無理的中立固定点の周りの力学系

今田 光彦

はじめに

固定点の周りの力学系の研究は 100 年以上も前から続けられているが, 無理的中立固定点の周りの力学系 (とくに, クレーマー点の周りの力学系) は解析が難しく, 現在でも未解決な問題が残されている.

このレポートでは, 固定点の周りの力学系の位相的性質についてまとめ, 論文 [**PM**] "Fixed points and circle maps" (by R. Pérez-Marco) を解説する. この論文でなされた重要な仕事は 2 つある. 1 つは無理的中立固定点の周りの不変集合の存在証明を与えたこと [**PM**, Theorem 1] であり, もう 1 つはその不変集合上の力学系を円周写像の力学系と関係付けたこと [**PM**, Theorem 2] である.

本質的な解決にはまだまだ至らぬ点があるのかもしれないが, 無理的中立固定点の周りの力学系 (とくに, クレーマー点の周りの力学系) の研究に対して, これまでになかった新しい手法を確立しており大変興味深い. そして, 論文 [**SZ**] ではその手法が本質的に用いられ, クレーマー 2 次多項式のジュリア集合のトポロジーに関する結果を得ている.

さて, このレポートは著者が修士及び博士課程在学中に行ったセミナーのノートを参考にして作成された. 論文を読み始めて既に 5 年以上経ち, 自己充足的な形ではあるが, とりあえずの区切りをつけることができた.

2009 年 9 月

記号と用語および基本的な定理の確認

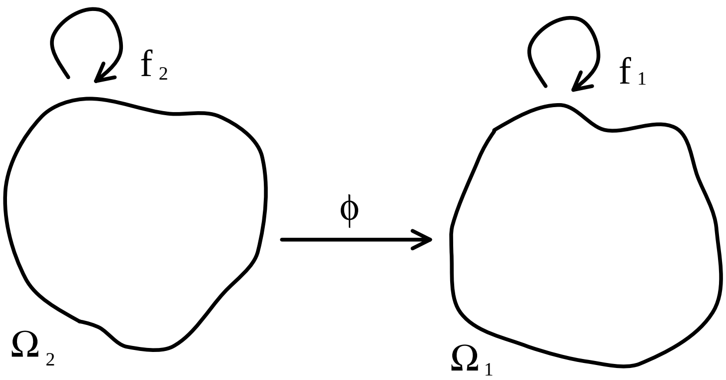
ここで述べる記号と用語は今後断りなく使用する. あわせて基本的な定理も述べておく. これらの定理を述べるにあたって [**Ah**] を参照した.

- $\mathbb{N}$ を自然数の集合, $\mathbb{Z}$ を整数の集合, $\mathbb{Q}$ を有理数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathbb{C}$ を複素数の集合とする. 複素数の集合 $\mathbb{C}$ は平面と同一視され, **複素平面** (complex plane) という.
- 複素平面 $\mathbb{C}$ に**無限遠点**∞ を付け加えた空間 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は 2 次元球面と同一視され, **リーマン球面** (Riemann sphere) という.
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を**単位開円板** (unit open disk) という.
- $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ を**単位円周** (unit circle) という. **被覆写像** (covering map) $\pi(t) = e^{2\pi it}$ によって商空間 $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ と同一視される.
- $r > 0$ に対して, $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ とする. とくに, $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$ である.
- $r > 1$ に対して, $\mathbb{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\}$ とする. あきらかに, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{A}_r$ である.
- X を距離空間とする. $A \subset X$ に対して, その**内部** (interior) を $\mathrm{Int}A$, その**境界** (boundary) を ∂A, その**閉包** (closure) を $\overline{A}$ とかく.
- X を距離空間とする. $K \subset X$ が連結なコンパクト集合であるとき, K を**連続体** (continuum) という. 2 点以上含む連続体を**非退化連続体** (non-degenerate continuum) という.
- X を距離空間とする. $A \subset X$ に対して, A を含む開集合を A **の近傍** (neighborhood of A) という. $A = \{a\}$ のときは, A の近傍を簡単に a の近傍という.
- 複素数値函数 f が $A \subset \mathbb{C}$ **で解析的** (analytic on A) とは, A のある近傍内のすべての点で複素微分可能であるときをいう. $A = \{z\}$ のときは, A で解析的なことを簡単に z で解析的という. このような函数 f を**解析函数** (analytic function) という. また, $f'(c) = 0$ を満たす点 c を**臨界点** (critical point) という.

- $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が空でない連結な開集合であるとき**領域** (domain) という. このとき, Ω 内の相異なる 2 点は Ω 内の折れ線で結ぶことができる. とくに, Ω は**弧状連結** (arcwise connected) である. また, 境界がジョルダン閉曲線であるような領域を**ジョルダン領域** (Jordan domain) という. 領域 Ω はその補集合 $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ が連結のとき, **単連結** (simply connected) という. とくに, ジョルダン領域は単連結である. また, Ω が単連結であることと Ω 内の任意のジョルダン閉曲線 γ が Ω 内で 1 点に連続変形できることは同値である. したがって, Ω が単連結でないことと Ω 内のジョルダン閉曲線 γ で $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ のある 2 つの成分 K_1 と K_2 を分離するものが存在することは同値である.

- 複素数値函数 f が領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ **で単葉** (univalent on Ω) とは, Ω 内のすべての点で複素微分可能であり, かつ, Ω 上単射であるときをいう. このような函数 f を**単葉函数** (univalent function) という. また, 全射な単葉函数を**等角同型** (conformal isomorphism) という.

- $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ を領域とする. 2 つの解析函数 $f_1 : \Omega_1 \to \Omega_1$ と $f_2 : \Omega_2 \to \Omega_2$ が**等角共役** (conformally conjugate) とは, $\phi^{-1} \circ f_1 \circ \phi = f_2$ を満たす等角同型 $\phi : \Omega_2 \to \Omega_1$ が存在するときをいう. 複素力学系の重要かつ基本的な研究は, 等角共役類を分類することである.



- **テイラーの定理** (Taylor's thorem)
f が原点で解析的であるとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して原点で解析的な函数 f_n が存在して, 原点の近くで $f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1} + f_n(z)z^n$ が成り立つ. さらに, f は原点で**テイラー級数** (Taylor series) に展開できる. すなわち, 原点の近くで $f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots$ が成り立つ.

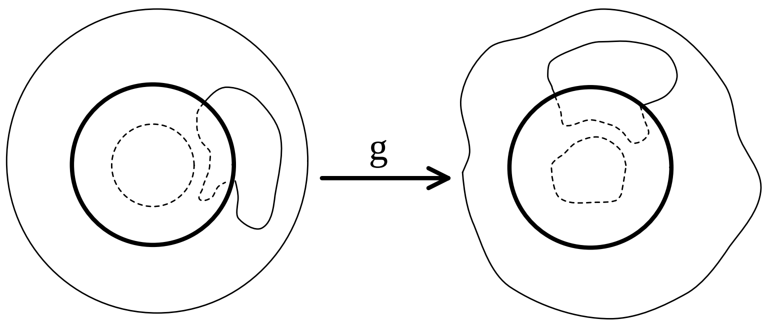
- **一致の定理** (uniqueness theorem)
領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で解析的な函数 f_1, f_2 が Ω 内のある非退化連続体 K 上で等しければ Ω 上でも等しい.

- **開写像定理** (open mapping theorem)
定数でない解析函数 f は**開写像** (open map) である. すなわち, f は開集合を開集合に写す. とくに, f が z で解析的であり z が臨界点でないとき, f は z の近くで単葉となる.

- **最大値原理** (maximum principle)
領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で解析的な函数 f が定数でなければ, 絶対値 $|f(z)|$ は Ω 上最大値をとらない. とくに, コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ 上で定義された連続函数 f がその内部 $\mathrm{Int}K$ で解析的であるとき, 絶対値 $|f(z)|$ はその境界 ∂K 上で最大値をとる.

- **シュワルツの補題** (Schwarz's lemma)
解析函数 $f : \mathbb{D}_r \to \overline{\mathbb{D}}_r$ が $f(0) = 0$ を満たすとき, $|f(z)| \leq |z|$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ および $|f'(0)| \leq 1$ が成り立つ. さらに, 1 点 $z_0 \neq 0$ で $|f(z_0)| = |z_0|$ または $|f'(0)| = 1$ が成り立てば, $f(z) = \lambda z$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つ. ここで, $\lambda = f'(0)$ である.

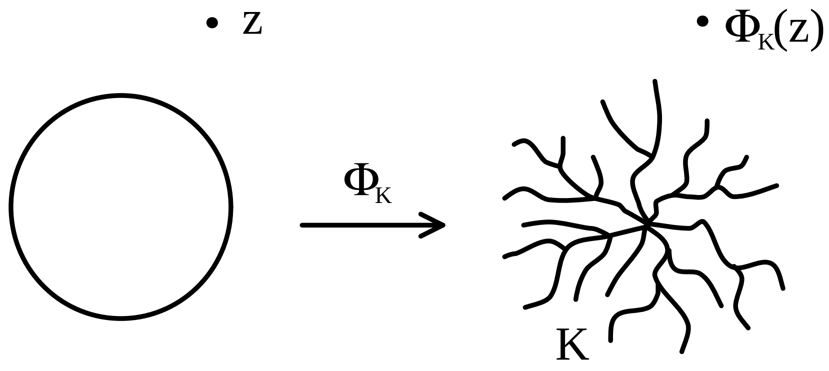
- **シュワルツの鏡像原理** (Schwarz's reflection principle)
$r > 1$ とする. 単葉函数 $g : \mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ が $|z| \searrow 1 \Longrightarrow |g(z)| \searrow 1$ を満たすとき, g は $\mathbb{A}_r$ 上の単葉函数に拡張できる.



- **ワイエルシュトラスの定理** (Weierstrass's theorem)
領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で解析的な函数 f_n が函数 f に Ω 上広義一様収束するとき, f は Ω で解析的である. さらに, このとき f_n' は f' に Ω 上広義一様収束する.

- **フルヴィッツの定理** (Hurwitz's theorem)
  領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で単葉な函数 f_n が函数 f に Ω 上広義一様収束するとき, f は定数または Ω で単葉である.

- **リーマンの写像定理** (Riemann's mapping theorem)
  単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ は単位開円板 $\mathbb{D}$ と**等角同値** (conformally isomorphic) である. すなわち, 等角同型 $f : \Omega \to \mathbb{D}$ が存在する. このような f または逆写像 f^{-1} を**リーマン写像** (Riemann map) という.
  複素力学系では次のような設定のもとで使われることがよくある.
  $\mathbb{C} - K$ が連結であるような非退化連続体 $K \subset \mathbb{C}$ が与えられたとき, $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} > 0$ を満たす等角同型 $\Phi_K : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - K$ がただ 1 つ存在する.



目 次

第1章　固定点の周りの力学系

1.1　本章の目的とそのための準備

複素力学系は点や集合を解析函数で繰り返し反復させてその様子を研究する分野である．本章の目的は固定点の近くでその振る舞いを分類することである．この節では, そのために必要な基本的な用語を準備する．

定義 1.1.1 f を解析函数とする. 自然数 n に対して, f^n は f を n 回反復合成した函数とする．便宜上, f^0 は恒等函数と約束しておく．点 z_0 に対して $z_{m+1} = f(z_m)$ を満たす次のような点列 $\{z_0, z_1, z_2, \cdots\}$, $\{\cdots, z_{-2}, z_{-1}, z_0\}$, $\{\cdots, z_{-1}, z_0, z_1, \cdots\}$ をそれぞれ z_0 の**前方軌道** (forward orbit), **後方軌道** (backward orbit), **全軌道** (full orbit) という．ある自然数 m が存在して, $f^m(z_0) = z_0$ を満たすような点 z_0 を f の**周期点** (periodic point) という．このような自然数 m の中で最小なものを z_0 の**周期** (period) という．とくに, 周期 m が 1 に等しいとき, 点 z_0 を f の**固定点** (fixed point) という．また, $\lambda = (f^m)'(z_0)$ を周期点 z_0 の**乗法因子** (mutiplier) という．

周期点 z_0 の乗法因子は z_0 の周りの力学系を調べるための重要な指標である．天下り的ではあるが先に乗法因子を使って分類を与える．

注意 1.1.1 周期点の周りの力学系は固定点の周りの力学系の話に持ち込むことができる．また, 固定点を原点にうつす平行移動で等角共役を考えれば固定点は原点と思ってよい．以下では, 原点を固定点としてその周りの力学系を考えることにする．

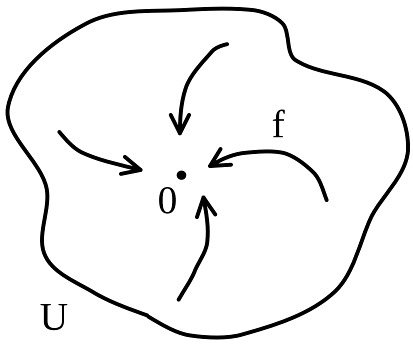
定義 1.1.2 原点を解析函数 f の固定点とする. λ を原点の乗法因子とする．

- $|\lambda| < 1$ のとき, 原点を**吸引固定点** (attracting fixed point) という．
- $|\lambda| = 1$ のとき, 原点を**中立固定点** (indifferent fixed point) という．
- $|\lambda| > 1$ のとき, 原点を**反発固定点** (repelling fixed point) という．

1.2 吸引及び反発固定点の周りの力学系

この節では, 吸引及び反発固定点の周りの力学系の位相的性質をみていく. 実際はもう少し正確で解析的性質を持つ. 例えば, [**Mi**] の §8 および §9 を参照するとよい.

