+1},\ \varepsilon_{k+1}\in\{\pm 1\} \tag{2}$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\beta}_{k-1}\log\frac{1}{\tilde{\alpha}_k}:\ \text{(Yoccoz) の Yoccoz 関数}$$

$$\tilde{\beta}_{-1}=1,\ \tilde{\beta}_k=\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha}_1\cdots\tilde{\alpha}_k\ (k\ge 0)$$

例
有理数 $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ をそれぞれ (ABC) と (Yoccoz) のやり方で連分数展開する。

$$(ABC) \qquad \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3},\ \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3}$$

$$(Yoccoz) \quad \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3},\ \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

1.3 主張

よって次を示したい。
主張
普遍定数 C が存在して、任意の無理数 α に対して

$$|\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha)| \leq C$$

2 (ABC) の性質と (Yoccoz) との関係

2.1 (ABC) の性質

α の分数近似 $\frac{p_k}{q_k}$ の説明を ABC の第 1 節にそって行う。
$(p_k)_{k+1}, (q_k)_{k+1}$ を次で定義

$$\begin{cases} p_{-1} = 1,\ p_0 = a_0,\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-1} = 0,\ q_0 = 1, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

このとき次が成立

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k,\ \frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \cdot\cdot, a_k],\ k \geq 0$$

命題 1

1. $\alpha = \dfrac{p_k + p_{k-1}\alpha_k}{q_k + q_{k-1}\alpha_k}$
2. $q_k \alpha - p_k = (-1)^k \beta_k$
3. $q_{k+1}\beta_k + q_k \beta_{k+1} = 1$
4. $\dfrac{1}{q_{k+1} + q_k} < \beta_k < \dfrac{1}{q_{k+1}}$
5. $\dfrac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left|\alpha - \dfrac{q_k}{q_k}\right| < \dfrac{1}{q_k q_{k+1}}$
6. $\alpha_k = [0, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots]$

1.2.3. は p_k, q_k の定義と (1) を使って示せる。
4. は 3. から、5. は 2.4. から従う。

命題 1 は ABC の第 2 節で使うが、**主張**を示すためには、**命題** 1 の 3. と次の 2 つが必要。

$$q_{k+2} \geq 2q_k,\quad \beta_{k+2} \leq \frac{1}{2}\beta_k$$

後者を示す。
(1) より、$\beta_{k+1} \leq \frac{1}{2}\beta_{k-1} \Leftrightarrow \alpha_k\alpha_{k+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{k+1}\alpha_k \geq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2n} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{n}$ のとき、$n \leq \frac{1}{\alpha_k} \leq 2n$ より $a_{k+1} \geq n$
よって、$a_{k+1}\alpha_k \geq \frac{1}{2}$

2.2 $\tilde{\beta}_n$ と $\beta_{k(n)}$ の関係

$k(n)$ を次で定義。$k(-1) = -1$

$$\begin{cases} k(n+1) = k(n) + 1,\ \varepsilon_{k+1} = 1 \\ k(n+1) = k(n) + 2,\ \varepsilon_{k+1} = -1 \end{cases}$$

このとき次が成立

$$\tilde{\beta}_n = \beta_{k(n)}$$

証明
帰納法で示す。正確な証明はしないが、$n = -1$ と $n = 0$ の場合をやる。
(・)$n = -1$
$\varepsilon_0 = 1$ のとき、$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0,\ k(0) = -1 + 1 = 0$ より $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_k(0)$
よって $\tilde{\beta}_0 = \beta_{k(0)}$
$\varepsilon_0 = -1$ のとき、$\frac{1}{2} \leq \alpha_0 \leq 1$,(1) より $a_1 = 1$。$\tilde{\alpha}_0 + \alpha_0 = 1$,(1) より
$\tilde{\alpha}_0 = 1 - \alpha_0 = 1 - a_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1$
一方、$k(-1) = -1 + 2 = 1$ より $\tilde{\beta}_0 = \beta_{k(0)}$
(・)$n = 0$
問題は $\varepsilon_0 = -1$ のときなので、$\tilde{\alpha}_0 + \alpha_0 = 1,\ a_1 = 1$ と仮定する。
次を示せばよい。

