

# 報告集

## Lefschetz Fibrations と その monodromy



S.Lefschetz

2011. 12. 16~18: アピカルイン京都にて

## はじめに

この小冊子は2011年12月16日から18日まで、アピカルイン京都で開催した「Lefschetz fibrationとそのmonodromy」に関するミニワークショップの報告集です。

このワークショップは科学研究費 挑戦的萌芽研究「タイヒミュラー理論によるレフシェッツファイバー研究の新展開」（研究代表者 志賀啓成，研究分担者 遠藤久顕，宮地秀樹）の一環として企画・開催しました。ワークショップのテーマは論文：

Ivan. Smith, Geometric monodromy and the hyperbolic disc, Quart. J. Math. 52 (2001), 217-228.

にあるLefschetz fiberのmonodromyの既約性の研究とそれに関連するもので、参加者は志賀，遠藤，宮地に大阪大学と東京工業大学の若手研究者・大学院生を加えて11名を数えました。2泊3日の比較的短い期間でしたが、参加者全員がアピカルイン京都で合宿形式でセミナーを続け、連日活発な議論が行なわれ、充実かつ大変有意義なワークショップとなりました。これは参加者全員の積極的な取り組みの成果であり、世話人一同深く感謝するところです。特にワークショップでの講演、およびこの小冊子の原稿作成に協力していただいた講演者の皆さんには感謝するとともに厚く御礼いたします。

世話人

志賀啓成（東京工業大学）

遠藤久顕（大阪大学）

宮地秀樹（大阪大学）

## 参加者

- 天野 政紀（東京工業大学理工学研究科） [写真右 1]  
井口 雄紀（東京工業大学理工学研究科） [写真右 3]  
遠藤 久顕（大阪大学理学研究科） [写真左 3]  
金城 絵利那（東京工業大学理工学研究科） [写真左 1]  
佐藤 正寿（大阪大学理学研究科） [写真右 4]  
志賀 啓成（東京工業大学理工学研究科） [写真右 5]  
四之宮 佳彦（東京工業大学理工学研究科） [写真右 2]  
早野 健太（大阪大学理学研究科） [写真左 6]  
宮地 秀樹（大阪大学理学研究科） [写真左 5]  
門田 直之（大阪大学理学研究科） [写真左 4]  
湯淺 亘（大阪大学理学研究科） [写真左 2]



# 目次

(項目をクリックすると該当ページにジャンプします)

1. Shearing the hyperbolic disc (1) -----井口雄紀
2. Shearing the hyperbolic disc (2) -----四之宮佳彦
3. 4次元多様体 (Lefschetz fibration) の基礎-----門田直之
4. Irreducible Lefschetz fibration (1) -----遠藤久顕
5. Irreducible Lefschetz fibration (2) -----佐藤正寿
6. Invariant homology is not homotopic-----宮地秀樹
7. Finitely many sections-----早野健太



# 第2章 Shearing the hyperbolic disc の解説

東京工業大学大学院理工学研究科 D3 井口雄紀

## 概要

Ivan Smith 氏の論文 “Geometric monodromy and the hyperbolic disc” [Smi01] の第2章の解説を目的とする。

## 1 [Smi01] の Proposition 2.1 の解説

### 1.1 被覆空間論の復習

この節では被覆空間論の基本的事項を復習する。詳細は, [IT04] を参照されたい。  
リーマン面  $R$  と  $\tilde{R}$  に対して、上への正則写像  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$  が次の条件を満たすとする。

任意の  $R$  の点  $p$  に対して、 $p$  の近傍  $U$  で、 $U$  の逆像  $\pi^{-1}(U)$  の任意の連結成分  $V$  に対して、 $\pi: V \rightarrow U$  が上への同相写像になるようなものが存在する。

このとき、三つ組  $(\tilde{R}, \pi, R)$  を  $R$  の被覆、 $\tilde{R}$  を  $R$  の被覆面、 $\pi$  を射影と呼ぶ。さらに、 $\tilde{R}$  が単連結のとき、被覆  $(\tilde{R}, \pi, R)$  を普遍被覆、 $\tilde{R}$  を  $R$  の普遍被覆面という。

**Fact 1.1** (普遍被覆の存在と一意性). 任意のリーマン面  $R$  に対して、 $R$  の普遍被覆面  $\tilde{R}$  が存在する。また、 $R$  の二つの普遍被覆  $(\tilde{R}, \pi, R)$  と  $(\tilde{R}_1, \pi_1, R)$  に対して、双正則写像  $\tilde{f}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}_1$  で、 $\pi_1 \circ \tilde{f} = \pi$  を満たすものが存在する。

リーマン面の一意化定理から任意の単連結なリーマン面はリーマン球面  $\hat{\mathbb{C}}$ 、複素平面  $\mathbb{C}$  または 単位円盤  $\mathbb{D}$  のいずれかと双正則同値であるので、次を得る。

**Fact 1.2.** 任意のリーマン面  $R$  の普遍被覆面  $\tilde{R}$  は  $\hat{\mathbb{C}}$ 、 $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{D}$  のいずれかと双正則同値である。

**Fact 1.3** (写像の持ち上げの存在と一意性). リーマン面  $R$  と  $S$  の普遍被覆面をそれぞれ  $(\tilde{R}, \pi_R, R)$  と  $(\tilde{S}, \pi_S, S)$  とする。任意の連続写像  $f: R \rightarrow S$  に対して、連続写像

$\tilde{f}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$  で、 $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \tilde{f}$  を満たすものが存在する。この  $\tilde{f}$  は  $R$  の点  $p$  の逆像  $\pi_R^{-1}(p)$  の点  $\tilde{p}$  と  $f(p)$  の逆像  $\pi_S^{-1}(f(p))$  の点  $\tilde{q}$  を指定するとき、 $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  なる条件で一意的に決定される。

上記の  $\tilde{f}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$  を  $f: R \rightarrow S$  の持ち上げと呼ぶ。

次に、被覆  $(\tilde{R}, \pi, R)$  に対して、双正則写像  $g: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$  が  $\pi \circ g = \pi$  を満たすとき、 $g$  を被覆  $(\tilde{R}, \pi, R)$  の被覆変換と呼ぶ。被覆変換の全体  $G$  は写像の合成で群をなし、被覆  $(\tilde{R}, \pi, R)$  の被覆変換群という。特に、 $R$  の普遍被覆の被覆変換群は、普遍被覆変換群と呼ばれる。

**Fact 1.4.** 任意のリーマン面  $R$  の普遍被覆変換群  $G$  は普遍被覆面  $\tilde{R}$  の自己双正則写像全体のなす群  $\text{Aut}(\tilde{R})$  の部分群で、固定点をもたず、 $\tilde{R}$  に真に不連続に作用する。したがって、商空間  $\tilde{R}/G$  はリーマン面になり、 $F([\tilde{p}]) = \pi(\tilde{p})$  により定まる写像  $F: \tilde{R}/G \rightarrow R$  によって、 $R$  と双正則同値になる。

普遍被覆変換群  $G$  と基本群  $\pi_1(R, p)$  の間にはつぎのような同型対応が存在する。

**Fact 1.5.** 三つ組  $(\tilde{R}, \pi, R)$  をリーマン面  $R$  の普遍被覆面、 $G$  をその普遍被覆変換群とする。  $R$  の  $p$  を基点とする基本群  $\pi_1(R, p)$  の任意の元  $[C]$  に対して、 $G$  の元  $g$  を次のように定める。  $p$  の逆像  $\pi^{-1}(p)$  の点  $\tilde{p}$  を任意に指定するとき、 $[C]$  の代表元  $C$  の  $\tilde{R}$  への  $\tilde{p}$  を始点とする持ち上げ  $\tilde{C}$  の終点  $\tilde{q}$  に対して、 $\tilde{q} = g(\tilde{p})$  が成り立つ。このような  $g$  は代表元  $C$  の取り方に依らず一意的に定まり、対応  $[C] \mapsto g$  は  $\pi_1(R, p)$  から  $G$  への同型写像を与える。

以下、リーマン面  $R$  の普遍被覆面  $\tilde{R}$  は単位円盤  $\mathbb{D}$  と双正則同値であると仮定する。自己双正則写像群  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  は  $\mathbb{D}$  のポアンカレ計量に関する向きを保つ自己等長写像群  $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$  と一致して、 $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$  は  $\mathbb{D}$  を保つ一次分数変換 (モービウス変換) 全体であることが知られているので、

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Isom}^+(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \cong \text{PSU}_2(\mathbb{C})$$

である。群  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  に広義一様収束により定まる位相を入れる。

**Fact 1.6.** リーマン面  $R$  の普遍被覆変換群  $G$  は  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  の離散部分群である。

## 1.2 双曲幾何学の復習

この節では双曲幾何学の基本的事項を復習する。詳細は、[IT04]を参照されたい。  
単位円盤  $\mathbb{D}$  上のポアンカレ計量

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

から定まる距離を  $d_{\mathbb{D}}$  と書き、距離空間  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  を双曲平面と呼ぶ。

**Fact 1.7.**  $\mathbb{D}$  内のポアンカレ計量に関する測地線は境界  $S_{\infty}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  に直交する円または直線の  $\mathbb{D}$  との共通部分である。また境界上の任意の異なる二点に対して、その二点を端点を持つ  $\mathbb{D}$  内の測地線が一意的に定まる。

以下リーマン面  $R$  を種数  $g \geq 2$  の閉リーマン面とし、 $R = \Sigma_g$  とあらわし、普遍被覆面を  $(\mathbb{D}, \pi, \Sigma_g)$ 、普遍被覆変換群を  $G < \text{Aut}(\mathbb{D})$  とする。群  $G$  の元  $g$  は境界  $S_{\infty}^1$  に固定点を丁度二つもつとき双曲型であると呼ばれる。

**Fact 1.8.** 種数  $g \geq 2$  のリーマン面  $\Sigma_g$  の普遍被覆変換群の恒等写像  $\text{id}$  以外の元  $g$  はすべて双曲型である。

普遍被覆変換  $g$  は基本群  $\pi_1(\Sigma_g, p)$  の元  $[C_g]$  を定めるから、特に代表元  $C_g$  の自由ホモトピー類を定める。

**Fact 1.9.** 双曲型普遍被覆変換  $g$  の軸 (二つの固定点を結ぶ  $\mathbb{D}$  内の測地線) の  $\pi$  による像は  $C_g$  の自由ホモトピー類内の唯一の測地線である。

一般に  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  の離散部分群  $\Gamma$  はフックス群と呼ばれる。  $\mathbb{D}$  内の任意の点  $z_0$  の  $\Gamma$  による軌道  $\Gamma(z_0) = \{g(z_0) \mid g \in \Gamma\}$  を考える。  $\Gamma$  の離散性より  $\Gamma(z_0)$  は単位円  $S_{\infty}^1$  内に集積点をもち、これらの点全体を  $\Gamma$  の極限集合と呼び、  $L(\Gamma)$  とあらわす。

**Fact 1.10.** 任意のフックス群  $\Gamma$  に対して、  $L(\Gamma)$  は閉集合であり、  $\mathbb{D}$  内の点  $z_0$  の取り方に依らず、次の各集合と一致する。

1. 任意の  $\zeta \in S_{\infty}^1$  に対して  $\Gamma$  による軌道  $\Gamma(\zeta)$  の集積点集合
2.  $\Gamma$  の双曲型元の固定点全体の集合の閉包
3.  $\gamma$  の元で不変な空でない最小の閉集合

**Fact 1.11.** 種数  $g \geq 2$  のリーマン面  $\Sigma_g$  の普遍被覆変換群  $G$  の極限集合は  $S_{\infty}^1$  と一致

する.

### 1.3 [Smi01] の Proposition 2.1 の証明と注意

**Definition 1.12** (Dehn ツイスト). 向き付け可能な閉曲面  $S$  上の単純閉曲線  $C$  に対して、 $A$  を  $C$  の円柱近傍とする. このとき、 $A$  は  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  と同相である.  $A$  の外部では恒等写像と一致して、 $A$  の内部では

$$\delta(s, t) = (se^{2\pi it}, t) \quad (s \in \mathbb{S}^1, t \in [0, 1])$$

で定義される  $S$  上の自己同相写像  $\delta$  を  $C$  に関する (正の) **Dehn ツイスト** と呼ぶ. 以後、 $\delta$  のアイソトピー類のことを単に (正の) Dehn ツイストと呼ぶ.

種数  $g \geq 2$  の閉リーマン面  $\Sigma_g$  の普遍被覆面を  $(\mathbb{D}, \pi, \Sigma_g)$ , その普遍被覆変換群を  $G < \text{Aut}(\mathbb{D})$  とする.

- Proposition 1.13** ([Smi01] の Proposition 2.1). (1) 任意の向きを保つ自己同相写像  $\tau: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  に対して、 $\tau$  の  $\mathbb{D}$  への持ち上げ  $\tilde{\tau}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  は  $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}_\infty^1$  上の向きを保つ自己同相写像に拡張される. さらに、この同相写像は  $\tau$  のアイソトピー類にのみ依存して決まる.
- (2) 単純閉曲線  $C \subset \Sigma_g$  に関する Dehn ツイスト  $\delta: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  に対して、その持ち上げ  $\tilde{\delta}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  が  $\mathbb{D}$  内に固定点をもつならば、 $\pi^{-1}(C)$  の十分小さな近傍の補集合のある成分を固定する. さらに、このような持ち上げたちは  $G$  による共役作用で互いに移り合う.
- (3) 単純閉曲線  $C \subset \Sigma_g$  に関する正の Dehn ツイストを  $\delta: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  とする. このとき、 $\delta$  の  $\mathbb{D}$  への持ち上げ  $\tilde{\delta}$  が  $\mathbb{D}$  内に固定点をもつならば、 $\mathbb{S}_\infty^1$  上の非可算個の点を固定し、他の点を時計回りに動かす.

*Proof.* まず、(1) を示そう.  $\tau': \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  を  $\tau: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  とアイソトピックな微分同相写像とする. とくに、 $\tau'$  は擬等角写像であるので、その  $\mathbb{D}$  への持ち上げ  $\tilde{\tau}'$  は  $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}_\infty^1$  上の同相写像に拡張される (詳細は [IT04] の第 4 章を参照されたい).

次に、 $\tau$  から  $\tau'$  へのアイソトピーを

$$I: \Sigma_g \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$$

とし、その  $\mathbb{D}$  への持ち上げ  $\tilde{I}: \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  で  $\tilde{I}(z, 0) = \tilde{\tau}(z)$  かつ  $\tilde{I}(z, 1) = \tilde{\tau}'(z)$  が任意の  $z \in \mathbb{D}$  で成り立つものを考える. 曲面  $\Sigma_g$  はコンパクトで、 $\tilde{I}$  は双曲距離に関し

て一様連続であるので、集合

$$\left\{ d_{\mathbb{D}}(\tilde{I}(z, 0), \tilde{I}(z, 1)) \mid z \in \mathbb{D} \right\}$$

は有界である。よって、任意の  $\zeta \in \mathbb{S}_{\infty}^1$  と  $\mathbb{D}$  内の点列  $\{z_n\}$  で  $z_n \rightarrow \zeta$  を満たすものに対して、

$$d_{\mathbb{E}}(\tilde{\tau}(z_n), \tilde{\tau}'(z_n)) \rightarrow 0$$

が成り立つ。ただし、 $d_{\mathbb{E}}$  は  $\mathbb{D}$  上の Euclid 距離である。したがって、 $\tilde{\tau} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  も  $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}_{\infty}^1$  上の同相写像に拡張され、 $\tilde{\tau}(\zeta) = \tilde{\tau}'(\zeta)$  を満たす。

次に、(2) を示そう。点  $p \in \mathbb{D}$  を  $\tilde{\delta}$  の固定点とすると、 $\tilde{\delta}$  は  $\pi^{-1}(C)$  上に固定点を持たないので、点  $p$  は  $\pi^{-1}(C)$  の補集合のある成分  $\hat{K}$  に含まれる。 $\pi^{-1}(C)$  の近傍の補集合の  $\hat{K}$  と交わる成分  $K$  を固定する  $\delta$  のリフトを  $\tilde{\delta}_0$  とすると、 $\tilde{\delta}(\tilde{\delta}_0)^{-1}$  は固定点を持つ普遍被覆変換なので恒等写像と一致する。よって、 $\tilde{\delta}(K) = K$  が成り立つ。次に、 $\delta$  のリフト  $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$  を  $\mathbb{D}$  内に固定点を持つものとする、上記の議論より  $\pi^{-1}(C)$  の近傍の補集合のある成分  $K_1, K_2$  が存在して、 $\tilde{\delta}_i(K_i) = K_i$  ( $i = 1, 2$ ) が成り立つ。このとき、 $K_2 = g(K_1)$  を満たす  $g \in G$  に対して、 $g\tilde{\delta}_1g^{-1}(K_2) = K_2 = \tilde{\delta}_2(K_2)$  が成り立ち、さらに、 $g\tilde{\delta}_1g^{-1}\tilde{\delta}_2^{-1}$  は普遍被覆変換であることから、 $\tilde{\delta}_2 = g\tilde{\delta}_1g^{-1}$  となり (2) の後半の主張を得る。

最後に (3) を示す。正の Dehn ツイストの定義より、 $\delta$  は次を満たす自己同相写像  $\tau$  とアイソトピックである。

1.  $\tau$  は  $C$  の円柱近傍  $A$  の外側で恒等写像であり、
2.  $A$  の内部で

$$\tau(s, t) = (se^{2\pi it}, t) \quad (s \in \mathbb{S}^1, t \in [0, 1])$$

の形をしている。ただし、 $A$  は  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  と同相とする。

主張 (1) より、 $\mathbb{S}_{\infty}^1$  上で  $\tilde{\delta}$  と  $\tilde{\tau}$  は一致するから、 $\tau$  について主張を示せばよい。上記の性質 1. より、 $\tau$  は  $\mathbb{S}_{\infty}^1$  上に固定点を持つことが分かり、Fact 1.8, 1.9, 1.10 及び 1.11 よりその濃度は非可算である。以下、アイソトピーにより  $C$  を測地線と仮定しても一般性を失わない。さて、写像  $\tilde{\tau}$  で固定されない点  $\zeta \in \mathbb{S}_{\infty}^1$  の像  $\tilde{\tau}(\zeta)$  が  $\zeta$  の右側にあることを背理法で示そう。点  $p \in \mathbb{D}$  を  $\tilde{\tau}$  の固定点、 $p$  と  $\zeta$  を結ぶ (双曲的) 測地線分を  $L$  とし、点  $p$  を始点とする折れ線  $Z$  を以下のように構成する。点  $p$  から最初に  $C$  のリフト  $\tilde{C}_1$  にぶつかるまで  $L$  に沿って進み、その後右側に折れる。そして、 $\pi(L)$  のリフト  $L_1$  にぶつかるまで  $\tilde{C}_1$  に沿って進み、その後右に折れ、 $L_1$  に沿って  $C$  のリフト  $\tilde{C}_2$  にぶつ

かるまで進み、再度右に折れる。帰納的に上記の手順を繰り返して得られる折れ線を  $Z$  とすると、その端点は  $\tilde{\tau}(\zeta)$  である。ここで、 $\tilde{\tau}(\zeta)$  が  $\zeta$  の左側にあると仮定すると、 $Z$  と  $L$  は交わり、測地多角形 (頂点の数を  $k$  とする) をなす。このとき、この測地多角形の内角の和は  $(k-2)\pi$  以上となり、これは双曲平面における多角形の性質に矛盾する。したがって、 $\tilde{\tau}(\zeta)$  が  $\zeta$  の右側にあることが分かり、主張を得る。  $\square$

**Remark 1.14** ([Smi01] の Remark 2.2). 一般に Dehn ツイストの任意の持ち上げが  $S_{\infty}^1$  上で (3) のような良い挙動をするわけではない。実際、 $\mathbb{D}$  内の点を固定する持ち上げ  $\tilde{\delta}$  と双曲型の普遍被覆変換  $g$  に対し、十分大きい自然数  $n$  をとると、 $g$  の吸引固定点の近くで  $g^n \circ \tilde{\delta}$  によって反時計回りに動く  $S_{\infty}^1$  上の点が存在する。

## 謝辞

今回の勉強会を開いてくださった志賀啓成先生、遠藤久顕先生、および宮地秀樹先生、そして参加された皆さまに心より感謝いたします。

## 参考文献

- [Smi01] Ivan Smith. Geometric monodromy and the hyperbolic disc. *Q. J. Math.*, 51(2):217–228, 2001.
- [IT04] 今吉 洋一, 谷口雅彦. タイヒミュラー空間論 (新版), 日本評論社, 2004.

## 第2章 Shearing the hyperbolic disc の解説

### Lemma 2.3

四之宮佳彦 (東京工業大学)

#### 概要

Ivan Smith 氏の論文 "Geometric monodromy and the hyperbolic disc" [Smi01] の第2章の Lemma 2.3 の解説を目的とする。

### 1 準備

以下では, [KO08], [KS09], [Ful03], [Hir06] を参照した。

**Definition 1.1.** (Lefschetz fibration) 向き付けられた連結かつコンパクトな 4 次元可微分多様体  $X$  から球面  $S^2$  への smooth な写像  $f$  が **Lefschetz fibration** であるとは次の二つの条件を満たすことである：

- $f$  の critical point は有限個であり, 互いに異なるファイバー内にある,
- 任意の critical point  $p$  と,  $q = f(p)$  の近傍において, 向きと compatible な複素座標  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $w \in \mathbb{C}$  で  $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$  となるものが存在する。

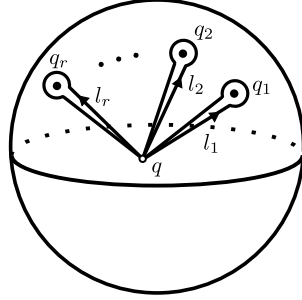
Lefschetz fibration  $f$  の critical point の集合を  $\{p_1, \dots, p_r\}$  と表し,  $\text{Crit} = \{q_i = f(p_i) \mid i = 1, \dots, r\}$  とする。任意の  $q \in S^2 \setminus \text{Crit}$  に対し,  $f^{-1}(q)$  は向き付けられた閉曲面であり, その位相型は  $q$  に依らない。任意の  $q \in S^2 \setminus \text{Crit}$  に対して,  $f^{-1}(q)$  を **smooth fiber** と呼び, 種数  $g$  の閉曲面  $\Sigma_g$  ( $g \geq 2$ ) であるとする。任意の  $q_i \in \text{Crit}$  に対しては,  $f^{-1}(q_i)$  を **critical fiber** と呼ぶ。critical fiber は  $\Sigma_g$  の一つの単純閉曲線を一点につぶした形をしている。

点  $q \in S^2 \setminus \text{Crit}$  を固定する。  $l \in \pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}, q)$  に対して,  $f^{-1}(l)$  は  $\Sigma_g \times [0, 1]$  において  $\Sigma_g \times \{0\}$  と  $\Sigma_g \times \{1\}$  を写像類群  $\Gamma_g$  のある元  $\phi_l$  で張り合わせたものとなる。写像  $\rho : \pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}, q) \ni l \mapsto \phi_l \in \Gamma_g$  は準同型になっており, これを  $f$  に対する **monodromy 準同型** という。  $l_i \in \pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}, q)$  を,  $q$  出発し  $q_i$  の周りを回って  $q$  に戻る閉曲線とする (下図参照)。この時,  $\rho(l_i)$  は  $\Sigma_g$  上の閉曲線  $C_i$  で,  $f^{-1}(q_i)$  の node に対応しているものに関する positive Dehn twist  $\delta_i$  になる。  $l_1 l_2 \dots l_r = e$  なので,  $\delta_1 \dots \delta_r = id$  という関係式が得られる。

**Definition 1.2.** (section) smooth な写像  $s : S^2 \rightarrow X$  が Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  の **section** であるとは,  $f \circ s = id$  となることをいう。

Lefschetz fibration  $f$  が切断  $s$  を持つと仮定し,  $p = s(q)$  とおく。また,  $\Sigma_{g,1} = \Sigma_g - (p \text{ 中心の円板})$ ,  $\Sigma_g^1 = \Sigma_g - \{p\}$  とし,  $\Sigma_{g,1}$ ,  $\Sigma_g^1$  の写像類群をそれぞれ  $\Gamma_{g,1}$ ,  $\Gamma_g^1$  とする。ただし,  $\Sigma_{g,1}$  のアイソトピーは  $\partial \Sigma_{g,1}$  の各点を固定するものを考える。この時,  $\delta$  を境界にホモトピックな単純閉曲線に関する positive Dehn





twist とすれば、次の完全列が得られる：

$$0 \longrightarrow \langle \delta \rangle \longrightarrow \Gamma_{g,1} \longrightarrow \Gamma_g^1 \longrightarrow 0.$$

また写像  $s$  が  $f$  の切断なので、各  $\delta_i$  に対し、 $\Gamma_g$  で  $\delta_i$  と一致するような  $\Gamma_g^1$  の元  $\delta'_i$  で、 $\delta'_1 \cdots \delta'_r = id$  となるようなものが存在する。更に、各  $\delta'_i$  に対し、 $\Gamma_{g,1}$  で  $\delta'_i$  と一致するような  $\Gamma_{g,1}$  の元  $\delta''_i$  で、 $\delta''_1 \cdots \delta''_r = \delta^n$  がある  $n \in \mathbb{Z}$  について成り立つものが存在する。この時、 $-n$  のことを section  $s$  の **self-intersection** と呼び、 $s \cdot s$  で表す。