定義 1.2.1 原点を解析函数 f の固定点とする. 原点が**位相吸引的** (topologically attracting) とは, 原点のある近傍 U が存在して, $f^n|_U$ が原点に U 上一様収束することをいう.



次の命題は [**Mi**] の Lemma 8.1 を参照した.

命題 1.2.1 原点を解析函数 f の固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. このとき, 原点が位相吸引的であることは $|\lambda| < 1$ と同値である.

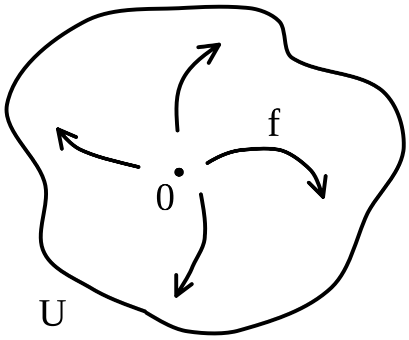
証明 原点が位相吸引的と仮定する. よって, 原点のある近傍 U が存在して, $f^n|_U$ が原点に U 上一様収束する. 十分小さい $r > 0$ をとって $\mathbb{D}_r \subset U$ とできる. $f^n|_{\mathbb{D}_r}$ も原点に $\mathbb{D}_r$ 上一様収束するので, ある自然数 N をとって $f^N(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$ とできる. $f^N(0) = 0$ であるから, シュワルツの補題より $|(f^N)'(0)| \leq 1$ が成り立つ. 実際には f^N は非回転であるから $|(f^N)'(0)| < 1$ が成り立つ. したがって, $|\lambda^N| < 1$ であり $|\lambda| < 1$ を得る.

逆に, $|\lambda| < 1$ と仮定する. テイラーの定理より, 原点の近くで $f(z) = \lambda z + f_1(z)z^2$ とおける. $r_0 > 0$ を十分小さくして, $|f_1(z)|$ が $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ 上最大値 $M \neq 0$ をとったとする. このとき, 任意の $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ に対して $|f(z) - \lambda z| \leq |f_1(z)||z|^2 \leq M|z|^2$ が成り立つ. ここで, $|\lambda| < c < 1$ なる c をとって固定する. さらに, $r < \frac{c-|\lambda|}{M}, r \leq r_0$ を満たすように十分小さい $r > 0$ をとる.

すると, 任意の $z \in \mathbb{D}_r$ に対して $|f(z)| \leq |\lambda z| + M|z|^2 \leq |z|(|\lambda| + M|z|) \leq |z|(|\lambda| + Mr) \leq |z|(|\lambda| + M\frac{c-|\lambda|}{M}) = c|z| < |z| < r$ と評価できるので,

$f(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$ が成り立つ．したがって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, f^n が $\mathbb{D}_r$ 上定義される．さらに, $|f^n(z)| \leq c^n|z| < c^n r \to 0$ $(n \to +\infty)$ となるから, $f^n|_{\mathbb{D}_r}$ は原点に $\mathbb{D}_r$ 上一様収束する．ゆえに, 原点は位相吸引的である．■

定義 1.2.2 原点を解析函数 f の固定点とする．原点が**位相反発的** (topologically repelling) とは, 原点のある近傍 U が存在して, U 内の任意の点 $z \neq 0$ に対してある自然数 n が存在して $f^n(z) \notin U$ が成り立つことをいう．



次の命題は [**Mi**] の Lemma 8.10 を参照した．

命題 1.2.2 原点を解析函数 f の固定点とする．λ を原点の乗法因子とする．このとき, 原点が位相反発的であることは $|\lambda| > 1$ と同値である．

証明 原点が位相反発的と仮定する．よって, 原点のある近傍 U が存在して, U 内の任意の点 $z \neq 0$ に対してある自然数 n が存在して $f^n(z) \notin U$ が成り立つ. 直前の命題 1.2.1 より, $|\lambda| < 1$ ではないから $\lambda \neq 0$．したがって, 十分小さい $r_0 > 0$ をとって $f : \overline{\mathbb{D}}_{r_0} \to f(\overline{\mathbb{D}}_{r_0})$ を同相写像にできる．

ここで, コンパクト集合の単調減少列 $\{K_n\}_{n=0}^{+\infty}$ を $K_0 = \overline{\mathbb{D}}_{r_0},\ K_1 = K_0 \cap f^{-1}(K_0),\ K_2 = K_0 \cap f^{-1}(K_0) \cap f^{-2}(K_0),\ \cdots,\ K_n = K_0 \cap f^{-1}(K_0) \cap f^{-2}(K_0) \cap \cdots \cap f^{-n}(K_0)$ のようにして構成する．原点以外の点 $z \in U$ に対しては, ある自然数 n が存在して $f^n(z) \notin U$ であるから, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n = \{0\}$ が成り立つ．以上より $\lim_{n\to+\infty} K_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n = \{0\}$ を得る．ここで, 極限は 2.1 節で説明するハウスドルフ距離の意味でとっている．よって, $f(K_n) = K_{n-1} \cap f(K_0)$ であることも考えると, 十分大きい n に対しては $f : K_n \to K_{n-1}$ が同相写像になることが分かる．

さて, そのような n を 1 つ固定して逆函数 $f^{-1} : K_n \to K_{n+1}$ を考える．十分小さい $r > 0$ をとって $\mathbb{D}_r \subset K_n$ とできる．$\lim_{N\to+\infty} K_{n+N} = \{0\}$

より, ある自然数 N が存在して $K_{n+N} \subset \mathbb{D}_r$ が成り立つ. したがって, $f^{-N}(\mathbb{D}_r) \subset f^{-N}(K_n) = K_{n+N} \subset \mathbb{D}_r$ を得る. ここで, f^{-N} は逆函数 f^{-1} を N 回反復合成した函数である. $f^{-N}(0) = 0$ であるから, シュワルツの補題より $|(f^{-N})'(0)| \leq 1$ が成り立つ. 実際には f^{-N} は非回転であるから $|(f^{-N})'(0)| < 1$ が成り立つ. したがって, $|\frac{1}{\lambda^N}| < 1$ であり $|\lambda| > 1$ を得る.

逆に, $|\lambda| > 1$ と仮定する. テイラーの定理より, 原点の近くで $f(z) = \lambda z + f_1(z)z^2$ とおける. $r_0 > 0$ を十分小さくして, $|f_1(z)|$ が $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ 上最大値 $M \neq 0$ をとったとする. ここで, $1 < c < |\lambda|$ なる c をとって固定する. さらに, $r < \frac{|\lambda|-c}{M}, r \leq r_0$ を満たすように十分小さい $r > 0$ をとる.

このとき, 任意の $z \in \mathbb{D}_r$ に対して, $|zf_1(z)| \leq |z|M < rM < \frac{|\lambda|-c}{M}M = |\lambda|-c$ であることに注意すれば, $|f(z)| = |\lambda z + f_1(z)z^2| = |z||\lambda + zf_1(z)| \geq |z|(|\lambda| - |zf_1(z)|) > c|z|$ と評価できる. したがって, $|f^n(z)| > c^n|z|$ が成り立つ. とくに, $\mathbb{D}_r$ 内の任意の点 $z \neq 0$ に対してある自然数 n が存在して $f^n(z) \notin \mathbb{D}_r$ が成り立つ. ゆえに, 原点は位相反発的である. ■

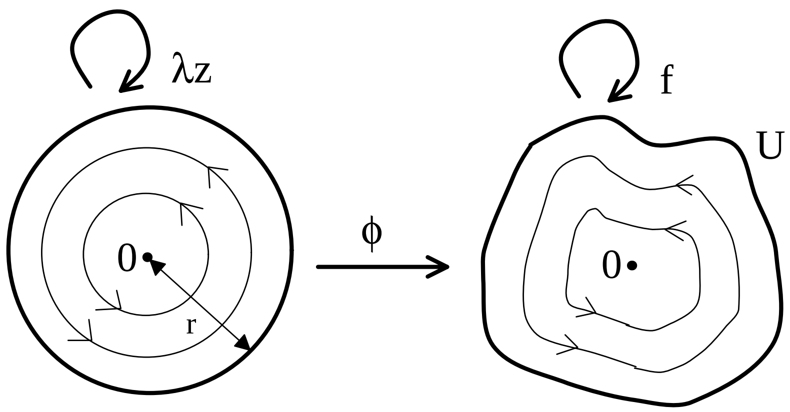
1.3 中立固定点の周りの力学系

この節では, 中立固定点の周りの力学系をみていく. その力学系をさらに分類するためには線形化の概念が必要である.

定義 1.3.1 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. f が**原点で位相的線形化可能** (topological linearizable at the origin) とは, 原点の近傍 U, 原点の近傍 $\mathbb{D}_r$, および同相写像 $\phi : \mathbb{D}_r \to U$ が存在して, $\phi(0) = 0$, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つときをいう. f が**原点で解析的線形化可能** (analytic linearizable at the origin) とは, 原点の近傍 U, 原点の近傍 $\mathbb{D}_r$, および等角同型 $\phi : \mathbb{D}_r \to U$ が存在して, $\phi(0) = 0$, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つときをいう. そのような単連結領域 $U \subsetneq \mathbb{C}$ のうち, 考えられうる最大なものを**線形化領域** (linearization domain) といい, Δ とかくことにする.

命題 1.3.1 原点を解析函数 f の中立固定点とする. このとき, f が原点で位相的線形化可能であることは f が原点で解析的線形化可能であることと同値である.

証明 f が原点で位相的線形化可能と仮定する. すると, 原点を含む有界なジョルダン領域 U で $f(U) = U$ を満たすものがとれる. リーマンの写



像定理から, 原点の近傍 $\mathbb{D}_r$ と $\phi(0) = 0$ を満たす等角同型 $\phi : \mathbb{D}_r \to U$ が存在する. このとき, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ にシュワルツの補題を適用すれば, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z\ (\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つことが分かる. ここで, λ は原点の乗法因子である. したがって, f は原点で解析的線形化可能である. なお, 逆は明らかである. ■

定義 1.3.2 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とかけるが, もし $t \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ であれば, 原点を**有理的中立固定点** (rationally indifferent fixed point) という.

定義 1.3.3 原点を解析函数 f の有理的中立固定点とする. f が**原点の近くで有限位数** (finite order near the origin) とは, ある自然数 m が存在して f^m が原点の近くで恒等函数になることをいう. f が原点の近くで有限位数でないとき, 原点を**放物固定点** (parabolic fixed point) という.

注意 1.3.1 放物固定点の周りの力学系についてはとくに何も述べないが, **ファトゥ座標** (Fatou coordinate) を使って記述される. 例えば, [**Mi**] の §10 を参照するとよい.

命題 1.3.2 原点を解析函数 f の有理的中立固定点とする. このとき, f が原点で解析的線形化可能であることと f が原点の近くで有限位数であることは同値である.

証明 λ を原点の乗法因子とする. まず, f が原点で解析的線形化可能と仮定する. このとき, 原点の近傍 U, 原点の近傍 $\mathbb{D}_r$, および等角同型 $\phi : \mathbb{D}_r \to U$ が存在して, $\phi(0) = 0$, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z\ (\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つ.

