p-ディィリクレ和有限関数と無限グラフの幾何

服部多恵*
（金沢大学自然科学研究科，大阪市立大学数学研究所）

2010 年 11 月 22 日

1　序

本講演では，無限グラフの p-ディィリクレ和有限関数に関わる性質を quasimonomorphism を用いて調べた結果を紹介する．なお，本講演の内容は，加須栄篤氏（金沢大学）との共同研究 [4] に基づく．

はじめに本講演で重要な役割を果たす距離空間の間の写像を二つ定義する．距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 ϕ が擬等長写像 (quasi isometry) であるとは，次の二条件を満たすこととする：(1) $a > 0$，$b \geq 0$ が存在し，すべての x，$y \in X$ に対して

$$a^{-1}d_X(x,y) - b \leq d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq a d_X(x,y) + b$$

が成り立つ；(2) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在し，$Y \subset (\phi(X))_\varepsilon$．（ここで $(\phi(X))_\epsilon$ は $\phi(X)$ の ε 近傍とする.）

次数有界な無限グラフや「有界幾何をもつ」完備連結非コンパクトリーマン多様体において，擬等長写像の不変的性質や不変量について多くの研究成果がある．たとえば，体積の増大度，容量（capacity），p-放物性（p-parabolicity）などについて研究されている ([7]，[8]，[5]，[6]，[11] 参照). また，ロイデン p-コンパクト化を考えることによって次のことまで明らかになっている：(1) 次数有界な連結無限グラフグラフの間の擬等長は，ロイデン p-コンパクト化上に連続的に拡張される．また，その連続拡張はロイデン p-境界の間の同相写像であり，ロイデン p-調和境界を保つ．この事から p-ディリクレ和有限な p-調和関数全体のなす (位相) 空間に同相対応を与える；(2) さらに，完備連結非コンパクトリーマン多様体に対してはネットと呼ばれる擬等長近似を与えるグラフが定義され，リーマン多様体の p-ディリクレ積分有限な p-調和関数全体の成す空間とそのネットの p-ディリクレ和有限な p-調和関数全体の成す空間は自然に同相である；(3) その結果，完備連結非コンパクトリーマン多様体の p-ディリクレ積分有限な

*hattorit@staff.kanazawa-u.ac.jp

p-調和関数全体の成す空間もまた擬等長により同相対応が与えられる．([3] 参照)

さて，もう一つの写像を定義する．距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 ϕ が quasi-monomorphism であるとは，次の二条件を満たすこととする：(1) $a > 0$，$b \geq 0$ が存在し，すべての x，$y \in X$ に対して

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq a d_X(x, y) + b$$

が成り立つ；(2) 任意の $r > 0$ に対して定数 $c > 0$ が存在し，任意の $y \in Y$ に対して $\phi^{-1}(B(y, r))$ は κ 個以下の X における半径 r の距離球で覆われる．(ここで $B(y, r)$ は Y における中心 y 半径 r の球とする.)（[1] 参照）.

擬等長ならば quasimonomorphism である．また，quasimonomorphism と擬等長の合成も quasimonomorphism であり，その存在・非存在も擬等長不変な性質である．

以下必要な用語，記号を準備する．$G = (V, E)$ を連結グラフとする．ここで，V は頂点の集合，E は辺の集合である．各辺の長さを 1 とすることによって，グラフには自然な距離が定まり、以後グラフを距離空間と考える．V_x を x と隣接する頂点全体の集合とし，V_x の頂点の個数 $\#V_x$ を x の次数と呼ぶ．本講演を通して，グラフ $G = (V, E)$ とは有界な次数を持つ連結可算無限グラフを考えることとする．指数 p は $1 < p < \infty$ とする．V 上の関数 f に対して

$$D_p(f) = \sum_{\{x,y\} \in E} |f(y) - f(x)|^p < \infty$$

を満たすとき f は p-ディリクレ和有限関数であるという．p-ディリクレ和有限関数の全体を $L^{1,p}(G)$ とする．$L^{1,p}(G)$ はノルム $D_p(f)^{1/p} + |f(o)|$ に関するバナッハ空間である．ここで，$o \in V$ は固定点である．台が有限な V 上の関数全体の閉包を $L_0^{1,p}(G)$ とおく．すべての $g \in L_0^{1,p}(G)$ に対して

$$\sum_{x \in V} \sum_{y \in V_x} |h(y) - h(x)|^{p-2} (h(y) - h(x))(g(y) - g(x)) = 0$$