## 2 Lemma 2.3 の主張

以下では、Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^2$  が section  $s$  を持つとする。点  $q \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Crit}$  を固定し、 $p = s(q) \in \Sigma_g$  とおき、 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$  を固定する。写像  $s$  は section なので、 $\delta_i(p) = p$  が成り立つ。更に、 $p$  は  $\Pi \delta_i = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_r$  と  $id$  とのアイソトピー間でも固定されるとしてよい。各  $\delta_i$  のリフトで  $\tilde{p}$  を固定するものを  $\tilde{\delta}_i$  とすれば、 $\Pi \tilde{\delta}_i = \tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r = id$  が  $\mathbb{S}_\infty^1$  上で成り立つ。一方、 $\mathbb{S}_\infty^1$  上の点は  $\tilde{\delta}_i$  によって時計回りに動く（あるいは固定される）ので、 $\tilde{\delta}_i$  を順次作用させていくことで、 $\mathbb{S}_\infty^1$  の点は  $\mathbb{S}_\infty^1$  上を何周か回っている。

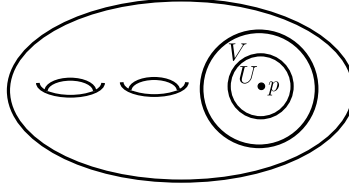
**Lemma 2.1** ([Smi01] の Lemma 2.3)。同相写像の列  $\{\tilde{\delta}_i\}_{i=1}^r$  は  $\mathbb{S}_\infty^1$  を  $-2\pi s \cdot s$  だけ回す。

## 3 [Smi01] の Lemma 2.3 の証明

**Remark 3.1** ([Smi01] の Lemma 2.3 の証明について)。[Smi01] の Lemma 2.3 の証明は次の手順で行われている。まず  $\tilde{p}$  中心の十分小さい円板をとり、その円板が同相写像の列  $\{\tilde{\delta}_i\}_{i=1}^r$  で回転される回数  $m$  と  $\mathbb{S}_\infty^1$  が  $\{\tilde{\delta}_i\}_{i=1}^r$  で回転される回数  $k$  が一致することを見る。そして  $m$  と self-intersection  $s \cdot s$  が一致することを示す。しかしながら、Proposition 2.1 より、円板を小さくすると、 $\{\tilde{\delta}_i\}_{i=1}^r$  でその円板は固定されるのでこの証明は少なくともそのままではうまくいかない。円板の大きさを適当に取れば証明がうまくいく可能性もあるが、以下では別の方法で証明を行う。

*Proof.* 同相写像の列  $\{\tilde{\delta}_i\}_{i=1}^r$  が  $\mathbb{S}_\infty^1$  をまわす回数を  $k$  回とする。写像  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma_g = \mathbb{D}/G$  を普遍被覆写像とする。点  $p$  を中心とする開円板  $U, V$  ( $\bar{U} \subset V$ ) を、 $\pi^{-1}(V)$  の各連結成分への  $\pi$  の制限が単射となるようにする。更に、 $\Sigma_{g,1} = \Sigma_g - U$ 、 $\Sigma_g^1 = \Sigma_g - \{p\}$  とおく。

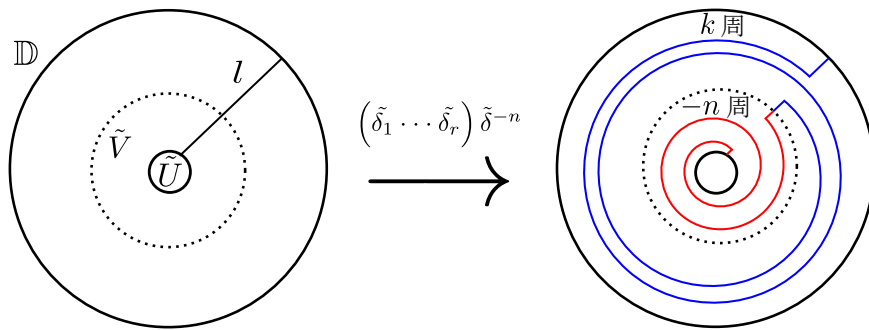
円環  $V - U$  の core curve に関する positive Dehn twist を  $\delta'$  とする。同相写像  $\delta : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  を次のように



定める:

$$\delta(z) = \begin{cases} \delta'(z) & (z \in V - U) \\ z & (z \notin V - U). \end{cases}$$

この時,  $\Sigma_g$  上  $\delta = id$  (アイソトピック) である. 更に,  $\delta = \delta|_{\Sigma_{g,1}}$  は  $\partial\Sigma_{g,1} = \partial U$  にホモトピックな単純閉曲線に関する positive Dehn twist なので,  $(\Pi\delta_i)\delta^{-n} = id$  が  $\Sigma_{g,1}$  上で成り立つ様に  $\delta_1, \dots, \delta_r$  を  $\Gamma_{g,1}$  へリフトできる. ここで  $D = \pi^{-1}(\Sigma_g - U)$  とすれば,  $\pi|_D : D \rightarrow \Sigma_{g,1}$  は被覆写像となる. 同相写像  $\tilde{\delta} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  を  $\delta$  のリフトで,  $\tilde{\delta}(\tilde{p}) = \tilde{p}$  となるものとする. 同相写像  $\tilde{\delta}$  は  $\pi^{-1}(\partial U)$  の各成分にホモトピックな単純閉曲線に関する positive Dehn twist の合成である. 更に,  $\tilde{\delta}(D) = D$  であるから,  $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}|_D$  は  $\delta : \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g,1}$  の  $D$  へのリフトと見なせる. 曲面  $\Sigma_{g,1}$  上で  $(\Pi\delta_i)\delta^{-n} = id$  が成り立つので,  $D$  上で  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n} = \gamma$  となるような  $\gamma \in G$  が存在する. 従って,  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n} = \gamma$  が  $\mathbb{D}$  上でも成り立つが,  $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r, \tilde{\delta}$  が  $\tilde{p}$  を固定し,  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\delta^{-n}$  と  $id$  の間のアイソトピーで  $p$  を固定するものが取れるから,  $D$  上で  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n} = id$  が成り立つ. 開円板  $\tilde{U}, \tilde{V}$  をそれぞれ  $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$  の  $\tilde{p}$  を含む成分とする. この時,  $\mathbb{D} - \tilde{U}$  上で  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n} = id$  が成り立つ. 更に,  $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r$  は  $\tilde{p}$  を固定するするので, Proposition 2.1 より  $(\Pi\tilde{\delta}_i)|_{\mathbb{D} - \tilde{U}}$  は  $\tilde{V} - \tilde{U}$  上  $id$  で,  $\mathbb{S}^1_\infty$  を  $k$  回まわす. また,  $\tilde{\delta}|_{\mathbb{D} - \tilde{U}}$  は  $\tilde{V} - \tilde{U}$  では positive Dehn twist で,  $\mathbb{D} - \tilde{V}$  では  $id$  とアイソトピック. 従って,  $l$  を  $\partial(\mathbb{D} - U)$  の二つの成分を結ぶ線分とすれば,  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n}(l)$  は  $\tilde{V} - \tilde{U}$  内を  $-n$  周し,  $\mathbb{D} - \tilde{V}$  内を  $k$  周して二つの境界を結ぶ曲線となる. 一方,  $\mathbb{D} - \tilde{U}$  上で  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n} = id$  であるから  $(\Pi\tilde{\delta}_i)\tilde{\delta}^{-n}(l)$  と  $l$  はホモトピック. 従って,  $k = n = -s.s$  が成り立つ.  $\square$



**Remark 3.2** ([Smi01] の Lemma 2.3 の証明内の図式について). [Smi01] の Lemma 2.3 の証明の中で言及されている次の可換図式の準同型  $\alpha$  について解説する. 準同型  $\langle \delta \rangle \rightarrow \langle z \mapsto z + 2\pi \rangle$ ,  $\Gamma_g^1 \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{S}^1_\infty)$  は

$\alpha$  から誘導される.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} = \langle \delta \rangle & \longrightarrow & \Gamma_{g,1} & \longrightarrow & \Gamma_g^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} = \langle z \mapsto z + 2\pi \rangle & \longrightarrow & \text{Homeo}^b(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Homeo}(\mathbb{S}_\infty^1) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

但し,  $\text{Homeo}(\mathbb{S}_\infty^1)$  は  $\mathbb{S}_\infty^1$  上の向きを保つ同相写像全体からなる群で,  $\text{Homeo}^b(\mathbb{R})$  は  $\mathbb{R}$  上の向きを保つ同相写像  $f$  で,  $f(x) + 2\pi = f(x + 2\pi)$  を満たすもの全体からなる群である. また, 記号は 3 のものを用いる.

円環  $\mathbb{D} - \tilde{U}$  の普遍被覆を  $B = \mathbb{R} \times (0, 1)$  とし,  $\partial(\mathbb{D} - \tilde{U})$  の二つの連結成分  $\partial\tilde{U}$ ,  $\mathbb{S}_\infty^1 = \partial\mathbb{D}$  がそれぞれ  $\mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $\mathbb{R} \times \{1\}$  に対応しているとする. 準同型  $\alpha$  は,  $\Gamma_{g,1}$  の各元に対し, その  $\mathbb{S}_\infty^1 = \partial\mathbb{D}$  ( $\partial(\mathbb{D} - \tilde{U})$  の連結成分の一つ) への作用を  $\mathbb{R} \times \{1\}$  への作用にリフトしたものを対応させる写像である. 特に  $\delta$  は  $\mathbb{D} - \tilde{U}$  上で,  $\partial\tilde{U}$  とホモトピックな単純閉曲線に関する Dehn twist なので,  $\mathbb{R} \times \{1\}$  上には  $z \mapsto z + 2\pi$  として作用する. また準同型  $\beta$  は  $\alpha$  から誘導される準同型である.

## 参考文献

- [Ful03] Terry Fuller. Lefschetz fibrations of 4-dimensional manifolds. *Cubo Mat. Educ.*, 5(3):275–294, 2003.
- [KO08] Mustafa Korkmaz and Burak Ozbagci. On sections of elliptic fibrations. *Michigan Math. J.*, 56(1):77–87, 2008.
- [KS09] Mustafa Korkmaz and Andras I. Stipsicz. Lefschetz fibrations on 4-manifolds. In Athanase Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller Theory Volume 2*, pages 271–296. EMS, 2009.
- [Smi01] Ivan Smith. Geometric monodromy and the hyperbolic disc. *Q. J. Math.*, 51(2):217–228, 2001.
- [Hir06] 廣瀬進. 周期的写像の Dehn ツウイストによる表示と Lefschetz ファイバー空間. <http://www.ms.saga-u.ac.jp/~hirose/paper/hakone2006.pdf>, 2006.

# 4次元多様体 (Lefschetz fibration) の基礎

門田 直之 (大阪大学)

## 1 4次元多様体の符号数

4次元多様体の符号数は, 4次元多様体の基本的な位相不変量の1つである. 前半では, 向きづけられた閉4次元多様体の符号数の定義を紹介し, 後半は Lefschetz fibration に関する基礎的な事実を紹介していく. 特に, Lefschetz fibration の構造を持つ4次元多様体のいくつかの例の符号数を具体的に計算する. 主な参考文献は, [4], [2] である. また, 4次元多様体や Lefschetz fibration の基礎的な知識についても [4], [2] を参考にしていきたい.

以下,

- ・ surface : connected, closed, oriented 2-manifold,
- ・ homology 群 :  $\mathbb{Z}$  係数

とする. 4次元多様体の 符号数 を定義するために,

$$\text{交叉数} \rightarrow \text{交叉形式} \rightarrow \text{符号数}$$

の順で定義していく.

### 1.1 交叉数 (2次元バージョン)

oriented connected compact 2 manifold  $M^2$  の 向き を

一次独立なベクトル  $f_1, f_2$  の並べる順序

と解釈する. 図1のように反時計回りに  $f_1, f_2$  を並べるとき,  $(f_1, f_2)$  と書くことにし, 時計回りは  $(f_2, f_1)$  と書く.

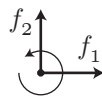


図 1:  $f_1, f_2$  を反時計回りに並べた図.

$\vec{c}_1, \vec{c}_2$  を  $M^2$  中の oriented simple closed curve とし,  $e_1, e_2$  を  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  の向きとする.  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  の横断的に交わった時の交点  $p \in c_1 \cap c_2$  に対し,  $(c_1 \cdot c_2)_p$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) = (f_1, f_2) &\Rightarrow (c_1 \cdot c_2)_p = 1, \\ (e_2, e_1) \neq (f_1, f_2) &\Rightarrow (c_1 \cdot c_2)_p = -1 \end{aligned}$$

特に,  $(c_2 \cdot c_1)_p = -(c_1 \cdot c_2)_p$  となる.

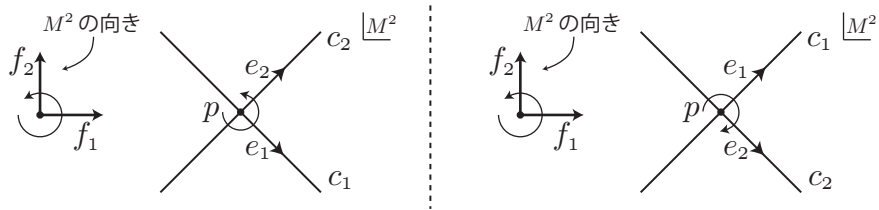


図 2:  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  とその向き  $e_1, e_2$ , 交点  $p \in c_1 \cap c_2$ .

**Def 1.1.**  $c_1$  と  $c_2$  の 交叉数 を次のように定義する:

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 := \sum_{p \in c_1 \cap c_2} (c_1 \cdot c_2)_p.$$

**Ex 1.2.**  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  を図 3 のものとする. このとき,  $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2$  を計算すると,

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = (c_1 \cdot c_2)_{p_1} + (c_1 \cdot c_2)_{p_2} = 0.$$

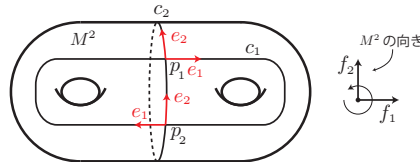


図 3:

**Ex 1.3.**  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  を図 4 のものとする. このとき,  $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2$  を計算すると,

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = (c_1 \cdot c_2)_{p_1} + (c_1 \cdot c_2)_{p_2} = 2$$

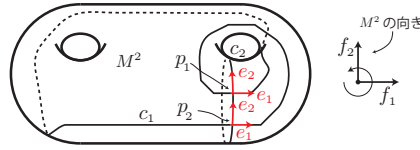


図 4:

**Def 1.4.**  $\vec{c}$  の 自己交叉数 を次のように定義する:

$$\vec{c}^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} := \sum_{p \in c \cap c'} (c \cdot c')_p.$$

ただし,  $c'$  は  $c$  と homotopic な simple closed curve である.

2次元の時と同様に, 4次元でも交叉数, 自己交叉数を定義していく.



図 5:  $c$  と homotopic な simple closed curve の例.

## 1.2 交叉数 (4次元バージョン)

目で見ることはできないが, 4次元多様体の中では一般に面と面は一点で交わることに注意してほしい.

**Claim 1.5.** 4-mfd の中では, 面と面が1点で横断的に交わる.

*Proof.*  $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i \in \mathbb{R}\}$  を考える.

$P_1 := \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_j \in \mathbb{R}\}$ ,  $P_2 := \{(0, 0, x_3, x_4) | x_k \in \mathbb{R}\}$  ( $P_1 \cong P_2 \cong \mathbb{R}^2$ ),

このとき,  $P_1 \cap P_2 = (0, 0, 0, 0)$  □

もし, 面と面が直線で交わっていたとしても, 少し回転することで1点で交わるようにすることができる.

oriented, connected, compact  $C^\infty$  4-manifold  $M^4$  の 向き を

一次独立なベクトル  $f_1, f_2, f_3, f_4$  の並べ方

と解釈し,  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  と fix する.

$\vec{\Sigma}_1, \vec{\Sigma}_2$  を connected, closed, oriented 2-manifold とし,  $(e_1, e_2), (g_1, g_2)$  をその向きとする.  $\vec{\Sigma}_1, \vec{\Sigma}_2$  の横断的に交わった時の交点  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  に対し,  $(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)_p$  を次のように定義する.

$$(e_1, e_2, g_1, g_2) \text{ が } (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ の偶数置換と一致} \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)_p = 1$$

$$(e_1, e_2, g_1, g_2) \text{ が } (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ の奇数置換と一致} \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)_p = -1$$

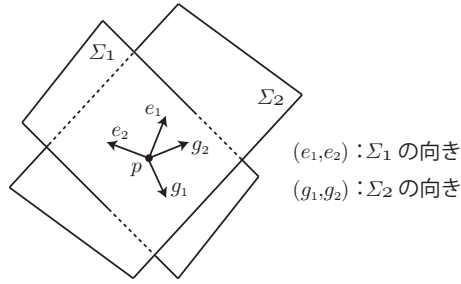


図 6: 点  $p$  の周りのイメージ

**Def 1.6.**  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の 交叉数 を次のように定義する :

$$\vec{\Sigma}_1 \cdot \vec{\Sigma}_2 := \sum_{p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2} (\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)_p.$$

2次元の時と同様に,  $\vec{\Sigma} \in H_1(M^2)$  の 自己交叉数 を

$$\vec{\Sigma}^2 = \vec{\Sigma} \cdot \vec{\Sigma} := \sum_{p \in \Sigma \cap \Sigma'} (\Sigma \cdot \Sigma')_p$$

と定義する. ただし,  $\Sigma'$  は  $\Sigma$  と homotopic な connected, closed, oriented 2-manifold である.

### 1.3 4次元多様体の交叉形式

$M^4$  を oriented, connented, compact, closed  $C^\infty$  4-manifold とする.

**Def 1.7.**  $\Sigma$  を  $M^4$  に滑らかに埋め込まれた surface とする.  $\alpha \in H_2(M^4)$  が  $\Sigma$  により代表されるとは,  $\iota_*([\Sigma]) = \alpha$  となるときをいう (但し,  $\iota : \Sigma \hookrightarrow M^4$ , また,  $[\Sigma] \in H_2(\Sigma)$  は基本類とする).

この状況を  $\alpha = [\Sigma]$  とかく.



**Fact 1.8.** 任意の  $\alpha \in H_2(M^4)$  に対し, 滑らかに埋め込まれた surface  $\Sigma \subset M^4$  が存在し,  $\alpha = [\Sigma]$  となる.

**Def 1.9.**  $M$  : oriented, connected, compact  $C^\infty$  4-manifold とする.

$$\begin{array}{ccc} Q_M : H_2(M) \times H_2(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \Psi & & \Psi \\ ([\Sigma_1], [\Sigma_2]) & \longmapsto & \vec{\Sigma}_1 \cdot \vec{\Sigma}_2 \end{array}$$

を  $M$  の 交叉形式 と呼ぶ (ふつう,  $H^2(M, \partial M)$  で定義する).

**Fact 1.10.**  $Q_M$  は対称双 1 次形式である. すなわち, 次が成り立つ:

- (i)  $Q_M(x, y) = Q_M(y, x)$ ,
- (ii)  $Q_M(x_1 + x_2, y) = Q_M(x_1, y) + Q_M(x_2, y)$ ,
- (iii)  $Q_M(\lambda x, y) = \lambda Q_M(x, y)$  ( $\lambda \in \mathbb{Z}$ ).

よって,  $Q_M$  は次のように 正方行列とみなすことができる:

$$Q_M = (a_i \cdot a_j)_{i,j}.$$

ただし,  $a_1, \dots, a_n \in H_2(M)$  は  $H_2(M)$  の基底とする.

$\Sigma_1$  または  $\Sigma_2$  を torsion とすると  $Q_M([\Sigma_1], [\Sigma_2]) = 0$  となるので,

$$\begin{aligned} H &:= H_2(M)/\mathbf{T} \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \quad (n \text{ 個の直和}) \\ &= \{m_1 a_1 + \dots + m_n a_n \mid m_i \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

( $\mathbf{T}$  は Torsion,  $a_i$  は各  $\mathbb{Z}$  の基底) とすると,  $Q_M$  は

$$Q_M : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$$

と考えてよい.

$H$  を  $\mathbb{Q}$  上に次のように拡張する:

$$\mathbb{Q}H := \{q_1 a_1 + \dots + q_n a_n \mid q_i \in \mathbb{Q}\}.$$

さらに, 次のようにして  $Q_M : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\tilde{Q}_M : \mathbb{Q}H \times \mathbb{Q}H \rightarrow \mathbb{Q}$$

に拡張する:

$x = q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n, y = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \quad (x, y \in \mathbb{Q}H)$  に対し,

$$\tilde{Q}_M(x, y) = \sum_{i,j=1}^n q_i r_j Q_M(a_i, a_j).$$

$\tilde{Q}_M$  も対称双1次形式で, 正方行列とみなせる:

$$\tilde{Q}_M = (a_i \cdot a_j)_{i,j}$$

ただし,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}H$  は  $\mathbb{Q}H$  の基底とする.

**Thm 1.11.**  $\tilde{Q}_M$  のすべての固有値は0にならない ( $M$ : closed から従う).

**Def 1.12.**  $\tilde{Q}_M$  を対角化して考える.

- (i)  $b_2^+(M), b_2^-(M)$ : 対角成分の+, -の成分の個数
- (ii)  $\sigma(M) := b_2^+(M) - b_2^-(M)$ :  $M$  の符号数

**Rem 1.13.**  $b_2^+(M) + b_2^-(M) = b_2(M)$ :  $M$  の第2ベッチ数となる.

**Ex 1.14.**  $\sigma(S^4) = 0$

**Ex 1.15.**  $\sigma(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 1$

**Ex 1.16.**  $\sigma(\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) = -1$  ( $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  の逆向き)

**Ex 1.17.**  $\sigma(S^2 \times S^2) = \sigma(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) = 0$

## 2 Lefschetz fibration と写像類群

### 2.1 Lefschetz fibration

$M$  を oriented, connected, compact  $C^\infty$  4-manifold とする.

種数  $g$  の Lefschetz fibration とは “有限個の Lefschetz 型の特異ファイバーを許す  $S^2$  上の  $\Sigma_g$ -束のようなもの” である. 図7は Lefschetz fibration のイメージである.

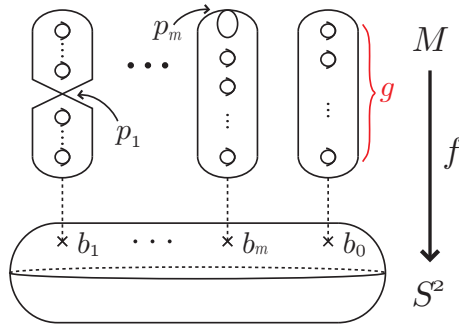


図 7: Lefschetz fibration のイメージ

次の定理は、Lefschetz fibration の研究が活発になった要因の 1 つといえる。

**Thm 2.1** (Gompf+Donaldson).

$M$  が symplectic 構造を持つ  $\iff$   
ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して、 $M \# n \overline{\mathbb{C}P}^2$  が Lefschetz fibration の構造を持つ。  
(実際には少し条件を仮定するが、ここでは簡単な形で紹介しておく.)

**Def 2.2.**  $f : M \rightarrow S^2$  が次の 3 条件を満たす時、 $f$  を種数  $g$  の Lefschetz fibration と呼ぶ。

- (1)  $b_1, \dots, b_m \in S^2$  を  $f$  の臨界値のとき、 $f$  は  $S^2 - \{b_1, \dots, b_m\}$  上の  $\Sigma_g$  束、
- (2)  $f^{-1}(b_i)$  (特異ファイバー) 上にただ 1 つ臨界点  $p_i$  が存在し、 $p_i$  と  $b_i$  の周りで

$$f : (z_1, z_2) \rightarrow z_1^2 + z_2^2,$$

- (3)  $f^{-1}(b)$  は自己交叉数  $(-1)$  の球面を含まない。

特異ファイバーは図 8 のように、大きく分けて 2 タイプと考えることができる。1 つは、非分離的な simple closed curve をつぶす非分離型特異ファイバー、もう 1 つは、分離的な simple closed curve をつぶす分離型特異ファイバーである。

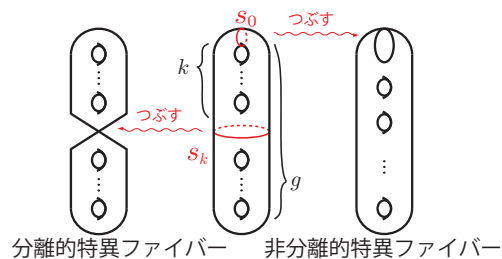


図 8: 特異ファイバーのタイプ

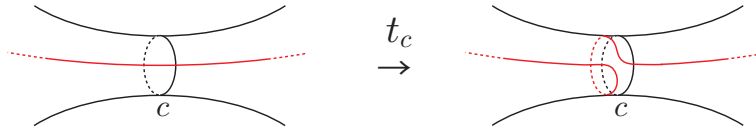
## 2.2 写像類群と monodromy 因数分解

$\Sigma_g$  : 種数  $g$  の有向閉曲面とする.