$\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ とかけるので, $\lambda^m = 1$ を満たす自然数 m がとれる. したがって, $\phi^{-1} \circ f^m \circ \phi(z) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)^m(z) = \lambda^m z = z$ となる. $w = \phi(z)$ とおくと, $f^m(w) = w$ $(\forall w \in U)$ が成り立つ. ゆえに, f は原点の近くで有限位数である.

逆に, f が原点の近くで有限位数と仮定する. したがって, ある自然数 m が存在して f^m が原点の近くで恒等函数になる. とくに, $\lambda^m = 1$ である. 形式的に $z = \psi(w) = \frac{1}{m}(w + \frac{f(w)}{\lambda} + \frac{f^2(w)}{\lambda^2} + \cdots + \frac{f^{m-1}(w)}{\lambda^{m-1}})$ とおく. $\psi(0) = 0$ および $\psi'(0) = 1$ より, 原点の近くで ψ の逆函数 ϕ が存在する. 十分小さい $r > 0$ と原点の近傍 U をとれば, $\phi : \mathbb{D}_r \to U$ は等角同型で $\phi(0) = 0$ が成り立つ. また, 計算により $\psi \circ f(w) = \lambda\psi(w)$ $(\forall w \in U)$ が分かるから, 結局, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つ. ゆえに, f は原点で解析的線形化可能である. ■

定義 1.3.4 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. $\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とかけるが, もし $t \in \frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ であれば, 原点を**無理的中立固定点** (irrationally indifferent fixed point) という.

定義 1.3.5 原点を解析函数 f の無理的中立固定点とする. f が原点で解析的線形化可能であるとき, 原点を**ジーゲル点** (Siegel point) といい, 線形化領域 Δ を**ジーゲル円板** (Siegel disk) という. f が原点で解析的線形化可能でないとき, 原点を**クレーマー点** (Cremer point) という.

第2章　重要な概念

この章では, 3つの重要な概念についてみていく. ハウスドルフ距離とカラテオドリ核収束と外射線についてである. ハウスドルフ距離とカラテオドリ核収束の概念は互いに密接に関係している.

2.1　ハウスドルフ距離

この節では,集合の間の距離であるハウスドルフ距離を定義してその性質をみていく. ハウスドルフ距離はとても有用であり, フラクタル幾何学の分野でよくみられる.

定義 2.1.1 (X, d) を距離空間とする. このとき, 次の集合を考える.

$$S(X) = \{A \subset X : A \neq \phi, \text{コンパクト}\}$$

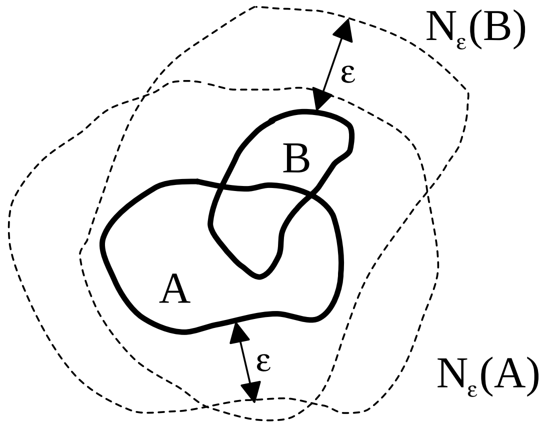
$\varepsilon > 0,\ A \in S(X)$ に対して, $N_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ を A **の** ε**-近傍** (ε-neighborhood of A) という. ここで, $d(x, A) = \min_{a \in A} d(x, a)$ とする. $A = \{a\}$ のときは, $N_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$ であるから, これを簡単に $N_\varepsilon(a)$ とかき a の ε-近傍という. $A, B \in S(X)$ の間の**ハウスドルフ距離** (Hausdorff distance) を次で定める.

$$d_{S(X)}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B), B \subset N_\varepsilon(A)\}$$

あとで示すように, ハウスドルフ距離 $d_{S(X)}$ は $S(X)$ 上の距離になる. また, $C(X) = \{A \subset X : A \neq \phi, \text{連続体}\}$ を $S(X)$ の部分空間とする.

注意 2.1.1 次の性質は簡単に確かめられる.

- $N_\varepsilon(A)$ は A の近傍である.　　$(\varepsilon > 0,\ A \in S(X))$
- $N_\varepsilon(A \cup B) = N_\varepsilon(A) \cup N_\varepsilon(B)$　　$(\varepsilon > 0,\ A, B \in S(X))$



- $A \subset B \Longrightarrow N_\varepsilon(A) \subset N_\varepsilon(B) \qquad (\varepsilon > 0,\ \ A, B \in S(X))$
- $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Longrightarrow N_{\varepsilon_1}(A) \subset N_{\varepsilon_2}(A) \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,\ \ A \in S(X))$

命題 2.1.1 $d_{S(X)}$ は有限値をとり, さらに次の距離の公理を満たす.

- $d_{S(X)}(A, B) \geq 0 \qquad (A, B \in S(X))$
- $d_{S(X)}(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B \qquad (A, B \in S(X))$
- $d_{S(X)}(A, B) = d_{S(X)}(B, A) \qquad (A, B \in S(X))$
- $d_{S(X)}(A, C) \leq d_{S(X)}(A, B) + d_{S(X)}(B, C) \qquad (A, B, C \in S(X))$

証明 $A, B \in S(X)$ に対して, 集合 $\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B), B \subset N_\varepsilon(A)\}$ は空でない. 例えば, $\varepsilon = \max_{a \in A, b \in B} d(a, b) + 1$ はその集合に属す. したがって, $d_{S(X)}$ は有限値をとる.

次に, $d_{S(X)}$ が距離の公理を満たすことを示す. 1 番目と 3 番目は定義より明らかであるから, 残りの 2 番目と 4 番目を示す.

まず, $d_{S(X)}(A, B) = 0$ と仮定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A \subset N_\varepsilon(B)$ および $B \subset N_\varepsilon(A)$ が成り立つ. したがって, $A \subset B$ および $B \subset A$ が成り立つ. ゆえに $A = B$ である. 逆に, $A = B$ と仮定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A = B \subset N_\varepsilon(B)$ および $B = A \subset N_\varepsilon(A)$ が成り立つ. ゆえに $d_{S(X)}(A, B) = 0$ である. これで 2 番目が示せた.

4 番目を示すために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d_{S(X)}(A, C) < d_{S(X)}(A, B) + d_{S(X)}(B, C) + \varepsilon$ が成り立つことをいう. まず, $\varepsilon > 0$ を固定する. このとき, $d_{S(X)}(A, B) < d_{S(X)}(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}$ だから, 正数 $\varepsilon_1 < d_{S(X)}(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}$ が存

在して $A \subset N_{\varepsilon_1}(B)$ および $B \subset N_{\varepsilon_1}(A)$ が成り立つ．また, $d_{S(X)}(B,C) < d_{S(X)}(B,C)+\frac{\varepsilon}{2}$ だから, 正数 $\varepsilon_2 < d_{S(X)}(B,C)+\frac{\varepsilon}{2}$ が存在して $B \subset N_{\varepsilon_2}(C)$ および $C \subset N_{\varepsilon_2}(B)$ が成り立つ．これらのことから, $A \subset N_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(C)$ および $C \subset N_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ を得る．したがって, $d_{S(X)}(A,C) \le \varepsilon_1+\varepsilon_2 < d_{S(X)}(A,B)+d_{S(X)}(B,C)+\varepsilon$ が成り立つ. ■

命題 2.1.2 $A_n, A, B_n, B \in S(X)$ のとき次が成り立つ.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A,\ \lim_{n\to+\infty} B_n = B \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n \cup B_n = A \cup B$$

証明 仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して, すべての $n \ge N$ に対して $d_{S(X)}(A_n, A) < \varepsilon$, $d_{S(X)}(B_n, B) < \varepsilon$ が成り立つ. よって, $A \subset N_\varepsilon(A_n), A_n \subset N_\varepsilon(A), B \subset N_\varepsilon(B_n), B_n \subset N_\varepsilon(B)$ である．それゆえ, $A \cup B \subset N_\varepsilon(A_n) \cup N_\varepsilon(B_n) = N_\varepsilon(A_n \cup B_n)$, および $A_n \cup B_n \subset N_\varepsilon(A) \cup N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon(A \cup B)$ を得る．したがって, $d_{S(X)}(A_n \cup B_n, A \cup B) \le \varepsilon$ が成り立つ. ■

命題 2.1.3 $p \in \mathbb{N}$ を固定する. $A_n, A \in S(X)$ のとき次が成り立つ.

$$A_n\text{の成分の個数} \le p,\ \lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow A\text{ の成分の個数} \le p$$

証明 背理法で示す. A の成分が $p+1$ 個以上存在したと仮定する．とくに A は不連結だから, A の空でない 2 個の閉集合 A^1, A^2 で $A^1 \cap A^2 = \phi, A^1 \cup A^2 = A$ を満たすものが存在する．A^1, A^2 ともに連結ならば A の成分は 2 個である．そうでないときは, A^1, A^2 のいずれかは不連結だから, 結局, A の空でない 3 個の閉集合 A^1, A^2, A^3 で $A^i \cap A^j = \phi\ (i \ne j), A^1 \cup A^2 \cup A^3 = A$ を満たすものが存在する．A の成分は $p+1$ 個以上であるから繰り返して,結局, A の空でない $p+1$ 個の閉集合 $A^1, A^2, \cdots, A^{p+1}$ で $A^i \cap A^j = \phi\ (i \ne j), A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^{p+1} = A$ を満たすものが存在する.

さて, A はコンパクトだから $A^1, A^2, \cdots, A^{p+1}$ もコンパクトである．いま $\varepsilon = \frac{1}{3}\min_{i\ne j} d(A^i, A^j)$ とおく．ここで, $d(A^i, A^j) = \min_{a_i \in A^i, a_j \in A^j} d(a_i, a_j)$ とする．このとき, $\varepsilon > 0$ で $N_\varepsilon(A^i) \cap N_\varepsilon(A^j) = \phi\ (i \ne j)$ が成り立つ.

一方, 仮定より十分大きい N をとれば $d_{S(X)}(A_N, A) < \varepsilon$ とできる．したがって, $A_N \subset N_\varepsilon(A) = N_\varepsilon(A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^{p+1}) = N_\varepsilon(A^1) \cup N_\varepsilon(A^2) \cup \cdots \cup N_\varepsilon(A^{p+1})$ となる．各 $A^i \subset A \subset N_\varepsilon(A_N)$ だから $A_N \cap N_\varepsilon(A^i) \ne \phi$ である．以上のことから, A_N の成分は $p+1$ 個以上存在することが分かる. これは仮定に反する. ■

系 2.1.1 $C(X) \subset S(X)$ は閉集合である.

証明 $A_n \in C(X), \lim_{n\to+\infty} A_n = A \in S(X)$ と仮定する. 各 A_n の成分は 1 個であるから, 直前の命題2.1.3 より A の成分も 1 個である. したがって, $A \in C(X)$ である. ■

命題 2.1.4 $p \in \mathbb{N}$ を固定する. $A_n, A \in S(X)$ のとき次が成り立つ.

$$A_n の元の個数 \leq p,\ \lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow A の元の個数 \leq p$$

証明 背理法で示す. A の元が $p+1$ 個以上存在したと仮定する. 相異なる $p+1$ 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_{p+1} \in A$ をとる. $\varepsilon = \min_{i\neq j} d(a_i, a_j)$ とおく. $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ より, 十分大きい N をとれば $d_{S(X)}(A_N, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる. したがって, $\{a_1, a_2, \cdots, a_{p+1}\} \subset A \subset N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_N)$ となる. A_N の元の個数は高々p 個であったから, $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_N)$ は直径ε の開円板の高々p 個の和に含まれる. それゆえ, $\{a_1, a_2, \cdots, a_{p+1}\}$ も直径ε の開円板の高々p 個の和に含まれる. これは直径ε の開円板が a_i を高々1 個しか含めないことに反する. ■

定義 2.1.2 (X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とする. このとき, 次のような函数空間を考える.

