$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の CMC $\frac{1}{2}$ 曲面と調和写像

アドバイザー名：糸 健太郎
氏名：土井 淳平

1　序文

リーマン面 Σ の局所複素座標を z とする．また，符号 $(p,q)\,(p+q=3)$ の擬リーマン計量 g の入った擬リーマン多様体 (M^3,g) を考える．このとき，はめ込み $f\colon \Sigma\to M$ が空間的であるとは，f による g の引き戻し f^*g が正定値となることである．また，はめ込み f が空間的であるとき，f が共形であるとは，f^*g が $f^*g=\lambda|dz|^2$, $\lambda\colon \Sigma\to(0,\infty)$ と表せることである．

さて，3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の共形な極小曲面，すなわち共形で，平均曲率が 0 で一定の曲面の場合には，ワイエルシュトラスの表現公式という構成法が知られている．これは，単連結リーマン面 Σ 上の正則関数 g と有理型 1 形式 ω の組が，$(1+|g|^2)\omega$ は Σ 上で零点をもたない 1 形式を定めるという条件を満たすとき，

$$f(z)=F+\bar{F},\quad F:=\frac{1}{2}\int^z(1-g^2,i(1+g^2),2g)\omega$$

で定められる写像 $f\colon\Sigma\to\mathbb{R}^3$ は共形極小はめ込みになる，というものである．このとき，正則関数 g は f の立体射影ガウス写像となっており，組 (g,ω) のことを Weierstrass data とよぶ．

この構成法と同じように，与えられた関数を平均曲率としてもち，与えられた写像をガウス写像としてもつような曲面が作れるか，という問題が様々な空間について考えられてきた．その最初の結果が [Ken] である．

一方で，ガウス写像は調和写像と関わりをもっている．ここで，リーマン多様体 N_1,N_2 の間の写像 $f\in C^\infty(N_1,N_2)$ が調和写像であるとは，f がエネルギー汎関数の $C^\infty(N_1,N_2)$ での臨界点となることである ([EeLe]，[Ura] を参照).

さて，$\mathbb{R}^3$ 内の CMC 曲面 (平均曲率一定曲面) においては，そのガウス写像は 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ への調和写像となっている ([Ken])．3 次元のローレンツミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ 内の CMC 曲面のガウス写像は 2 次元双曲空間 $\mathbb{H}^2$ への調和写像となる ([AkNi])．さらに，3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ 内の CMC 曲面のガウス写像は $\mathbb{S}^2$ への調和写像となることが確かめられる ([AiAk])．3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbb{H}^3_1$ 内の CMC 曲面のガウス写像は $\mathbb{H}^2$ への調和写像となっている ([AAW])．これらの曲面については，逆に調和写像から CMC 曲面を構成することもできる．

以上のことから，他の空間についても，特に調和写像からそれをガウス写像にもつ CMC 曲面を構成できるか，という問題が多数解かれている．

実際，$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面を $\mathbb{H}^2$ への調和写像から構成する方法が [FeMi] によって与えられている．また，ハイゼンベルグ群 Nil^3 内の極小曲面を $\mathbb{H}^2$ への調和写像から構成できることが [Dan2] で示されている．$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^1_1$ 内の CMC 1/2 曲面を $\mathbb{S}^2$ への調和写像から構成する方法が [Ito] に記述されている．ただし，$\mathbb{R}^1_1$ は，$\mathbb{R}$ の座標を t で表すとき，$\mathbb{R}$ に $-dt^2$ という計量を入れたものである．さらに，ハイゼンベルグ群をローレンツ化した空間である Nil^3_1 内の極大曲面，すなわち空間的な CMC 0 曲面は $\mathbb{S}^2$ への調和写像から構成できることが [Lee] によって示されている．なおこれらのうち，$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面と Nil^3 内の極小曲面，$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^1_1$ 内の平均曲率 CMC 1/2 曲面と Nil^3_1 内の極大曲面については，それぞれ sister 対応と

よばれる，ローソン対応の一般化にあたる等長的な対応があることが知られている ([Dan1], [Ito]，下図参照).

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \to \mathbb{L}^3 : \mathrm{CMC}\,1 \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{ローソン対応}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "{[\mathrm{AkNi}]}"] & & \Sigma \to \mathbb{H}^3_1 : \text{極大} \arrow[dl, leftrightarrow, "{[\mathrm{AAW}]}"'] \\
& h\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 : \text{調和} & \\
\Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : \mathrm{CMC}\,\dfrac{1}{2} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{sister 対応}"] \arrow[ur, leftrightarrow, "{[\mathrm{FeMi}]}"] & & \Sigma \to \mathrm{Nil}^3 : \text{極小} \arrow[ul, leftrightarrow, "{[\mathrm{Dan2}]}"']
\end{tikzcd}
$$

図 1 : $\mathbb{H}^2$ への調和写像をガウス写像にもつ曲面の相関図

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \to \mathbb{R}^3 : \mathrm{CMC}\,1 \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{ローソン対応}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "{[\mathrm{Ken}]}"] & & \Sigma \to \mathbb{S}^3 : \text{極小} \arrow[dl, leftrightarrow, "{[\mathrm{AiAk}]}"'] \\
& h\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2 : \text{調和} & \\
\Sigma \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1 : \mathrm{CMC}\,\dfrac{1}{2} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{sister 対応}"] \arrow[ur, leftrightarrow, "{[\mathrm{Ito}]}"] & & \Sigma \to \mathrm{Nil}^3_1 : \text{極大} \arrow[ul, leftrightarrow, "{[\mathrm{Lee}]}"']
\end{tikzcd}
$$