**Def 2.3.** 次の集合  $\Gamma_g$  を  $\Sigma_g$  の 写像類群 と呼ぶ.

$$\Gamma_g := \{\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g | \text{ori. pre. diffeo.}\} / \text{isotopy}$$

**Def 2.4.** 図 2.4 の写像の isotopy 類は写像類群  $\Gamma_g$  の元であり,  $t_c$  と書く.  $t_c$  simple closed curve  $c$  ( $\subset \Sigma_g$ ) に沿う Dehn twist と呼ぶ.



ここでは, monodromy 因数分解について紹介する.

$f : M \rightarrow S^2$  を種数- $g$  Lefschetz fibration とする.  $B$  を  $f$  の臨界値全体の集合  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  とおく. このとき, monodromy 準同型写像 と呼ばれる次のような  $\pi_1(S^2 - B)$  から  $\Gamma_g$  への準同型写像  $\rho$  が存在することが知られている:

**Fact 2.5.**  $\rho : \pi_1(S^2 - B) \rightarrow \Gamma_g$  : homomorphism s.t.  $\rho(\gamma_i) = t_{c_i}$ .

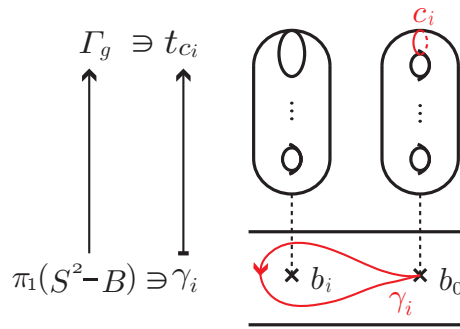


図 9: monodromy 準同型写像

さて,  $\gamma_i \in \pi_1(S^2 - B)$  を図 10 のような loop とすると,  $\gamma_1 \cdots \gamma_m = 1$  となることから次のことを得る.

$$\begin{array}{ccc} \rho & : & \pi_1(S^2 - B) \longrightarrow \Gamma_g \\ & & \cup \qquad \qquad \cup \\ & & \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m = 1 \longmapsto t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_m} = 1 \end{array}$$

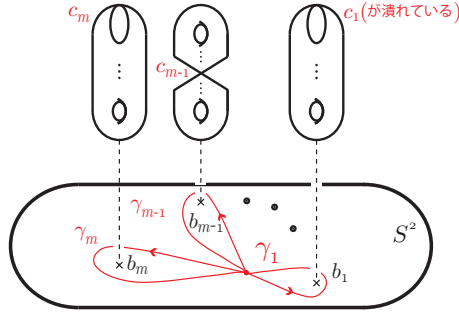


図 10:

**Def 2.6.**  $f : M \rightarrow S^2 : m$  本の特異ファイバーを持つ種数- $g$  Lefschetz fibration に対して定まる  $1 \in \Gamma_g$  の因数分解

$$t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_m} = 1$$

を monodromy 因数分解 と呼ぶ.

**Fact 2.7.**  $m$  本の特異ファイバーを持つ種数- $g$  Lefschetz fibration  $f : M \rightarrow S^2$  に対し, monodromy 因数分解  $t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_m} = 1 \in \Gamma_g$  が定まる. 逆に,  $t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_m} = 1 \in \Gamma_g$  を与えると  $m$  本の特異ファイバーを持つ種数- $g$  Lefschetz fibration が定まる.

特に,  $g \geq 2$  のとき, 2つの monodromy 因数分解が Hurwitz 同値あることの必要十分条件は, その monodromy 因数分解から定まる Lefschetz fibration が同型であることが知られている.

### 2.3 Examples of Lefschetz fibrations (I)

**Fact 2.8.**  $f : M \rightarrow S^2 : 種数-g$  Lefschetz fibration s.t.  $m$  本の特異ファイバーを持つ  $\implies$  オイラー標数  $e(M) = -4(g-1) + m$

以下,  $c_1, \dots, c_{2g+1}$  を図 11 のような curve とする.

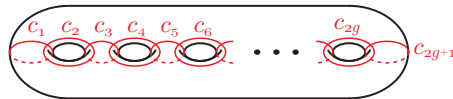


図 11:

**Thm 2.9** (Matsumoto[3],Endo[1]).  $x_1, \dots, x_m$  を  $c_1, \dots, c_{2g+1}$  のどれかとする. このとき, 次のような monodromy 因数分解

$$t_{x_1} t_{x_2} \cdots t_{x_m} = 1 \in \Gamma_g$$

から定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f : M \rightarrow S^2$  の符号数  $\sigma(M)$  は次で与えられる:

$$\sigma(M) = -\frac{g+1}{2g+1}m.$$

(この定理は [3],[1] のかなり弱いバージョンである. より正確な主張は [3],[1] を参考にしていただきたい.)

基本的な Lefschetz fibration の例をいくつか紹介していく.

**Ex 2.10.** monodromy 因数分解

$$(t_{c_{2g+1}} \cdots t_{c_2} t_{c_1}^2 t_{c_2} \cdots t_{c_{2g+1}})^2 = 1 \in \Gamma_g$$

に対して定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$  に対し, オイラー標数, 符号数を計算すると:

$$\begin{aligned} e(M_1) &= -4(g-1) + 4(2g+1) = 4(g+2), \\ \sigma(M_1) &= -\frac{g+1}{2g+1}4(2g+1) = -4(g+1). \end{aligned}$$

**Ex 2.11.** monodromy 因数分解

$$(t_{c_{2g+1}} t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{2g+2} = 1 \in \Gamma_g$$

に対して定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_2 : M_2 \rightarrow S^2$  に対し, オイラー標数, 符号数を計算すると:

$$\begin{aligned} e(M_2) &= -4(g-1) + (2g+1)(2g+2) = 2(2g^2 + g + 3), \\ \sigma(M_2) &= -\frac{g+1}{2g+1}(2g+1)(2g+2) = -2(g+1)^2. \end{aligned}$$

**Ex 2.12.** monodromy 因数分解

$$(t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{4g+2} = 1 \in \Gamma_g$$

に対して定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_3 : M_3 \rightarrow S^2$  に対し, オイラー標数, 符号数を計算すると:

$$\begin{aligned} e(M_3) &= -4(g-1) + 2g(4g+2) = 4(2g^2 + 1), \\ \sigma(M_3) &= -\frac{g+1}{2g+1}2g(4g+2) = -4g(g+1). \end{aligned}$$

## 2.4 Examples of Lefschetz fibrations (II)

2.3節で紹介した Lefschetz fibration の切断を紹介する.

**Def 2.13.** 種数- $g$  Lefschetz fibration  $f : M \rightarrow S^2$  に対し,  $\sigma : S^2 \rightarrow M$  が  $f \circ \sigma = id|_{S^2}$  を満たすとき,  $\sigma^2$  を  $f$  の 切断 と呼ぶ.

切断  $\sigma$  の自己交叉数  $\sigma^2$  を  $\sigma^2 := [\sigma(S^2)]^2$  ( $[\sigma(S^2)] \in H_2(M)$ ) で定義する.

$\Sigma_{g,1}$  を図 12 のように境界  $\partial$  を持つ種数  $g$  の有向曲面とする.

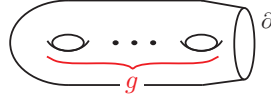


図 12:

**Def 2.14.**  $\Gamma_{g,1}$  を  $\Sigma_{g,1}$  の写像類群と呼び, 次のように定義する:

$$\Gamma_{g,1} := \{\varphi : \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g,1} | \text{ori., pre., diffeo. s.t. } \varphi|_{\partial} = id|_{\partial}\} / \text{isotopy rel. } \partial$$

**Def 2.15.** 図 13 の操作を  $t_{\partial}$  と書き, 境界  $\partial$  に沿う Dehn twist ( $\in \Gamma_{g,1}$ ) と呼ぶ.

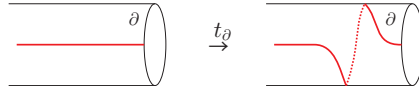


図 13: 境界に沿う Dehn twist

**Fact 2.16.** 種数- $g$  Lefschetz fibration が自己交叉数  $(-k)$  の切断を持つことの必要十分条件は, 定まる monodromy 因数分解  $t_{\iota(x_1)} \cdots t_{\iota(x_m)} = 1 \in \Gamma_g$  に対し,  $\Gamma_{g,1}$  への次のような lift が存在することである:

$$t_{x_1} \cdots t_{x_m} = t_{\partial}^k \in \Gamma_{g,1}$$

ただし,  $\iota$  は埋め込み  $\iota : \Sigma_g \hookrightarrow \Sigma_{g,1}$  である.

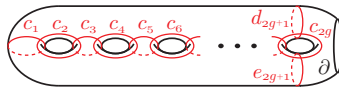


図 14:

$c_1, \dots, c_{2g}, d_{2g+1}, e_{2g+1}$  を図 14 のような  $\Sigma_{g,1}$  上の simple closed curve とする.



**Ex 2.17.** Ex.2.10 の monodromy 因数分解  $(t_{c_{2g+1}} \cdots t_{c_2} t_{c_1}^2 t_{c_2} \cdots t_{c_{2g+1}})^2 = 1$  から定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$  は自己交叉数  $(-1)$  の切断を持つ. 実際,  $\Gamma_{g,1}$  において次のような関係式を持つ:

$$(t_{d_{2g+1}} t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1}^2 t_{c_2} \cdots t_{c_{2g}} t_{e_{2g+1}})^2 = t_\partial.$$

$\iota(d_{2g+1}) = \iota(e_{2g+1}) = c_{2g+1}$ ,  $\iota(c_i) = c_i$  であることに注意してほしい.

**Ex 2.18.** Ex.2.11 の monodromy 因数分解  $(t_{c_{2g+1}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{2g+2} = 1$  から定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_2 : M_2 \rightarrow S^2$  は自己交叉数  $(-1)$  の切断を持つ. 実際,  $\Gamma_{g,1}$  において次のような関係式を持つ:

$$(t_{d_{2g+1}} t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{2g+2} = t_\partial.$$

$\iota(d_{2g+1}) = c_{2g+1}$ ,  $\iota(c_i) = c_i$  であることに注意してほしい.

**Ex 2.19.** Ex.2.12 の monodromy 因数分解  $(t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{4g+2} = 1$  から定まる種数- $g$  Lefschetz fibration  $f_3 : M_3 \rightarrow S^2$  は自己交叉数  $(-1)$  の切断を持つ. 実際,  $\Gamma_{g,1}$  において次のような関係式を持つ:

$$(t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2} t_{c_1})^{4g+2} = t_\partial$$

$\iota(c_i) = c_i$  であることに注意してほしい.

## 参考文献

- [1] H. Endo; *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann., **316** (2000), 237–257.
- [2] R. Gompf and A. Stipsicz; *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
- [3] Y. Matsumoto; *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 123–148, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [4] 松本幸夫; *4次元のトポロジー*, 日本評論社 1991.

## Section 3 Irreducible Lefschetz fibrations

### Question 3.1 と Proposition 3.2 の解説

遠藤 久顕 (大阪大学大学院理学研究科)

#### はじめに

筆者が輪読を担当した第3節の前半 ([Sm1] の 223 ページ 16 行目から 224 ページ 21 行目までの約 1 ページ) は, Ivan Smith の専門分野であるシンプレクティック幾何学や複素幾何学の手法が用いられている部分である. 筆者はこの部分の解説者として適任ではないし, Smith の議論のうちのいくつかを理解していないが, 担当者ということで報告を書くことをお許しいただければと思う.

以下の文章では, 第3節の前半のうち筆者が理解したと思われる部分について, Smith の議論を筆者がどのように解釈したのかを詳しく述べた. 一方で, 筆者が理解していない部分がどの部分であるかをきちんと記した. もちろん筆者の理解が誤解である可能性も小さくないので, 原論文 [Sm1] の該当部分と見比べながら読んでいただくことを想定している.

#### 1 Tian の問題

はじめに, Lefschetz ファイバー空間の定義を思い出しておく. 例えば, [Ka], [Ma], [GS, Chapter 8] などに詳しい解説がある.

$S^2$  を 2次元球面とし,  $\Sigma_g$  を種数  $g$  の向きづけ可能な閉曲面とする.  $S^2, \Sigma_g$  はいずれも 2次元  $C^\infty$  級多様体と考えることとし, それぞれに一つずつ向きを定めておく.  $M$  を向きづけられた 4次元  $C^\infty$  級閉多様体とし,  $f: M \rightarrow S^2$  を  $C^\infty$  級写像とする.

**定義**  $f: M \rightarrow S^2$  が種数  $g$  の **Lefschetz ファイバー空間** であるとは,  $f$  が次の条件 (i), (ii) をみたすことである:

(i)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  をもち, 各**特異ファイバー**  $F_i := f^{-1}(b_i)$  には唯 1 つの臨界点  $p_i \in M$  が存在する. また,  $f$  の  $f^{-1}(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\})$  への制限は  $\Sigma_g$  をファイバーとする  $C^\infty$  級ファイバー束である;

(ii) 各  $p_i, b_i$  を中心とする  $C^\infty$  級局所複素座標  $(z_1, z_2), w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. (このとき局所複素座標の定める向きが,  $M, S^2$  の向きと両立するものとする).

Lefschetz ファイバー空間  $f: M \rightarrow S^2$  に対し,  $M$  を全空間,  $S^2$  を底空間,  $f$  を射影,  $\Sigma_g$  をファイバーなどとよぶ.  $\diamond$

**定義** Lefschetz ファイバー空間  $f: M \rightarrow S^2$  が**相対的に極小**であるとは,  $M$  に埋め込まれた自己交叉数  $-1$  の 2次元球面が,  $f$  のどの特異ファイバーにも含まれていないことである.  $\diamond$

種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow S^2$  の模式図を以下に示す. 4次元多様体そのものを図示することはできないので, 次元を半分にして  $M$  の図を描いている.

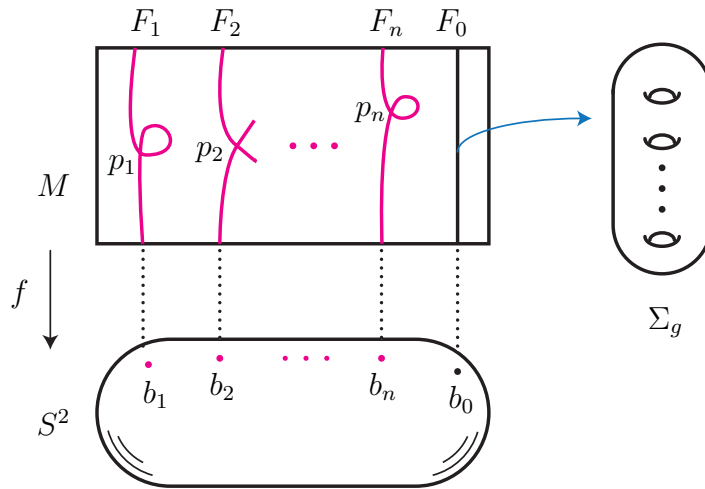


図 1: 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow S^2$

さて, 種数 0 の Lefschetz ファイバー空間について, 次のことが知られている.

**命題** (cf. [GS, Proposition 8.1.7]) 相対的に極小な種数 0 の Lefschetz ファイバー空間は,  $S^2$  上の  $S^2$  をファイバーとする  $C^\infty$  級ファイバー束である.  $\diamond$

Smale [Sma] により,  $S^2$  の向きを保つ微分同相群  $\text{Diff}_+(S^2)$  は特殊直交群  $SO(3)$  にホモトピー同値であることが示されている. 従って,  $S^2$  上の  $S^2$  をファイバーとする  $C^\infty$  級ファイバー束の構造群は  $SO(3)$  に簡約され, 自明なファイバー束  $S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ , もしくは非自明なファイバー束  $S^2 \tilde{\times} S^2 \rightarrow S^2$  のいずれかに同型になる (cf. [GS, Example 4.1.4(e)]). さらに, これら 2 つのファイバー束は,  $\mathbb{C}P^1$  上の  $\mathbb{C}P^1$  をファイバーとする正則ファイバー束  $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{C}P^1, \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  に  $C^\infty$  級ファイバー束としてそれぞれ同型になる. ここで,  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1$  は Hirzebruch 曲面とよばれる小平次元  $-\infty$  の複素曲面である (cf. [GS, Example 3.4.7]). 以上より, 相対的に極小な種数 0 の任意の Lefschetz ファイバー空間は, 正則な Lefschetz ファイバー空間に同型であることがわかった.

次に, 種数 1 の Lefschetz ファイバー空間については, 次のことが知られている.

**定理** (Moishezon [Mo, Theorem 9])  $f : M \rightarrow S^2$  を相対的に極小な種数 1 の Lefschetz ファイバー空間とし, 少なくとも 1 本の特異ファイバーをもつものとする. このとき,  $f$  は種数 1 の正則 Lefschetz ファイバー空間  $E(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  のいくつかのファイバー和に同型である.  $\diamond$

すなわち種数 1 の場合にも, 基本的な構成要素である正則 Lefschetz ファイバー空間をファイバー和という操作によって組み合わせることにより, すべての Lefschetz

ファイバー空間がえられることがわかる. 正則 Lefschetz ファイバー空間  $E(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  は 12 本の特異ファイバーをもっており, 全空間  $E(1)$  は  $\mathbb{C}P^2 \# 9\mathbb{C}P^2$  に  $C^\infty$  級微分同相であることが知られている (2 でもう少し詳しく述べる).

上の定理に現れたファイバー和の定義を振り返っておく.

**定義** 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : M \rightarrow S^2$ ,  $f' : M' \rightarrow S^2$  を考え,  $f, f'$  の正則値のみを含む円板  $D \subset B$ ,  $D' \subset B'$  をそれぞれ選ぶ. 基点  $b_0 \in \partial D$ ,  $b'_0 \in \partial D'$  をとり,  $F_0 := f^{-1}(b_0)$ ,  $F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$  とおく. このとき, 向きを保つ  $C^\infty$  級微分同相  $\varphi : F_0 \rightarrow F'_0$  と向きを逆にする  $C^\infty$  級微分同相  $\partial D \rightarrow \partial D'$  によって,  $M - f^{-1}(\text{Int } D)$  と  $M' - f'^{-1}(\text{Int } D')$  を双方のファイバー構造を保つように接合することにより, 種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f \# f' : M \#_F M' \rightarrow B \# B'$  がえられる. これを  $f$  と  $f'$  の ( $\varphi$  による) **ファイバー和** (fiber sum) という.  $\varphi$  を強調するときには,  $f \# f'$  を  $f \#_\varphi f'$  と書く.  $\diamond$

ファイバー和  $f \#_\varphi f'$  の全空間  $M \#_F M'$  の微分同相類は,  $\varphi$  のアイソトピー類のみで決まる. 一般に,  $\varphi$  を取り替えると  $M \#_F M'$  の微分同相類は変化する. 一方,  $E(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  の  $n$  個のコピーのファイバー和は  $n$  のみに依存し, ファイバー和に用いる  $\varphi$  の取り方にはよらない (cf. [GS, Lemma 8.3.6]). この 4 次元  $C^\infty$  級多様体 (種数 1 の Lefschetz ファイバー空間の全空間) を  $E(n)$  と表す. 上に述べた Moishezon の定理は, 種数 1 の Lefschetz ファイバー空間は本質的には  $E(n) \rightarrow S^2$  しかない, ということを示している.

この状況をふまえると, G. Tian による次の問題はとても自然に感じられる.

**問題** (G. Tian, [Sm1, Question 3.1])  $f : M \rightarrow S^2$  を相対的に極小な種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間とし,  $g \geq 2$  かつ  $\pi_1(M) = 1$  であるとする. このとき,  $f$  はいくつかの種数  $g$  の正則 Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に同型であるか?  $\diamond$

Smith は自身の学位論文の中で, 正則 Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に分解しないような Lefschetz ファイバー空間を構成しているようである. ただし, その全空間は単連結ではないらしい. 従って, 上の問題において  $\pi_1(M) = 1$  という仮定は本質的である. ちなみに, Smith の学位論文の例がどのようなものか筆者は知らないが, 彼の他の論文の中にそれらしき例を見つけることはできる (cf. [Sm2, Lemma 7.4]).

さて, 第 3 節の前半の主結果は次の命題である.

**命題** (Smith, [Sm1, Proposition 3.2]) 相対的に極小な Lefschetz ファイバー空間  $f : Z' \rightarrow S^2$  であって, 次の (1), (2), (3) をみたすものが存在する:

- (1)  $f$  のファイバーの種数は 6 以上である.
- (2)  $Z'$  は K3 曲面に同相な 4 次元  $C^\infty$  級多様体  $X$  のブローアップであり,  $X$  は複素構造をもたない.

(3)  $f$  は非自明な Kähler Lefschetz ファイバー空間のファイバー和には分解しない.  $\diamond$

この命題の (3) に現れる “Kähler Lefschetz ファイバー空間のファイバー和” は “a Kähler sum” を訳したものであるが, Kähler sum の定義がどこにも書いていないので, 本当の意味はよくわからない. また, Smith はこの命題が Tian の問題への否定的な解答を与えていると述べているが, それならばなぜ “正則 Lefschetz ファイバー空間のファイバー和” という術語を用いないのかも不明である.

以下では, この命題の証明について筆者なりの解説を試みる.

## 2 Knot surgery と Lefschetz pencil

ここでは, Smith の Lefschetz ファイバー空間  $f: Z' \rightarrow S^2$  の一つの構成法を述べる. まずは構成のあらましを見ておくことにする.

- ❶  $E(1)$  の 2 つのコピーのファイバー和  $E(2)$  は K3 曲面に微分同相である.
- ❷ ファイバー結び目  $K$  によって  $E(2)$  を knot surgery した多様体  $E(2)_K$  を考える. Gompf の定理より  $E(2)_K$  はシンプレクティックである.
- ❸ 複素曲面の分類と Seiberg-Witten 不変量の計算から,  $K$  をうまくとると,  $X := E(2)_K$  は複素構造をもたないことがわかる.
- ❹  $X$  は symplectic なので, Donaldson の定理より  $X$  は Lefschetz pencil の構造をもつ. しかもファイバーの種数を 6 以上にすることができる.
- ❺  $X$  の base locus をブローアップすることにより, 求める Lefschetz ファイバー空間  $f: Z' \rightarrow S^2$  がえられる.

❶～❺に現れた用語を順に解説しながら Smith の構成を追っていく.

Knot surgery は Fintushel と Stern [FS2] によって導入された 4 次元多様体の改変操作であり, 同相であるが微分同相ではない多様体を大量に生み出す画期的な方法である (cf. [Sc, Chapter 12]). ここでは  $E(n)$  の場合に限って説明する.

種数 1 の Lefschetz ファイバー空間  $E(n) \rightarrow S^2$  の一般ファイバーを  $T$  とし,  $T$  のファイバー近傍を  $\nu T$  とする.  $T$  は 2 次元トーラス  $T^2$  に  $C^\infty$  級微分同相であり,  $\nu T$  は  $T^2 \times D^2$  に  $C^\infty$  級微分同相である.  $S^3$  内の結び目  $K$  に対し,  $K$  の管状近傍を  $\nu K$ ,  $K$  の外部を  $E(K) := S^3 - \text{Int } \nu K$  とする. 向きを逆にする  $C^\infty$  級微分同相  $\varphi: \partial E(K) \times S^1 \rightarrow \partial \nu T$  であって,  $K$  の (preferred) longitude を  $\partial \nu T \rightarrow \partial D^2$  の切断にうつすようなものをとる.

**定義** (Fintushel-Stern [FS2])  $E(n)_K := (E(n) - \text{Int } \nu T) \cup_\varphi (E(K) \times S^1)$  を,  $K$  によって  $E(n)$  を **knot surgery** してえられる多様体という.  $\diamond$

$E(n)_K$  は  $E(n)$  に同相であるが,  $\varphi$  の取り方に不定性があるため,  $E(n)_K$  の微分同相類が一意に決まるかどうかはわからない.  $E(n)_K$  という記号は, 上のようにして構成される多様体たちを十把一絡げにしたものである.

さて、シンプレクティック・ファイバー和 [Go] を用いると、次のことがわかる。

**命題** (Fintushel-Stern [FS2])  $K$  がファイバー結び目 (すなわち,  $E(K)$  が  $K$  の Seifert 曲面をファイバーとする  $S^1$  上のファイバー束となる) ならば,  $E(n)_K$  はシンプレクティック構造をもつ.  $\diamond$

次に Seiberg-Witten 不変量について簡単に復習しておく (cf. [GS, §2.4, §3.1, §3.3], [FS3, Lecture 2]).

$M$  を向きづけられた単連結な 4次元  $C^\infty$  級閉多様体とし,  $b_2^+(M)$  は 3 以上の奇数であるとする.  $M$  の **Seiberg-Witten 不変量** とは,  $H^2(M; \mathbb{Z})$  の特性元全体の集合  $\mathcal{C}_M := \{\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z}) \mid \alpha \equiv w_2(M) \pmod{2}\}$  上で定義された, ある整数値関数  $SW_M : \mathcal{C}_M \rightarrow \mathbb{Z}$  である.  $\mathcal{B}_M := \{\alpha \in \mathcal{C}_M \mid SW_M(\alpha) \neq 0\}$  は有限集合となり,  $\mathcal{B}_M$  の元は Seiberg-Witten 基本類とよばれる.