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y : 連続函数\}$$

X はコンパクトだから, 任意の $f \in C(X, Y)$ は X 上一様連続である. $C(X, Y)$ 上の距離を次で定めておく.

$$d_{C(X,Y)}(f_1, f_2) = \max_{x\in X} d_Y(f_1(x), f_2(x))$$

次の 3 つの命題は [**PM**] の III.1 節を参照した.

命題 2.1.5 $A_n, A \in S(X),\ f \in C(X, Y)$ のとき次が成り立つ.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(A_n) = f(A)$$

証明 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. f の一様連続性より $\delta > 0$ が存在して

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \qquad (*)$$

が成り立つ. この $\delta > 0$ に対して, $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ よりある自然数 N が存在して, すべての $n \geq N$ に対して $d_{S(X)}(A_n, A) < \delta$ が成り立つ. このとき, $A_n \subset N_\delta(A)$, $A \subset N_\delta(A_n)$ であるから, $(*)$ より $f(A_n) \subset N_\varepsilon(f(A))$, $f(A) \subset N_\varepsilon(f(A_n))$ を得る. ゆえに, $d_{S(Y)}(f(A_n), f(A)) \leq \varepsilon$ が成り立つ. ■

命題 2.1.6 $M>1$ を任意定数として次が成り立つ.

$$d_{S(Y)}(f_1(A), f_2(A)) \leq M d_{C(X,Y)}(f_1, f_2) \qquad (A \in S(X),\ f_1, f_2 \in C(X,Y))$$

証明 任意の $f_1(a) \in f_1(A)$ に対して, $d_Y(f_1(a), f_2(A)) \leq d_Y(f_1(a), f_2(a)) \leq d_{C(X,Y)}(f_1, f_2) < M d_{C(X,Y)}(f_1, f_2)$ である. 同様に, 任意の $f_2(a) \in f_2(A)$ に対して, $d_Y(f_2(a), f_1(A)) < M d_{C(X,Y)}(f_1, f_2)$ である. したがって,

$$f_1(A) \subset N_{M d_{C(X,Y)}(f_1,f_2)}(f_2(A)),\ f_2(A) \subset N_{M d_{C(X,Y)}(f_1,f_2)}(f_1(A))$$

を得る. ゆえに, $d_{S(Y)}(f_1(A), f_2(A)) \leq M d_{C(X,Y)}(f_1, f_2)$ が成り立つ. ■

命題 2.1.7 $A_n, A \in S(X),\ \ f_n, f \in C(X,Y)$ のとき次が成り立つ.

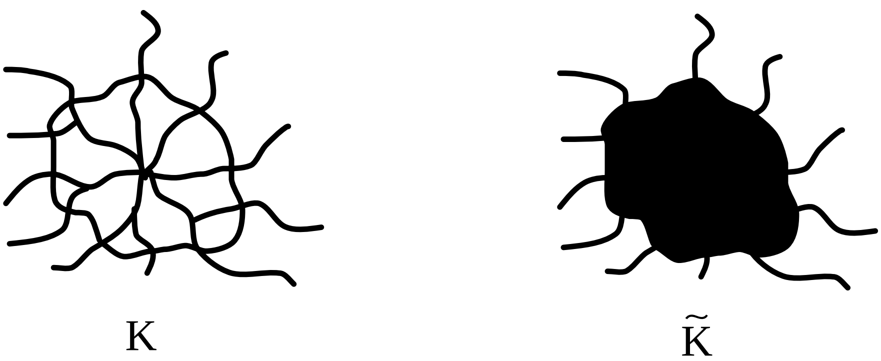
$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A, \lim_{n\to+\infty} f_n = f \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(A_n) = f(A)$$

証明 定数 $M>1$ を固定する. 三角不等式と直前の命題 2.1.6 より次の不等式が成り立つ.

$$d_{S(Y)}(f_n(A_n), f(A)) \leq M d_{C(X,Y)}(f_n, f) + d_{S(Y)}(f(A_n), f(A))$$

ここで, 仮定と命題 2.1.5 より n を十分大きくとれば右辺はいくらでも小さくできる. ゆえに, $\lim_{n\to+\infty} f_n(A_n) = f(A)$ が成り立つ. ■

定義 2.1.3 コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ が**充填している** (full) とは, 補集合 $\mathbb{C} - K$ が連結であるときをいう. コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対して, $\widetilde{K} = K \cup \bigcup_{C:\ \mathbb{C}-K\ \text{の有界成分}} C$ を K **の充填集合** (filled set of K) という.



注意 2.1.2 次の性質は簡単に確かめられる.

- コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対して, その充填集合 $\widetilde{K}$ は $\mathbb{C} - (\mathbb{C} - K$ の非有界成分$)$ に等しい.
- コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$が充填していることは $K = \widetilde{K}$ と同値である.
- コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対して, その充填集合 $\widetilde{K}$ はコンパクトであり充填している.
- 連続体 $K \subset \mathbb{C}$ に対して, その充填集合 $\widetilde{K}$ は連続体であり充填している.

2.2 カラテオドリ核収束

この節では, 領域列の収束であるカラテオドリ核収束を定義してその基本的性質をみていく. カラテオドリ核収束の定義からカラテオドリの核定理までを述べるにあたって [**Po**] を参照した.

定義 2.2.1 $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ を固定する. $\Omega_n, \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を w_0 を含む領域とする. Ω_n **が** w_0 **に関して** Ω **に収束する** (Ω_n converges to Ω with w_0) とは, 次の 2 つの条件が成り立つことである.

- 任意の $w \in \Omega$ に対して, w の近傍 U と自然数 N が存在して, すべての $n \geq N$ に対して $U \subset \Omega_n$ が成り立つ.
- 任意の $w \in \partial\Omega$ に対して, $w_n \in \partial\Omega_n$ が存在して, $\lim_{n\to+\infty} w_n = w$ が成り立つ.

この収束を**カラテオドリ核収束** (Carathéodory kernel convergence) といい, $\ker_{w_0} \lim_{n\to+\infty} \Omega_n = \Omega$ とかくことにする.

注意 2.2.1 カラテオドリ核収束の収束先は領域列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{+\infty}$ だけで決まるものではなく, はじめに固定された点 $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ のとりかたにも依存する. 例えば, $\Omega_n = \mathbb{C} - ((-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, +\infty))$ を考えると, $\ker_i \lim_{n\to+\infty} \Omega_n$ は上半平面であるが, $\ker_{-i} \lim_{n\to+\infty} \Omega_n$ は下半平面となる.

次の命題は, 領域列のみならず固定された点 $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ まで込めて決めてやれば収束先が 1 つに決まるということを主張している.

命題 2.2.1 $\Omega_n, \Omega, \Omega' \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を w_0 を含む領域とするとき次が成り立つ.

$$\ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega,\ \ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega' \Longrightarrow \Omega = \Omega'$$

証明　背理法で示す. $\Omega \neq \Omega'$ と仮定すると, $\Omega\cap\partial\Omega'$ または $\Omega'\cap\partial\Omega$ の点 w がとれる. 同じ議論が適用できるので, $\Omega\cap\partial\Omega'$ の点 w がとれたとして証明を進める. $\ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega$ より, w の近傍 U と自然数 N が存在して, すべての $n \geq N$ に対して $U \subset \Omega_n$ が成り立つ. $\ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega'$ より, $w_n \in \partial\Omega_n$ が存在して, $\lim_{n\to+\infty} w_n = w$ が成り立つ. したがって, 十分大きい $n \geq N$ に対しては $w_n \in U \subset \Omega_n$ となる. これは $w_n \in \partial\Omega_n$ であったことに反する. ■

次の定理は非常に重要な定理で**カラテオドリの核定理** (Carathéodory's kernel theorem) という. 証明は例えば, [**Po**] の Theorem 1.8 を参照するとよい.

定理 2.2.1

$$f_n : \mathbb{D} \to \Omega_n : 等角同型,\ f_n(0) = w_0 \in \Omega_n,\ f_n'(0) > 0$$

$$f : \mathbb{D} \to \Omega : 等角同型,\ f(0) = w_0 \in \Omega,\ f'(0) > 0$$

とするとき, 次の 2 つは同値である.

- f_n は f に $\mathbb{D}$ 上広義一様収束する.
- $\ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega$

ここで, ハウスドルフ距離による収束の性質に対応するカラテオドリ核収束の性質や, その間の関連性について述べておく. 例えば, 次の命題は補集合を考えることによって, 系 2.1.1 に対応していることが分かる.

命題 2.2.2 $\Omega_n, \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を w_0 を含む領域とするとき次が成り立つ.

$$\Omega_n : 単連結,\ \ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega \Longrightarrow \Omega : 単連結$$

証明　背理法で示す. Ω が単連結でないと仮定すると, Ω 内のジョルダン閉曲線 γ が存在して, $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ のある 2 つの成分 K_1 と K_2 を分離する. $\ker_{w_0}\lim_{n\to+\infty}\Omega_n = \Omega$ より, 各点 $w \in \gamma \subset \Omega$ に対して, w の近傍 U_w と

自然数 N_w が存在して, すべての $n \geq N_w$ に対して $U_w \subset \Omega_n$ が成り立つ. γ はコンパクトであるから, 有限個の $w_1, w_2, \cdots, w_k \in \gamma$ が存在して, $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{w_i}$ が成り立つ. ここで $N = \max_{1 \leq i \leq k} N_{w_i}$ とおくと, すべての $n \geq N$, $1 \leq i \leq k$ に対して $U_{w_i} \subset \Omega_n$ が成り立つ. したがって, すべての $n \geq N$ に対して $\gamma \subset \Omega_n$ が成り立つ.

一方, $x \in \partial K_1, y \in \partial K_2$ を任意にとる. このとき, $x, y \in \partial\Omega$ であるから, $\ker_{w_0} \lim_{n\to+\infty} \Omega_n = \Omega$ より $x_n, y_n \in \partial\Omega_n$ が存在して, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \lim_{n\to+\infty} y_n = y$ が成り立つ. 十分大きい n に対して, x_n は $\widehat{\mathbb{C}} - \gamma$ の K_1 を含む成分, y_n は $\widehat{\mathbb{C}} - \gamma$ の K_2 を含む成分に属すとしてよい. すると $x_n \in \partial\Omega_n$ であるから, $\widehat{\mathbb{C}} - \gamma$ の K_1 を含む成分内から $x'_n \notin \Omega_n$ がとれる. 同様に $y_n \in \partial\Omega_n$ であるから, $\widehat{\mathbb{C}} - \gamma$ の K_2 を含む成分内から $y'_n \notin \Omega_n$ がとれる. このとき γ は $x'_n \notin \Omega_n$ と $y'_n \notin \Omega_n$ を分離している. 十分大きい n に対して $\gamma \subset \Omega_n$ であったから, そのような Ω_n は単連結でない. これは仮定に反する. ■

系 2.2.1 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{+\infty}$ を w_0 を含む単連結領域の単調増大列とする. このとき, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ も w_0 を含む単連結領域になる.

証明 $\ker_{w_0} \lim_{n\to+\infty} \Omega_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ が成り立つことは定義 2.2.1 の条件をチェックすればよい. あとは直前の命題 2.2.2 を適用する. ■

命題 2.2.3 $K_n, K \in S(\widehat{\mathbb{C}})$ は w_0 を含まないとする. Ω_n を $\widehat{\mathbb{C}} - K_n$ の w_0 を含む成分, Ω を $\widehat{\mathbb{C}} - K$ の w_0 を含む成分とするとき次が成り立つ.

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = K \Longrightarrow \ker_{w_0} \lim_{n\to+\infty} \Omega_n = \Omega$$

証明 まず, 定義 2.2.1 の 1 番目の条件をチェックする. 任意に $w \in \Omega$ をとる. そして, w と w_0 を結ぶ Ω 内の曲線 γ をとる. $\gamma \cap K = \phi$ より, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\gamma \cap N_{2\varepsilon}(K) = \phi$ が成り立つ. $\lim_{n\to+\infty} K_n = K$ より, ある自然数 N が存在してすべての $n \geq N$ に対して $K_n \subset N_\varepsilon(K)$ が成り立つ. したがって, $N_\varepsilon(w) \cap K_n = \phi$ および $\gamma \cap K_n = \phi$ を得る. ここで, $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}} - K_n$ であったから, w と w_0 は $\widehat{\mathbb{C}} - K_n$ の同じ成分に属す. ゆえに, $N_\varepsilon(w) \subset \Omega_n$ となる.