が成り立つような関数 $h \in L^{1,p}(G)$ を p-ディリクレ和有限な p-調和関数といい，その全体を $HL^{1,p}(G)$ とおく．

V 上の有界関数全体の族 Φ に対して，次の条件を満たすようなコンパクトハウスドルフ空間 $\mathcal{C}_\Phi(G)$ が同相を除いて一意的に存在することが知られている：(1) V は $\mathcal{C}_\Phi(G)$ の稠密な開部分集合である；(2) Φ の各元は $\mathcal{C}_\Phi(G)$ 上の関数に連続的に拡張される；(3) この拡張された関数は境界 $\partial\mathcal{C}_\Phi(G) = \mathcal{C}_\Phi(G) \setminus V$ の任意の 2 点を分離する．([2] 参照)
我々は，有界な p-ディリクレ和有限関数全体の空間 $BL^{1,p}(G)$ に関するグラフのコンパクト化，すなわちロイデン p-コンパクト化について考える．ロイデン p-コンパクト化

を $\Re_p(G)$，ロイデン p-境界を $\partial\Re_p(G) = \Re_p(G) \setminus V$ で表す．ロイデン p-境界の重要な部分集合を次の様に定義しロイデン p-調和境界という：

$$\Delta_p(G) := \{x \in \partial\Re_p(G) | \text{ すべての } f \in BL_0^{1,p}(G) \text{ に対して } f(x) = 0\}.$$

ロイデン p-調和境界上では最大値最小値の原理とロイデン分解より非自明な p-ディリクレ和有限な p-調和関数が存在するための必要かつ十分条件はロイデン p-調和境界が二点以上の点を含んでいることであるとわかる．

グラフ $G = (V, E)$ に対して， $M_G^{(p)}$ を次のように定義する．

$$M_G^{(p)}(x) = \sup\left\{\frac{|g(x)|^p}{D_p(g)} \mid g \in L_0^{1,p}(G)\right\}, \quad x \in V.$$

$M_{G,r}^{(p)}(x) = \infty$ となるような $x \in V$ が存在するとき，グラフ G は p-放物型 (p-parabolic) であるといい，そうでないとき p-非放物型 (p-nonparabolic) であるという．p-放物型であることは擬等長不変である．また，次は同値 ([13], [14] 参照)：(i) G は p-放物型；(ii) $\Delta_p(G)$ は空である；(iii) $L_0^{1,p}(G) = L^{1,p}(G)$；(iv) $1 \in L_0^{1,p}(G)$.

2 quasimonomorphism

次の定理は これからの議論の要である．

定理 1. グラフ G_1 からグラフ G_2 への *quasimonomorphism* $\phi : G_1 \to G_2$ が存在するならば，任意の $f \in L^{1,p}(G_2)$ に対して，$f \circ \phi \in L^{1,p}(G_1)$ となり，$D_p(f \circ \phi) \leq CD_p(f)$ が成り立つ．ただし C は $p, a, b, \sup_{v \in V} \#V_x$ にのみ依存して決まる正数である．従って，$g \in L_0^{1,p}(G_2)$ に対して，$g \circ \phi \in L_0^{1,p}(G_1)$ が成り立つ．さらに，ϕ はロイデン p-コンパクト化上の連続写像 $\bar{\phi} : \Re_p(G_1) \to \Re_p(G_2)$ に拡張され，$\bar{\phi}(\Delta_p(G_1)) \subset \Delta_p(G_2)$ を満たす．

この定理より次が成り立つ．

定理 2. グラフ G_1 からグラフ G_2 への *quasimonomorphism* $\phi : G_1 \to G_2$ 存在するとき，定数 $C > 0$ が存在して

$$M_{G_2}^{(p)}(\phi(x)) \leq CM_{G_1}^{(p)}(x)$$

を満たす．特に，G_2 が p-放物型ならば，G_1 も p-放物型である．

ここで，$1 < p < q < +\infty$ とする．すべての $f \in L^{1,p}(G)$ に対して $D_q(f)^{1/q} \leq D_p(f)^{1/p}$ が成り立つことに注目する．実際，

$$D_q(f) = \sum_{\{x,y\} \in E} |f(y) - f(x)|^p(|f(y) - f(x))|^p)^{(q-p)/p} \leq D_p(f)D_p(f)^{(q-p)/p} = D_p(f)^{q/p}.$$