**定義**  $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$  に対し, 群環  $\mathbb{Z}H^2(M; \mathbb{Z})$  の対応する元を  $t_\alpha$  とする. また,  $H^2(M; \mathbb{Z})$  の演算を積で表す. すなわち,  $t_\alpha \cdot t_\beta = t_{\alpha+\beta}$ ,  $t_\alpha^{-1} = t_{-\alpha}$ ,  $t_0 = 1$  である.  $\mathbb{Z}H^2(M; \mathbb{Z})$  の元  $SW_M := \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_M} SW_M(\alpha) \cdot t_\alpha$  を,  $M$  の **Seiberg-Witten 級数** という.  $\diamond$

$M$  の Seiberg-Witten 不変量  $SW_M$ , 従って Seiberg-Witten 級数  $SW_M$  は,  $M$  の微分同相不変量であることが知られている.

さて,  $E(2)_K$  の Seiberg-Witten 不変量に関する結果を紹介しておく. まず  $E(n)$  の Seiberg-Witten 不変量は具体的に計算されている.  $n = 2$  の場合は次のように簡明な形になる.

**定理** (Fintushel-Stern [FS1], Friedman-Morgan [FM])  $SW_{E(2)} = 1$  である. すなわち,  $E(2)$  の Seiberg-Witten 基本類は 0 のみであり,  $SW_{E(2)}(0) = 1$  である.  $\diamond$

$S^3$  内の結び目  $K$  によって  $E(n)$  を knot surgery して得られる多様体  $E(n)_K$  の Seiberg-Witten 不変量は次のように計算される.

**定理** (Fintushel-Stern [FS2])  $K$  の対称化された Alexander 多項式を  $\Delta_K(t)$  とし,  $E(n)$  の一般ファイバー  $T$  のホモロジー類の Poincaré 双対を  $t := t_{PD[T]}$  とおく. このとき,  $SW_{E(n)_K} = SW_{E(n)} \cdot \Delta_K(t)$  が成り立つ.  $\diamond$

定理から, 結び目  $K_1, K_2$  に対し  $\Delta_{K_1}(t) \neq \Delta_{K_2}(t)$  ならば,  $E(n)_{K_1}$  と  $E(n)_{K_2}$  は互いに同相であるが微分同相ではないことがわかる. 2つの定理から次の系が従う.

**系**  $SW_{E(2)_K} = \Delta_K(t)$  である.

以上の準備のもと, Smith の構成の前半部分を説明する.

❶について: K3 曲面とは,  $c_1 = 0$  であるような単連結複素曲面のことである. 小平邦彦氏により, 任意の 2つの K3 曲面は互いに変形同値であり, 従って微分同相

であることが示されている. 種数 1 の Lefschetz ファイバー空間  $E(2)$  には複素構造を定めることができ, K3 曲面に微分同相となる (cf. [GS, §7.3]).

②について:  $S^3$  内のファイバー結び目  $K$  と  $E(2)$  から, 上に述べたように  $E(2)_K$  が構成される.  $E(2)_K$  は  $E(2)$  に同相であり, シンプレクティック構造をもつ.

③について: ファイバー結び目  $K$  をうまく選ぶと,  $E(2)_K$  は複素構造をもちえないことがわかる. 以下ではこれを説明する.  $E(2)_K$  が複素構造をもつと仮定する.  $E(2)_K$  の交叉形式は K3 曲面のそれと同型であり,  $2(-E_8) \oplus 3H$  である. 特に,  $E(2)_K$  の交叉形式は even であり, 従って  $E(2)_K$  は複素曲面として極小である. (例外曲線が存在すれば交叉形式は必ず odd になる.) 複素曲面の分類から, 極小な単連結複素曲面で  $E(2)$  に同相であるものは,  $E(2)_{r,s}$  に微分同相である (cf. [GS, Theorem 3.4.19, Theorem 3.4.20, pp. 84–85]). ここで,  $E(2)_{r,s}$  は  $E(2)$  に重複度  $r, s$  ( $(r, s) = 1, r, s$  は奇数) の対数変換 (cf. [GS, §3.3]) を施した多様体であり, Seiberg-Witten 級数は

$$SW_{E(2)_{r,s}} = \frac{(t^{rs} - t^{-rs})^2}{(t^r - t^{-r})(t^s - t^{-s})}$$

である (cf. [FS3, Lecture 2, §9]). さて,  $(p, q)$  型のトーラス結び目を  $T_{p,q}$  ( $(p, q) = 1$ ) とし,  $K = T_{p,q}$  とおく. このとき,  $K$  はファイバー結び目であり,  $E(2)_K$  の Seiberg-Witten 級数は

$$SW_{E(2)_K} = \Delta_K(t) = t^{-(p-1)(q-1)/2} \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$$

となる (cf. [Sa, §9.2]).  $\deg SW_{E(2)_{r,s}} = 2rs - r - s = (2r - 1)s - r$  であるから,  $SW_{E(2)_{r,s}}$  の次数は常に偶数である. 一方,  $\deg SW_{E(2)_K} = (p - 1)(q - 1)/2$  であるので, 例えば  $(p, q) = (2, 3)$  とすれば,  $SW_{E(2)_K}$  の次数は 1 となる. つまり, あるファイバー結び目  $K$  であって, 任意の  $r, s$  ( $(r, s) = 1, r, s$  は奇数) に対して  $SW_{E(2)_K} \neq SW_{E(2)_{r,s}}$  であるようなもの存在する. これは  $E(2)_K$  がどの  $E(2)_{r,s}$  とも微分同相でないことを意味するので,  $E(2)_K$  が複素構造をもつことに矛盾する. 従って,  $E(2)_K$  は複素構造をもたない.

以降, このような  $E(2)_K$  を  $X$  と書く.

用語の解説に戻る.

S. Lefschetz により非特異代数多様体のトポロジーを調べるために用いられた, いわゆる Lefschetz pencil (cf. [La]) は, 近年シンプレクティック多様体の研究に転用されている. ここではそのような立場から Lefschetz pencil の定義を述べる.

$M$  を向きづけられた 4 次元  $C^\infty$  級閉多様体とし,  $B$  を  $M$  の空でない有限部分集合とする. また,  $f: M - B \rightarrow S^2$  を  $C^\infty$  級写像とする.

**定義**  $f: M - B \rightarrow S^2$  が種数  $g$  の Lefschetz pencil であるとは,  $f$  が次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすことである:



- (i) 各  $p \in B$  の近傍において,  $f$  は射影化  $\mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$  に同型である;
- (ii)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  をもち, 各  $f^{-1}(b_i)$  には唯 1 つの臨界点  $p_i \in M$  が存在する. 各  $p_i, b_i$  を中心とする  $C^\infty$  級局所複素座標  $(z_1, z_2)$ ,  $w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. (このとき局所複素座標の定める向きが,  $M, S^2$  の向きと両立するものとする).
- (iii) 各  $b \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  に対し,  $f^{-1}(b) \cup B$  は  $M$  の部分多様体であり,  $\Sigma_g$  に  $C^\infty$  級微分同相である.  $B$  を **base locus** という.  $\diamond$

**注意** Lefschetz ファイバー空間の場合と同様に,  $M$  を全空間,  $S^2$  を底空間,  $f$  を射影,  $\Sigma_g$  をファイバー,  $F_i := f^{-1}(b_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を特異ファイバーなどとよぶ. また, 相対的に極小であることも同様に定義する.  $\diamond$

次に, Donaldson によるシンプレクティック多様体上の Lefschetz pencil の存在定理を, 4次元の場合に限って紹介する. 尚, シンプレクティック多様体の基礎事項に関しては [MS], [GS, Chapter 10]などを参照してほしい.

$M$  を 4次元  $C^\infty$  級閉多様体とし,  $\omega$  を  $M$  上のシンプレクティック形式とする.  $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$  であるとし,  $m := \langle [\omega \wedge \omega], [M] \rangle$  とおく.  $m$  は正の整数となる.

**定理** (Donaldson [Do]) ある  $k_0 > 0$  が存在して, 任意の  $k > k_0$  に対し,  $M$  は相対的に極小な Lefschetz pencil  $f : M - B \rightarrow S^2$  の構造をもち, 次の (i), (ii), (iii) をみたす:

- (i) 各  $b \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  に対し,  $F := f^{-1}(b) \cup B$  は  $M$  のシンプレクティック部分多様体である;
- (ii)  $[F] \in H_2(M; \mathbb{Z})$  は  $k[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$  の Poincaré 双対である;
- (iii)  $B$  は  $mk^2$  個の点からなる集合である (実は (ii) から従う).  $\diamond$

定理には述べられていないが,  $f$  のファイバー  $F$  の種数  $g(F)$  を  $k$  を用いて表すことができる.  $\omega$  と両立する概複素構造  $J$  をとり,  $K_M := -c_1(TM, J)$  とおく. 同伴公式 (cf. [GS, Theorem 1.4.17]) より,

$$2g(F) - 2 = [F]^2 - c_1(TM, J) \cdot [F] = k^2 \cdot \text{PD}[\omega]^2 + K_M \cdot k[\omega] = mk^2 + (K_M \cdot [\omega])k$$

となる. 特に,  $k$  を大きくすれば  $g(F)$  も大きくなることがわかる.

さて, Lefschetz pencil から Lefschetz ファイバー空間を構成する簡単な方法が知られている. それを紹介する. Lefschetz pencil と Lefschetz ファイバー空間の違いは, 前者が base locus をもっていることである. 従って, base locus をうまくなくすことができれば, 前者を後者に変えることができる. そこで, まず base locus の local model を考える (cf. [GS, §2.2]).

射影化  $f : \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1 : (z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2]$  を考える.  $0 \in \mathbb{C}^2$  が base locus にあたる.  $0$  で  $\mathbb{C}^2$  をブローアップするということは, 第 2 成分への射影

$$\pi_2 : \tau := \{([u, v], (x, y)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid xv = yu\} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

を考え、 $\mathbb{C}^2$  を  $\tau$  に置き換えることであつた。ここで、 $E := \{([u, v], (x, y)) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid x = y = 0\}$  とおくと、第1成分への射影  $\pi_1 : \tau \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  は  $\pi_1|_{\tau-E} = f|_{\mathbb{C}^2-\{0\}} \circ \pi_2|_{\tau-E}$  をみたす。そこで、 $f$  を複素直線束  $\pi_1$  に取り替えることにより、base locus が消えてファイバー束がえられる。このとき、 $E$  は  $\tau$  の自己交叉数  $-1$  の切断になつてゐる。 $\tau$  は  $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} - \{[1 : 0 : 0]\}$  に  $C^\infty$  級微分同相であるから (cf. [GS, Proposition 2.2.5]), この操作により  $\mathbb{C}^2$  に  $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  が連結和されたことになる。

以上の観察を一般的な状況に当てはめる。 $f : M - B \rightarrow S^2$  を Lefschetz pencil とし、base locus  $B$  が  $N$  個の点からなる集合であるとする。このとき、 $B$  の各点に上の操作を施すことにより、 $f$  と同じ種数のファイバーをもつ Lefschetz ファイバー空間  $f' : M \# N\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \rightarrow S^2$  がえられる。 $f'$  は自己交叉数  $-1$  の切断を  $N$  個もつており、 $B \neq \emptyset$  より  $N > 0$  である。

**例**  $p_0(x_0, x_1, x_2), p_1(x_0, x_1, x_2)$  を  $x_0, x_1, x_2$  についての3次斉次式とする。各  $t = [t_0 : t_1] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  に対して、

$$H_t := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mid t_0 p_0(x_0, x_1, x_2) + t_1 p_1(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

とおく。Bézout の定理より、3次曲線  $H_{[1:0]}$  と  $H_{[0:1]}$  は重複度をこめてちょうど9点で交わる。 $p_0, p_1$  をうまくとることにより、これらが異なる9点  $P_1, \dots, P_9$  で交わるようにすることができる。このとき、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \{P_1, \dots, P_9\}$  の任意の点は、唯一つの  $H_t$  に含まれるので、写像  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \{P_1, \dots, P_9\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  を、 $H_t - \{P_1, \dots, P_9\}$  の点をすべて  $t$  にうつすものとして定義する。 $p_0, p_1$  をうまくとれば、これは種数1の Lefschetz pencil となるので、base locus をブローアップすることにより、種数1の Lefschetz ファイバー空間  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  がえられる。これが **1** で述べた正則 Lefschetz ファイバー空間  $E(1) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  に他ならない。◇

以上の準備のもと、Smith の構成の後半部分を説明する。

④について： $X = E(2)_K$  はシンプレクティック多様体であつたから、Donaldson の定理により Lefschetz pencil の構造をもつ ( $X$  上のシンプレクティック形式  $\omega$  を適当に定数倍することにより、 $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$  とすることができる)。  $k$  を十分大きくとることにより、ファイバーの種数を6以上にすることができる。

⑤について：Donaldson の定理のように  $m, k$  をとるとき、 $X$  に定まる Lefschetz pencil  $f : X - B \rightarrow S^2$  の base locus  $B$  は  $mk^2$  個の点からなる。 $B$  の各点で  $X$  をブローアップすることにより、Lefschetz ファイバー空間  $f' : X \# mk^2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \rightarrow S^2$  がえられる。 $f'$  は自己交叉数  $-1$  の切断を  $mk^2 (> 0)$  個もつ。

以降、この  $X \# mk^2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  を  $Z'$  と書く。

以上で、**1** の最後に述べた命題の  $X, Z'$  の構成と (1), (2) の証明が完了した。残るは (3) の証明である。

### 3 ファイバー和に関する既約性

ここでは、**2**で構成した Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に関する既約性を証明する。しかし、実はこの部分の証明を筆者はよく理解していない。以下に述べる証明にはいくつかブラックボックスがある。そこで、そのような点には疑問符“?”を付しておき、とりあえず認めて使うことにする。

まず、Lefschetz ファイバー空間が Kähler であることの定義を与えよう。これは Smith ではなく筆者が勝手に考えたものである(従って、本当は疑問符を付すべきである)。 $f: M \rightarrow S^2$  を相対的に極小な Lefschetz ファイバー空間とする。

**定義**  $M, S^2$  にそれぞれ Kähler 多様体の構造が定まり、 $f$  が正則であって、 $f$  の一般ファイバーが Kähler であるとき、 $f$  は **Kähler** であるという。◇

**1**の最後に述べた命題の証明は、次を示すことにより終了する。

**命題 2**で構成した Lefschetz ファイバー空間  $f': Z' \rightarrow S^2$  は、非自明な Kähler Lefschetz ファイバー空間のファイバー和には分解しない。◇

以下では、この命題を背理法によって証明する。そこでまず、 $f': Z' \rightarrow S^2$  が2つの非自明な Kähler Lefschetz ファイバー空間  $W_1 \rightarrow S^2, W_2 \rightarrow S^2$  のファイバー和に同型であると仮定する： $Z' \cong W_1 \#_F W_2$ 。

最初に、 $W_1, W_2$  の符号数と Euler 標数の和を計算してみる。符号数に関しては、Novikov 加法性 (cf. [Ki, Chapter II, Theorem 5.3]) から  $\sigma(Z') = \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$  であることが容易に従う。 $f'$  のファイバーの種数を  $g$  とすると、Euler 標数は  $e(Z') = e(W_1) + e(W_2) + 4(g-1)$  となる。これらを合わせると、次がえられる。

$$\begin{aligned} & (\sigma(W_1) + e(W_1)) + (\sigma(W_2) + e(W_2)) = \sigma(Z') + e(Z') - 4(g-1) \\ & = \sigma(X \# mk^2 \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) + e(X \# mk^2 \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) - 4(g-1) \\ & = \sigma(X) - mk^2 + e(X) + mk^2 - 4(g-1) = \sigma(E(2)_K) + e(E(2)_K) - 4(g-1) \\ & = \sigma(E(2)) + e(E(2)) - 4(g-1) = -16 + 24 - 4(g-1) \\ & = 12 - 4g \quad (*0) \end{aligned}$$

ここで、 $g \geq 6$  であつたから、 $12 - 4g < 0$  となる。従って、 $\sigma(W_1) + e(W_1) < 0$  または  $\sigma(W_2) + e(W_2) < 0$  である。そこで、 $\sigma(W_1) + e(W_1) < 0$  であるとする(このように仮定しても一般性を失わない)。

さて、 $W_1$  は Kähler 多様体、特にコンパクト複素曲面である。従って、 $W_1$  の正則 Euler 標数  $\chi_h(W_1) := \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim H^i(W_1; \mathcal{O}_{W_1})$  が定義される。ここで、 $\mathcal{O}_{W_1}$  は  $W_1$  の構造層である。Noether の公式より  $\chi_h(W_1) = (c_1^2[W_1] + c_2[W_1])/12$ 、Hirzebruch の符号数定理より  $p_1[W_1] = 3\sigma(W_1)$  であり、特性類の定義と基本性質から  $p_1[W_1] = c_1^2[W_1] - 2c_2[W_1]$ 、 $c_2[W_1] = e(W_1)$  であるから、上の計算より

$$\chi_h(W_1) = (\sigma(W_1) + e(W_1))/4 < 0$$

となる。ところで、次の定理が知られている。

**定理** (Castelnuovo-de Franchis, cf. [GH, Chapter 4, §5])  $S$  をコンパクト複素曲面とする.  $\chi_h(S) < 0$  ならば,  $S$  は非有理線織面またはそのブローアップである.  $\diamond$

定理から,  $W_1$  は非有理線織面またはそのブローアップである. 従って  $W_1$  は,  $S^2$  をファイバーとする  $\Sigma_h$  上のファイバー束の全空間のブローアップ  $\Sigma_h \tilde{\times} S^2 \#_p \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  に  $C^\infty$  級微分同相である ( $h \geq 1, p \geq 0$ ). すると,  $W_1$  の基本群は

$$\pi_1(W_1) \cong \pi_1(\Sigma_h \tilde{\times} S^2 \#_p \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) \cong \pi_1(\Sigma_h \tilde{\times} S^2) \cong \pi_1(\Sigma_h)$$

となり, 線織面の底空間の基本群に同型になる. 以下ではしばらくの間, 線織面の底曲面の種数  $h$  と, Lefschetz ファイバー空間  $W_1 \rightarrow S^2$  のファイバーの種数  $g$  との大小関係に専ら注目する.

$W_1$  は種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間の全空間であったから,  $\pi_1(W_1)$  はファイバーの基本群  $\pi_1(\Sigma_g)$  の商群である (cf. [ABKP, Lemma 3.2]). よって,  $\pi_1(\Sigma_g)$  から  $\pi_1(\Sigma_h)$  への全射準同型が存在する. アーベル化をとることにより,  $\text{rank } H_1(\Sigma_g) \geq \text{rank } H_1(\Sigma_h)$ , すなわち  $g \geq h$  であることがわかる. 実はこの評価を改良することができる.

$g = h$  と仮定する. 次の定理はすぐ下の議論で有用である.

**定理** (Hopf, cf. [Su, (XI.6.6)])  $\pi_1(\Sigma_g)$  は Hopf 群である. すなわち,  $\pi_1(\Sigma_g)$  の任意の全射自己準同型は同型である.  $\diamond$

Hopf の定理と条件  $g = h$  より, 包含写像から誘導される全射準同型  $\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(W_1) \cong \pi_1(\Sigma_h)$  は同型でなければならない. このことから, Lefschetz ファイバー空間  $W_1 \rightarrow S^2$  の消滅サイクルはすべて 0 ホモトピックとなる (cf. [ABKP, Lemma 3.2]). すると相対極小性から,  $W_1 \rightarrow S^2$  は  $\Sigma_g$  をファイバーとする  $S^2$  上のファイバー束となる. これは  $Z'$  が  $W_1$  と  $W_2$  の非自明なファイバー和であるという仮定に矛盾する. よって,  $g \neq h$  である. ゆえに,  $g > h$  である.

さらに  $g \geq 2h$  であることを示す.  $W_1$  をブローダウンしてえられる非有理線織面を  $W$  とする.  $W$  は  $S^2$  をファイバーとする  $\Sigma_h$  上のファイバー束の全空間  $\Sigma_h \tilde{\times} S^2$  に  $C^\infty$  級微分同相である. Lefschetz ファイバー空間  $W_1 \rightarrow S^2$  の一般ファイバーの  $W$  における像を  $F$  とし,  $F$  の代表するホモロジー類を  $[F] \in H_2(W; \mathbb{Z})$  とする. ([Sm1, Proposition 3.2] の証明では, いつの間にか  $W_1$  から非有理線織面  $W$  に話が飛んでいる. ここではその飛躍を,  $W_1$  をブローダウンして  $W$  がえられたものと解釈した.) さて, 線織面  $W \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  の 1 つの切断の像を  $s$  とし, 1 つのファイバーを  $f$  とする. すると,  $W$  の 2 次元ホモロジー群は  $s, f$  のホモロジー類によって生成される:  $H_2(W; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[s] \oplus \mathbb{Z}[f]$ . 線織面  $W \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  の任意の切断に対し, その像  $s'$  のホモロジー類は  $[s'] = [s] \pm n[f]$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) と表される (cf. [MS, §6.2]). 先ほどの  $F$  のホモロジー類を  $[F] = a[s] + b[f]$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) と表す. ここで,  $a = 1$  と仮定する. すなわち,  $[F] = [s] + b[f]$  であるとする. このとき, 次の主張を認める.

**主張 “?”** ある擬正則切断 (の像)  $s'$  が存在して,  $[s'] = [F]$  となる.  $\diamond$

$s', F$  に関する同伴公式  $2g(F) - 2 = K_W \cdot [F] + [F]^2$ ,  $2g(s') - 2 = K_W \cdot [s'] + [s']^2$  と, 上の主張より,  $g = g(F) = g(s') = h$  となる. これは  $g > h$  であることに矛盾する. よって,  $a \neq 1$  である. さらに, 次の2つの主張を認める.

**主張 “?”**  $F$  上で  $W$  のシンプレクティック形式が正なので,  $a \geq 2$  である.  $\diamond$

**主張 “?”**  $W$  上のあるシンプレクティック形式  $\omega$  で, 射影  $W \rightarrow \mathbb{C}P^1$  のファイバーがシンプレクティックであり,  $[\omega]$  の Poincaré 双対が  $[F]$  であるようなものが存在する.  $\diamond$

最後の部品として, 次の定理を用意する.

**定理** (McDuff [Mc, Theorem 1.3])  $W$  を非有理線織面とし,  $\omega$  を  $W$  上のシンプレクティック形式とする. 射影  $W \rightarrow \mathbb{C}P^1$  のファイバー  $f$  がシンプレクティックならば,  $\omega^2(W) > \omega(f)^2$  である.  $\diamond$

McDuff の不等式の両辺を我々の  $W$  について計算してみる.

$$\begin{aligned} \omega^2(W) &= \langle [\omega] \cup [\omega], [W] \rangle = \langle \text{PD}[F] \cup \text{PD}[F], [W] \rangle = [F]^2 \\ &= (a[s] + b[f])^2 = a^2[s]^2 + 2ab[s] \cdot [f] + b^2[f]^2 \\ &= a^2[s]^2 + 2ab \\ \omega(f)^2 &= \langle [\omega], [f] \rangle^2 = \langle \text{PD}[F], [f] \rangle^2 = \langle \text{PD}[F] \cup \text{PD}[f], [W] \rangle^2 \\ &= ([F] \cdot [f])^2 = ((a[s] + b[f]) \cdot [f])^2 = (a[s] \cdot [f] + b[f]^2)^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

ここで,  $[s] \cdot [f] = +1$ ,  $[f]^2 = 0$  を用いた. よって, この場合の McDuff の不等式は  $a^2[s]^2 + 2ab > a^2$  となり, 両辺を  $a$  で割ると  $a[s]^2 + 2b > a \cdots (*1)$  となる. また,  $s, f$  に関する同伴公式は,  $2g(s) - 2 = K_W \cdot [s] + [s]^2 \cdots (*2)$ ,  $2g(f) - 2 = K_W \cdot [f] + [f]^2 \cdots (*3)$  となる.  $F$  に関する同伴公式に (\*1), (\*2), (\*3) と条件  $a \geq 2$  を合わせると, 次の評価がえられる.

$$\begin{aligned} 2g(F) - 2 &= K_W \cdot [F] + [F]^2 = K_W \cdot (a[s] + b[f]) + (a[s] + b[f])^2 \\ &= aK_W \cdot [s] + bK_W \cdot [f] + a^2[s]^2 + 2ab[s] \cdot [f] + b^2[f]^2 \\ &= aK_W \cdot [s] + bK_W \cdot [f] + a^2[s]^2 + 2ab \\ &= a(2g(s) - 2 - [s]^2) + b(2g(f) - 2 - [f]^2) + a^2[s]^2 + 2ab \\ &= a(2h - 2 - [s]^2) + b \cdot (-2) + a^2[s]^2 + 2ab \\ &= a(2h - 2) + (a - 1)(a[s]^2 + 2b) \\ &\geq 2(2h - 2) + a[s]^2 + 2b \\ &> 4h - 4 + a \\ &\geq 4h - 2 \end{aligned}$$

よって,  $2g(F) - 2 \geq 4h - 2$  となり,  $g = g(F) \geq 2h$  が証明された.