次に, 定義 2.2.1 の 2 番目の条件をチェックする. 任意の $w \in \partial\Omega$ に対して, $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(w, \partial\Omega_n) = d_{\widehat{\mathbb{C}}}(w, w_n)$ なる $w_n \in \partial\Omega_n$ をとる. このとき, $\lim_{n\to+\infty} w_n = w$ が成り立つことを背理法で示す.

もし, $\lim_{n\to+\infty} w_n = w$ が成り立たないと仮定すると, $\varepsilon > 0$ および $n_1 < n_2 < \cdots < n_j \cdots$ が存在して, $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(w_{n_j}, w) \geq \varepsilon$ $(\forall j \in \mathbb{N})$ が成り立

つ．$w \in \partial\Omega$ より $z \in \Omega$ を $N_\varepsilon(w)$ 内からとる．カラテオドリ核収束の定義 2.2.1 の 1 番目の条件はすでに示したので，ある自然数 J が存在してすべての $j \geq J$ に対して $z \in \Omega_{n_j}$ が成り立つ．$N_\varepsilon(w)$ 内に $\partial\Omega_{n_j}$ の点はないので $N_\varepsilon(w) \subset \Omega_{n_j}$ となり，とくに $N_\varepsilon(w) \cap K_{n_j} = \phi$ $(\forall j \geq J)$ である．ところが，$\lim_{j\to+\infty} K_{n_j} = K$ であったから，十分大きい j に対して $K \subset N_\varepsilon(K_{n_j})$ が成り立つ．ゆえに，$w \in \partial\Omega \subset K$ より $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(w, K_{n_j}) < \varepsilon$ となる．これは $N_\varepsilon(w) \cap K_{n_j} = \phi$ に反する．■

2.3　外射線

この節では，外射線とそれに関連する概念についてまとめておく．ある集合上の力学系を調べるときに，リーマン写像を介してその集合の外の力学系から得られる情報が役に立つ．多項式のジュリア集合を調べるときにそのような手法がよく用いられる．例えば，[**Mi**] の §18 を参照するとよい．以下では，函数論の古典的定理と組み合わせて得られる 2 つの興味深い定理を紹介する．これらの定理を述べるにあたって [**Mc**] の Chapter 6 を参照した．

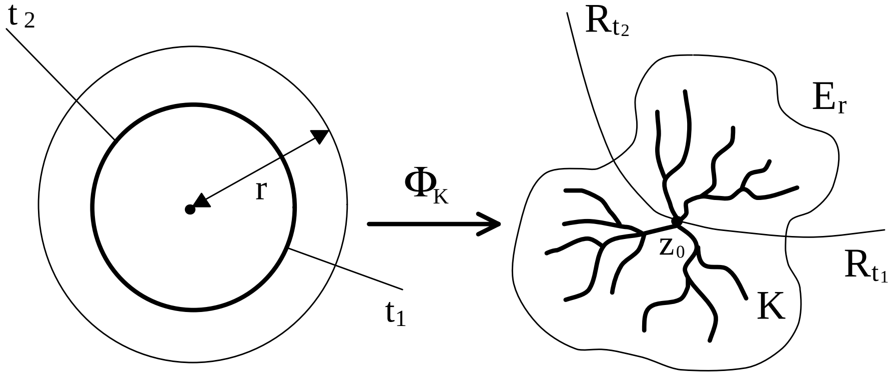
定義 2.3.1 $K \subset \mathbb{C}$ を非退化連続体とする．$z_0 \in \partial K$ が K の外から**到達可能** (accessible) とは，$z_0 \in \partial K$ が $\mathbb{C} - K$ 内のある曲線によって到達できるとき，すなわち，ある連続写像 $\gamma : [0,1) \to \mathbb{C} - K$ が存在して，$\lim_{s\nearrow 1} \gamma(s) = z_0$ が成り立つときをいう． $z_0 \in \partial K$ が K の**切点** (cut point) とは $K - \{z_0\}$ が不連結になるときをいう．

定義 2.3.2 $K \subset \mathbb{C}$ を充填した非退化連続体とする．$\Phi_K : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - K$ を $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} > 0$ を満たす等角同型とする．このとき，**角** (angle) $t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ に対して，**外射線** (external ray) を $R_t = \{\Phi_K(re^{2\pi it}) : r > 1\}$ で定める．極限 $\lim_{r\searrow 1} \Phi_K(re^{2\pi it}) = z_0 \in \partial K$ が存在するとき，R_t **は** z_0 **に到達する** (R_t lands at z_0) という．さらに，z_0 を R_t の**到達点** (landing point) という．また，**半径** (radius) $r > 1$ に対して，**等ポテンシャル曲線** (equipotential curve) を $E_r = \{\Phi_K(re^{2\pi it}) : t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\}$ で定める．

定理 2.3.1 $K \subset \mathbb{C}$ を充填した非退化連続体とする．$\Phi_K : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - K$ を $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} > 0$ を満たす等角同型とする．このとき，$z_0 \in \partial K$ が K の外から到達可能であることは，ある角 $t_0 \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ が存在して， R_{t_0} が z_0 に到達することと同値である．

定義 2.3.3 $K \subset \mathbb{C}$を充填した非退化連続体とする. $\Phi_K : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - K$ を $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} > 0$ を満たす等角同型とする．このとき, $z_0 \in \partial K$ が K の外から**両到達可能** (biaccessible) とは, 相異なる 2 つの角 $t_1, t_2 \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ が存在して, R_{t_1} と R_{t_2} が z_0 に到達するときをいう.

定理 2.3.2 $K \subset \mathbb{C}$を充填した非退化連続体とする. $\Phi_K : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - K$ を $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} > 0$ を満たす等角同型とする．このとき, $z_0 \in \partial K$ が K の外から両到達可能であることは, $z_0 \in \partial K$ が K の切点であることと同値である.



第3章　論文[PM]の解説

3.1　本章の目的とそのための準備

本章の目的は [**PM**] の主結果と簡単な応用について解説することである．そのためにはこれまでにでてきた概念を利用する必要があるが, それだけでは十分ではない．この節では, [**Mi**] の §15 を参照して, 向きを保つ円周同相写像の力学系についてまとめておく．詳細は例えば, [**MS**] や [**KH**] を参照するとよい.

定義 3.1.1 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を向きを保つ円周同相写像とする．これを $g : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とみて, 持ち上げ $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $G(t+1) = G(t) + 1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ を満たすものだけを考える．そのような持ち上げ G は整数の加減法を除いて一意的に決まる．G の**並進数** (translation number) を $\mathrm{Tra}(G) = \lim_{n\to+\infty} \frac{G^n(t)}{n}$ で定める．ここで, G の並進数 $\mathrm{Tra}(G)$ は t のとり方によらない．さらに, g の**回転数** (rotation number) を $\mathrm{Rot}(g) = \mathrm{Tra}(G) \pmod{\mathbb{Z}}$ で定める．ここで, g の回転数 $\mathrm{Rot}(g)$ は持ち上げ G のとり方によらない.

注意 3.1.1 回転数は次のような性質を持つ.

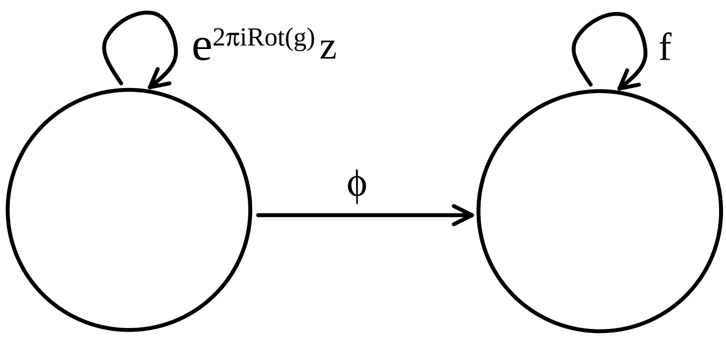
- 回転数は1点の軌道の順序で決まる．すなわち, 向きを保つ円周同相写像 g_1, g_2 と $\mathbb{S}^1$ 上の点 z_1, z_2 に対して, 軌道 $\{g_1^n(z_1)\}_{n\geq 0}, \{g_2^n(z_2)\}_{n\geq 0}$ の順序が同じとき, $\mathrm{Rot}(g_1) = \mathrm{Rot}(g_2)$ が成り立つ.

- 回転数は位相共役で不変である. すなわち, 向きを保つ円周同相写像 g_1, g_2 に対して, 向きを保つ円周同相写像 $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が存在して, $g_2(z) = \phi^{-1} \circ g_1 \circ \phi(z)$ $(\forall z \in \mathbb{S}^1)$ を満たすとき, $\mathrm{Rot}(g_1) = \mathrm{Rot}(g_2)$ が成り立つ.

- 回転数は連続である. すなわち, g_n, g が向きを保つ円周同相写像で g_n が g に $\mathbb{S}^1$ 上一様収束するとき, $\mathrm{Rot}(g_n)$ は $\mathrm{Rot}(g)$ に収束する.

- g を向きを保つ円周同相写像とする．このとき, g が周期点を持たないことは $\mathrm{Rot}(g) \in \frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ と同値である．いいかえれば, g が周期点を持つことは $\mathrm{Rot}(g) \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ と同値である．とくに, g が固定点を持つことは $\mathrm{Rot}(g) \in \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$ と同値である.

定義 3.1.2 向きを保つ円周同相写像 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が**位相的線形化可能** (topological linearizable) とは, 向きを保つ円周同相写像 $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が存在して, $\phi^{-1} \circ g \circ \phi(z) = e^{2\pi i \mathrm{Rot}(g)} z$ $(\forall z \in \mathbb{S}^1)$ が成り立つときをいう．向きを保つ円周同相写像 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が $\mathbb{S}^1$ のある近傍上の単葉函数に拡張できるとき, 向きを保つ**解析的円周微分同相写像** (analytic circle diffeomorphism) という．向きを保つ解析的円周微分同相写像 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が**解析的線形化可能** (analytic linearizable) とは, 向きを保つ解析的円周微分同相写像 $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ が存在して, $\phi^{-1} \circ g \circ \phi(z) = e^{2\pi i \mathrm{Rot}(g)} z$ $(\forall z \in \mathbb{S}^1)$ が成り立つときをいう.



ダンジョワの定理 (Denjoy' theorem) から次が成り立つ.

定理 3.1.1 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を向きを保つ解析的円周微分同相写像とする．もし, $\mathrm{Rot}(g) \in \frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ならば, g は位相的線形化可能である.

ここで, 数論でよく見かけるディオファントス数を定義し, そのあとで 2 つの有名な定理を述べる.

定義 3.1.3 ξ が**ディオファントス数** (Diophantine number) とは, ある $\varepsilon > 0$ と自然数 N が存在して, $|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{\varepsilon}{q^N}$ $(\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q})$ が成り立つときをいう．ディオファントス数全体からなる集合を $\mathcal{D}$ とかくことにする．定義から $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ である．また, その補集合 $\mathbb{R} - \mathcal{D}$ は零集合である. [**Mi**] の Lemma 11.7 も参照するとよい.

次の定理は**エルマン** (Herman) や**ヨコツ** (Yoccoz) による.

定理 3.1.2 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を向きを保つ解析的円周微分同相写像とする．もし, $\mathrm{Rot}(g) \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ ならば, g は解析的線形化可能である.

ジーゲルの定理 (Siegel's theorem) から次が成り立つ．証明は例えば, [**CG**] の Theorem 6.4 を参照するとよい.

定理 3.1.3 原点を解析函数 f の無理的中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする． $\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ とかけるが, もし $t \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ であれば, f は原点で解析的線形化可能である.

次の補題はとても大切で, あとで何度も使う. 補題の内容と証明が同時に述べてある. [**PM**] の Lemma II.1.1 を参照した.

補題 3.1.1 $U \subset \mathbb{C}$ を有界なジョルダン領域, $V \subset \mathbb{C}$ を $\overline{U}$ の近傍とする. $K_n, K \subset \overline{U}$ は非退化連続体で $\lim_{n\to+\infty} K_n = K$ が成り立つとする. f_n は V で単葉であり $f_n(K_n) = K_n$ を満たすとする. さらに, f_n は f に V 上広義一様収束しているとする．ワイエルシュトラスの定理より, f は V で解析的である．また, $f_n, f \in C(\overline{U}, \mathbb{C})$ とみて $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ が成り立つので, 命題 2.1.7 より $f(K) = \lim_{n\to+\infty} f_n(K_n) = \lim_{n\to+\infty} K_n = K$ となる. $f(K) = K$ で K は一点ではないから f は定数でない. よって, フルヴィッツの定理より f は V で単葉となる.