である．したがって，$L_0^{1,p}(G) \subset L_0^{1,q}(G)$，$L^{1,p}(G) \subset L^{1,q}(G)$ である．さらに，

$$M_G^{(p)}(x) \leq M_G^{(q)}(x)(\leq +\infty), \quad x \in V.$$

が成立する．ゆえに，$1 < p < q$ に対して，G が p-放物的ならば q-放物的であることが分かる．この事実より，$\mathrm{ind}(G) := \inf\{p\,; p\text{-放物型}\}(\leq +\infty)$ と定義して，グラフ G の放物型指標という．放物型指標も擬等長不変である ([12]).

例えば，d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ (あるいはそれと擬等長な格子 $\mathbf{Z}^d$) に対して $\mathrm{ind}(\boldsymbol{R}^d) = d$ である ([12]，[9])，　さらに $p < d$ ならば $\Delta_p(\boldsymbol{R}^d)$ は一点，$p \geq d$ ならば $\Delta_p(\boldsymbol{R}^d) = \emptyset$ である．n 次元双曲空間 $\boldsymbol{H}^n(-1)$(あるいはそれと擬等長なグラフ $G^n(-1)$) の場合，$\mathrm{ind}(\boldsymbol{H}^n(-1)) = \infty$ であり，$p \leq n-1$ に対して $\Delta_p(\boldsymbol{H}^n(-1))$ は一点，$p > n-1$ の場合は $\Delta_p(\boldsymbol{H}^n(-1))$ は無限個の点を含んでいる ([10] 参照).

例 3. l 個の自然数 $1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{l-1} < d_l$ をとる．各 $\boldsymbol{Z}^{d_i}$ と $\boldsymbol{Z}^{d_{i+1}}$ を一つの辺で繋げてできるグラフを G とする．このとき $\mathrm{ind}(G) = d_l$ で，$p < d_1$ ならば $\#\Delta_p(G) = l$ ，$d_i \leq p < d_{i+1}$ ならば $\#\Delta_p(G) = l - i$ $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$，$d_l \leq p$ ならば $\Delta_p(G) = \emptyset$ である．

例 4. 可算無限個の $\boldsymbol{Z}^d$ と $G^n(-1)$ をそれぞれ一辺で繋いで出来るグラフを G とする．$\mathrm{ind}(G) = \infty$ で，$n-1 \geq d$ のとき，$p < d$, $p > n-1$ のとき $\#\Delta_p(G) = \infty$，$d \leq p \leq n-1$ のとき $\#\Delta_p(G) = 1$ である．$n-1 < d$ のとき，全ての p に対して $\Delta_p(G) = \infty$ である．

例 5. $\boldsymbol{Z}^d$ と $G^n(-1)$ の直積グラフ G について $\mathrm{ind}(G) = \infty$ で，すべての p について $\#\Delta_p(G) = 1$ である．

定理 2 より次の事実が分かる．

定理 6. グラフ G_1 からグラフ G_2 への *quasimonomorphism* が存在するならば, $\mathrm{ind}(G_1) \leq \mathrm{ind}(G_2)$.

この定理より d 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^d$ への quasimonomorphism を持つグラフ G の放物型指標 $\mathrm{ind}(G) \leq d$ であり，とくに有限であることが分かる．また，放物型指標が d より大きなグラフは，d 次元ユークリッド空間への quasimonomorphism を持たないと判る．

n 次元双曲空間 $\boldsymbol{H}^n(-1)$ への quasimonomorphism が存在するグラフ G に焦点を当てる．

定理 7. G から $\boldsymbol{H}^n(-1)$ への *quasimonomorphism* ϕ が存在すると仮定する．このとき，$n-1 < p$ を満たす指数 p に対して ϕ はロイデン p-コンパクト化 $\Re_p(G)$ から $\boldsymbol{H}^n(-1) \cup \partial_\infty \boldsymbol{H}^n(-1)$ への連続写像 $\bar{\phi}$ にまで拡張される．さらに G が p-非放物型，すなわち $\Delta_p(G) \neq \emptyset$ ならば $\bar{\phi}(\Delta_p(G))$ は $\partial_\infty \boldsymbol{H}^n(-1)$ の完全部分集合である．ここで，$\partial_\infty \boldsymbol{H}^n(-1)$ は $\boldsymbol{H}^n(-1)$ のグロモフの双曲境界を表す.