長い議論の末に辿り着いた  $g \geq 2h$  という結論を, 符号数と Euler 標数の和の式に戻してみる. まず,  $W_1$  の不変量は次のように計算される.

$$\begin{aligned}\sigma(W_1) + e(W_1) &= \sigma(\Sigma_h \tilde{\times} S^2 \#_p \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) + e(\Sigma_h \tilde{\times} S^2 \#_p \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) \\ &= \sigma(\Sigma_h \tilde{\times} S^2) + e(\Sigma_h \tilde{\times} S^2) = 0 + e(\Sigma_h)e(S^2) \\ &= 4 - 4h\end{aligned}$$

この式を (\*0) に代入すると,  $g \geq 2h$  より

$$\sigma(W_2) + e(W_2) = 12 - 4g - (\sigma(W_1) + e(W_1)) = 12 - 4g - (4 - 4h) \leq 8 - 2g$$

となる. ここで,  $g \geq 6$  であったから  $\sigma(W_2) + e(W_2) \leq 8 - 2g \leq -4 < 0$  となる. すると,  $W_1$  についての議論と全く同様に,  $W_2$  も非有理線織面またはそのブローアップとなる. さて, ここで最後の疑問符が登場する.

**主張 “?”**  $Z'$  が2つの非有理線織面のブローアップのファイバー和に同型であることは, “too considerable” である.  $\diamond$

筆者は “too considerable” の意味を知らない. 恐らく, この主張は “ $Z'$  が2つの非有理線織面のブローアップのファイバー和と同型になることはない” という主張であろう. しかし, その理由がわからない (少なくとも符号数や Euler 標数の計算からは何の手がかりもえられない). ただ, この主張が正しいならば,  $W_1, W_2$  がともに非有理線織面またはそのブローアップであることは主張に矛盾するから, 背理法の仮定が誤っていたことになり, **3** のはじめに述べた命題の証明が終了する.

#### 4 いくつかの補足

ここでは **3** で行ったファイバー和に関する既約性の証明について, いくつかの補足を述べる.

[Sm1] の第3節の主定理は, この解説で述べた Proposition 3.2ではなく, 佐藤正寿氏の解説で述べられる Proposition 3.3である. そして, **2** で構成した  $f' : Z' \rightarrow S^2$  に関しては, Proposition 3.3を用いるほうがより強い結論をえることができる. 実際,  $f' : Z' \rightarrow S^2$  は種数が6以上であり, 自己交叉数  $-1$  の切断を  $mk^2 (> 0)$  個もつので, Proposition 3.3より, 非自明な Lefschetz ファイバー空間のファイバー和には分解しない (ファイバー和成分の正則性が仮定されていない点に注意してほしい). この結論は Tian の問題への否定的な解答にもなっている. つまり, 結果のみを重視するならば Proposition 3.2 は不要であり, **3** で述べた筆者の穴だらけの解説はもっと不要である.

論文 [Sm1] が出版されて数年が過ぎたころ, より強力な次の定理が証明された.

**定理** (Usher [Us, Corollary 1.2])  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2, f_2 : M_2 \rightarrow S^2$  を種数  $g$  の相対的に極小で非自明な Lefschetz ファイバー空間とし,  $g \geq 2$  とする. このとき,  $f_1$

と  $f_2$  のファイバー和の全空間  $M_1 \#_F M_2$  は自己交叉数  $-1$  の埋め込まれた 2 次元球面を含まない.  $\diamond$

次に, **3** の最後に述べた主張に関連する一つの具体例を述べる. Fintushel と Stern [FS4, §6] は次のような構成を行っている.

$K$  を  $S^3$  内の種数  $h$  のファイバー結び目とする. **2** で行ったように,  $K$  によって  $E(2)$  を knot surgery することにより, 新しい 4 次元  $C^\infty$  級多様体  $E(2)_K$  がえられる. 彼らは,  $E(2)_K$  が種数  $2h + 1$  の Lefschetz ファイバー空間の構造をもつことを示した. 一方,  $\Sigma_h \times S^2 \# 8\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  も種数  $2h + 1$  の Lefschetz ファイバー空間の構造をもつことが知られている. このとき,  $\Sigma_h \times S^2 \# 8\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  の 2 つのコピーのうまいファイバー和を考えると, 上の  $E(2)_K \rightarrow S^2$  に同型になることがわかる ([FS4, p. 1466]). すなわち,  $E(2)_K$  は 2 つの非有理線織面のブローアップのファイバー和に同型になる.

この現象は, **3** の最後に述べた主張で“起こりえない”とした現象にとっても近い. 実際,  $Z' = E(2)_K \# mk^2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  であるから,  $E(2)_K$  と  $Z'$  の違いはブローアップのぶんしかない. しかし,  $E(2)_K$  は非有理線織面のブローアップのファイバー和になり,  $Z'$  は (主張によれば) そのようには決してならない. この例をふまえると, 主張にきちんと証明をつけるとすれば, それは自己交叉数  $-1$  の球面に着目したものになるはずである. 筆者にはそれが実行できなかった. 一方, [Sm1] の Proposition 3.3 や Usher の定理 [Us] では, 自己交叉数  $-1$  の球面が主役である. このような状況を考えると, 筆者には, [Sm1] の Proposition 3.2 の証明が遠回りをしているように感じられる.

**謝辞** 研究集会を発案され, 世話人にお誘い下さいました, 東京工業大学の志賀啓成先生に心より感謝を申し上げます. また, 発表をお聞き下さいました参加者の皆様にお礼を申し上げます.

### 参考文献

- [ABKP] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev, Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups, *J. Diff. Geom.* **53** (1999), 489–545.
- [Do] S. K. Donaldson, Lefschetz pencils on symplectic manifolds, *J. Diff. Geom.* **53** (1999), 205–236.
- [FS1] R. Fintushel and R. J. Stern, Rational blowdowns of smooth 4-manifolds, *J. Diff. Geom.* **46** (1997), 181–235.
- [FS2] R. Fintushel and R. J. Stern, Knots, links, and 4-manifolds, *Invent. Math.* **134** (1998), 363–400.
- [FS3] R. Fintushel and R. J. Stern, Six lectures on four 4-manifolds, *Low dimensional topology*, IAS/Park City Math. Ser. **15**, pp. 265–315, AMS Providence, RI, 2009.
- [FS4] R. Fintushel and R. J. Stern, Families of simply connected 4-manifolds with the same Seiberg-Witten invariants, *Topology* **43** (2004), 1449–1467.
- [FM] R. Friedman and J. W. Morgan, Obstruction bundles, semiregularity, and Seiberg-Witten invariants, *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), 451–495.

- [Go] R. E. Gompf, A new construction of symplectic manifolds, *Ann. of Math.* **142** (1995), 527–595.
- [GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999.
- [GH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [Ka] A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, *Pacific J. Math.* **89** (1980), 89–104.
- [Ki] R. C. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, Lecture Notes in Math. **1374**, Springer-Verlag, 1989.
- [La] K. Lamotke, The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz, *Topology* **20** (1981), 15–51.
- [Ma] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller Spaces”, editor: S. Kojima, World Scientific, Singapore, 1996, pp. 123–148.
- [Mc] D. McDuff, The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 679–712.
- [MS] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, second edition, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [Mo] B. Moishezon, *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag, 1977.
- [Sa] N. Saveliev, *Lectures on the Topology of 3-Manifolds: an Introduction to the Casson Invariant*, Walter de Gruyter, 1999.
- [Sc] A. Scorpan, *The Wild World of 4-Manifolds*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [Sma] S. Smale, Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 621–626.
- [Sm1] I. Smith, Geometric monodromy and the hyperbolic disc, *Quart. J. Math.* **52** (2001), 217–228.
- [Sm2] I. Smith, Torus fibrations on symplectic four-manifolds, *Turkish J. Math.* **25** (2001), 69–95.
- [Su] 鈴木晋一, 曲面の線形トポロジー (下), 槇書店, 1987.
- [Us] M. Usher, Minimality and symplectic sums, *Internat. Math. Res. Not.* Vol. 2006, Article ID 49857, 17 pages.

2012年2月24日・提出



# Section 3 Irreducible Lefschetz fibrations

## Proposition 3.3 以降の解説

佐藤正寿 (大阪大学)

本稿の内容は、Smith の論文 [6] 第 3 節の後半 (p.223 Proposition 3.3 以降) に関する解説である。より具体的には、Proposition 3.3 の解説、第 4 節の直前の段落に述べられている Lefschetz ファイバー空間の切断の自己交叉数に関する考察への解説、の 2 つからなる。なお、Smith の論文内の定理、命題等を引用する際には、英語で Theorem, Proposition と記す。本稿自体の定理、命題等の参照は、日本語で記す。

## 1 Proposition 3.3 の解説

Proposition 3.3 は Proposition 3.2 よりも強い主張を述べている。まず、Proposition 3.2 を復習する。なお、Proposition 3.2 については、自身の理解が不十分であるため、遠藤久顕先生のレジュメを参考にさせていただいた。

**Proposition 3.2.** 相対的に極小な Lefschetz ファイバー空間  $f : Z' \rightarrow S^2$  であって、次の (i), (ii), (iii) をみたすものが存在する。

- (i)  $f$  のファイバーの種数は 6 以上である。
- (ii)  $Z'$  は K3 曲面に同相な 4 次元  $C^\infty$  多様体  $X$  のブローアップであり、 $X$  は複素構造をもたない。
- (iii)  $f$  は非自明な Kähler Lefschetz ファイバー空間のファイバー和には分解しない。

特に、具体的に  $X$  は Lefschetz pencil,  $Z'$  は  $X$  の base locus におけるブローアップとしてとることができる。この際に、 $f : Z' \rightarrow S^2$  には例外曲線による  $-1$  の自己交叉をもつ切断が得られる。以上の用語の定義、またブローアップの操作については、本報告集の遠藤久顕先生担当部分に詳細に述べられているのでここでは割愛する。

これに対して、Proposition 3.3 は以下のものである。

**Proposition 3.3.** 相対的に極小な種数  $g \geq 2$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow S^2$  について次が成り立つ。

- (i)  $f$  は正の自己交叉をもつ切断をもたない。
- (ii)  $f$  が自己交叉 0 の切断をもつとき、 $f$  は自明な  $\Sigma_g$ -束である。
- (iii)  $f$  が自己交叉  $-1$  の切断をもつとき、 $f$  は非自明なファイバー和として分解できない。

Proposition 3.2 の (iii) の性質は、Proposition 3.3 (iii) の特別な場合とみなすことができる。なぜなら、上で述べたように  $Z' \rightarrow S^2$  は自己交叉  $-1$  の切断をもつので、Proposition 3.3 (iii) から、(Kähler 等の仮定なしでも) 非自明なファイバー和として分解できないからである。また、本報告集の遠藤久顕先生担当部分に述べられているように、Proposition 3.3 (iii) よりも強い主張が Usher [7, Corollary 1.2] において示されている。

## 1.1 写像類群に関するいくつかの事実

Proposition 3.3 の証明に入る前に、まず写像類群における事実をいくつか復習する。種数  $g$  の有向閉曲面  $\Sigma_g$  について、その上の 1 点  $*$   $\in \Sigma_g$ ,  $*$  を内部に含む円板  $D \subset \Sigma_g$  をとる。

有向多様体  $M$  とその中の部分集合  $S$  に対し、 $\text{Diff}_+(M, S)$  で、 $M$  の向きを保つ微分同相写像で、 $S$  上で恒等写像になるもの全体を表すこととする。  $M$  の向きを保つ微分同相写像全体は、単に  $\text{Diff}_+(M)$  と表す。同様に、向きを保つ同相写像全体は、 $\text{Homeo}_+(M, S)$ ,  $\text{Homeo}_+(M)$  と表す。

$\text{Diff}_+ \Sigma_g$  のイソトピー類全体、各時間で  $*$  を保つ  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$  のイソトピー類全体、各時間で  $D$  の各点を保つ  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D)$  のイソトピー類全体のなす群を、それぞれ  $\Gamma_g, \Gamma_g^1, \Gamma_{g,1}$  と表す。包含写像  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) \rightarrow \text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$ ,  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Diff}_+ \Sigma_g$  は、それらのイソトピー類の間に準同型を誘導し、準同型  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1, \Gamma_g^1 \rightarrow \Gamma_g$  が定義される。このとき、次の完全列が知られている。証明は例えば、Farb-Margalit [3, Proposition 3.19, Theorem 4.6] などに書かれている。

補題 1.1.  $g \geq 2$  とする。このとき次は完全。

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1 \Sigma_g & \longrightarrow & \Gamma_g^1 & \longrightarrow & \Gamma_g \longrightarrow 1, \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma_{g,1} & \longrightarrow & \Gamma_g^1 \longrightarrow 1. \end{array}$$

ここで特に、 $\mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_{g,1}$  は、生成元を境界  $\partial D$  に沿う positive Dehn twist にうつす準同型として定義される。また、準同型  $\pi_1 \Sigma_g \rightarrow \Gamma_g^1$  は用いないので定義はここでは紹介しない。

なお、本稿では用いないが、 $\Gamma_{g,1}$  は微分同相群  $\text{Diff}_+(\Sigma_g \setminus \text{Int } D, \partial D)$  の (境界  $\partial D$  の各点を止める) イソトピー類全体のなす群と同型である。また、 $\Gamma_g^1$  は微分同相群  $\text{Diff}_+(\Sigma_g \setminus \{*\})$  のイソトピー類全体のなす群と同型である。[3, Proposition 3.19, Theorem 4.6] を参照する際には注意していただきたい。

補題 1.2.  $g \geq 1$ ,  $B$  を多様体とする。有向  $\Sigma_g$ -束  $f: E \rightarrow B$  が切断  $s: B \rightarrow E$  をもつとき、モノドロミー準同型  $\pi_1(B) \rightarrow \Gamma_g$  は、自然に  $\pi_1(B) \rightarrow \Gamma_g^1$  にリフトする。

*Proof.* 証明の概略を述べる。空間対  $(E, s(B))$  から  $B$  への写像  $f: (E, s(B)) \rightarrow B$  を考える。このとき、各ファイバーは  $(\Sigma_g, \{*\})$  に微分同相である。実はより強く、 $(E, s(B)) \rightarrow B$  は空間対  $(\Sigma_g, \{*\})$  のファイバー束であることが言える。

詳細は略すが、 $\Phi: \text{Diff}_+ \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  を、 $\Phi(f) = f(*)$  で定めるとき、これは  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$  をファイバーにもつファイバー束となることが知られている。なお、微分同相ではなく同相写像の場合には、Birman[1, Section 1] に証明を含めて書かれている。これを用いて、 $\Sigma_g$ -束  $f: E \rightarrow B$  の任意にとった局所自明化  $\Phi: \Sigma_g \times U \cong f^{-1}(U)$  を“調整”することにより、 $\Phi(\{*\} \times U) = s(U)$  を満たすようにできる。言い換えれば、 $(\Sigma_g, \{*\})$ -束  $f: (E, s(B)) \rightarrow B$  の局所自明化  $(\Sigma_g \times U, \{*\} \times U) \cong (f^{-1}(U), s(U))$  をつくることのできる。

Gompf-Stipsicz [4, p.291] などにある通常モノドロミー準同型の定義を, この空間対  $(\Sigma_g, \{*\})$  のファイバー束に対して, ファイバーを  $\Sigma_g$  の代わりに空間対  $(\Sigma_g, \{*\})$  とし同様に行えば, リフト  $\pi_1(B) \rightarrow \Gamma_g^1$  を定義することができる.  $\square$

**補題 1.3.**  $c$  を  $\Sigma_g \setminus \{*\}$  内の単純閉曲線であり, 1 点にホモトピックでないとする. このとき, Dehn twist  $t_c \in \Gamma_g^1$  は,  $\Gamma_{g,1}$  の元に一意的にリフトする. また, このリフトは  $\Sigma_g \setminus D$  内の単純閉曲線に沿う positive Dehn twist により代表される.

*Proof.* 変位レトラクト  $r: \Sigma_g \setminus \{*\} \rightarrow \Sigma_g \setminus \text{Int } D$  を 1 つ固定する. このとき,  $r(c) \in \text{Int } \Sigma_{g,1}$  であり, Dehn twist  $t_{r(c)}$  は曲面  $\Sigma_g \setminus \text{Int } D$  の写像類群  $\Gamma_{g,1}$  の元を代表している. Dehn twist は曲線のイソトピー類にのみ依存するので,  $t_{r(c)} \in \Gamma_{g,1}$  は変位レトラクトのとり方によらない. また, 射影  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1$  の下で,  $t_{r(c)}$  は  $t_c$  にうつる.  $\square$

次に, Lemma 2.3 の証明中で述べられている,  $\Gamma_g^1$  の無限円周  $S_\infty^1$  への作用と,  $\Gamma_{g,1}$  の  $\mathbb{R}$  への作用について復習する. 被覆空間  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  について,  $\mathbb{R}$  の同相写像で被覆変換と可換なもの全体を  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  と表す. つまり,  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R}) = \{f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R}) \mid f(x+1) = f(x) + 1\}$  である.  $f \in \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  について, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

を可換にする  $\bar{f} \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  が定まるので, 準同型  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  が定義できる. また, この準同型の核は被覆変換群  $\mathbb{Z}$  に一致する.  $g \geq 2$  とし,  $\Sigma_g$  の普遍被覆を  $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \Sigma_g$  と表す. 双曲円板  $\mathbb{D}$  の無限遠境界を  $S_\infty^1$  と表す.

**補題 1.4.**  $g \geq 2$  とする. また,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を  $S_\infty^1$  と同一視する.

次の図式を可換にする準同型  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  が定まる.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma_{g,1} & \longrightarrow & \Gamma_g^1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(S_\infty^1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

特に,  $\Sigma_{g,1}$  の境界に沿う Dehn twist は,  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  の元としては,  $\mathbb{R}$  を正の方向に 1 平行移動することに対応する.

*Proof.* まず, 準同型  $\Gamma_g^1 \rightarrow \text{Homeo}_+(S_\infty^1)$  の構成を復習する. 閉曲面  $\Sigma_g$  の微分同相写像  $f$  が与えられたとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{D} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \Sigma_g \end{array}$$

を可換にする微分同相写像  $\tilde{f}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  が誘導される. このリフトの取り方には被覆変換分の任意性がある. 実際に,  $f$  の2つのリフト  $\tilde{f}, \tilde{f}'$  について, 合成  $\tilde{f}^{-1}\tilde{f}'$  は底空間  $\Sigma_g$  に恒等写像を誘導することから, 被覆変換である.

いま  $\pi^{-1}(*)$  に含まれる1点  $\tilde{*} \in \mathbb{D}$  を固定する. もし,  $f \in \text{Diff}_+(\Sigma_g, *)$  であれば, そのリフトは  $\pi^{-1}(*) \subset \mathbb{D}$  を集合として保つ. 特にこのようなりフト  $\tilde{f}$  の中で  $\tilde{f}(\tilde{*}) = \tilde{*}$  を満たすものは唯1つしか存在しない. したがって, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbb{D}, \tilde{*})$  が定義される. 無限円周  $\mathbb{S}_\infty^1$  と  $\mathbb{D}$  の和集合を  $\bar{\mathbb{D}}$  と表す. この微分同相写像は, 無限円周まで含めて同相写像として拡張し, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Homeo}_+(\bar{\mathbb{D}}, \tilde{*})$  が定まる. さらに制限写像  $\text{Homeo}_+(\bar{\mathbb{D}}, \tilde{*}) \rightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{S}_\infty^1)$  を合成することにより,  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{S}_\infty^1)$  が定まる. この無限円周への作用は微分同相写像のイソトピー類にのみ依存するので, 準同型  $\Gamma_g^1 \rightarrow \text{Homeo}_+(\mathbb{S}_\infty^1)$  が定義できる.

次に,  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  の構成について述べる. 上と同様にして,  $\pi^{-1}(D)$  の1つの連結成分  $\tilde{D} \subset \mathbb{D}$  をとると, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) \rightarrow \text{Homeo}_+(\bar{\mathbb{D}}, \tilde{D})$  が定義できる. さらに,  $A = \bar{\mathbb{D}} - \text{Int } \tilde{D}$  に制限することで, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) \rightarrow \text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D})$  が定義される.

左図のように,  $A \subset \bar{\mathbb{D}}$  は位相的にはアニュラスであり, その普遍被覆を  $\tilde{A}$  と表す.  $\tilde{A}$  の2つの境界のうち, 右図のように  $\partial\bar{D}$  側の境界を  $l_\infty$ ,  $\partial\tilde{D}$  側の境界を  $l_0$  と表す.

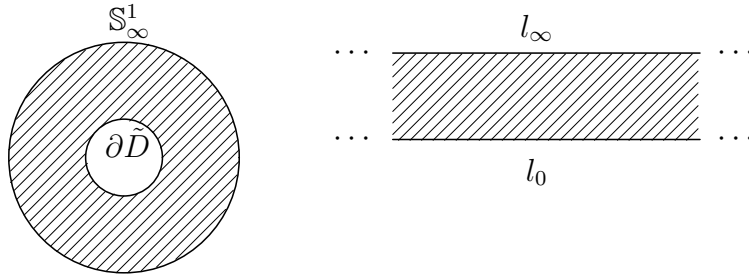


図 1: アニュラス  $A = \bar{\mathbb{D}} - \text{Int } \tilde{D}$  と, その普遍被覆

$f \in \text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D})$  のリフト  $\tilde{f} \in \text{Homeo}_+(\tilde{A})$  で,  $l_0$  上恒等写像であるものは唯1つしか存在しないので, 準同型  $\text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D}) \rightarrow \text{Homeo}_+(\tilde{A}, l_0)$  が定義できる. さらにこの同相写像を  $l_\infty$  上に制限することで,  $\text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D}) \rightarrow \text{Homeo}_+(l_\infty)$  が定義できる.

以上で構成した2つの準同型と合成することで, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) \rightarrow \text{Homeo}_+(l_\infty)$  が得られる. 無限円周の普遍被覆である  $l_\infty$  への作用も, 微分同相写像のイソトピー類にのみ依存するので, 準同型  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+(l_\infty)$  が定義できる. リフト  $\text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D}) \rightarrow \text{Homeo}_+(\tilde{A}, l_0)$  を用いて定義したので, 準同型  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+(l_\infty)$  の像は被覆  $l_\infty \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1$  の被覆変換と可換であることに注意する. あとは  $l_\infty$  を  $\mathbb{R}$  と同一視すればよい. このとき構成から, 図式

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{g,1} & \longrightarrow & \Gamma_g^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Homeo}_+(\mathbb{S}_\infty^1) \end{array}$$

は可換である.

また, 準同型  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) \rightarrow \text{Homeo}_+(A, \partial\tilde{D})$  による, 境界  $\partial D$  に沿う Dehn twist の像は,  $\pi^{-1}(\partial D) \subset A$  の各連結成分に沿う Dehn twist の積に対応する.  $\pi^{-1}(\partial D)$  に沿う Dehn twist 達の中で,  $\partial\tilde{D}$  に沿う Dehn twist は,  $l_\infty$  を正の方向に 1 平行移動させる. それ以外の Dehn twist 達は,  $A$  内で恒等写像にイソトピックなので,  $l_\infty$  は動かさない. 以上を合わせて, 境界  $\partial D$  に沿う Dehn twist は,  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  の元としては, 正の方向への 1 の平行移動を表す.  $\square$

## 1.2 Proposition 3.3 の証明

Proposition 3.3 の証明のキーは, 次の 2 つからなる.

- (i) positive Dehn twist の  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  による像は,  $\mathbb{R}$  のどの点についても, 動かさないか, もしくは, 正の方向に動かすかのいずれかである.
- (ii)  $\text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1)$  の  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  への像は, 整数値の平行移動を表す (補題 1.1, 補題 1.4).

(i) について説明する. Proposition 2.1 (iii) において, positive Dehn twist が  $\mathbb{S}_\infty^1$  の各点を固定するか, 時計周りに動かすかのいずれかである事が示されている. これを,  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  の元にリフトして翻訳したものが (i) の主張である. また, (ii) は補題 1.1, 補題 1.4 からそのまま従う.

*Proposition 3.3 (i)(ii) の証明.*  $f: Z' \rightarrow S^2$  は例外曲線による切断をもつ.  $f$  の臨界値集合を  $\text{Crit} \subset S^2$  と表すとき, モノドロミー準同型  $\rho: \pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g$  による各臨界値を回る loop の像は positive Dehn twist である. 補題 1.2, 補題 1.3 を用いて, これらの Dehn twist を  $\Gamma_{g,1}$  の元とみなすことができる. Lemma 2.3 でみたように, これらの Dehn twist の全ての積の  $\mathbb{R}$  への作用が, 正の方向へ  $n$  の平行移動であることは, 切断の自己交叉が  $-n$  であることに対応する. positive Dehn twist は,  $\mathbb{R}$  を負の方向に動かすことはないので, それらの積も同様である. したがって, 任意の Lefschetz ファイバー空間は正の自己交叉をもつ切断をもたない.

