A FATOU-JULIA DECOMPOSITION FOR TRANSVERSELY HOLOMORPHIC FOLIATIONS

足助 太郎

序

複素力学系の代表的なものの一つに$\mathbb{C}P^1$上の有理函数の反復合成が挙げられる．$f\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$を有理函数とすると，$\mathbb{C}P^1$はFatou集合$F(f)$とJulia集合$J(f)$に分解される．これらは$f$でも$f^{-1}$でも不変な，それぞれ開集合と閉集合である．一方，複素力学系の別な代表例として有限生成Klein群[†1]の$\mathbb{C}P^1$への作用が挙げられる．Γを有限生成Klein群とすると，$\mathbb{C}P^1$は不連続領域（通常領域）$\Omega(\Gamma)$と極限集合$\Lambda(\Gamma)$に分解される．これらはΓの作用で不変な，それぞれ開集合と閉集合である．有名なSullivanの辞書はFatou集合と不連続領域，Julia集合と極限集合がそれぞれ「似ている」というものである．実際，これらは次のように考えると「同一」のものと考えることができる．まず，fが有理函数であるときに，$\mathit{\Gamma} = \{f^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$（$f$が生成する半群）と置くと[†2]，

$$\begin{aligned} F(f) &= \left\{ z \in \mathbb{C}P^1 \,\middle|\, z\text{ のある近傍 }U\text{ が存在し，}\{f^n|_U \mid n = 0, 1, \ldots\}\text{ は正規族} \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C}P^1 \,\middle|\, z\text{ のある近傍 }U\text{ が存在し，}\{\gamma|_U \mid \gamma \in \mathit{\Gamma}\}\text{ は正規族} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つので，$F(f)$や$J(f)$は単にfのみではなく，$\mathit{\Gamma}$により定まっていると考えてそれぞれ$F(\mathit{\Gamma})$，$J(\mathit{\Gamma})$で表す．一方，Γが有限生成Klein群であるときには，通常はまずΓの3次元球への作用を用いて$\Lambda(\Gamma)$を定義し，その補集合として$\Omega(\Gamma)$を定めるが，

$$\Omega(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C}P^1 \,\middle|\, z\text{ のある近傍 }U\text{ が存在し，}\{\gamma|_U \mid \gamma \in \Gamma\}\text{ は正規族} \right\}$$

Date: 2010年9月11日.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 37F50; Secondary 58H05, 37F75.
Key words and phrases. 葉層構造, 擬群, Fatou 集合, Julia 集合, 不連続領域, 極限集合.
本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金 若手研究（A）(No. 19684001) の補助を得て行われた.
[†1] ここでは $\Omega(\Gamma) \neq \varnothing$ は仮定せず，単に $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の有限生成離散部分群を意味する.
[†2] ここでは f の n 回合成を f^n で表す．f^0 は恒等写像とする.

が成り立つことが知られている [8, pp. 98–99]．そこで G が $\mathbb{C}P^1$ に作用する「何か」であるときに

$$F(G) = \left\{ z \in \mathbb{C}P^1 \,\middle|\, z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在し，} \{g|_U \mid g \in G\} \text{ は正規族} \right\}$$

と置くことにすると，

1) G が 1 つの有理函数で生成される半群である．
2) G が有限生成な $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ の離散部分群である．

の時には $F(G)$ はよく研究されているということになる．また，1) をもう少し一般化して，G が有理函数からなる，有限生成の半群であるとしても $F(G)$ は盛んに研究されている（例えば [9]）．

ここでは（横断的に）複素解析的な，複素余次元 1 の葉層構造の横断方向の力学系を複素力学系と考え，これらについても Fatou 集合や Julia 集合を，例えば以下のような理由で考えてみたい．

1) 複素力学系の研究で非常に有用なのだから，葉層構造の研究でも有用であろうと安直に期待される．
2) 実余次元 1 の葉層構造においては，極小集合[†3]あるいはその近傍にしばしば葉層構造の力学系的な複雑さが集約され，重要である．一方，複素余次元 1 の場合にも極小集合は定義できるが，あまり上手く調べることができない．Julia 集合や極限集合は類似の性質をもつので，極小集合の代わりにしたい．つまり，葉層構造の簡単な部分を Fatou 集合とし，残りの部分を Julia 集合としたい．