例 8. (1) ホロ球面 $\mathbf{R}^{n-1} \to \boldsymbol{H}^n(-1)$ は，*quasimonomorphism* である．
(2) *3* 次元双曲空間形 $\boldsymbol{H}^3(-1)$ の上半平面モデルを考える．$\tau(t)$ を半開区間 $(0,a]$ 上の正値関数で $(0,b]$ $(a>b)$ において $\tau'(t)>0$，$\lim_{t\to 0}\tau(t)>0$ かつ $\tau(a)=0$ をみたすものとする．このとき，$\boldsymbol{H}^3(-1)$ 内の回転面 $S_\tau=\{(\tau(z)\cos\theta,\tau(z)\sin\theta,z)\ ;\ 0<z\leq a,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ を考える．$A>0$，$B>0$ と $0<\alpha<1$ に対して，$\tau(t)=At^\alpha+B$ とる．このとき，S_τ からへ $\boldsymbol{H}^3(-1)$ の包含写像は *quasimonomorphism* である．この例は，ホロ球面が双曲境界 $\partial_\infty\boldsymbol{H}^3(-1)$ に一点で接しているのに対し，円で接している．また，$\delta=1/(1-\alpha)(>1)$ とおいたとき S_τ の放物型指標は $\mathrm{ind}(S_\tau)=\delta+1$ である．さらに，$p\geq\delta+1$ のときロイデン p-調和境界は空である．$1/\delta+1<p<\delta+1$ のときは $\#\Delta_p(S_\tau)=+\infty$，$p\leq 1/\delta+1$ のときは $\#\Delta_p(S_\tau)=1$ である．

例えば，例 5 より，$\boldsymbol{Z}^d$ と $G^n(-1)$ の直積グラフ，あるいは $\mathbf{R}^d\times\mathbf{H}^n(-1)$ から双曲空間形への quasimonomorphism は存在しない．

参考文献

[1] I. Benjamini and O. Schramm, Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings, Invent math. **126** (1996)565–587.

[2] D. I. Cartwright, P. M. Soardi and W. Woess, Martin and end compactifications for nonlocally finite graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **338**(1993), no. 2, 679–693

[3] T. Hattori and A. Kasue, Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, Proc. Japan Acad. **83**, Ser. A, No.7 (2007)129–134.

[4] T. Hattori and A. Kasue, Functions with finite Dirichlet sums of order p and quasimonomorphism of infinite graphs, preprint(2010)

[5] I. Holopainen, Rough isometries and p-harmonic functions with finite Dirichlet integral, Rev. Math. Iberoamericana **10** (1994), 143–176.

[6] I. Holopainen and P. M. Soardi, p-harmonic functions on graphs and manifolds, Manuscripta Math. **94** (1997), 95–110.

[7] M. Kanai, Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 391–413.

[8] M. Kanai, Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 227–238.

[9] F-Y. Maeda, A remark on parabolic index of infinite networks, Hiroshima Math. J.**7**(1977), 147–152.

[10] P. Pansu, Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré 1, Rend. Sem. Mat. Univ.Politec. Torino, Fascicolo Speciale P.D.E and Geometry (1989), 95–119.

[11] L. Saloff-Coste, Analysis on Riemannian co-compact covers, Surveys in Differential Geometry , International Press.

[12] P. M. Soardi and M. Yamasaki, Parabolic index and rough isometries, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 333–342.

[13] M. Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks, Hiroshima Math. J. **7**, 1977, 135–146.

[14] M. Yamasaki, Discrete Dirichlet potentials on an infinite network, RIMS kokyuroku **610**, 1987.