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 \text{ のとき} \tilde{\alpha}_1 = \alpha_2 (\Rightarrow \tilde{\beta}_1 = \beta_2 = \beta_{k(1)}) \\ \varepsilon_1 = -1 \text{ のとき} \tilde{\alpha}_1 + \alpha_2 = 1 (\Rightarrow \tilde{\alpha}_1 = \alpha_2\alpha_3 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = \beta_2 = \beta_{k(1)}) \end{cases}$$

一般の場合は次を示せばよい。

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = 1 \text{ のとき } \tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha_{k(n)+1} \ (\Rightarrow \tilde{\beta}_{n+1} = \beta_{k(n)+1} = \beta_{k(n+1)}) \\ \varepsilon_{n+1} = -1 \text{ のとき} \tilde{\alpha}_{n+1} + \alpha_{k(n)+1} = 1 \\ \qquad (\Rightarrow \tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha_{k(n)+1}\alpha_{k(n)+2} \Rightarrow \tilde{\beta}_{n+1} = \beta_{k(n)+2} = \beta_{k(n+1)}) \end{cases}$$

$n = 0$ の場合に戻る。
$a_1 = 1$ より、$\alpha_2 = -a_2 + \frac{1}{\alpha_1} = -a_2 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} - a_1} = -a_2 + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}$
$\tilde{\alpha}_0 + \alpha_0 = 1$ より、$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}(-\tilde{a}_1 + \frac{1}{\tilde{\alpha}_0}) = -\varepsilon_1 \tilde{a}_1 + \frac{\varepsilon_1}{1-\alpha_0}$
よって、$\varepsilon_1 = 1$ のとき

$$\tilde{\alpha}_1 - \alpha_2 = -\tilde{a}_1 + a_2 + \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_0} \in \mathbb{Z} \quad \therefore \tilde{\alpha}_1 - \alpha_2 = 0$$

$\varepsilon_1 = -1$ のとき

$$\tilde{\alpha}_1 + \alpha_2 = \tilde{a}_1 - a_2 + \frac{-1+\alpha_0}{1-\alpha_0} \in \mathbb{Z} \quad \therefore \tilde{\alpha}_1 + \alpha_2 = 1$$

3 (ABC) と (Yoccoz) の Yoccoz 関数

3.1 主張の証明

主張

普遍定数 C が存在して、任意の無理数 α に対して

$$|\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha)| \leq C$$

証明の概略

次の４つの不等式を示す。

1.

$$\left|\sum_{i=0}^{k} \beta_{i-1} \log {\alpha_i}^{-1} - \sum_{i=0}^{k} \beta_{i-1} \log {\beta_i}^{-1}\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{k} \beta_{i-1} \log \beta_{i-1}\right| \leq c_1$$

2.

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_{i-1} \log \tilde{\beta}_i - \sum_{i=0}^{k(n)} \beta_{i-1} \log \beta_i\right| \leq \log 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_{i-1} + 2\left|\sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_{i-1} \log \tilde{\beta}_{i-1}\right| \leq c_2$$

3.

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\alpha}_i^{-1}-\sum_{i=0}^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_i^{-1}\right|\le\left|\sum_{i=0}^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_{i-1}\right|\le c_3$$

4.

$$\left|\sum_{i=0}^{k}\beta_{i-1}\log{\beta_i}^{-1}-\sum_{i=0}^{k}{q_i}^{-1}\log q_{i+1}\right|\le\log 2\cdot\sum_{i=0}^{k}{q_i}^{-1}+\left|\sum_{i=0}^{k}\beta_i\log\beta_i\right|\le c_4$$

$\tilde{\beta}_{i+1}\le\frac{1}{2}\tilde{\beta}_i$, ${q_{i+1}}^{-1}\le\frac{1}{2}{q_i}^{-1}$ より $\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{\beta}_{i-1}$, $\sum_{i=0}^{\infty}{q_i}^{-1}$ は有界であり、$|x\log x|$ のグラフの形と $\tilde{\beta}_{i+1}\le\frac{1}{2}\tilde{\beta}_i$, $\beta_{i+2}\le\frac{1}{2}\beta_i$ より $|\sum_{i=0}^{\infty}\beta_{i-1}\log\beta_{i-1}|$, $\left|\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_{i-1}\right|$ も有界。1.2.3. より、$\Phi(\alpha)$ と $\tilde{\Phi}(\alpha)$ の差は有界、さらに 4. より、$\Phi(\alpha)$ と $\sum{q_i}^{-1}\log q_{i+1}$ の差も有界であることがわかる。2. と 4. を示す。