次節では複素余次元 1 の葉層構造で，ある種のコンパクト性を持つものの Fatou-Julia 分解について述べる．複素余次元が 2 以上の場合や，コンパクト性を仮定しない場合については最後に注として簡単に述べる．節を改めていくつか例を挙げる．なお，やや詳しい概説が [2] にあるので，興味を持たれた方は参照されたい．本予稿も一部 [2] に依った．また，葉層構造に関する一般的な事柄については [10], [7] や [4] を参照されたい．

[†3] 葉の和集合で，包含関係に関して極小な空でない集合．

定義 1.1. M を境界を持たない n 次元実多様体とする．M の（実）余次元 q の葉層構造（foliation）とは，M にはめ込まれた，連結な $(n-q)$ 次元部分多様体[†4]の族 $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で，次のような性質をもつものを構造と考えたものである．

1) $L_\alpha \cap L_\beta \neq \varnothing \Longrightarrow L_\alpha = L_\beta$,
2) $M = \bigcup_{\alpha\in A} L_\alpha$,
3) 局所的には M は L_α の開集合と $\mathbb{R}^q$ 内の開球の直積である．より詳しく，次のような性質をもつ M の atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する．
   (a) $\forall\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda\colon U_\lambda \to V_\lambda \times T_\lambda$ （同相）．ここで V_λ は $\mathbb{R}^{n-q}$ 内の，T_λ は $\mathbb{R}^q$ 内のそれぞれ開球とする．
   (b) 上の同一視の下で，$L_\alpha \cap U_\lambda$ の連結成分は $V_\lambda \times \{t\}$，$t \in T_\lambda$，と書ける．

このような atlas を foliation atlas，各 chart を foliation chart と呼ぶ．また，各 L_α を葉と呼ぶ．葉層構造はしばしば $\mathcal{F}$ で表される．

葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられたとする．上の記号と (a) の同一視の下で，U_λ から U_μ への変換関数を $\varphi_{\mu\lambda}$ とすると

$$\varphi_{\mu\lambda}(x,t) = (\psi_{\mu\lambda}(x,t), \gamma_{\mu\lambda}(t)) \tag{1.2}$$

と表すことができる．ここで，$\gamma_{\mu\lambda}$ は T_λ の開集合上で定まっていて，像（T_μ の開集合）への微分同相である．$\gamma_{\mu\lambda}$ たちは $\mathcal{F}$ の葉に沿った平行移動を表すと考えることができる．$T = \bigcup T_\lambda$ と置けば，一般に $\mathcal{F}$ の葉に沿った平行移動は定義域を制限すれば T の開集合から T の開集合への微分同相（T の局所微分同相と呼ぶ）を導く．逆に，葉に沿った平行移動は $\gamma_{\mu\lambda}$ たちを用いて次のように表すことができる．

1) $\gamma_{\mu\lambda}$ の定義域を制限する．
2) $\gamma_{\mu\lambda}$ やその制限の逆写像を考える．
3) $\gamma_{\mu\lambda}$ やその逆写像について，必要であれば定義域を制限して合成写像を考える．

[†4] 2 次元トーラスに $\mathbb{R}$ を「傾きが非有理数になるように」描いたようなもののように，位相が M から誘導されるものと一致しないことを許している．

4) 1) から 3) の方法で得られた写像を「貼り合わせて」得られる微分同相写像を考える．

4) は次のような意味を持つ．γ を T の開集合 U 上で定まった局所微分同相とする．もし，U の各点 t について，t の近傍への γ の制限が $\gamma_{\mu\lambda}$ を用いて表せているならば，γ 自身も葉に沿った平行移動を表しているはずなので，このようなものも考える，ということである．