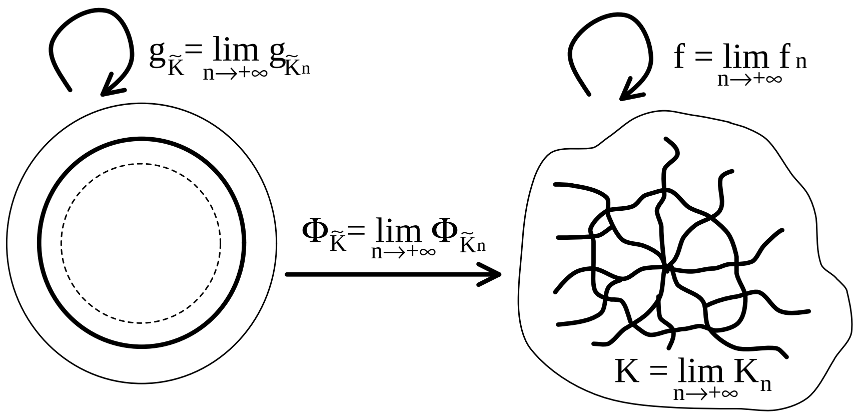
$$\Phi_{\widetilde{K}_n} : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - \widetilde{K}_n : \text{等角同型}, \ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{\widetilde{K}_n}(z)}{z} > 0$$
$$\Phi_{\widetilde{K}} : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - \widetilde{K} : \text{等角同型}, \ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{\widetilde{K}}(z)}{z} > 0$$
$$\Phi_{\overline{U}} : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - \overline{U} : \text{等角同型}, \ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{\overline{U}}(z)}{z} > 0$$

を考える. $V - \overline{U}$ は $\Phi_{\overline{U}}$ によって $\overline{\mathbb{D}}$ の外部近傍に引き戻される． このとき, 十分小さい $r > 1$ を $\mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}}$ がその外部近傍に含まれるようにとる． $V - \widetilde{K}_n, V - \widetilde{K} \supset V - \overline{U}$ に注意すれば, シュワルツの補題より $\Phi_{\widetilde{K}_n}^{-1}(V - \widetilde{K}_n), \Phi_{\widetilde{K}}^{-1}(V - \widetilde{K}) \supset \mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}}$ が分かる．また, f_n, f が V 上単葉であることと, $f_n(\widetilde{K}_n) = \widetilde{K}_n, f(\widetilde{K}) = \widetilde{K}$ であることに注意すると, $g_{\widetilde{K}_n} = \Phi_{\widetilde{K}_n}^{-1} \circ f_n \circ \Phi_{\widetilde{K}_n}, g_{\widetilde{K}} = \Phi_{\widetilde{K}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}}$ で単葉である. さらに, $|z| \searrow 1$ のとき, $|g_{\widetilde{K}_n}(z)| \searrow 1$, $|g_{\widetilde{K}}(z)| \searrow 1$ であるからシュワルツの鏡像原理よ

り, $g_{\widetilde{K}_n}, g_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{A}_r$ で単葉となり， $g_{\widetilde{K}_n}(\mathbb{S}^1)=\mathbb{S}^1, g_{\widetilde{K}}(\mathbb{S}^1)=\mathbb{S}^1$ を満たす．すなわち, $g_{\widetilde{K}_n}, g_{\widetilde{K}}$ は向きを保つ解析的円周微分同相写像である．

$\Omega_n=\widehat{\mathbb{C}}-\widetilde{K}_n, \Omega=\widehat{\mathbb{C}}-\widetilde{K}$ とおく．Ω_n は $\widehat{\mathbb{C}}-K_n$ の ∞ を含む成分, Ω は $\widehat{\mathbb{C}}-K$ の ∞ を含む成分であることに注意すると, $\lim_{n\to+\infty}K_n=K$ であったから, 命題 2.2.3 より $\ker_\infty \lim_{n\to+\infty}\Omega_n=\Omega$ が成り立つ．さらに, 定理 2.2.1 より $\Phi_{\widetilde{K}_n}$ は $\Phi_{\widetilde{K}}$ に $\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}$ 上広義一様収束する．

ここで, $1<r'<r$ なる r' をとって固定する．すると, $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\partial\mathbb{D}_{r'}$ 上一様収束する．したがって, $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\partial\mathbb{D}_{\frac{1}{r'}}$ 上でも一様収束する．ゆえに, $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\partial\mathbb{A}_{r'}$ 上一様収束し, 最大値原理より $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\mathbb{A}_{r'}$ 上一様収束する．とくに, $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\mathbb{S}^1$ 上一様収束するので, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}_n})=\mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}})$ が成り立つ．



3.2 主結果とその証明

この節では, [**PM**] の主結果を述べ, 前節で述べたことを踏まえて証明していく．まず, 特別なクラスに関して興味深い定理を証明する．そのあとで [**PM**] の主結果を証明する．それぞれ [**PM**] の Theorem II.3.1 と Theorem 1 を参照した．

定理 3.2.1 原点を解析函数 f の無理的中立固定点とする．λ を原点の乗法因子とする．$U\subset\mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V\subset\mathbb{C}$ で単葉とする．$\lambda=e^{2\pi it}$, $t\in\frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ とかけるが, もし, $t\in\frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ であれば, ジーゲル円板 Δ はジョルダン閉曲線 ∂U と交わる．

証明　背理法で示す. $\Delta \cap \partial U = \phi$ と仮定する. したがって, $\Delta \subset U$, ゆえに, $\overline{\Delta} \subset \overline{U} \subset V$ である. 不変閉円板 $K_n \subset \Delta$ を, $K_n \subset \mathrm{Int} K_{n+1}$, $\Delta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ が成り立つようにとる. $K = \overline{\Delta}$ とすれば, $\lim_{n\to+\infty} K_n = K$ が成り立つ. ここで, 補題 3.1.1 を適用する. 十分小さい $r > 0$ をとって解析的円周微分同相写像 $g_{\widetilde{K}_n}$, $g_{\widetilde{K}}$ が $\mathbb{A}_r$ で単葉にできる. $g_{\widetilde{K}_n}$ は $g_{\widetilde{K}}$ に $\mathbb{S}^1$ 上一様収束するので $\mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}_n}) = \lim_{n\to+\infty} t = t \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ が成り立つ. よって, 定理 3.1.2 より $g_{\widetilde{K}}$ は解析的線形化可能である. したがって, 次の性質を満たすジョルダン領域 W がとれる.

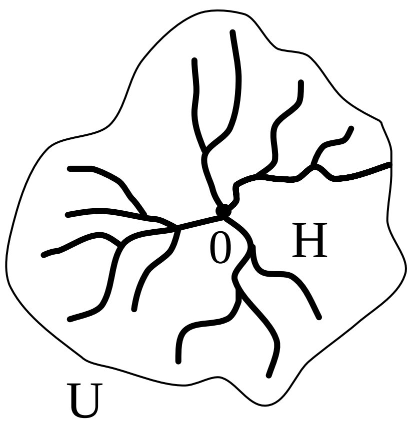
$$\overline{\mathbb{D}} \subset W \subset \mathbb{D}_r,\ g_{\widetilde{K}}(W - \overline{\mathbb{D}}) = W - \overline{\mathbb{D}}$$

このとき, $\widetilde{K} \cup \Phi_{\widetilde{K}}(W - \overline{\mathbb{D}})$ は f で不変なジョルダン領域になる. 双曲面の力学系の分類定理 (例えば, [**Mi**] の Theorem 5.2) より, この領域内では無理回転に等角共役になっていなければならない. ゆえに, $\widetilde{K} \cup \Phi_{\widetilde{K}}(W - \overline{\mathbb{D}}) \subset \Delta$ でなければならないが, これは $K = \overline{\Delta}$ であったことに反する. ■

定理 3.2.2 原点を解析函数 f の中立固定点とする. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする. このとき, 次を満たす集合 H が存在する.

- H は充填した連続体である.
- $0 \in H \subset \overline{U}$, $H \cap \partial U \neq \phi$, $f(H) = H$

さらに, f が原点で解析的線形化可能であることは $0 \in \mathrm{Int} H$ と同値である.



証明　まず前半部分を示す. λ を原点の乗法因子とすると, $\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とかける．もし $t \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ ならば, 直前の定理 3.2.1 より H としてジーゲル円板 Δ 内の不変閉円板で ∂U に接するものをとればよい.

次に, $t \notin \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ のときを考える．このとき, $t_n \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ を $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$ が成り立つようにとる．$f_n(z) = e^{2\pi i(t_n - t)} f(z)$ とおくと V で単葉であり, 原点の乗法因子は $\lambda_n = e^{2\pi it_n}$, $t_n \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ とかけるので, 直前の定理 3.2.1 より ∂U に接する不変閉円板 H_n がとれる．系 2.1.1 より $C(\overline{U}) \subset S(\overline{U})$ は閉集合である．$S(\overline{U})$ はコンパクトだから $C(\overline{U})$ もコンパクトである．したがって, $\{H_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C(\overline{U})$ より収束部分列 $\{H_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ がとれる．一時的に $\lim_{j\to+\infty} H_{n_j} = H \in C(\overline{U})$ とおく．各 H_{n_j} は原点を含むので, H も原点を含む．また, 各 H_{n_j} は ∂U と接するので, H も ∂U と接する．さらに, f_n は f に V 上広義一様収束するので, とくに, $f_n, f \in C(\overline{U}, \mathbb{C})$ とみて $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ が成り立つ．命題 2.1.7 より $f(H) = \lim_{j\to+\infty} f_{n_j}(H_{n_j}) = \lim_{j\to+\infty} H_{n_j} = H$ を得る．あとは, H の充填集合を再び H とかきなおしてやれば条件を満たす.

次に後半部分を示す. f が原点で解析的線形化可能であると仮定すれば, H は必ず原点の近傍を含むので $0 \in \mathrm{Int}H$ が成り立つ．逆に, $0 \in \mathrm{Int}H$ と仮定する. W を $\mathrm{Int}H$ の原点を含む成分とすると, W は単連結であり $f(W) = W$ が成り立つ. ここで, 等角同型 $\phi : \mathbb{D}_r \to W$ で $\phi(0) = 0$ を満たすものをとる．このとき, $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_r$ は等角同型となり, $g(0) = 0, |g'(0)| = |f'(0)| = |\lambda| = 1$ を満たす．シュワルツの補題より $g(z) = \lambda z$ $(\forall z \in \mathbb{D}_r)$ が成り立つ．ゆえに, f は原点で解析的線形化可能である. ■

注意 3.2.1 上で述べた集合 H は f と U に依存するので, f と U に付随する**ジーゲルコンパクタ** (Siegel compacta) と呼ぶことにする. ただし, f と U を固定して考えたときでも H は一般に一意的とは限らない．また, H は原点から U の境界まで伸びているので非退化連続体である.

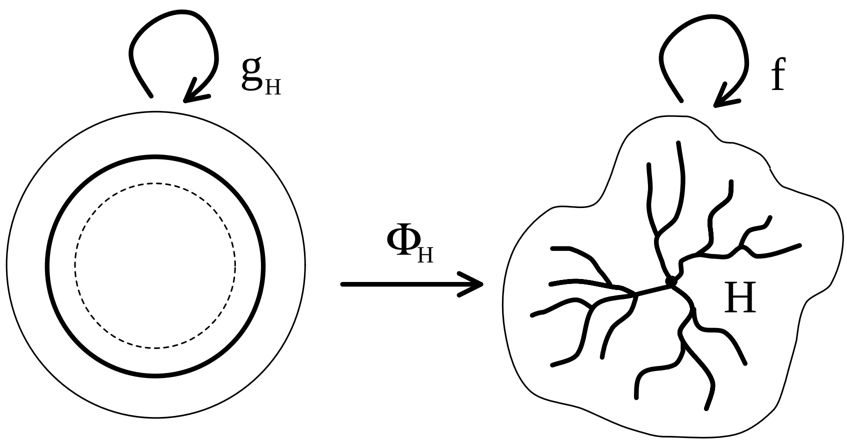
直前の定理 3.2.2 から, よい性質を持つ自然な円周写像が次のように構成される．[**PM**] の Theorem 2 を参照した.