多くの記号がでてきてよくわからない場合は、**3．2 杉山氏から一言**を参考にするとよい。

2. の証明

$\varepsilon_i=1$ のとき

$$\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_i=\beta_{k(i)-1}\log\beta_k(i)$$

$\varepsilon_i=-1$ のとき $\beta_{k(i-1)+1}=\tilde{\beta}_{i-1}-\tilde{\beta}_i$ より

$$\beta_{k(i)-2}\log\beta_k(i)-1+\beta_{k(i)-1}\log\beta_k(i)=\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_{i-1}-\tilde{\beta}_i+\tilde{\beta}_{i-1}-\tilde{\beta}_i\log\tilde{\beta}_i$$

$$\begin{aligned}\therefore\text{左辺}&=\left|\sum^{n}\beta_{i-2}\log\beta_{i-1}+\beta_{i-1}\log\beta_i-\tilde{\beta}_{k-1}\log\tilde{\beta}_{\mathrm{k}}\right|\\&=\left|\sum^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log(\tilde{\beta}_{i-1}-\tilde{\beta}_i)-\tilde{\beta}_i\log\tilde{\beta}_i\right|\\&\le\left|\sum^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log\frac{1}{2}\tilde{\beta}_{i-1}\right|+\left|\sum^{n}\tilde{\beta}_i\log\tilde{\beta}_i\right|\\&\le\log 2\cdot\sum^{n}\tilde{\beta}_{i-1}+2\left|\sum^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\log\tilde{\beta}_{i-1}\right|\end{aligned}$$

4. の証明

$$\begin{aligned}|{q_i}^{-1}\log q_{i+1}+\beta_{i-1}\log\beta_i|&=|(\beta_{i-1}-{q_i}^{-1})\log\beta_i+{q_i}^{-1}\log q_{i+1}\beta_i|\\&\le|\beta_{i-1}-{q_i}^{-1}||\log\beta_i|+{q_i}^{-1}|\log q_{i+1}\beta_i|\end{aligned}$$

ここで、$q_i\beta_{i-1}+q_{i+1}\beta_i=1,\ q_{i+1}\ge q_i,\ \beta_{i+1}\le\beta_i$ より

$$|\beta_{i-1}-{q_i}^{-1}|=\frac{q_{i-1}}{q_i}\beta_i\le\beta_i,\ \frac{1}{2}\le q_{i+1}\beta_i\le 1$$

$$\therefore\ |{q_i}^{-1}\log q_{i+1}+\beta_{i-1}\log\beta_i|\le\log 2\cdot{q_i}^{-1}+|\beta_i\log\beta_i|$$

3.2 杉山氏から一言

杉山氏による c_2,C の改良を例で説明する。

主張 (c_2 **に関して**)

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\tilde\beta_{i-1}\log\tilde\beta_i-\sum_{i=0}^{k(n)}\beta_{i-1}\log\beta_i\right|\le\log 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\tilde\beta_{i-1}+\left|\sum_{i=0}^{n}\tilde\beta_{i-1}\log\tilde\beta_{i-1}\right|$$

例による説明：例えば $k(n)$ として次を考え、
$\sum\tilde\beta_{i-1}\log\tilde\beta_i$ と $\sum_{i=0}^{k(n)}\beta_{i-1}\log\beta_i$ を比べよう。

$$\tilde\beta_1=\beta_1,\ \tilde\beta_2=\beta_2,\ \tilde\beta_3=\beta_4,\ \tilde\beta_4=\beta_6,\ \tilde\beta_5=\beta_7,\ \cdots$$

$$\begin{aligned}\sum\tilde\beta_{i-1}\log\tilde\beta_i &= \tilde\beta_1\log\tilde\beta_2+\tilde\beta_2\log\tilde\beta_3+\tilde\beta_3\log\tilde\beta_4+\tilde\beta_4\log\tilde\beta_5+\cdots\\ &= \beta_1\log\beta_2+\boxed{\beta_2\log\beta_4}+\boxed{\beta_4\log\beta_6}+\beta_6\log\beta_7+\cdots\end{aligned}$$