正確にはもう少しきちんとする必要があるが，次のように定める．

定義 1.3. 上の 1) から 4) の操作で得られる T の局所微分同相全体のなす集合を Γ で表し，(Γ, T) を T に付随する $\mathcal{F}$ のホロノミー擬群と呼ぶ．また，Γ がこのようにして得られていることを，Γ は $\{\gamma_{\mu\lambda}\}$ で生成されると言う．

定義 1.4. $\mathcal{F}$ が横断的に複素解析的であるとは，foliation atlas を適当に取ると $T_\lambda \subset \mathbb{C}^{q'}$ と考えることができて，$\gamma_{\mu\lambda}$ が複素解析的な微分同相写像となることを言う．このとき q' を $\mathcal{F}$ の複素余次元と呼ぶ．

例えば特異点のない複素解析的なベクトル場の積分曲線が定める葉層構造は横断的に複素解析的な葉層構造である．横断的に複素解析的な葉層構造を考えるときには，常に定義 1.4 のような foliation atlas を考える．

注 1.5. 一般には各 T_λ は $\mathbb{R}^q$ 内の開球であるが，適当に平行移動して T_λ たちは disjoint であるとしてよいので，T は $\mathbb{R}^q$ の開集合と考えて良い．一方，$x_\lambda \in V_\lambda$ を適当に固定し，T_λ と $\{x_\lambda\} \times T_\lambda$ を同一視すると T を M の部分集合と考えることもできる．$\mathcal{F}$ が横断的に複素解析的であれば，T は $\mathbb{C}^{q'}$ の開集合であって，T に付随するホロノミー擬群は T の複素解析的な局所微分同相から成る．

以下では M を閉多様体，葉層構造は横断的に複素解析的で，複素余次元が 1 であるものとする．このような葉層の Fatou-Julia 分解は T を用いて定められる．まず Ghys，Gomez-Mont，Saludes らは，T 上のベルトラミ係数の積分となっているようなベクトル場を用いてこのような分解を与えた [5]．この意味での Fatou 集合，Julia 集合をそれぞれ $F_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F})$，$J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F})$ で表すと，前者は開集合，後者は閉集合であって，共に葉の和集合である．$\mathcal{F}$ は $F_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F})$ 上では比較的単純な葉層構造となることが知られている．一方，$\mathcal{F}$ の $J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F})$ での振る舞いは必ずしも複雑であるとは限らない．

例 1.6. f_θ を $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ のある軸に関する θ-回転とし，$\mathcal{F}_\theta$ を f_θ の S^1 上の懸垂（suspension）とする．すなわち，次のように $\mathcal{F}_\theta$ を定める．まず，$\mathbb{R}\times\mathbb{C}P^1$ の，葉が $\mathbb{R}\times\{p\}$，$p\in\mathbb{C}P^1$，で与えられるような横断的に複素解析的な葉層構造を考える．これは $(t,p)\mapsto(t-1,f_\theta(p))$ で与えられる $\mathbb{Z}$ の作用で不変であるので，$(\mathbb{R}\times\mathbb{C}P^1)/\mathbb{Z}\cong S^1\times\mathbb{C}P^1$ の横断的に複素解析的な葉層構造が得られる．これを $\mathcal{F}_\theta$ とする．もし f_θ が恒等写像でなければ $J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F}_\theta)=S^1\times\{p_0\}\cup S^1\times\{p_\infty\}$ が成り立つ．ここで p_0 と p_∞ はそれぞれ回転軸と $\mathbb{C}P^1$ の交点である．一方，後で定義する $J(\mathcal{F}_\theta)$ については $J(\mathcal{F}_\theta)=\varnothing$ が成り立つ．

定義から Ghys, Gomez-Mont, Saludes による Fatou-Julia 分解は葉層構造の変形と直接的に関連し，その意味ではすぐ後で述べる分解よりも優れているが，上の例が示すように，葉層構造の力学形的な複雑さを見るという観点からは必ずしも望ましい性質を持たない．また，正規族を用いる，Fatou 集合の一般的な定義の直接の類似にはなっていないのも気になるところである．これらは次のようにすると解決できる [1]．M は閉多様体であることに注意し，まず $\{U_\lambda\}$ の有限部分被覆 $\{U_i\}$ を任意に取る．すると，$\{U_i\}$ を少し縮めた M の開被覆 $\{U_i'\}$ であって，以下の性質を持つようなものが取れる．