また, いま  $f$  は切断をもつことから, これらのすべての Dehn twist の積は  $\Gamma_g^1$  において単位元である. したがって, 無限遠境界  $\mathbb{S}_\infty^1$  には自明に作用している. したがって, Dehn twist が 1 つ以上あるとき,  $\mathbb{R}$  への全ての Dehn twist の積の作用は, 必ず 1 以上の整数値の平行移動となっている. また, もし自己交叉が 0 であるならば,  $\mathbb{R}$  の各点は動いていないので, Dehn twist は 1 つも存在しないことになる. したがって, これは自明束に一致する.  $\square$

*Proposition 3.3 (iii) の証明.* いま Lefschetz ファイバー空間  $X \rightarrow S^2$  に自己交叉  $-1$  の切断が与えられており, これが非自明な 2 つの Lefschetz ファイバー空間  $h: W \rightarrow S^2$ ,  $h': W' \rightarrow S^2$  のファイバー和に分解しているとする.



$X$  を表す Lefschetz 特異ファイバーの中で  $W$  に含まれているものに対応する Dehn twist を順に  $\delta_1, \dots, \delta_r \in \Gamma_g$ ,  $W'$  に含まれているものに対応する Dehn twist を順に  $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \Gamma_g$  とおく. いま  $X$  には切断があるので, 補題 1.2, 補題 1.3 を用いて, これらの元のリフト  $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_r, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_s \in \Gamma_{g,1}$  をとることができる.

いま, ファイバー和の定義から,  $h$  の正則値のみからなる円板  $D \subset S^2$ ,  $h'$  の正則値のみからなる円板  $D' \subset S^2$ , が存在して,  $X = (W - h^{-1}(\text{Int } D)) \cup (W' - h^{-1}(\text{Int } D'))$  と表されている. このとき,  $D, D'$  の中には, 臨界値が含まれないので,  $\partial D, \partial D'$  に沿うモノドロミーは自明である. したがって, 積  $\delta_1 \cdots \delta_r = \gamma_1 \cdots \gamma_s = 1 \in \Gamma_g$  が得られる.

以上より,

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r &\in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g), \\ \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s &\in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g)\end{aligned}$$

を得る. また,  $X$  が切断をもつことから, 切断つきの意味で全ての Dehn twist の積が自明でないといけない. つまり,

$$\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s \in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1).$$

一般に, ある微分同相写像  $T : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  が恒等写像にイソトピックであるとき, そのイソトピーをリフトすることにより,  $T$  のリフト  $\tilde{T} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  は被覆変換にイソトピックになる. いま,  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_n \in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g)$  より,  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_n$  を代表する  $\text{Diff}_+(\Sigma_g, D)$  の元は,  $\text{Diff}_+ \Sigma_g$  の元として恒等写像とイソトピックである. したがって, そのリフト  $F \in \text{Homeo}_+(\mathbb{D}, \tilde{D})$  は, このイソトピーのリフトを通じて, 被覆変換, もしくは, 恒等写像とイソトピックである.

(Case 1)  $F$  が被覆変換とイソトピックのときを考える.  $F$  は被覆変換とイソトピックなので, 特に  $S_\infty^1$  への作用は双曲元の作用と一致している. 本論文 p.220 中段で述べられているように, 一般に, 双曲元の  $S_\infty^1$  への作用には 2 つの固定点があり, 1 つの固定点の近傍では反発的 (repelling) であり, もう 1 つの固定点の近傍では吸引的 (attracting) である. 以下, 反発的な点を  $p$  と名付ける.  $p$  は固定点であるので,  $p \in S^1$  の  $\mathbb{R}$  へリフトした点を 1 つとると, 準同型  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  による  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r$  の像のその点への作用は, ある整数  $n \in \mathbb{Z}$  の平行移動となる.

このとき,  $p$  から少し反時計回りの位置にある点では, さらにやや反時計回りの位置にある点に移動する. つまり,  $n - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) だけ平行移動している. しかし 1.2 節の最初で述べたキー (i) から, 1 つ 1 つの Dehn twist は,  $\text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  の元としては,  $\mathbb{R}$  のどの点への作用も, 動かさないか正の方向に動かすかのいずれかである. よって,  $n - \epsilon > 0$  であり, 特に  $n \geq 1$  が得られる.

次に, 反発的な点から少し時計回りにある点では,  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_n \in \Gamma_{g,1}$  の作用でさらにやや時計回りの点に移動している. つまり,  $n + \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) だけ移動している. 次に, モノドロミー全体  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s$  のこの点への作用を見る.  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s \in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1)$  より, キー (ii) から,  $\mathbb{R}$  への作用は整数値の平行移動となる. 既に  $W$  のモノドロミーによって  $n + \epsilon$  動いているため, モノドロミー全体の作用としては  $n + 1$  以上 ( $n \geq 1$ ) 移動することになる.

(Case 2) 次に,  $F$  が恒等写像にイソトピックであった場合を考える. 同様に,  $\tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_n$  を代表する  $\text{Homeo}_+(\Sigma_g, D)$  の元のリフトを  $F' \in \text{Homeo}_+(\mathbb{D}, \tilde{D})$  とおく.  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s \in \text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1)$  より,  $F'$  も (ファイバーを保つイソトピーによって) 恒等写像にイソトピックになる. つまり,  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r$  と  $\tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s$  のいずれも,  $S_\infty^1$  には自明に作用する.

しかし, Dehn twist は  $\mathbb{R}$  を正の方向に動かす点をもつので, もし  $r > 0, s > 0$  であれば,  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r, \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s$  のいずれの積も,  $S_\infty^1$  を 1 回転以上させていなければならない.

以上を合わせて,  $\Gamma_{g,1} \rightarrow \text{Homeo}_+^b(\mathbb{R})$  による  $\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_r \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_s$  の像は, 2 以上の整数の平行移動でないといけない. つまり, 切断の自己交叉数は  $-2$  以下でなければならない.  $\square$

## 2 Lefschetz ファイバー空間の切断の自己交叉数に関する考察

Proposition 3.3 の後に述べられている内容は以下のものである.

命題 2.1.

- (i) 種数 2 の  $S^2$  上の Lefschetz ファイバー空間であり, 異なる自己交叉数をもつ 2 種類の切断が存在するものがある.
- (ii) 種数 1 の  $S^2$  上の Lefschetz ファイバー空間では, どの切断の自己交叉数の値も一定である.

### 2.1 命題 2.1(i) の証明

以下の図のように曲線  $c_1, c_2, \dots, c_{2k+1}$  と  $d_k, d_{k,1}, d_{k,2}$  をとる.  $c_i$  に沿う Dehn twist を

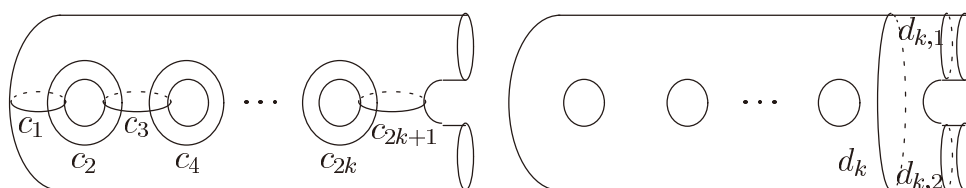


図 2: curves

$t_i$  とし,  $d_k, d_{k,1}, d_{k,2}$  に沿う Dehn twist を  $t_{d_k}, t_{d_{k,1}}, t_{d_{k,2}}$  と表す.

上の境界を 2 つもつ曲面の, 境界の各点を固定する写像類群を  $\Gamma_{k,2}$  と表し, 曲線  $d_k$  より左側にある曲面の, 境界の各点を固定する写像類群を  $\Gamma_{k,1}$  と表す. 左の曲面  $\Sigma_{k,2}$  の境界に円板を 2 つ貼り合わせてできる  $\Sigma_k$  内の曲線, および, その曲線に沿う Dehn twist も同じ記号で表すことにする.

上で述べた命題 2.1 を示すだけであれば不要であるが, 次のことが成り立つ. 詳しくは松本 [5, p.139 Example A, p.143 Example C] を見ていただきたい.

命題 2.2.

- (i)  $K3$  曲面は種数 2 の Lefschetz pencil の構造をもち, Lefschetz ファイバー空間  $K3 \# 2\overline{\mathbb{C}P^2} \rightarrow S^2$  が定まる. また, そのモノドロミー表現は関係式

$$(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5)^6 = 1 \in \Gamma_2$$

で与えられる.

- (ii)  $M := S^2 \times S^2 \# 12\overline{\mathbb{C}P^2}$  は種数 2 の Lefschetz ファイバー空間  $f: M \rightarrow S^2$  の構造をもち, そのモノドロミー表現は関係式

$$(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 t_4 t_3 t_2 t_1)^2 = 1 \in \Gamma_2$$

で与えられる.

次の 2 つの補題を以下では示す.

補題 2.3. 命題 2.2 において, (i) のファイバー空間を 4 つ fiber 和をとったものは, (ii) のファイバー空間を 6 つ fiber 和したものと同型である.

補題 2.4. (i) のファイバー空間を 4 つ fiber 和をとったものは, 自己交叉  $-4$  の切断をもつ. また, (ii) のファイバー空間を 6 つ fiber 和をとったものは, 自己交叉  $-6$  の切断をもつ.

補題 2.3 より, 2 つのファイバー空間は同型であるので, このファイバー空間は 2 つの切断のホモトピー類をもっている, 特に, それらの自己交叉数は異なることから, これらのホモトピー類も異なる. これより命題 2.1 (i) が従う.

以下ではまず補題 2.3 を示す. まず, 一般に次の関係式が成り立つ. これは例えば, [3, Proposition 3.11, Fact 3.8, Fact 3.7] に書かれている.

補題 2.5.

- (1)  $\Sigma_g$  内の 2 つの単純閉曲線  $c, c'$  が 1 点で交わる時,  $t_c t_{c'} t_c = t_{c'} t_c t_{c'}$ .
- (2)  $\Sigma_g$  内の 2 つの単純閉曲線  $c, c'$  が共通部分をもたない時,  $t_c t_{c'} = t_{c'} t_c$ .
- (3) 微分同相  $T: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ , 単純閉曲線  $c$  について,  $t_{T(c)} = [T] t_c [T]^{-1}$ .

ファイバー空間の写像をホモトピーで変える操作を考える. 例えば, ファイバー空間の写像  $f: X \rightarrow S^2$  に, 図のように Lefschetz ファイバー空間の底空間の  $S^2$  の臨界値を交換する half twist, もしくは, その逆を合成することができる. これを初等変形という. この操作の前後における Lefschetz ファイバー空間は同型である. この操作については, 松本 [5, pp.138–139] に詳しく書かれている.

この操作の前後でモノドロミー準同型の変化を調べる. まず, 臨界値を  $\{b_1, \dots, b_n\} \subset S^2$  と表し, 図のように右から左に並んでいるとする. 各  $b_i$  の周りを反時計回りに 1 周す



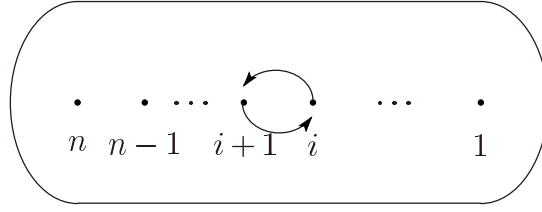


図 3: half twist

るループ  $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow S^2 \setminus \text{Crit}$  を順にならべ, その  $\rho$  による像をとると Dehn twist の列  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n)$  が得られる. ただしここで,  $\delta_i = \rho(\alpha_i)$ .

これに対して, 底空間の  $S^2$  に図のような half twist (もしくはその逆) を施すと, 行った後のモノドロミー準同型の像による Dehn twist の列は

$$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i \delta_{i+1} \delta_i^{-1}, \delta_i, \dots, \delta_n), \text{ もしくは, } (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{i+1}, \delta_{i+1}^{-1} \delta_i \delta_{i+1}, \dots, \delta_n)$$

と表される. したがって, 補題 2.3 を示すためには, 初等変形を用いて写像類群の元の列  $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^{12}$  が  $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_5, t_4, t_3, t_2, t_1)^6$  にうつることを示せば十分である.

以下, これを示す. まず, 次の補題は基本的である.

**補題 2.6.**  $\iota = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 t_4 t_3 t_2 t_1 \in \Gamma_2$  は, 曲線  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \subset \Sigma_2$  を保つ.

特に  $\iota$  は超楕円の対合と呼ばれ,  $(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 t_4 t_3 t_2 t_1)^2 = 1$  を満たす. また, Chakiris [2] により次が示されている.

**補題 2.7.** 写像類群  $\Gamma_2$  の元の列  $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^6$  は初等変形で  $(t_5, t_4, t_3, t_2, t_1)^6$  にうつる.

証明は補題 2.5 を用いて示されるが, 補題 2.3 とほぼ同様であり, ここでは省略する.

補題 2.3 の証明.  $t_i$  を単に  $i$  という記号で略記する. このとき,  $(1, 2, 3, 4, 5)^{12}$  が初等変形で  $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)^6$  になることを示せばよい.

写像類の列が初等変形で移り合うことを,  $\sim$  という記号で表す. Lemma 2.7 より,

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4, 5)^{12} &= (1, 2, 3, 4, 5)^6 (5, 4, 3, 2, 1)^6 \\ &= (1, 2, 3, 4, 5)^5 (1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1) (5, 4, 3, 2, 1)^5. \end{aligned}$$

初等変形を行い下線部を左に動かすと, 補題 2.6 より,

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4, 5)(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)(\underline{5}, 4, 3, 2, 1) \\ &\sim (1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, \underline{151^{-1}}, 1, 4, 3, 2, 1) \\ &\sim (1, 2, 3, 4, 5, \iota 5 \iota^{-1}, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1) \\ &\sim (1, 2, 3, 4, 5, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \underline{4, 3, 2, 1}) \\ &\sim (1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& (1, 2, 3, 4, 5)^6(5, 4, 3, 2, 1)^6 \\
&= (1, 2, 3, 4, 5)^4(1, 2, 3, 4, 5)(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)(\underline{5, 4, 3, 2, 1})(5, 4, 3, 2, 1)^4 \\
&\sim (1, 2, 3, 4, 5)^4(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)(5, 4, 3, 2, 1)^4 \\
&= (1, 2, 3, 4, 5)^4(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)^2(5, 4, 3, 2, 1)^4.
\end{aligned}$$

これを繰り返せば,  $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)^6$  が得られる.  $\square$

次に補題 2.4 を示す. これを示すためにまず次の補題を示す.

**補題 2.8.** 準同型  $\rho: \pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g$  を  $D^2$  上の Lefschetz ファイバー空間  $f: X \rightarrow D^2$  のモノドロミー準同型とする.  $\rho$  が準同型  $\tilde{\rho}: \pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g^1$  にリフトし, 各臨界値を回るループの像が positive Dehn twist であるとする. このとき, この Lefschetz ファイバー空間は切断をもち,  $\tilde{\rho}$  は補題 1.2 の意味のモノドロミー準同型に一致する.

*Proof.* 証明は早野健太氏による水平リフトを用いた方法を用いる. この証明については, 自身の力不足と文章量の問題から概略のみにとどめる.

臨界値  $b_1, \dots, b_n$  は,  $D^2$  内の半径  $1/2$  の円周上に, 反時計回りに順番に並んでいるとしてよい. 同一視  $f^{-1}(0) \cong \Sigma_g$  の下, モノドロミー準同型  $\pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g$  が,  $\pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g^1$  にリフトするとする.

$X$  から臨界点を除いたところに  $f$  の水平分布を 1 つとる.  $D^2$  上で  $0 \in D^2$  から各臨界値  $b_i \in D^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) への線分をとる. この線分の水平リフトを用いて,  $f^{-1}(0) \cong \Sigma_g$  内に各臨界点に対応する消滅サイクル  $c_1, \dots, c_n \subset \Sigma_g$  をとることができる.

各 path の上の fiber の近傍で水平分布をとりかえれば, これらの消滅サイクル  $c_1, \dots, c_n$  を  $\Sigma_g \setminus \{*\}$  内にとることができる. さらに,  $c_1, \dots, c_n$  に沿う Dehn twist を, リフト  $\pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g^1$  の下で各臨界値を回るループの像である Dehn twist に一致させることができる.

このとりかえた水平分布による水平リフトを用いて, 基点  $* \in \Sigma_g$  を原点  $0 \in D^2$  から半径方向に放射状に運べば,  $D^2$  上の各ファイバーに点を指定することができる. なお注意として,  $*$  は消滅サイクルに含まれないので, 水平リフトが Lefschetz ファイバー空間の臨界点で止まることはない. これにより Lefschetz ファイバー空間の切断が構成できた. 補題 1.2 で述べたように, 切断があるとモノドロミー準同型を  $\pi_1(D^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g^1$  へリフトすることができるが, 構成からこれは元々与えられていたリフトに一致する.  $\square$

上の定理は  $D^2$  の代わりに,  $S^2$  上の Lefschetz ファイバー空間  $f: X \rightarrow S^2$  としても正しい. 証明について簡単に述べる. まず,  $S^2 = D_1 \cup D_2$  と分けて,  $D_1$  がすべての臨界値を含んでいるとしてよい. まず,  $D_1$  上で上の方法で切断を構成する.  $D_2$  側には臨界値がないので,  $f$  の  $D^2$  への制限は自明束  $D_2 \times \Sigma_g \rightarrow D_2$  とみなせる. あとは,  $\partial D_2$  上で既に構成されている切断を拡張すればよい. この切断のファイバー方向への射影を,  $s: \partial D_2 \rightarrow \Sigma_g$  と表す. 仮定から,  $\partial D_2$  を 1 周するループに沿うモノドロミーは  $\Gamma_g^1$  の元として自明なので, 切断の射影  $s$  は定値写像にホモトピックである. したがって,

$\tilde{s} : D_2 \rightarrow \Sigma_g$  に拡張する. したがって, 切断の拡張として  $\text{id} \times \tilde{s} : D_2 \rightarrow D_2 \times \Sigma_g$  がとれる.

以下の補題の証明は例えば, [3, p.107 Proposition 4.12] に書かれている.

**補題 2.9** (chain relation).

$$\begin{aligned} (t_1 t_2 \cdots t_{2k})^{4k+2} &= t_{d_k} \in \Gamma_{k,1}, \\ (t_1 t_2 \cdots t_{2k+1})^{2k+2} &= t_{d_{k,1}} t_{d_{k,2}} \in \Gamma_{k,2}. \end{aligned}$$

写像類群の部分群である超楕円の写像類群は, 点つき球面の写像類群の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  拡大であることが知られている. [3] においては, 点つき球面の写像類群の関係式を超楕円の写像類群にリフトすることで, 上の関係式を示している.

補題 2.4 (i) の証明. 補題 2.9 より  $(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5)^{24} = t_{d_{2,1}}^4 t_{d_{2,2}}^4 \in \Gamma_{2,2}$  となることがわかる.  $\Sigma_{2,2}$  の境界の片側に円板を貼り, その上で微分同相を恒等写像で拡張することにより誘導される準同型  $\Gamma_{2,2} \rightarrow \Gamma_{2,1}$  について, この関係式の像は,  $(t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,1}})^{24} = t_{d_2}^4 \in \Gamma_{2,1}$  となることがわかる. したがって, 切断と Dehn twist を行う単純閉曲線の位置関係を図 2 における  $c_1, c_2, c_3, c_4, d_{1,1}, d_2$  に対応する位置にとれば, 自己交点数は  $-4$  であることがわかる.  $\square$

補題 2.4 の (ii) のファイバー空間の切断については様々な証明が考えられるが, 一例を与える.

**補題 2.10.**  $(t_1 t_2 t_3 t_4)^5$  と  $t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,2}}^2 t_4 t_3 t_2 t_1$  は  $\Gamma_{2,1}$  において共役である.

*Proof.*  $t_i$  を単に  $i$  という記号で略記する. また, 補題 2.5 (1)(2) の関係式を使う箇所に下線を引く.

$$\begin{aligned} (1234)^5 &= 1234\underline{1}234(1234)^3 \\ &= 123124\underline{3}4(1234)^3 \\ &= 12312343(1234)^3 \\ &= (123)^2 \underline{4}31234(1234)^2 \\ &= (123)^2 14\underline{3}234(1234)^2 \\ &= (123)^2 14\underline{2}324(1234)^2 \\ &= (123)^2 12\underline{4}342(1234)^2 \\ &= (123)^2 1234321234(1234) \\ &= (123)^3 43212134(1234) \\ &= (123)^3 4\underline{3}12134(1234) \\ &= (123)^3 41\underline{3}2314(1234) \\ &= (123)^3 4\underline{1}23214(1234) \\ &= (123)^3 1243421^2 234 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (123)^3 1234321^2 234 \\
&= (123)^4 (4321^2 234) \\
&= t_{d_{1,1}} t_{d_{1,2}} (4321^2 234).
\end{aligned}$$

$(4321^2 234)(d_{1,1}) = d_{1,2}$  (実際に絵を描いて動かしていけばわかる) より, 補題 2.5 (3) を用いて,

$$(4321^2 234)t_{d_{1,1}}(4321^2 234)^{-1} = t_{d_{1,2}} \in \Gamma_{2,1}$$

を得る. したがって,  $(1234)^5 = t_{d_{1,1}} 4321^2 234 t_{d_{1,1}} \in \Gamma_{2,1}$ .

微分同相  $T : \Sigma_{2,1} \rightarrow \Sigma_{2,1}$  として,  $T(c_1) = d_{1,2}, T(c_2) = c_4, T(c_3) = c_3, T(c_4) = c_2, T(d_{1,1}) = c_1$  をみたす元が存在する. これで共役をとれば,

$$[T](1234)^5 [T]^{-1} = [T]t_{d_{1,1}}(4321^2 234)t_{d_{1,1}}[T]^{-1} = t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,2}}^2 t_4 t_3 t_2 t_1.$$

□

補題 2.4 (ii) の証明. 補題 2.9 より,  $(t_1 t_2 t_3 t_4)^{10} = t_{d_2} \in \Gamma_{2,1}$  が成り立つ.

$(t_1 t_2 t_3 t_4 d_{1,2}^2 t_4 t_3 t_2 t_1)^2 \in \Gamma_{2,1}$  は,  $(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 t_4 t_3 t_2 t_1)^2 \in \Gamma_2$  のリフトである. 写像類  $(t_1 t_2 t_3 t_4)^5$  と  $t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,2}}^2 t_4 t_3 t_2 t_1$  は共役であるので, ある微分同相  $T : \Sigma_{2,1} \rightarrow \Sigma_{2,1}$  を用いて  $[T](t_1 t_2 t_3 t_4)^5 [T]^{-1} = t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,2}}^2 t_4 t_3 t_2 t_1$  とおくと,

$$(t_1 t_2 t_3 t_4 t_{d_{1,2}}^2 t_4 t_3 t_2 t_1)^{12} = [T](t_1 t_2 t_3 t_4)^{60} [T]^{-1} = [T]t_{d_2}^6 [T]^{-1} = t_{d_2}^6.$$

したがって, 切断の自己交叉数は  $-6$ .

□

## 2.2 命題 2.1(ii) の証明

命題 2.1 (ii) の証明. Smith の論文においては, adjunction formula より従うと書かれているが, この主張はよくわからなかったため, 別の証明を行う.

Lemma 2.3 で述べられているように, モノドロミー準同型  $\pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_g$  のリフト  $\pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_{g,1}$  において, この Lefschetz ファイバー空間に現れるすべての Dehn twist の積をとると, その像は  $\text{Ker}(\Gamma_{g,1} \rightarrow \Gamma_g^1) \cong \mathbb{Z}$  に入り, 値は自己交叉数の  $(-1)$  倍に一致する (ここで,  $\mathbb{Z}$  の生成元  $1$  は境界に沿う positive Dehn twist を選んでいる).

種数 1 の写像類群において,  $\Gamma_1 \cong \Gamma_1^* \cong \text{SL}(2; \mathbb{Z})$  であることが知られている. したがって, 種数が 1 のとき, 切断の取り方によらず,  $\pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_1$  から  $\pi_1(S^2 \setminus \text{Crit}) \rightarrow \Gamma_1^1$  へのリフトの取り方は一意的である. さらに, 各臨界値を 1 周するループの行先である positive Dehn twist は  $\Gamma_{1,1}$  の元として一意的にリフトする. したがって, 切断の自己交叉数も一意的に定まる.

□

謝辞 本稿において, 補題 1.4 の準同型の構成については志賀啓成先生より, 補題 2.8 の証明については早野健太氏より, 研究集会中に助言をいただき, 本稿の作成に大変参考になりました. また, Proposition 3.2 については遠藤久顕先生よりご説明をいただき, 理解の助けとなりました. どうもありがとうございます.

最後になりましたが, 本研究集会に参加させていただいたことに心より感謝致します.

## 参考文献

- [1] J. S. Birman, Mapping class groups and their relationship to braid groups, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(2), 1969, 213–238
- [2] K. N. Chakiris, The monodromy of genus two pencils, dissertation, Columbia University, 1978.
- [3] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 2011.
- [4] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, American Mathematical Society, 1999.
- [5] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach -, *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces*, (S. Kojima, et. al., eds.), World Scientific, 1996, 123–148
- [6] I. Smith, Geometric monodromy and the hyperbolic disc, *Quart. J. Math.*, 52(2), 2001, 217–228
- [7] M. Usher, Minimality and symplectic sums, *Internat. Math. Res. Not.*, Vol. 2006, 1–17.