$$\sum\beta_{i-1}\log\beta_i=\beta_1\log\beta_2+\boxed{\beta_2\log\beta_3+\beta_3\log\beta_4}+\boxed{\beta_4\log\beta_5+\beta_5\log\beta_6}+\beta_6\log\beta_7+\cdots$$

$$\begin{aligned}\boxed{\beta_2\log\beta_4}-\boxed{\beta_2\log\beta_3+\beta_3\log\beta_4} &= (\beta_2-\beta_3)\log\beta_4-\beta_2\log\beta_2\alpha_3\\ &= \beta_4\log\beta_4-\beta_2\log\beta_2-\beta_2\log\alpha_3\end{aligned}$$

$$\boxed{\beta_4\log\beta_6}-\boxed{\beta_4\log\beta_5+\beta_5\log\beta_6} = \beta_6\log\beta_6-\beta_4\log\beta_4-\beta_4\log\alpha_5$$

$$\begin{aligned}\therefore|\sum\tilde\beta_{i-1}\log\tilde\beta_i-\sum\beta_{i-1}\log\beta_i| &\le |\beta_2\log\beta_2+\beta_6\log\beta_6+\cdots|+\log 2|\beta_2+\beta_4+\cdots|\\ &\le |\tilde\beta_2\log\tilde\beta_2+\tilde\beta_4\log\tilde\beta_4+\cdots|+\log 2|\tilde\beta_2+\tilde\beta_3+\cdots|\\ &\le \left|\sum\tilde\beta_i\log\tilde\beta_i\right|+\log 2\cdot\sum\tilde\beta_i\end{aligned}$$

主張 (C **に関して**)

$$|\tilde{\Phi}(\alpha) - \Phi(\alpha)| \leq \left|\sum \tilde{\beta}_i \log \tilde{\beta}_i\right|$$

例による説明

例えば $k(n)$ として次を考え、$\tilde{\Phi}(\alpha)$ と $\Phi(\alpha)$ を比べよう。

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1,\ \tilde{\beta}_2 = \beta_2,\ \tilde{\beta}_3 = \beta_4,\ \tilde{\beta}_4 = \beta_6,\ \tilde{\beta}_5 = \beta_7,\ \cdots$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1,\ \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2,\ \tilde{\alpha}_3 = \alpha_3\alpha_4,\ \tilde{\alpha}_4 = \alpha_5\alpha_6,\ \tilde{\alpha}_5 = \alpha_7$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\alpha) &= \tilde{\beta}_1 \log \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2 \log \tilde{\alpha}_3 + \tilde{\beta}_3 \log \tilde{\alpha}_4,\ \cdots \\
&= \beta_1 \log \alpha_2 + \boxed{\beta_2 \log \alpha_3\alpha_4} + \boxed{\beta_4 \log \alpha_5\alpha_6} + \beta_6 \log \alpha_7 + \beta_7 \log \alpha + \cdots
\end{aligned}$$

$$\Phi(\alpha) = \beta_1 \log \alpha_2 + \boxed{\beta_2 \log \alpha_3 + \beta_3 \log \alpha_4} + \boxed{\beta_4 \log \alpha_5 + \beta_5 \log \alpha_6} + \beta_6 \log \alpha_7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\beta_2 \log \alpha_3\alpha_4} - \boxed{\beta_2 \log \alpha_3 + \beta_3 \log \alpha_4} &= (\beta_2 - \beta_3) \log \alpha_4 \\
&= \beta_4 \log \alpha_4 \\
&= \tilde{\beta}_3 \log \tilde{\alpha}_3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\beta_4 \log \alpha_5\alpha_6} - \boxed{\beta_4 \log \alpha_5 + \beta_5 \log \alpha_6} = \tilde{\beta}_4 \log \tilde{\alpha}_4$$

$$\therefore |\tilde{\Phi}(\alpha) - \Phi(\alpha)| \leq \left|\sum \tilde{\beta}_i \log \tilde{\beta}_i\right|$$