1) $\overline{U_i'}$ を U_i' の閉包とすると $\overline{U_i'}\subset U_i$ が成り立つ．
2) U_i' は $V_i'\times T_i'$，ただし V_i' は $\mathbb{R}^{n-q}$ の開集合，T_i' は T_i に含まれる開円板，と同相であって，定義 1.1 の 3) と同様の条件をみたす．

ここで $T'=\bigcup T_i'$ と置けば Γ と同様に $\mathcal{F}$ のホロノミー擬群が得られる．これを Γ' とすると，$\Gamma'=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma$ の定義域と値域は共に T' に含まれる$\}$ が成り立ち，この意味で Γ' は Γ の制限となっている．一方，$\gamma\in\Gamma$ とすると γ の定義域や値域は一般には T' に含まれない．しかし，γ は $\mathcal{F}$ の葉に沿った平行移動であって，$\{U_i'\}$ は M の開被覆なのだから，γ を小さい開集合に制限したものは $\varphi_2^{-1}\circ\gamma'\circ\varphi_1$，$\gamma'\in\Gamma'$，$\varphi_1,\varphi_2$ は T から T' への，葉に沿った一つの foliation chart 内での平行移動，の形に表すことができる．一つの foliation chart 内での平行移動はあまり本質的ではないと考えれば，Γ の元は一見小さい Γ' の元で全て記述することができたことになる．これらの事実は，擬群の言葉では「(Γ,T) と (Γ',T') は擬群として同値（equivalent）である」と表現される [6]．このように定めた (Γ',T') は次のような著しい性質を持っている．

1) T' は相対コンパクト.
2) Γ' の元は有限個の写像，具体的には式 (1.2) における $\{\gamma_{ji}\}$ から生成される．さらに，γ_{ji} は Γ の元としては，Γ' の元としての定義域の閉包を含む開集合で定義されている．

定義 1.7 ([6]). 擬群 (Γ, T) がコンパクト生成（compactly generated）であるとは，上のような性質を持つ (Γ', T') が取れることを言う．また，(Γ', T') を (Γ, T) の簡約（reduction）と呼ぶ.

閉多様体上の葉層構造のホロノミー擬群はコンパクト生成擬群である．これらの準備の下で Fatou-Julia 分解は次のように定まる.

定義 1.8 ([1]). M を閉多様体とし，$\mathcal{F}$ を M の横断的に複素解析的な複素余次元 1 の葉層構造とする．(Γ, T) を $\mathcal{F}$ のホロノミー擬群，(Γ', T') をその簡約とする.

1) T' の連結開集合 $U \subset T'$ が Fatou 近傍である[†5]とは，任意の Γ' の元の任意の U の点における芽が，ある U 上で定義された Γ の元の芽であることを言う．言い換えれば，任意の Γ' の元の芽は Γ の元としては U に拡張されることを言う.
2) Fatou 近傍の和集合を (Γ', T') の Fatou 集合と呼び，$F'(\Gamma')$ で表す.
3) $F(\Gamma')$ の Γ による像

$$F(\Gamma) = \{x \in T \mid \text{ある } x' \in F(\Gamma') \text{ と } \gamma \in \Gamma \text{ について } x = \gamma x'\}$$

を (Γ, T) の Fatou 集合と呼ぶ．また，$J(\Gamma) = T \setminus F(\Gamma)$ を (Γ, T) の Julia 集合と呼ぶ．$J(\Gamma)$ は $J(\Gamma')$ の Γ による像としても同じことである.
4) $F(\Gamma)$，$J(\Gamma)$ は定義から Γ の作用で不変であることと，$T \subset M$ と考えられることに注意して，

$$F(\mathcal{F}) = \bigcup F(\Gamma) \text{ を通る葉},$$
$$J(\mathcal{F}) = \bigcup J(\Gamma) \text{ を通る葉}$$

と置き，それぞれ $\mathcal{F}$ の Fatou 集合，Julia 集合と呼ぶ．$F(\mathcal{F})$，$J(\mathcal{F})$ の連結成分をそれぞれ Fatou components，Julia components と呼ぶ．なお，$J(\mathcal{F}) = M \setminus F(\mathcal{F})$ としても同じことである.