## SMITH の論文の 4 章

宮地 秀樹

### 1. 導入

#### 1.1. 問題.

**問題 1** (Question 4.1, Ludimil Kalzarkov). *Lefschetz* ファイブレーションが与えられたとする. そのとき, ファイバー上にそのモノドロミーにより不変な単純閉曲線が存在するか?

Kalzarkov はホッジ理論を用いて, 特別な Kähler ファイブレーションに対して否定的な解答を与えた.

1.2. **記号の準備.**  $f: X \rightarrow \mathbb{S}^2$  をファイバーが種数  $g$  の曲面  $\Sigma_g$  である *Lefschetz* ファイブレーションとする. そして,  $\{\text{Crit}\}$  を特異値の集合とする.  $\Gamma_g$  を写像類群とし,

$$\rho: \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{\text{Crit}\}) \rightarrow \Gamma_g$$

を *Lefschetz* ファイブレーション  $f: X \rightarrow \mathbb{S}^2$  のモノドロミーとする.  $\gamma_i$  を  $\prod \gamma_i = id$  を満たす  $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{\text{Crit}\})$  の生成元とし,  $\delta_i = \rho(\gamma_i)$  とする.

### 2. 命題 4.2

#### 2.1. 命題 4.2.

**命題 2.1** (Proposition 4.2).  $f: X \rightarrow S^2$  を非自明な *Lefschetz* ファイブレーションとする. このとき, モノドロミーの作用により不変な  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線の有限和は存在しない.

*Proof.* まず, 一つの単純閉曲線に対して証明する.  $C \subset \Sigma_g$  をモノドロミー不変な単純閉曲線とする.  $\pi: \mathbb{D} \cong \tilde{S} \rightarrow S$  を普遍被覆面とする.  $C$  の一つのリフト  $\tilde{C}$  を固定し, その無限遠境界  $\mathbb{S}^1_\infty$  にある端点を  $a, b$  ( $a \neq b$ ) とする.

仮定から  $\delta_i(C) = C$  であるので,  $\delta_i$  のリフト  $\tilde{\delta}_i$  で  $\tilde{\delta}_i(\tilde{C}) = \tilde{C}$  となるものを取りることが出来る. 実際,  $\tilde{\delta}_i$  は, その台 (support) の補集合のある成分  $K$  を固定したときに,  $K$  の上では恒等写像になるように取ることが出来るので,  $K$  (もしくはその境界) が  $\tilde{C}$  を含むように取ればよい. 積  $\prod \delta_i$  は恒等写像にホモトピックであるので, リフトの積  $\prod \tilde{\delta}_i$  の境界での作用はメビウス変換  $A$  と一致し, さらに  $\prod \tilde{\delta}_i$  は  $\tilde{C}$  を境界に含む  $\mathbb{D} \setminus \pi^{-1}(C)$  の成分を固定する. 仮定から  $A(a) = a$ ,  $A(b) = b$  であるので,  $A$  は双曲元もしくは恒等元である.

**場合 1.  $A$  が双曲元の場合** 各  $\delta_i$  は Dehn twist であるので,  $\delta_i$  は  $C$  に関する右 twist であるか, もしくは  $C$  の環状近傍の各点を固定する. 故に,  $\tilde{\delta}_i$  は  $C$  の環状近傍の  $\tilde{C}$  を含むリフトの境界を “右向き” に移動する.

一方, 点  $p \in K$  を取り固定する.  $p$  を始点とし  $\partial\mathbb{D}$  に到達する単純曲線  $\tilde{\gamma}$  を  $\tilde{C}$  と交わらないようにとる. このとき, 上記のように取ったリフト  $\tilde{\delta}_i$  は  $K$  上で恒等写像であり,  $\tilde{\delta}_i(\tilde{C}) = \tilde{C}$  であるので,  $\prod \tilde{\delta}_i(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$  は  $p$  と  $\partial\mathbb{D}$  を結ぶ単純曲線であり,  $\tilde{C}$

Date: 16 Dec 2011.

とは交わらない. 故に,  $\prod \tilde{\delta}_i$  の回転数は 0 となる. しかし,  $\prod \tilde{\delta}_i = A$  が  $S_\infty^1$  上で成立するので,  $a$  もしくは  $b$  の近傍内の点は  $\prod \tilde{\delta}_i$  の作用により左に移される. これは矛盾である.

**場合 2.  $A$  が恒等元の場合** このとき上記の議論から  $\prod \tilde{\delta}_i = id$  が  $S_\infty^1$  上で成立する. 定義から  $\underline{p} \in \Sigma_g$  を  $p$  の射影とすると,  $\delta_i(\underline{p}) = p$  が成立するので, 上記のように取った  $p$  はファイブレーション  $f: X \rightarrow S^2$  のセクションを定義する. しかし, 上記の議論から  $\prod \tilde{\delta}_i$  の回転数は 0 であるので, このセクションの自己交点数は 0 となる. 故に論文内の命題 3.3 の (2) によりファイブレーション  $f: X \rightarrow S^2$  は自明となる. これは矛盾である.

有限個の場合を考える.  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  を (集合として固定される) 単純閉曲線の族とする. 上記より  $\gamma_1$  はある vanishing cycle と交わる. その vanishing cycle に沿った Dehn twist に対応する元を  $\delta_i$  とする.  $\delta_i$  は  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  を集合として固定するので, ある  $m$  が存在して  $\delta_i^m(\gamma_1) = \gamma_1$  となる. 一般に閉曲線  $\alpha$  に対する Dehn twist を  $D_\alpha$  とするとき,  $h \circ D_\alpha \circ h^{-1} = D_{h(\alpha)}$  であるので,

$$\delta_i^m \circ D_{\gamma_1} \circ \delta_i^{-m} = D_{\delta_i^m(\gamma_1)} = D_{\gamma_1}$$

である. つまり,  $D_{\gamma_1}$  と  $\delta_i^m$  は可換である. 一方,  $\gamma_1$  と  $\delta_i$  の台は交わるので,  $\gamma_1$  と  $\delta_i$  の生成する群は自由群であるか, 3 次のブレード群  $Br_3$  の部分群であるので矛盾である.  $\square$

**2.2. 2つの Dehn twist の生成する群について (石田の定理).** ここでは Ishida ([4]) を参考にして次の定理を確認しておく.

**定理 2.1** (Ishida [4]).  $\alpha$  と  $\beta$  を  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線とする. このとき次が成立する.

$$\langle D_\alpha, D_\beta \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i(\alpha, \beta) = 0 \text{ の場合} \\ Br_3 & i(\alpha, \beta) = 1 \text{ の場合} \\ F_2 & i(\alpha, \beta) \geq 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

$i(\alpha, \beta) = 0$  の時は自明である.  $i(\alpha, \beta) = 1$  の場合は,  $\alpha \cup \beta$  の環状近傍が一つの境界成分をもつトーラスであることから, よく知られている (cf. Birman [2]). 従って,  $i(\alpha, \beta) \geq 2$  の時を考える.

**補題 2.1** (cf. [3]).  $\alpha, \beta, \gamma$  を単純閉曲線とすると,

$$|n| i(\gamma, \alpha) \cdot i(\alpha, \beta) - i(D_\alpha^n(\gamma), \beta) \leq i(\gamma, \beta)$$

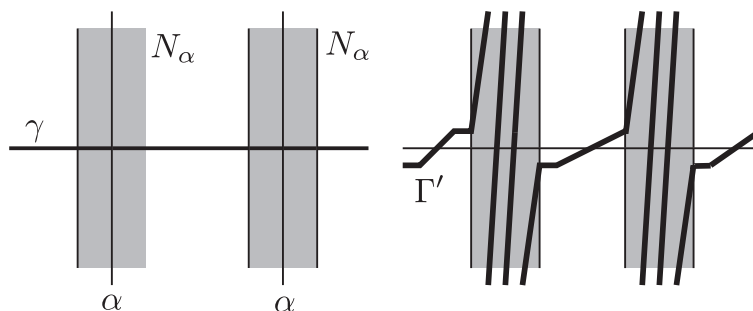
が成立する.

*Proof.*  $D_\alpha^n(\gamma)$  の代表元  $\Gamma'$  を  $\gamma$  と  $N_\alpha$  の外側の各成分で一点のみで交わるようにとる (cf. 図 2.2). このとき  $\#(\gamma \cap \Gamma') = i(\gamma, D_\alpha^n(\gamma))$  となるため,  $\gamma$  と  $\Gamma'$  を測地線にするような計量が存在する (cf. [3]). このとき,  $\beta$  の代表元をこの計量に関する測地線を,  $\beta, \gamma$  と  $\Gamma'$  のそれぞれの交点の近傍ですこし変形することにより, 次が成立するように出来る:

- $\#(\beta' \cap \gamma) = i(\beta, \gamma)$
- $\#(\beta' \cap \Gamma') = i(\beta, D_\alpha^n(\gamma))$
- $\beta' \cap \gamma \cap \Gamma' = \emptyset$

いま,  $\gamma \cup \Gamma'$  は  $\alpha$  とホモトピックな  $S^1$  の  $|n| \cdot i(\alpha, \gamma)$  個の和集合とホモトピックであるので,

$$\#(\beta' \cap (\gamma \cup \Gamma')) \geq |n| \cdot i(\alpha, \gamma) \cdot i(\alpha, \beta)$$

FIGURE 1.  $\Gamma'$  の取り方

が成立する。一方仮定から,

$$\#(\beta' \cap (\gamma \cup \Gamma')) = \#(\beta' \cap \gamma) + \#(\beta' \cap \Gamma') = i(\beta, \gamma) + i(\beta, D_\alpha^n(\gamma))$$

であるので,

$$i(\beta, \gamma) + i(\beta, D_\alpha^n(\gamma)) \geq |n| \cdot i(\alpha, \gamma) \cdot i(\alpha, \beta)$$

となり欲しい不等式を得る。  $\square$

**補題 2.2.**  $i(\alpha, \beta) \geq 2$  とする。このとき,  $i(\alpha, \gamma) > i(\beta, \gamma)$  かつ  $n \neq 0$  であれば,  $i(\alpha, D_\alpha^n(\gamma)) < i(\beta, D_\alpha^n(\gamma))$  が成立する。

*Proof.* 仮定の下で, 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $i(\alpha, \gamma) < i(D_\alpha^n(\beta), \gamma)$  を示せば十分である。補題 2.1 により ( $\beta$  と  $\gamma$  を入れ替えて),

$$|n| i(\alpha, \beta) \cdot i(\alpha, \gamma) - i(D_\alpha^{-n}(\beta), \gamma) \leq i(\beta, \gamma)$$

である。故に, 上式に  $\beta$  に  $D_\alpha^n(\beta)$  を代入すると,

$$|n| i(\alpha, \beta) \cdot i(\alpha, \gamma) - i(\beta, \gamma) \leq i(D_\alpha^n(\beta), \gamma)$$

故に, もし  $i(\alpha, \beta) \geq 2$ ,  $n \neq 0$  かつ  $i(\alpha, \gamma) > i(\beta, \gamma)$  であれば,

$$\begin{aligned} i(\alpha, \gamma) &= 2i(\alpha, \gamma) - i(\alpha, \gamma) \\ &< |n| i(\alpha, \beta) \cdot i(\alpha, \gamma) - i(\beta, \gamma) \\ &\leq i(D_\alpha^n(\beta), \gamma) \end{aligned}$$

となる。  $\square$

定理 2.1 の証明.  $i(\alpha, \beta) \geq 2$  の時に示せば十分である。群  $\langle D_\alpha, D_\beta \rangle$  内に関係式がないことを示せば良い。いま,

$$D_\alpha^{n_{2k}} D_\beta^{n_{2k-1}} \cdots D_\alpha^{n_2} D_\beta^{n_1} = id$$

( $|n_1| + \cdots + |n_{2k}| > 0$ ) が成立したとする。このとき  $0 = i(\alpha, \alpha) < i(\alpha, \beta)$  であるので,

$$i(\alpha, D_\alpha^{n_1}(\alpha)) < i(\alpha, D_\alpha^{n_1}(\beta))$$

が成立する。補題 2.2 により,  $i(D_\alpha^{n_1}(\alpha)), D_\alpha^{n_1}(\beta) = i(\alpha, \beta) \geq 2$  なので,

$$\begin{aligned} i(\alpha, D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\alpha)) &= i(D_\beta^{-n_2}(\alpha), D_\alpha^{n_1}(\alpha)) \\ &> i(D_\beta^{-n_2}(\alpha), D_\alpha^{n_1}(\beta)) \\ &= i(\alpha, D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\beta)) \end{aligned}$$



が成立する. ここで,

$$\begin{aligned} & i(D_\beta^{n_{2s}} D_\alpha^{n_{2s-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\alpha), D_\beta^{n_{2s}} D_\alpha^{n_{2s-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\beta)) \\ &= i(D_\alpha^{n_{2s-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\alpha), D_\alpha^{n_{2s-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\beta)) \\ &= i(\alpha, \beta) \geq 2 \end{aligned}$$

であるので, これを繰り返すと, 最終的に

$$\begin{aligned} 0 &= i(\alpha, \alpha) = i(\alpha, D_\beta^{n_{2k}} D_\alpha^{n_{2k-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\alpha)) \\ &> i(\alpha, D_\beta^{n_{2k}} D_\alpha^{n_{2k-1}} \cdots D_\beta^{n_2} D_\alpha^{n_1}(\beta)) \\ &= i(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

を得るが, これは矛盾である.  $\square$

### 3. 系 4.3

したがって, 次の系を得る.

**系 3.1** (Corollary 4.3). 任意の Lefschetz ファイブレーションの *vanishing cycle* の和集合は  $\Sigma_g$  を充滿する.

ただし, 閉曲線の族  $\{\gamma_i\}_i$  が, 任意の単純閉曲線  $\alpha$  に対して

$$\sum_i i(\gamma_i, \alpha) > 0$$

が成立するとき, 族  $\{\gamma_i\}_i$  は  $\Sigma_g$  を**充滿**するという.

### 4. 正則族の場合の既約性 (志賀の定理)

$f: X \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1$  が正則族の場合には次の定理がある.

**定理 4.1** (Theorem 1 in [7]).  $F = \mathbb{D}/G$  を解析的有限リーマン面とする<sup>1</sup>.  $f: X \rightarrow F$  をファイバーが  $\Sigma_g$  と同相であるような  $S$  上の局所非自明な正則族とし<sup>2</sup>,  $\rho: G \rightarrow \Gamma_g$  をそのモノドロミーとする. このとき,  $\rho(G)$  は無限群であり,  $\rho(G)$  は既約である. 特に,  $f: X \rightarrow \mathbb{S}^2$  が正則な Lefschetz ファイブレーションであれば, *vanishing cycle* は  $\Sigma_g$  を充滿する.

ここで, 部分群  $H < \Gamma_g$  が**既約**であるとは, 次のような単純閉曲線族  $\{C_1 \cdots, C_n\}$  が  $\Sigma_g$  上にないことである.

- $i(C_i, C_j) = 0$
- 任意の  $h \in H$  は  $\{C_1 \cdots, C_n\}$  をホモトピーの意味で保つ.

証明にはタイヒミュラー空間上の複素解析及びクライン群論を用いる. ストーリーは以下の通り (タイヒミュラー空間については §5.2.2 を見よ).

- (1) Ahlfors-Bers 理論から  $T_g$  は自然な複素構造を持ち, Bers の定理からタイヒミュラー空間は  $\mathbb{C}^{3g-3}$  内の有界領域として正則な埋め込みにより実現される. さらに写像類群  $\Gamma_g$  は複素解析的同型のなす群として  $T_g$  に作用し, その作用はタイヒミュラー距離  $d_T$  に関して等長的である.
- (2) 正則族  $f: X \rightarrow S$  が与えられると, この族を表現する正則写像  $\Phi: \mathbb{D} \rightarrow T_g$  で

$$\rho(g) \circ \Phi = \Phi \circ g$$

が任意の  $g \in G$  に対して成立するものが存在する.

<sup>1</sup>より一般にグリーン関数を持たないリーマン面で良い.

<sup>2</sup>ファイバーも解析的有限リーマン面で良い.

- (3) 無限群であることは次のようにしてわかる：いま  $f : X \rightarrow S$  の局所非自明性から  $\Phi$  は定数写像ではないことに注意する。有界正則関数の非接極限値に関するファトゥの定理から、ほとんどすべての  $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$  に対して非接極限 (non-tangential limit)  $\Phi(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \Phi(z)$  が存在する。  $F$  は解析的有限なりーマン面であるので、そのような  $e^{i\theta}$  に対して、  $g_n(z) \rightarrow e^{i\theta}$  が任意の  $z \in \mathbb{D}$  に対して非接極限となる  $\{g_n\}_n \subset G$  が存在する。

いま、  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  を  $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$  となるものを取る。  $g_n(z_1), g_n(z_2) \rightarrow e^{i\theta}$  は非接極限であることに注意する。  $\Phi(e^{i\theta}) \in T_g$  (内部) であれば、

$$\begin{aligned} 0 &= d_T(\Phi(e^{i\theta}), \Phi(e^{i\theta})) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_T(\Phi(g_n(z_1)), \Phi(g_n(z_2))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_T(\rho(g_n) \circ \Phi(z_1), \rho(g_n) \circ \Phi(z_2)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_T(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) > 0 \end{aligned}$$

となり矛盾である。ここで  $d_T$  はタイヒミュラー距離である。故に  $\rho(G)$  は無限群である。

- (4) 既約であることは次のようにわかる：いま  $\Phi$  は定数写像ではないので、ほとんどすべての  $\partial\mathbb{D}$  に対して  $\Phi(e^{i\theta})$  に対応するクライン群 (b 群) は全退化群であることに注意する (cf. [6])。

既約でないとする。  $\sigma = \{C_1, \dots, C_n\}$  を  $\rho(G)$  により固定される単純閉曲線族とする。  $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$  を、非接極限  $\Phi(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \Phi(z)$  が存在する点とする。  $\{g_n\}_n$  を任意の  $z \in \mathbb{D}$  に対して、  $g_n(z) \rightarrow e^{i\theta}$  が非接極限となるように取る。いま  $\Phi(z) = (S, f)$  とする。  $f_n : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  を  $\rho(g_n)$  を誘導するものとする。つまり、

$$\rho(g_n)(\Phi(z)) = \rho(g_n)(S, f) = (S, f \circ f_n^{-1})$$

が成立する同相写像とする。

このとき

$$(4.1) \quad \ell_{\Phi(g_n(z))}(C_j) = \ell_{\rho(g_n)(\Phi(z))}(C_j) = \ell_S(f \circ f_n^{-1}(C_j))$$

となるが、仮定より任意の  $n$  に対してホモトピーの意味で  $f_n^{-1}(\sigma) = \sigma$  であるので、(4.1) の右辺は一樣に有界である。一方で、  $\Phi(g_n(z)) \rightarrow \Phi(e^{i\theta})$  であり、  $\Phi(e^{i\theta})$  は全退化群であるので Abikoff の定理 (cf. [1]) から

$$\ell_{\Phi(g_n(z))}(C_j) \rightarrow \infty$$

となるはずである。これは矛盾である。

## 5. セクションの数と KERCKHOFF の定理との関連

論文では Kerckhoff の定理との関連について言及している。ここではそれについてまとめておく。書いてあることは次の通りである。

**5.1. セクションの数の評価.**  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  を vanishing cycle とする。このとき、  $\Gamma = \cup_{i=1}^n \gamma_i$  の次数 4 のグラフであり、胞体分割の 1 骨格となる。5.1 章で見ると、その面の個数の半分はファイブレーションのセクションの個数の上からの評価を与える。しかし、この評価はシャープではない。しかし、ここの話はよくわかりません。

**5.2. Kerckhoff の定理を用いた不変量の構成.**

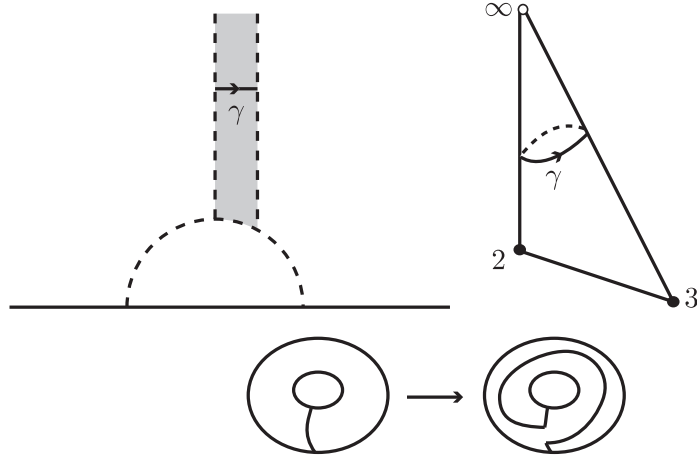


FIGURE 2. 長さ関数の多価性

5.2.1. 不変量の構成のための準備. Kerckhoffの定理との関連を話す前に次のことを注意しておく. 曲面上の双曲構造  $\sigma$  を考える.  $\Sigma_g$  上の閉曲線  $\alpha$  に対して,  $S = (\Sigma_g, \sigma)$  に関する  $\alpha$  とホモトピックな測地線の長さを  $l_S(\alpha)$  とする. これは  $\sigma$  の等長類に寄らない, つまり,  $f: S_1 = (\Sigma_g, \sigma_1) \rightarrow S_2 = (\Sigma_g, \sigma_2)$  を等長写像とすると,  $l_{S_2}(f(\alpha)) = l_{S_1}(\alpha)$  である. 従って, 等長類によらない話なので, 一見

$$S \mapsto l_S(\alpha)$$

は  $\Sigma_g$  上のモジュライ空間上の関数と思われるがこれはモジュライ空間上では関数にならない. 多価関数にはなる. 従って, このような長さ関数を考える場合には, モジュライ空間の (ある意味) 普遍被覆空間であるタイヒミュラー空間上で話をすることが必要になる (cf. 図 5.2.1).

5.2.2. タイヒミュラー空間. ここでは次のようにタイヒミュラー空間を定義する.  $\Sigma_g$  と同相な双曲曲面  $S$  と向きを保つ同相写像  $f: \Sigma_g \rightarrow S$  の対,  $(S, f)$  を考える. このような対  $(S, f)$  を標識付き双曲曲面と呼ぶ. このとき, 2つの標識付き双曲曲面  $(S_1, f_1)$  と  $(S_2, f_2)$  が同値であるとは,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{f_1} & S_1 \\ & \searrow f_2 & \downarrow h \\ & & S_2 \end{array}$$

がホモトピーの意味で可換になる等長写像  $h: S_1 \rightarrow S_2$  が存在することとする. このとき

$$T_g = \{(S, f)\} / \sim$$

として種数  $g$  のリーマン面 (双曲曲面) のタイヒミュラー空間と呼ぶ.

5.2.3. (左) 地震変形. まず単純閉曲線に対する左地震変形を定義する.  $\alpha^*$  を双曲曲面  $S$  上の単純閉測地線とする. このとき, デーンツイストの場合と同様に,  $S \setminus \alpha^*$  について左に長さ  $t$  だけツイストしてららもう一度張り合わせて作られた双曲曲面を  $\gamma$  に関する時間  $t$  の左地震変形と呼ぶ (図 5.2.3). 定義から  $t = l_S(\alpha)$  の時には (左向き) Dehn twist になる. この意味では, 地震変形は Dehn twist の連続化と思

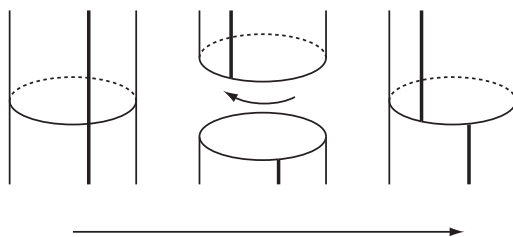


FIGURE 3. 左地震変形

える。次に**重み付き単純閉曲線**  $\nu = w\alpha$  ( $w > 0$ ) **に関する時間**  $t$  **の地震変形**を  $\alpha$  に関する時間  $tw$  の地震変形とする。

重み付き単純閉曲線  $\nu = w\alpha$  を固定する。  $S = (S, f) \in T_g$  に対して、  $S$  を  $wf(\alpha)$  に関する時間  $t$  の地震変形をして得られる双曲曲面を  $S'$  と書く。 適当な  $f(\alpha)$  の環状近傍でのツイストを考えることにより、自然に  $f$  と地震変形から定まる自然な同相写像  $f' : \Sigma_g \rightarrow S'$  が決まる。 このとき、

$$\mathcal{E}_\nu(t)(S) = (S', f')$$

とすると、写像

$$\mathcal{E}_\nu(t) : T_g \rightarrow T_g$$

が定まる。

一般に**測度付き測地線層**  $\mu$  **に関する時間**  $t$  **の地震変形**を、タイヒミュラー空間上の写像として

$$\mathcal{E}_\mu(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\nu_i}(t)$$

とする。ただし、  $\nu_i$  は重み付き単純閉曲線であり  $\nu_i \rightarrow \nu$  となるものとする。これは well-defined である (Thurston)。

**定理 5.1** (Thurston (cf. [9])). 測度付き測地線層の空間を  $\mathcal{ML}$  とする。  $S_0 \in T_g$  を固定する。このとき、指数写像

$$\mathcal{ML} \ni \mu \mapsto \mathcal{E}_\mu(S_0) \in T_g$$

は同相である。特に任意の標識付き双曲曲面は左自身変形により互いに写り合うことができる。

コンパクト曲面の場合のこの定理の証明は、Kerckhoff [5] にも載っている。

5.2.4. 不変量の構成. 種数  $g$  のリーマン面のタイヒミュラー空間を  $T_g$  と書く。このとき、  $\Sigma$  上の曲線族  $\gamma = \{\gamma_i\}_i$  に対して長さ関数の和

$$l_\gamma(S, f) = \sum_i l_S(f(\gamma_i))$$

とするとこれは well-defined な関数となる。

**定理 5.2** (Kerckhoff [5]). 長さ関数

$$l_\alpha : T_g \ni \sigma \mapsto l_\sigma(\alpha)$$

は地震変形に関して凸である。さらに  $\gamma$  が  $\Sigma_g$  を充滿するとき、

$$l_\gamma : T_g \rightarrow \mathbb{R}$$

固有であり、最小値を持つ点は一意的である。

凸性に関する証明のアイデアは以下の通り. 簡単のため, 単純閉曲線  $\alpha$  に沿った地震変形のみを考える.