定理 3.2.3 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とすると, $\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とかける. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする．直前の定理 3.2.2 より, f と U に付随するジーゲルコンパクタ H をとる.

$$\Phi_H : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - H : 等角同型,\ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_H(z)}{z} > 0$$

を考える．$V - H$ は Φ_H によって $\overline{\mathbb{D}}$ の外部近傍に引き戻される．十分小さい $r > 1$ を $\mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}}$ がその外部近傍に含まれるようにとる．f が V 上単葉であることと, $f(H) = H$ であることに注意すると, $g_H = \Phi_H^{-1} \circ f \circ \Phi_H$ は $\mathbb{D}_r - \overline{\mathbb{D}}$ で単葉である．さらに, $|z| \searrow 1$ のとき, $|g_H(z)| \searrow 1$ であるからシュワルツの鏡像原理より, g_H は $\mathbb{A}_r$ で単葉となり, $g_H(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ を満たす．すなわち, g_H は向きを保つ解析的円周微分同相写像である．

このとき, g_H の回転数は t に等しい. すなわち, $\mathrm{Rot}(g_H) = t$ が成り立つ.



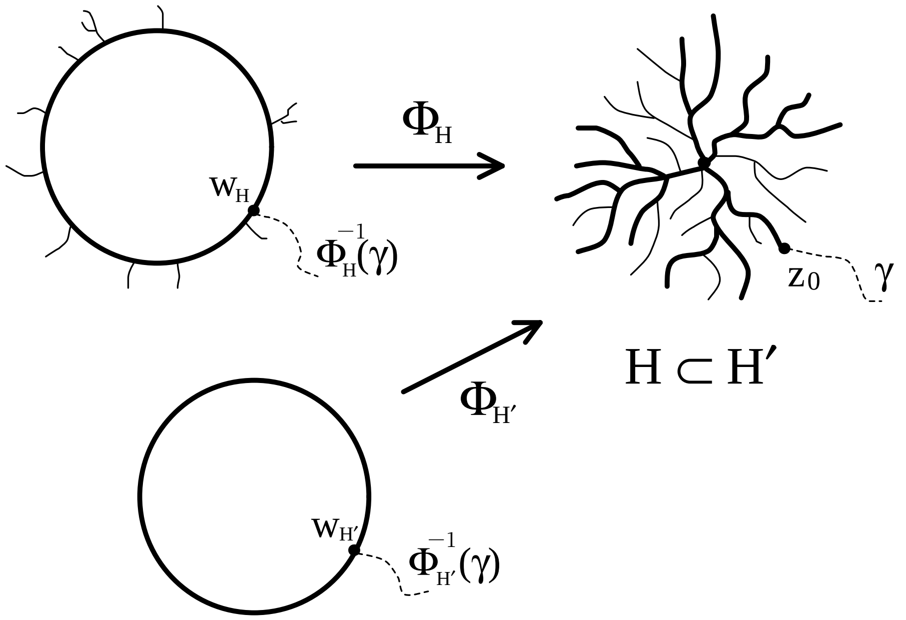
証明　まず, 直前の注意 3.2.1 でも触れたようにジーゲルコンパクタ H は一意的とは限らない．しかし, 構成した解析的円周微分同相写像 g_H の回転数 $\mathrm{Rot}(g_H)$ は H によらず, すべて等しいことを示す.

H' を $\{z \in \overline{U} : z$ の全軌道が$\overline{U}$内にとれる $\}$ の原点を含む連結成分とする．$H \subset H'$ に注意すれば, H' は f と U に付随する最大のジーゲルコンパクタであることが分かる.

$$\Phi_{H'} : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - H' : 等角同型,\ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{H'}(z)}{z} > 0$$

を考える．そして, これで構成される解析的円周微分同相写像を $g_{H'}$ とする．$H \cap \partial U \neq \phi$ より $z_0 \in H \cap \partial U$ をとる．z_0 は $\overline{U}$ の外からある曲線 γ で到達する．このとき, $\Phi_H^{-1}(\gamma), \Phi_{H'}^{-1}(\gamma)$ は $\mathbb{S}^1$ の点に到達するので, それぞれを $w_H, w_{H'}$ とおく.

ここで, 等角同型 $\Phi_H^{-1}\circ\Phi_{H'}:\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}-(\overline{\mathbb{D}}\cup\Phi_H^{-1}(H'-H))$ を考えると, それぞれの軌道 $\{g_H^n(w_H)\}_{n\geq 0},\{g_{H'}^n(w_{H'})\}_{n\geq 0}$ の順序が同じであることが分かる. したがって, $\mathrm{Rot}(g_H)=\mathrm{Rot}(g_{H'})$ が成り立つ. ゆえに, $\mathrm{Rot}(g_H)$ は H のとり方によらない.



さて, $\mathrm{Rot}(g_H)=t$ を満たすようなジーゲルコンパクタ H が存在することを示そう. もし $t\in\frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ ならば, 定理 3.2.1 より H としてジーゲル円板 Δ 内の不変閉円板で ∂U に接するものをとる. H は f で不変なジョルダン閉曲線の族に囲まれているので, $\overline{\mathbb{D}}$ は g_H で不変なジョルダン閉曲線の族に囲まれている. f は原点で解析的線形化可能であるから, Φ_H を間に通して g_H は無理回転 λz に位相共役であることが分かる. 回転数は位相共役で不変であるから, $\mathrm{Rot}(g_H)=t$ が成り立つ.

次に, $t\notin\frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ のときを考える. このとき, $t_n\in\frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ を $\lim_{n\to+\infty}t_n=t$ が成り立つようにとる. $f_n(z)=e^{2\pi i(t_n-t)}f(z)$ とおくと V で単葉であり, 原点の乗法因子は $\lambda_n=e^{2\pi i t_n}, t_n\in\frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ とかけるので, 定理 3.2.1 より f_n と U に付随するジーゲルコンパクタとして不変閉円板 $H_n\subset\overline{U}$ がとれる. $C(\overline{U})$ はコンパクトだから収束部分列 $\{H_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ がとれる. 一時的に $\lim_{j\to+\infty}H_{n_j}=H\in C(\overline{U})$ とおいて, H の充填集合を再び H とかきなおしてやる. すると, これは f と U に付随するジーゲルコンパクタとなる. さて, f_n は f に V 上広義一様収束するので補題 3.1.1 を適用すれば, $g_{H_{n_j}}$ は g_H に $\mathbb{S}^1$ 上一様収束

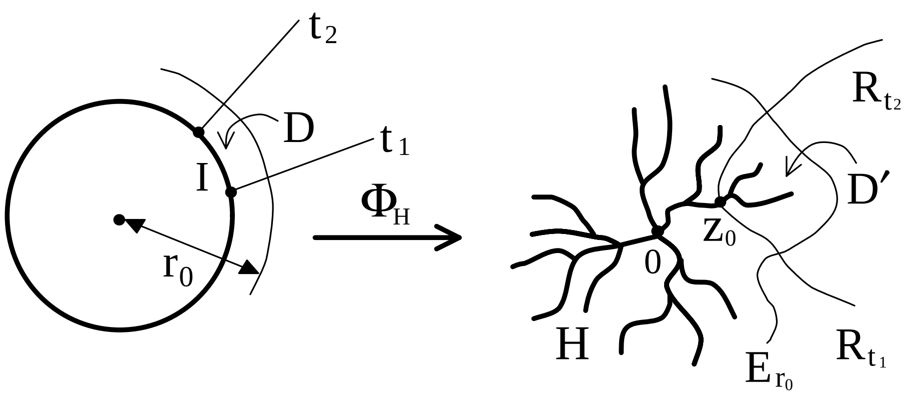
することが分かる. すでに示したように, $t_n \in \frac{\mathcal{D}}{\mathbb{Z}}$ だから $\mathrm{Rot}(g_{H_{n_j}}) = t_{n_j}$ が成り立つ. したがって, $\mathrm{Rot}(g_H) = \lim_{j\to+\infty} \mathrm{Rot}(g_{H_{n_j}}) = \lim_{j\to+\infty} t_{n_j} = t$ を得る. ■

3.3 主結果の応用

この節では, 前節で述べたジーゲルコンパクタとその性質を使って, いくつかの応用をみていく. まず, クレーマー点に関してジーゲルコンパクタの位相やジーゲルコンパクタ上の力学系について考える. 次の命題は [**SZ**] の Proposition 2 を参照した.

命題 3.3.1 原点を解析函数 f のクレーマー点とする. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする. H を f と U に付随するジーゲルコンパクタとする. このとき, $z_0 \in \partial H$ が H の外から両到達可能ならば, z_0 は原点でなければならない.

証明 背理法で示す. $z_0 \in \partial H$ が原点でないと仮定する. 定理の仮定より, 相異なる角 t_1 と t_2 が存在して, R_{t_1} と R_{t_2} が z_0 に到達している. $r_0 > 1$ をできるだけ小さくとり, $I = \{e^{2\pi it} : t_1 \le t \le t_2\}$ と $I_1 = \{re^{2\pi it_1} : 1 \le r \le r_0\}$ と $I_2 = \{re^{2\pi it_2} : 1 \le r \le r_0\}$ と $r_0 I = \{r_0 e^{2\pi it} : t_1 \le t \le t_2\}$ で囲まれた領域を D とする. このとき, $\Phi_H(I_1 \cup I_2 \cup r_0 I)$ は原点を囲まないと仮定してよい. したがって, $D' = \Phi_H(D)$ とおくと $0 \notin \overline{D'}$ である.



原点はクレーマー点だから, 定理 3.2.3 より $g_H = \Phi_H^{-1} \circ f \circ \Phi_H$ の回転数は無理数である. よって, ある自然数 N が存在して, $\bigcup_{n=0}^{N} g_H^n(I) = \mathbb{S}^1$

が成り立つ. $r_0>1$ を十分小さくとっておけば, $g_H, g_H^2, \cdots, g_H^N$ がすべて D 上で定義され, $\bigcup_{n=0}^N g_H^n(D)$ が $\mathbb{S}^1$ のある外部近傍全体を含むようにできる. したがって, H のある近傍 W が存在して, $W-H\subset\bigcup_{n=0}^N f^n(D')$ が成り立つ. ゆえに, $0\in\overline{W-H}\subset\bigcup_{n=0}^N\overline{f^n(D')}$ より, ある n_0 が存在して, $0\in\overline{f^{n_0}(D')}$ が成り立つ. f の単射性より $0\in\overline{D'}$ を得る. これは $0\notin\overline{D'}$ であったことに反する. ■

系として次のようなことが得られる.

系 3.3.1 原点を解析函数 f のクレーマー点とする. $U\subset\mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V\subset\mathbb{C}$ で単葉とする. H を f と U に付随するジーゲルコンパクタとする. このとき, $z_0\in\partial H-\{0\}$ が H の外から到達可能ならば, その前方軌道 $\{f^n(z_0)\}_{n=0}^{+\infty}$ は無限集合である.

証明 背理法で示す. 前方軌道 $\{f^n(z_0)\}_{n=0}^{+\infty}$ が有限集合と仮定する. このとき, ある非負整数 n が存在して, $f^n(z_0)=w_0\in\partial H$ が周期点になる. 仮定より, $w_0\in\partial H$ も H の外から到達可能である. 定理 2.3.1 より, w_0 に到達する外射線 R_{t_1} が存在する. w_0 の周期を m とすれば, $f^m(R_{t_1})$ は外射線とは限らないが w_0 に到達する曲線である.

$g_H=\Phi_H^{-1}\circ f\circ\Phi_H$ の回転数は無理数であるから $\mathbb{S}^1$ 上に周期点を持てない. したがって, $\Phi_H^{-1}(f^m(R_{t_1}))$ が $e^{2\pi i t_2}$ に到達するような $t_2\neq t_1$ が存在する. 外射線 R_{t_2} は w_0 に到達することに注意すると, 結局 $w_0\in\partial H$ は H の外から両到達可能であることが分かる. 直前の命題 3.3.1 より w_0 は原点でなければならない. よって, f の単射性より z_0 も原点でなければならない. これは $z_0\neq 0$ に反する. ■

次の有名な定理は**エルマン** (Herman) や**カトック** (Katok) による. 証明は例えば, [**KH**] の Theorem 12.7.2 を参照するとよい.