[†5] [3] では「性質 (wF) を持つ」と呼んでいる.

注 1.9. Fatou-Julia 分解は $\mathbb{C}$ の局所双正則微分同相写像からなるコンパクト生成擬群について定まる．Fatou components, Julia components は [5] においても定義されているが，Julia components の定義は大きく異なる．一方 Fatou components の定義は Fatou 集合の定義の差を除いて同じである．

定義 1.8 には正規族は現れないように見えるが，U を Fatou 近傍とし，

$$\mathit{\Gamma}^U = \{\gamma \in \mathit{\Gamma} \,|\, \gamma \text{ は } \mathit{\Gamma}' \text{ の元の芽を拡張して得られる}\}$$

と置けば Montel の定理により $\mathit{\Gamma}^U$ は正規族となる．このことは Fatou 集合を扱う際に非常に重要である[†6]．葉層構造のホロノミーを扱う際には，一般には一定の定義域が取れない（特にどんどん小さくなってしまう）．このような状況で正規族を定式化することは非常に困難であるので，まずホロノミーの定義域が確保できる状況を考え，その上で通常の意味で正規族になるような葉層構造の一部分を Fatou 集合と呼ぶというのが元々の発想である．

次の補題により，定義 1.8 は葉層構造の Fatou 集合を foliation atlas などの取り方に依らず定めることがわかる．

補題 1.10. 1) $F(\mathit{\Gamma})$ は簡約 $(\mathit{\Gamma}', T')$ の取り方によらない．

2) $F(\mathcal{F})$ はホロノミー擬群 $(\mathit{\Gamma}, T)$ の取り方によらない．

証明は $(\mathit{\Gamma}, T)$ がコンパクト生成であることと，$\mathit{\Gamma}^U$ が正規族であることを組み合わせて行う．大雑把に言えば，簡約やホロノミー擬群を取り替えることは $\mathit{\Gamma}'$ の共役を取ることに対応する．例えば $(\mathit{\Gamma}, T)$ と $(\mathit{\Delta}, S)$ を同じ葉層構造のホロノミー擬群とすると，座標変換に相当する局所双正則微分同相の族 $\Psi = \{\psi_\alpha \,|\, \psi_\alpha \text{ は } T \text{ の開集合から } S \text{ の開集合への双正則微分同相}\}$ が存在して，$\mathit{\Delta}$ は $\{\psi_\alpha \circ \gamma \circ \psi_\beta^{-1} \,|\, \gamma \in \mathit{\Gamma},\ \psi_\alpha, \psi_\beta \in \Psi\}$ で生成される．U を Fatou 近傍とすると $\mathit{\Gamma}^U$ が正規族であることから，$\gamma \in \mathit{\Gamma}^U$ について $\gamma(U)$ の大きさを γ に依らず制禦することができる．このことから，一定の大きさの定義域（Fatou 近傍）が取れるという性質が変わらないことを示すことができて，これから補題が従う．

Ghys, Gomez-Mont, Saludes による Fatou-Julia 分解とここで言う分解は次のような関係にある．

[†6] 高次元の場合には $\mathit{\Gamma}^U$ が正規族になることは条件に含める [3]．また，[1] では $\mathit{\Gamma}^U$ を $\mathit{\Gamma}_U$ で表している．

命題 1.11. $F_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F}) \subset F(\mathcal{F})$. ここで包含関係は等号のことも，そうでないこともある．

また，例えば次のような事実が成り立つ．

定理 1.12. $F(\mathcal{F})$ 上にはホロノミー不変なエルミート計量が存在する．

定理 1.13. $J(\mathcal{F}) = \varnothing$ であれば，$\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey 類（葉層構造に関する最も重要な二次特性類）は自明である．