- (1)  $\gamma$  を単純閉曲線とする.  $S = (S, f) \in T_g$  に対して,  $\alpha^*, \gamma^*$  を  $f(\alpha), f(\gamma)$  とホモトピックな閉測地線とする.  $\alpha^*$  と  $\gamma^*$  の交点を  $\{x_1, \dots, x_n\}$  とし,  $x_i$  で  $\gamma^*$  から  $\alpha^*$  に時計と反対周りに見た角度を  $\theta_i$  とする. このとき微分公式,

$$\left. \frac{d}{dt} \ell_\gamma(\mathcal{E}_\alpha(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i$$

となる.

- (2) 左地震変形に関して各  $\theta_i$  は減少する. 従って,  $\cos \theta_i$  は増加する. 故に, 微分公式から  $\ell_\gamma(\mathcal{E}_\alpha(t))$  は凸関数となる.

#### 5.2.5. 不変量の構成.

- (1)  $f: X \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1$  を Lehschetz ファイブレーションとする. このとき vanishing cycle  $V$  に対して  $\ell(V)$  を上記の長さの最小値とする. vanishing cycle の族はブレード群  $\text{Br}_n$  によりラベルづけることが出来る (モノドロミーの生成元の変換).

**定義 5.1.** あるブレード群によりラベルづけられた *positive relation* の族  $I(\text{Br}_n)$  により定義された Lehschetz ファイブレーション  $f: X \rightarrow \mathbb{S}_\infty^1$  を考える. このとき, 長さを

$$\ell(X, f) = \min\{\ell(V_i) \mid i \in I(\text{Br}_n)\}$$

と定義する. これは Lehschetz ファイブレーションの不変量となる.

次のことは理解出来ませんでした, 将来に期待出来る話かもしれません.

- (2) この不変量はツイストの順序によらず vanishing cycle の曲線のみによるので, 幾何学的に “微妙” な情報を持っていることは疑わしい.
- (3) にもかかわらず, 面白そうである: この長さは vanishing cycle の交点数の合計の最小数 (ブレード群上での) と関連すると予測される. この数は Floer theory および, ファイバー内のすべての異なる vanishing cycle 上の Floer ホモロジーの階数の和と関連する.

#### REFERENCES

- [1] W. Abikoff, On two theorems on totally degenerate Kleinian groups, Amer. J. Math. 98 (1976), 109–118.
- [2] J. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Ann. Math. Stud., **82** (1974).
- [3] A. Douady, A. Fathi, D. Fried, F. Laudenbach, V. Poénaru, and M. Shub, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay (seconde édition). Astérisque No. 66-67, Société Mathématique de France, Paris (1991).
- [4] A. Ishida, The structure of subgroup of Mapping class group generated by two Dehn twists, Proc. Japan. Acad. **72**, Ser. A. (1996), 240–241.
- [5] S. Kerckhoff, Nielsen’s realization theorem, Ann. of Math. **117**, 235–265,
- [6] H. Shiga, On Teichmüller spaces and modular transformations, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), no. 4, 619–626.
- [7] H. Shiga, On monodromies of holomorphic families of Riemann surfaces and modular transformations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **122** (1997), no. 3, 541–549.
- [8] I. Smith, Geometry monodromy and the hyperbolic disc, Quart. J. Math. **52** (2001), 217–228.
- [9] W. Thurston, Earthquakes in two-dimensional hyperbolic geometry, in *Low-dimensional Topology and Kleinian groups*, London Math. Soc. **112** (1986), 91–112.

# I.Smith の論文”Geometric monodromy and the hyperbolic disc” 第 5 章について

大阪大学大学院理学研究科数学専攻博士前期課程 2 年 早野健太

本稿では, Smith の論文 [4] の第 5 章についての説明を行う. 特に, 以下の定理について議論を展開する.

**定理 1.1 (Smith [4] Theorem 5.1.)**  $f : X \rightarrow S^2$  を, レフシェッツ束とする. このとき,  $f$  の切断によって代表される,  $S^2$  から  $X$  への写像のホモトピー類は高々有限個である.

なお, 本稿では特に断らない限り, 多様体や写像は全て可微分であると仮定する.

## 1 切断の自明性について

この章では, Smith の論文 [4] の定理 1.1 の証明の 1 行目に現れる, ”trivialized” の意味について説明を行う. まず初めに, ここで与える切断の自明性の定義は, 筆者が論文 [4] を読んで Smith の意図を推測することにより得られたものであることを注意しておく. 定義を与える前に, 微分幾何の基礎事項をいくつか復習する.

**定義 1.2**  $M, N$  を多様体とし,  $f : M \rightarrow N$  を沈めこみ (すなわち, 任意の  $p \in M$  に対して  $df_p$  は全射) とする.  $M$  の接束  $TM$  の部分束  $\mathcal{H}$  が以下の条件を満たすとき,  $\mathcal{H}$  を  $f$  の水平分布 (horizontal distribution) という:

任意の  $p \in M$  に対して  $\text{res } df_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{f(p)}N$  は線形同型である.

### 注意 1.3

1.  $g$  を  $M$  のリーマン計量とする. このとき,  $\mathcal{H}_g$  を,

$$\mathcal{H}_{g,p} = (\text{Ker } df_p)^\perp \quad (p \in M)$$

で定めると,  $\mathcal{H}_g$  は  $f$  の水平分布となる. 任意の多様体はリーマン計量を許容するので, 水平分布は必ず存在する.

2. 定義 1.2 の条件に加えて, (例えば)  $M, N$  はともにコンパクトで,  $f^{-1}(\partial N) = \partial M$  であるとする. このとき, 任意の  $N$  上の曲線  $\gamma : [a, b] \rightarrow N$  と  $p_0 \in f^{-1}(\gamma(a))$  に対し, 以下の条件を満たす  $M$  上の曲線  $\tilde{\gamma}_{p_0} : [a, b] \rightarrow M$  が一意に存在する.

- $\tilde{\gamma}_{p_0}(a) = p_0$ ,
- $f \circ \tilde{\gamma}_{p_0} = \gamma$ ,
- $\text{Im } d\tilde{\gamma}_{p_0} \subset \mathcal{H}$ .

このような曲線  $\tilde{\gamma}_{p_0}$  を,  $\gamma$  の  $\mathcal{H}$  における水平リフト (**horizontal lift**) という. ここで,  $\tilde{\gamma}_{p_0}$  は,  $\gamma$  の方向ベクトル場を,  $\text{res } df_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{f(p)}N$  で引き戻すことによって得られる,  $f^{-1}(\text{Im } \gamma)$  上のベクトル場の積分曲線に他ならない. 従って多様体と写像に関する上述のような仮定がなくても, 引き戻して得られる  $f^{-1}(\text{Im } \gamma)$  上のベクトル場の積分曲線をとることができれば, 水平リフトをとることができる.

3.  $M$  を 4次元多様体とし, 沈めこみ  $p : M \rightarrow D^2$  が  $p^{-1}(\partial D^2) = \partial M$  を満たすとする. このとき  $p$  は自明な曲面束となり, さらに  $p$  の水平分布  $\mathcal{H}$  が与えられていると以下のようにして  $p$  の自明化写像  $\mathcal{P}$  をとることができる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} : D^2 \times p^{-1}(0) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \\ (z, x) & \longmapsto & \tilde{\gamma}_{z,x}(1), \end{array}$$

ただし,  $\gamma_z : [0, 1] \ni t \mapsto tz \in D^2$  であり,  $\tilde{\gamma}_{z,x}$  は  $\gamma_z$  の  $x$  を始点とする  $\mathcal{H}$  による水平リフトである. しかし,  $f : X \rightarrow D^2$  をレフシェッツ束としたとき, 一般には  $f$  はレフシェッツ特異点を持つため, 水平分布をとることはできず, (当然ではあるが) 上述のような自明化もとることができない.  $\mathcal{C}_f \subset X$  を  $f$  のレフシェッツ特異点全体とすると,  $\text{res } f : X \setminus \mathcal{C}_f \rightarrow D^2$  上の水平分布  $\mathcal{H}$  をとることはでき, さらに  $f(p_i) \neq 0$  を満たす  $p_i \in \mathcal{C}_f$  に対して以下の写像が定義できる.

$$\begin{array}{ccc} \theta_{p_i} : f^{-1}(0) & \longrightarrow & f^{-1}(f(p_i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{\gamma}_{f(p_i),x}(t), \end{array}$$

このとき, 曲面  $f^{-1}(0)$  内のある単純閉曲線  $c_i$  が  $\theta_{p_i}$  により  $p_i$  に写され (この円周  $c_i$  を  $p_i$  の消滅サイクルというのであった),  $\theta_{p_i}$  は  $f^{-1}(0) \setminus c_i$  に制限すると微分同相になる. 以上のことから,  $\text{res } f : X \setminus \mathcal{C}_f \rightarrow D^2$  の水平分布を与えると, レフシェッツ特異点の消滅サイクル  $c_i \subset f^{-1}(0)$  は, アイストピー類としてではなく, 単純閉曲線として一意に定まる, ということがわかる. 以下, 消滅サイクルは (水平分布が与えられていれば) いつでも上述のようにとるものとする.

さて, 以上の準備のもと, レフシェッツ束の切断が自明である, という概念を定義する.  $f : X \rightarrow S^2$  をレフシェッツ束,  $\mathcal{C}_f \subset X$  を  $f$  のレフシェッツ特異点全体とする. また,  $\mathcal{H} \subset T(X \setminus \mathcal{C}_f)$  を  $\text{res } f : X \setminus \mathcal{C}_f \rightarrow S^2$  の水平分布とする.  $S^2$  上の,  $f(\mathcal{C}_f)$  を内部に含む円板  $B \subset S^2$  をとり, 同一視  $B \cong D^2 \subset \mathbb{C}$  を,  $f(\mathcal{C}_f) \subset \{z \in D^2 \mid |z| = \frac{1}{2}\}$  となるようにとる.

**定義 1.4**  $\sigma : S^2 \rightarrow X$  を  $f$  の切断とする. ある  $p_0 \in f^{-1}(0)$  ( $0 \in D^2 \cong B$ ) が存在し,

$$\sigma(B) = \{p \in X \mid p = \tilde{\gamma}_{z,p_0}(1), z \in B\},$$

が成立するとき,  $\sigma$  は  $\mathcal{H}$  に関して  $B$  上自明である (**trivial**) という. ただし,  $\gamma_z : [0, 1] \ni t \mapsto tz \in B$  で,  $\tilde{\gamma}_{z,p_0}$  は  $p_0$  を始点とする  $\gamma_z$  の水平リフトである.

**注意 1.5**

1. (ある水平分布に関して) 自明な切断は,  $\Sigma_g \setminus \cup c_i$  内の 1 点と同一視できる. ただし,  $c_i \subset \Sigma_g$  は (同じ水平分布から定まる)  $f$  の消滅サイクルである. このとき, 水平分布を切断の近傍の外部でホモトピーにより変形すると, それに応じて消滅サイクルは閉曲面のアイソトピーにより変形される.
2. 任意の切断は, 水平分布をうまくとれば自明化することができる. つまり, 各切断を個別に自明化することはできる.
3. 円板上の種数  $g$  のレフシェッツ束の全空間は,  $D^2 \times \Sigma_g$  に 2-ハンドルを, 消滅サイクルに沿って貼ることにより得られる, ということが知られている ([1], [2] または [3] を参照). この分解により  $f^{-1}(B)$  を  $D^2 \times \Sigma_g \cup (2\text{-handles})$  と同一視したとき, (ハンドル分解を得る際に用いる水平分布に関して) 切断が自明であるという条件は,  $\sigma(B) = D^2 \times \{p_0\}$  となることに他ならない.

## 2 ある主張を仮定したうえでの, 定理 1.1 の証明

この章では, 以下の主張を仮定したうえで定理 1.1 の証明を行う.

**主張 2.1** (ある主張)  $f : X \rightarrow S^2$  をレフシェッツ束とし,  $C_f \subset X$ ,  $B \subset S^2$  を定義 1.4 のときと同様にとる. このとき, ある  $\text{res } f : X \setminus C_f \rightarrow S^2$  の水平分布  $\mathcal{H}$  が存在し,  $f$  の任意の切断は  $B$  上  $\mathcal{H}$  に関して自明な切断とホモトピックである.

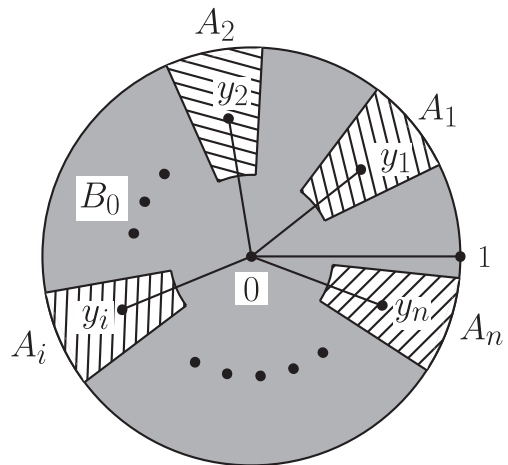
**注意 2.2** 注意 1.5 の 2. でも述べた通り, 与えられた切断に対して水平分布をうまくとればその切断を自明化することはできる. それに対し主張 2.1 では, 全ての切断を一つの水平分布で自明化できる, ということを述べている.

(主張 2.1  $\implies$  定理 1.1 の証明) :  $\mathcal{H} \subset T(X \setminus C_f)$  を主張 2.1 にある水平分布とする. 定理 1.1 の主張は切断のホモトピー類に関するものであるから,  $B$  上  $\mathcal{H}$  に関して自明である切断のみを考えても一般性は崩れないことに注意する.

$f(C_f) = \{y_1, \dots, y_n\}$  とし,  $B_0, A_i \subset B$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を右図のようにとる. このとき, 以下の写像は微分同相である.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1 : B_0 \times f^{-1}(0) & \longrightarrow & f^{-1}(B_0) \\ \cup & & \cup \\ (z, x) & \longmapsto & \tilde{\gamma}_{z,x}(1). \end{array}$$

また,  $c_i \subset f^{-1}(0) \cong \Sigma_g$  を  $f^{-1}(y_i)$  の中にあるレフシェッツ特異点の消滅サイクルとすると, 以下の写像は埋め込みである.





$$\begin{array}{ccc} \Phi_{2,i} : A_i \times (f^{-1}(0) \setminus \nu c_i) & \longrightarrow & f^{-1}(A_i) \\ \cup & & \cup \\ (z, x) & \longmapsto & \tilde{\gamma}_{z,x}(1). \end{array}$$

これらの写像により，それぞれの写像の定義域とその像を同一視する． $f^{-1}(B)$  のリーマン計量  $g$  を，上述の直積構造の各成分が互いに直交するようにとる． $\partial B$  上の曲線  $\gamma_\partial : [0, 1] \rightarrow \partial B$  を， $\gamma_\partial(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$  で定める． $g$  から定まる水平分布  $\mathcal{H}_g$  と，それによる  $\gamma_\partial$  の水平リフトを用いることにより，次の同一視を得る．

$$f^{-1}(\partial B) \cong [0, 1] \times f^{-1}(1)/(1, x) \sim (0, \varphi(x)),$$

ただし， $\varphi : f^{-1}(1) \ni x \mapsto \tilde{\gamma}_{\partial,x}(1) \in f^{-1}(1)$  である． $\mathcal{H}$  を用いて  $f^{-1}(0)$  と  $f^{-1}(1)$  を同一視したとき， $\varphi$  は  $f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  上恒等写像であり， $\cup \nu c_i$  上は  $t_{c_n} \circ \dots \circ t_{c_1}$  に一致する．ここで， $t_{c_i}$  は  $c_i$  に沿う右向きデーンツイストである（詳しくは [1], [2] あるいは [3] を参照）． $c_i$  は  $f$  の消滅サイクルであったから， $\varphi$  は恒等写像とアイソトピックである． $\Psi_t : f^{-1}(1) \rightarrow f^{-1}(1)$  を恒等写像から  $\varphi$  へのアイソトピーとする．このとき，以下の微分同相を得る：

$$X \cong f^{-1}(B) \cup_\xi D^2 \times f^{-1}(1),$$

ただし，

$$\begin{array}{ccc} \xi : \partial D^2 \times f^{-1}(1) \cong [0, 1] \times f^{-1}(1)/(1, x) \sim (0, x) & \longrightarrow & [0, 1] \times f^{-1}(1)/(1, x) \sim (0, \varphi(x)) \\ \cup & & \cup \\ (t, x) & \longmapsto & (t, \Psi_t^{-1}(x)). \end{array}$$

である．

さて，証明の冒頭で述べた通り，切断は  $B$  上自明であるもののみを考えても一般性は崩れないのであった． $f$  の切断  $\sigma$  に対し， $\sigma(B) \cap f^{-1}(0) = \{p_\sigma\}$  とする．

**補題 2.3**  $\sigma$  のホモトピー類は， $p_\sigma$  によってのみ決まる．

(補題 2.3 の証明) :  $\tilde{\sigma}$  を  $B$  上自明な  $f$  の切断で， $p_{\tilde{\sigma}} = p_\sigma$  を満たすものとする．まず  $\sigma, \tilde{\sigma}$  はともに  $B$  上自明であるから， $\sigma|_B = \tilde{\sigma}|_B$  となる． $S^2 \setminus \text{Int } B \cong D^2$  における  $\sigma, \tilde{\sigma}$  の様子を見ていく． $S_\sigma = \sigma(\partial D^2) = \{(t, \Psi_t(p_\sigma)) \in \partial D^2 \times \Sigma_g | t \in [0, 1]\}$  とする．ホモトピー完全列より，次の完全列を得る：

$$\pi_2(D^2 \times \Sigma_g) \cong 1 \longrightarrow \pi_2(D^2 \times \Sigma_g, S_\sigma) \xrightarrow{j_*} \pi_1(S_\sigma) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2 \times \Sigma_g).$$

この完全列より以下を得る：

$$\pi_2(D^2 \times \Sigma_g, S_\sigma) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (\text{曲線 } t \mapsto \Psi_t(p_\sigma) \text{ が } \S \text{ null-homotopic のとき}), \\ \{1\} & (\text{曲線 } t \mapsto \Psi_t(p_\sigma) \text{ が } \S \text{ null-homotopic でないとき}). \end{cases}$$

となる． $[\sigma|_{D^2}] \in \pi_2(D^2 \times \Sigma_g, S_\sigma)$  に対して， $j_*([\sigma|_{D^2}])$  は  $\pi_1(S_\sigma)$  の生成元になる． $\tilde{\sigma}$  に対しても  $S_{\tilde{\sigma}}$  を同様に定義すると，これは  $S_\sigma$  に一致する．さらに同様の議論から  $[\sigma|_{D^2}] = [\tilde{\sigma}|_{D^2}]$

が  $\pi_2(D^2 \times \Sigma_g, S_\sigma)$  の中で成立する. 従って,  $\sigma|_{D^2}$  から  $\tilde{\sigma}|_{D^2}$  へのホモトピーが存在するが,  $S^1$  の写像度 1 の写像全体の空間は可縮であるから, このホモトピーは  $D^2$  の境界上常に  $\sigma|_{\partial D^2} = \tilde{\sigma}|_{\partial D^2}$  と一致するようにとれる. 特にこのホモトピーは  $\sigma$  から  $\tilde{\sigma}$  へのホモトピーに拡張できる. これで補題 2.3 は示された.  $\square$

**注意 2.4** この補題の証明から, 直ちに次の系が得られる.

**系 2.5**  $p \in f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  が  $f$  の切断を表すことと, 曲線  $t \mapsto \Psi_t(p)$  が null-homotopic であることは同値である.

**補題 2.6**  $\sigma_1, \sigma_2$  を  $f$  の切断とし,  $p_{\sigma_1}$  と  $p_{\sigma_2}$  が  $f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  の同じ連結成分に含まれると仮定する. このとき,  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  はホモトピックである.

(補題 2.6 の証明) :  $l : [0, 1] \rightarrow f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  を,  $p_{\sigma_1}$  から  $p_{\sigma_2}$  への道とする. 補題 2.3 より,  $\sigma_2$  は以下のような切断  $\tilde{\sigma}_2$  とホモトピックである.

- $\tilde{\sigma}_2$  は  $B$  上  $\sigma_2$  と一致する.
- $z = r \exp 2\pi\sqrt{-1}t \in D^2 \cong S^2 \setminus \text{Int } B$  に対し,

$$\tilde{\sigma}_2(z) = \begin{cases} (z, \Psi_t(l(2r-1))) & (r \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ \sigma_1(2z) & (r \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}). \end{cases}$$

また,  $\sigma_1$  と  $\tilde{\sigma}_2$  はホモトピックである. 実際, 2つの切断の間のホモトピー  $\Theta_s : S^2 \rightarrow X$  として以下のようなものがとれる.

- $z \in B$  に対して,  $\Theta_s(z) = (z, l(s))$ ,
- $z = r \exp 2\pi\sqrt{-1}t \in D^2 \cong S^2 \setminus \text{Int } B$  に対して,

$$\Theta_s(z) = \begin{cases} (z, \Psi_t(l(s(2r-1)))) & (r \geq \frac{2-s}{2} \text{ のとき}), \\ \sigma_1(\frac{2-s}{2}z) & (r \leq \frac{2-s}{2} \text{ のとき}). \end{cases}$$

以上より補題 2.6 が従う.  $\square$

(定理 1.1 の証明の続き) : 補題 2.3, 補題 2.6 より,  $f$  の切断によって代表されるホモトピー類は, 高々  $f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  の連結成分の数だけしかないことが従う. この連結成分は明らかに有限個しかない. これで定理 1.1 は示された.  $\square$

## 注意 2.7

1. Smith の論文 [4] の第 1 章の文中では, 定理 1.1 は [4] の Theorem 1.3 (すなわち, レフシェッツ東の消滅サイクルが閉曲面をフィルアップすること) の系として得られる, という記述がみられるが, 証明のどの部分でこの定理が利いているのか, 筆者には理解できていない.

2. 証明で得られる切断のホモトピー類の個数の上限 (すなわち,  $f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  の連結成分の個数) は必ずしも最良の評価とは限らない. 実際,  $\sigma$  を切断とし,  $p \in f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  を,  $p_\sigma$  を含む連結成分以外の点からとってきたとき,  $p$  が  $f$  の切断を表すかどうかは, 次のように容易に決定することができる.

**命題 2.8**  $p \in f^{-1}(0) \setminus \cup \nu c_i$  が  $f$  の切断を表すことと,  $p_\sigma$  と  $p$  を結ぶ道  $\ell$  に対して,  $\ell \cdot \varphi(\ell)^{-1}$  が null-homotopic であることは同値である.

(命題 2.8 の証明): まず系 2.5 より,  $p$  が切断を表すことと,  $p \rightarrow \Psi_t(p)$  が null-homotopic であることは同値である. また, この曲線が  $\ell \cdot \varphi(\ell)^{-1}$  とホモトピックであることは容易に示すことができる. 以上より主張が従う.  $\square$

**注意 2.9** (主張 2.1 について) もし主張 2.1 が成立しない場合, 証明の最後の部分 (すなわち, 2つの補題から定理を導く部分) が破綻する. 実際この主張がなければ, 消滅サイクルを固定したうえで全ての切断が閉曲面上の点で表せる, ということを保証できないため, 切断のホモトピー類の個数を消滅サイクルの補集合の連結成分の個数で抑えることができなくなる. また, 遺憾ではあるが筆者にはこの主張の真偽が判別できていない.

## 最後に

この度, このような勉強会に参加させて頂き, 講演の機会まで下さったことを, 企画して下さい下さった志賀啓成先生, 宮地秀樹先生および遠藤久顕先生に, 心より感謝致します.

## 参考文献

- [1] R. E. Gompf, A.I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999
- [2] A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, *Pacific J. Math.* **89**(1980), 89–104
- [3] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach -, *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces*, (S. Kojima, et. al., eds.), World Scientific, 1996, 123–148
- [4] I. Smith, Geometric monodromy and the hyperbolic disc, *Q. J. Math.* **52**(2001), 217–228