定理 3.3.1 $g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ を向きを保つ解析的円周微分同相写像とする. もし, $\mathrm{Rot}(g)\in\frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ならば, g はルベーグエルゴード的である.

ここで, ジーゲルコンパクタ上の力学系について興味深い定理があるので紹介する. 直前の定理 3.3.1 を使うと, まず次の補題が証明できる. [**PM**] の Lemma IV.2.1 を参照した.

補題 3.3.1 原点を解析函数 f のクレーマー点とする. $U\subset\mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V\subset\mathbb{C}$ で単葉とする. H を f

と U に付随するジーゲルコンパクタ, μ_H を H に関する調和測度とする. このとき, 同相写像 $f|_H : H \to H$ は μ_H エルゴード的である.

証明 $f|_H^{-1}(B) = B$ を満たすようなボレル集合 $B \subset H$ をとる. このとき, $\mu_H(B) = \mu_H(B \cap \partial H)$, $f|_H^{-1}(B \cap \partial H) = B \cap \partial H$ が成り立つ. 等角同型 $\Phi_H : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - H$ は零集合を除いて $\mathbb{S}^1$ まで連続に拡張でき, その拡張を再び Φ_H であらわすことにする. $B' = \Phi_H^{-1}(B \cap \partial H)$ は $\mathbb{S}^1$ のボレル集合で $g_H^{-1}(B') = B'$ を満たすから, 直前の定理 3.3.1 より $\nu(B') = 0$ または $\nu(B') = 1$ となる. ここで, ν は $\mathbb{S}^1$ 上のルベーグ測度である. すると $\mu_H(B) = \mu_H(B \cap \partial H) = \nu(B')$ であるから, $\mu_H(B) = 0$ または $\mu_H(B) = 1$ を得る. ■

直前の補題 3.3.1 を使って次の定理を証明する. [**PM**] の Theorem IV.2.3 を参照した.

定理 3.3.2 原点を解析函数 f のクレーマー点とする. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする. H を f と U に付随するジーゲルコンパクタ, μ_H を H に関する調和測度とする. このとき, ほとんどすべての $z \in H$ に対して, $\partial H = \overline{\{f|_H^n(z)\}}_{n=-\infty}^{+\infty}$ が成り立つ.

証明 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を ∂H の可算基底とする. このとき, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して集合 B_k を次のように定める.

$$B_k = \{z \in \partial H : \{f|_H^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \cap U_k \neq \phi\}$$

明らかに $U_k \subset B_k$ であり, したがって, $\mu_H(B_k) > 0$ である. さらに, B_k は $f|_H^{-1}(B_k) = B_k$ を満たすので, 直前の補題 3.3.1 より $\mu_H(B_k) = 1$ となる. したがって, $\mu_H(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k) = 1$ が成り立つ. ゆえに, ほとんどすべての $z \in H$ に対して $z \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ が成り立つ. すなわち, ほとんどすべての $z \in H$ に対して, $\partial H = \overline{\{f|_H^n(z)\}}_{n=-\infty}^{+\infty}$ が成り立つ. ■

ジーゲル円板の境界に周期点があるかどうかという問題に対して, 次の定理を紹介する. [**PM**] の Theorem IV.4.2 を参照した.

定理 3.3.3 原点を解析函数 f のジーゲル点とする. $U \subset \mathbb{C}$ をジーゲル円板 Δ を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする. このとき, ジーゲル円板の境界 $\partial\Delta$ は f の周期点を含まない.

証明　背理法で示す. ジーゲル円板の境界 $\partial\Delta$ 上に f の周期点があったと仮定する. その周期を q としてその軌道を $O=\{z_1,z_2,\cdots z_q\}$ とする. 不変閉円板 $K_n\subset\Delta$ を, $K_n\subset\mathrm{Int}K_{n+1}$, $\Delta=\bigcup_{n=1}^{+\infty}K_n$ が成り立つようにとる. $K=\overline{\Delta}$ とおくと, $\lim_{n\to+\infty}K_n=K$ が成り立つ. このとき, $L_n=\Phi_{K_n}^{-1}(O)$ は n を大きくすると単位円周 $\mathbb{S}^1$ に近づく.

ここで, 補題 3.1.1 を適用する. 十分小さい $r>1$ をとって解析的円周微分同相写像 $g_{\widetilde{K}_n},g_{\widetilde{K}}$ が $\mathbb{A}_r$ で単葉にできる. $1<r'<r$ なる r' をとって固定する. 十分大きい n に対しては $L_n\subset\overline{\mathbb{A}}_{r'}$ が成り立つ. $S(\overline{\mathbb{A}}_{r'})$ はコンパクトであるから, 収束部分列 $\{L_{n_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ がとれる. $\lim_{j\to+\infty}L_{n_j}=L\in S(\overline{\mathbb{A}}_{r'})$ とおく. 命題 2.1.4 より L の元の個数は q 以下である. とくに, L は有限集合である.

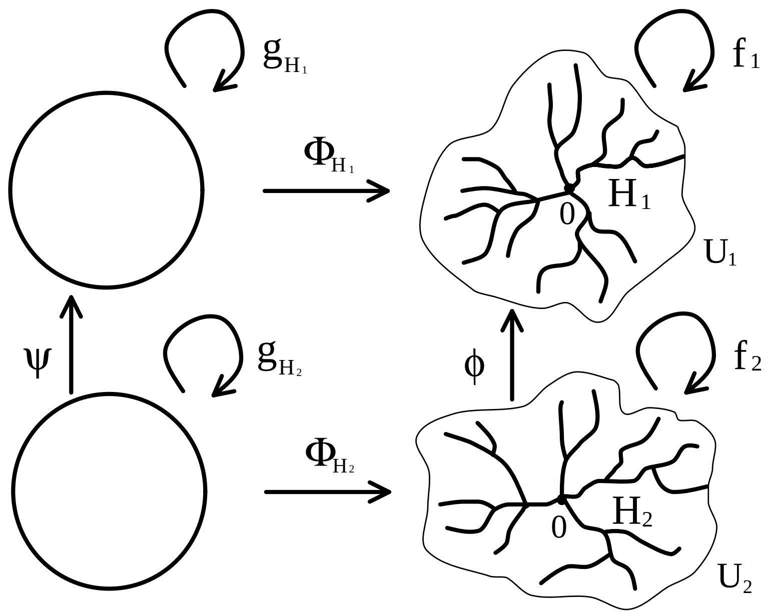
また, $g_{\widetilde{K}_n},g_{\widetilde{K}}\in C(\overline{\mathbb{A}}_{r'},\mathbb{C})$ とみて $\lim_{n\to+\infty}g_{\widetilde{K}_n}=g_{\widetilde{K}}$ が成り立つ. 命題 2.1.7 より $g_{\widetilde{K}}(L)=\lim_{j\to+\infty}g_{\widetilde{K}_{n_j}}(L_{n_j})=\lim_{j\to+\infty}L_{n_j}=L$ を得る. したがって, L は $g_{\widetilde{K}}$ で不変な有限集合である. 実際は $L\subset\mathbb{S}^1$ でなければならないから, $g_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{S}^1$ 上に周期点を持つことが分かる. ゆえに, $\mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}})\in\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ となる. ところが, これは $\mathrm{Rot}(g_{\widetilde{K}})=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Rot}(g_{K_n})=\lim_{n\to+\infty}t=t\in\frac{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ に反する. ■

最後に, ジーゲルコンパクタを応用して既知の結果の別証明を行う. 次の定理は [**PM**] の Theorem IV.1.1 を参照した.

定理 3.3.4 原点を解析函数 f_1,f_2 の中立固定点とする. $\lambda_1=e^{2\pi it_1},t_1\in\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ と $\lambda_2=e^{2\pi it_2},t_2\in\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ をそれぞれの原点の乗法因子とする. もし, 向きを保つ同相写像 ϕ が原点の近くで存在して, $\phi(0)=0$, $\phi^{-1}\circ f_1\circ\phi=f_2$ を満たすならば, $t_1=t_2$ が成り立つ.

証明　原点を含むジョルダン近傍 U_2 を十分小さくとる. H_2 を f_2 と U_2 に付随するジーゲルコンパクタとする. $U_1=\phi(U_2)$ も原点を含むジョルダン近傍で, $H_1=\phi(H_2)$ が f_1 と U_1 に付随するジーゲルコンパクタとなるようにできる. このとき定理 3.2.3 より, 等角同型 $\Phi_{H_1}:\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}-H_1$ と等角同型 $\Phi_{H_2}:\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}-H_2$ を使って構成される解析的円周同相写像 g_{H_1}, g_{H_2} について $\mathrm{Rot}(g_{H_1})=t_1$, $\mathrm{Rot}(g_{H_2})=t_2$ が成り立つ.

一方, $\widehat{\mathbb{C}}-H_1$ のプライムエンドと $\widehat{\mathbb{C}}-H_2$ のプライムエンドは ϕ により 1 対 1 に対応している (プライムエンドについては例えば, [**Mi**] の §17 を参照するとよい) ので, $\psi=\Phi_{H_1}^{-1}\circ\phi\circ\Phi_{H_2}$ は向きを保つ円周同相写像に拡張される. したがって, $\mathbb{S}^1$ 上で $g_{H_2}=\psi^{-1}\circ g_{H_1}\circ\psi$ が成り立つ. ゆえに, $t_1=\mathrm{Rot}(g_{H_1})=\mathrm{Rot}(g_{H_2})=t_2$ を得る. ■



次の定理は [**PM**] の Theorem IV.2.4 を参照した.

定理 3.3.5 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は $\overline{U}$ の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉とする. H を f と U に付随するジーゲルコンパクタとする. もし, H の外から f で不変な曲線 γ によって到達可能な点が存在すれば, $\lambda = 1$ である.

証明 $\lambda = e^{2\pi it}, t \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ とおくと, 定理 3.2.3 より, 等角同型 $\Phi_H : \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} - H$ を使って構成される解析的円周微分同相写像 g_H について $\mathrm{Rot}(g_H) = t$ が成り立つ. $\Phi_H^{-1}(\gamma)$ は $\mathbb{S}^1$ の点に到達するので, その点を w とおく. γ は f で不変であるから $\Phi_H^{-1}(\gamma)$ も g_H で不変である. したがって, 点 w は g_H の固定点であることが分かり, $t = \mathrm{Rot}(g_H) \in \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$ が成り立つ. ゆえに, $\lambda = 1$ を得る. ■

系として有名な**カタツムリ補題** (snail lemma) を得る. [**PM**] の Theorem IV.2.4 を参照した.

系 3.3.2 原点を解析函数 f の中立固定点とする. λ を原点の乗法因子とする. もし, 原点が f で不変な曲線 γ によって原点の外から到達可能ならば, $\lambda = 1$ である.

証明　f が恒等函数のときは明らかであるので, f は恒等函数でないと仮定する. したがって, 固定点からなる点列は原点に収束せず, 原点の近くでは固定点は有限個である. γ の部分弧 γ' を原点の十分近くにとって, その中に固定点を含まず, 原点に到達するようにできる. このとき, γ' が f によって内に縮むなら f^{-1} を考えればよいので, 以下では γ' が f によって外に延びたとして証明を進める.

$U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, その境界が γ' と交わるようにとる. f は $\overline{U}$ のある近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉としてよい. H を f と U に付随するジーゲルコンパクタとする. γ' 内の点は f で繰り返し写すことで $\overline{U}$ の外に出ていくので, $\overline{\gamma'} \cap H = \{0\}$ である. したがって, 原点は H の外から f で不変な曲線 γ' によって到達しているので, 直前の定理 3.3.5 より $\lambda = 1$ である. ■

関連図書

[**Ah**] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*, 3rd edn. McGraw-Hill, 1979.

[**CG**] L. Carleson and T. W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Springer-Verlag, 1993.

[**KH**] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.

[**Mc**] C. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press, 1994.

[**Mi**] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd edn. Princeton University Press, 2006.

[**MS**] W. de Melo and S. van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, 1993.

[**PM**] R. Pérez-Marco. Fixed points and circle maps. *Acta Math.* **179** (1997), 243-294.

[**Po**] Ch. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Springer-Verlag, 1992.

[**SZ**] D. Schleicher and S. Zakeri. On biaccessible points in the Julia set of a Cremer quadratic polynomial. *Proc. Amer. Math.* **128** (1999), 933-937.