これらの事実は，Julia 集合を極小集合の代わりにしたいという動機からは重要である．また，葉層の Julia 集合と有限生成 Klein 群の極限集合は次の意味で同一である．

定理 1.14. $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ を有限生成 Klein 群とする．$(\Gamma, \mathbb{C}P^1)$ はコンパクト生成擬群と考えることができて，このとき $J(\Gamma) = \Lambda(\Gamma)$ が成り立つ．

一方，$J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F})$ は，$\Lambda(\Gamma)$ と位数有限な Γ の元の固定点全体の和集合に対応する．

更に，Fatou components は複素力学系におけるものと同様な形で分類できる．これらのことから，$F(\mathcal{F})$ や $F(\mathit{\Gamma})$ を Fatou 集合と呼ぶことは妥当であると考えられる．

注 1.15 (cf. [3])**.** 1) 葉層の複素余次元が高い場合は高次元力学系に対応する．この場合でも同様にして Fatou 集合を定めることができる．一方，Julia 集合を精密に定めるためには一般的な高次元の複素力学系の場合と同様の考察が必要になるはずであるが，そのためにはまだ道具が足りない．
2) 開多様体上の葉層構造や，特異点を許す葉層構造について Fatou 集合・Julia 集合を定めようとすると，ホロノミー擬群がコンパクト生成とは限らない場合の定義が必要となる．また，Sullivan の辞書は元々半群と群を結ぶものであったから，これに擬群を付け加えたとすると「擬半群」が残る．このような状況でも Fatou-Julia 分解を考えることができて，有理函数からなる半群の Fatou 集合・Julia 集合の一般化が得られる．コンパクト生成という仮定を外し，擬半群にまで定義を拡張すると超越整函数や無限生成の Klein 群についても同一の枠組みでとらえることができる．

2. いくつかの例

例 2.1. (z, w) を $\mathbb{C}^2$ の通常の座標，λ, μ を 0 でない複素数とし，X を

$$X = \lambda z \frac{\partial}{\partial z} + \mu w \frac{\partial}{\partial w}$$

で与えられる $\mathbb{C}^2$ 上の正則なベクトル場とする．X の特異点は原点 o だけなので，X の積分曲線は $\mathbb{C}^2 \setminus \{o\}$ の（横断的に）複素解析的な葉層構造を定める．X は $\mathbb{C}^2$ 全体を 2 倍する写像 $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$，$f(z, w) = (2z, 2w)$，で不変なので，$\langle f \rangle$ で f で生成される群を表すことにすると $M = \mathbb{C}^2/\langle f \rangle \cong S^1 \times S^3$ に葉層構造が定まる．これを $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ とする．局所的には $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ は元の葉層構造と同一なので，これも複素解析的な葉層構造である．$(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ を通る X の積分曲線は $\{(z_0 e^{\lambda t}, w_0 e^{\mu t}) \,|\, t \in \mathbb{C}\}$ で与えられる．ここで $\lambda \neq \mu$ とすると，$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ は z-軸と w-軸にそれぞれ対応する二つのコンパクト葉 L_z と L_w を持つ．$\mathbb{C}^2$ から z-軸と w-軸を除いた部分は局所的には X の一つの積分曲線と $\mathbb{C}$ 内の単位円板の直積の形をしている[†7]ので，$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ は $M \setminus (L_z \cup L_w)$ 上では比較的単純であると考えられる．従って $F(\mathcal{F}_{\lambda,\mu}) \supset M \setminus (L_z \cup L_w)$ であることが期待される．一方，L_z（L_w）には，L_w（L_z）以外の全ての葉が集まってくることがわかる．従って L_z や L_w の近傍では $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ はそれなりに複雑であるので，$J(\mathcal{F}_{\lambda,\mu}) \supset L_z \cup L_w$ であることが期待される．実際，$F(\mathcal{F}_{\lambda,\mu}) = M \setminus (L_z \cup L_w)$，$J(\mathcal{F}_{\lambda,\mu}) = L_z \cup L_w$ が成り立つ．この例においては $J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F}_{\lambda,\mu}) = J(\mathcal{F}_{\lambda,\mu})$ が成り立つ．

例 2.2 ([5])**.** $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})^n$，$n \geq 2$，のココンパクトな離散部分群 Γ であって，第 1 成分への射影による像を Γ_1 とすると，Γ_1 が $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ において稠密であるようなものが存在することが知られている．上半平面を $\mathbb{H}$ で表すこととし，葉が $\{p\} \times \mathbb{H}^{n-1}$，$p \in \mathbb{H}$，で与えられるような $\mathbb{H}^n$ の葉層構造を考えると，これは Γ の対角作用で不変なので $\mathbb{H}^n/\Gamma$ の葉層構造が得られる．これを $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ の横断的な構造は Γ_1 の $\mathbb{H}$ への作用で記述されるが，Γ_1 が $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ で稠密であることからこの作用は複雑である．この意味で $\mathcal{F}$ は力学系としては確かに複雑である．しかし，一方でこの作用は $\mathbb{H}$ のポアンカレ計量を保ち，その意味では比較的単純である（特に，特性類の観点からはこのような作用は単純であると考えられる）．このことからほぼ直接に $J(\mathcal{F}) = \varnothing$ であることがわかる．一方，$J_{\mathrm{GGS}}(\mathcal{F}) = M$ であることが知られている．

[†7] 単に foliation atlas が取れるというのではなく，もっと強い主張なので注意されたい．

例 2.3. 例 2.1 において $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$ とする．すると X は $\mathbb{C}P^2$ の葉層構造で，$[1:0:0]$，$[0:1:0]$，$[0:0:1]$ を特異点とするものを定める．これらの点の小さい近傍を取り去ったもののコピーをいくつか用意しておき，ダブルを取る要領で境界を貼り合わせると，仮定から貼り合わせた多様体上に特異点のない，横断的に複素解析的な複素余次元 1 の葉層構造が得られる．この葉層の Julia 集合は有限個のコンパクト葉からなることが容易に示されるが，その個数はコピーの貼り合わせ方次第で 3 個以上の幾つにでもできる．コンパクト葉は T の 1 点に対応するので，$J(\Gamma)$ は 3 点以上の有限個の点から成る．これは Klein 群の極限集合や有理写像の反復合成に関する Julia 集合とは異なる性質である．連結成分の個数はホロノミー擬群から定まるあるコホモロジー群の次元で評価できることが知られている [6] が，多様体を固定した場合に一定の評価ができるかどうかは恐らく知られていない．

References

[1] T. Asuke, *A Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **60** (2010), 1057–1104.

[2] 足助 太郎, 複素余次元 1 葉層の *Fatou-Julia* 分解について, 数理解析研究所講究録 **1661** (2009), 1–20.

[3] T. Asuke, *On Fatou-Julia decompositions* (2010), submitted.

[4] A. Candel and L. Conlon, *Foliations. I,II*, Graduate Studies in Mathematics, vols. 23 and 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 2003.

[5] É. Ghys, X. Gómez-Mont, and J. Saludes, *Fatou and Julia Components of Transversely Holomorphic Foliations*, Essays on Geometry and Related Topics: Memoires dediés à André Haefliger (É. Ghys, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, V. Sergiescu, and T. Tsuboi, eds.), Monogr. Enseign. Math., vol. 38, 2001, pp. 287–319.

[6] A. Haefliger, *Foliations and compactly generated pseudogroups*, Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 275–295.

[7] G. Hector and U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Parts A and B, second edition*, Aspects of Mathematics, E1 and E3, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986, 1987.

[8] J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*, Mathematical Surveys, No. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.

[9] H. Sumi, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Math. J. **28** (2005), 390–422.

[10] 田村一郎, 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.

〒 153–8914 東京都目黒区駒場３－８－１，東京大学大学院数理科学研究科
E-mail address: `asuke@ms.u-tokyo.ac.jp`