図 2 : $\mathbb{S}^2$ への調和写像をガウス写像にもつ曲面の相関図

本論文でもこの，調和写像からそれをガウス写像にもつ平均曲率一定曲面を構成できるか，という問題に着手しており，[FeMi] にて示されている $\mathbb{H}^2$ への調和写像から $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC $1/2$ 曲面を構成する方法を模倣することで，$\mathbb{H}^2$ への調和写像から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ という空間内の CMC $1/2$ 曲面を構成する方法を筆者は新たに与えている．ただし，$\mathbb{S}^2_1 \subset \mathbb{L}^3$ は 2 次元のド・ジッター空間である．

以下では，本論文の構成について述べる．まず，第 1 部にて少人数クラスでの学習内容を記し，第 2 部に自主学習内容を記した．第 1 部は第 2 章と第 3 章から構成され，第 2 部は第 4 章から構成される．

第 2 章は，主に [HST] の内容について記述している．[HST] は上で触れた問題とは別の問題について考えている．上記の問題は調和写像をガウス写像としてもつような曲面の構成についてであったが，[HST] では調和写像それ自体をはめ込みの一部の成分としてもつような $M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面を構成するという問題を解いている．特に $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合の $M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面については，調和写像を介してその存在を $\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3$ 内の CMC 1 曲面の存在と結びつけることで，問題を解決している．このように，調和写像を介して，複雑な空間内の CMC 曲面をより簡単な空間である $\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3$ 内の CMC 曲面と結びつけて問題を解決しているという点は，第 3 章に記した [FeMi] の方針と共通する．

さて，[HST] の主な内容の一つは，$M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面について，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面における Weierstrass data の類似物 g, η を与えたことである．$\mathbb{R}^3$ の場合と異なり，ただちに表現公式を与えることはできないが，これらは曲面の第一基本形式やガウス写像と関わりをもち，重要な役割を果たす．さらに命題 2.7 では，

Weierstrss data の類似物を介して，M への調和写像 h から $M \times \mathbb{R}$ への極小はめ込みを構成している．また，$M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合には共形計量と正則 2 次微分から，$M \times \mathbb{R}$ の等長変換による差をのぞいて一意的に $M \times \mathbb{R}$ 内の共形極小曲面が決定できることを示したこと (定理 2.11，定理 2.13) も重要な結果である．特に，この定理 2.11，定理 2.13 の証明にて，上で述べたような，調和写像を介した $M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面と $\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3$ 内の CMC 1 曲面の関係が用いられている．さらにこれを受けて，一般の M において $M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面の associate 曲面を定め，特に $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ においてはその存在まで示したこと (定義 2.14，系 2.15) も主な内容の一つである．

第 3 章では，主に [FeMi] の内容について記述した．これは $\mathbb{H}^2$ への調和写像から $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 曲面を構成する方法について述べている部分 (第 1 節，第 3 節と第 4 節) と，その準備として $\mathbb{H}^2$ への調和写像の性質について述べている部分 (第 2 節) に分けられる．なお第 4 章の内容は，$\mathbb{H}^2$ への調和写像から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 を構成するという内容であり，これは既に述べたように第 3 章の内容を模倣したものであるから，第 3 章の内容と深く関わりがある．特に，第 3 章 2 節と定理 3.14 はそのまま第 4 章でも使用する．しかし，他の部分においては細部が異なるため計算等を省略はしなかった．そのため第 4 章は，第 3 章 2 節と定理 3.14 のみ読めば，第 3 章の他の部分は読まずとも読むことができる．しかし，第 3 章と第 4 章では主に平行な議論が行われているため，第 3 章の後に第 4 章へ移ったほうが読みやすいと思われる．

さて，本論文で記述した [FeMi] の主な内容の一つは，$\mathbb{H}^2$ への調和写像 G について Weierstrass data を導入したこと (定義 3.3) である．調和写像 G が共形でない場合には，Weierstrass data の存在は，G をガウス写像にもつ $\mathbb{L}^3$ への特異点付き CMC 1/2 はめ込みの存在を意味し，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面と $\mathbb{L}^3$ 内の CMC 1/2 曲面を結びつける役割を果たす．また，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の曲面について hyperbolic Gauss map という写像を定めたこと (定義 3.8)，特に CMC 1/2 曲面においては，hyperbolic Gauss map が調和写像となり，かつ Weierstrass data をもつこと (定理 3.9，定理 3.10) も主な目的である．それとは逆に，Weierstrass data をもつ与えられた調和写像 G を，hyperbolic Gauss map にもつような $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面が構成できること (定理 3.18) が主定理である．この結果は，[DFM] にてより一般的な結果が与えられており，得られる曲面の平均曲率 1/2 が持つ意味についても記述されている．なお論文 [FeMi] では，定理 3.18 の応用や Nil^3 内の極小曲面との関係などについても触れられているが，これらのことは少人数クラスにおいて扱わなかったため，記述していない．

第 4 章は，第 3 章の手法を模倣することで得られた，筆者のオリジナルな結果である．すなわち，第 4 章では，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ という空間について，調和写像からそれをガウス写像にもつ CMC 曲面を構成できるか，という新たな問題を解いている．以下では，本論文にて新たに示された定理とそれに至る経緯について簡潔に述べる．

まず，単連結リーマン面 Σ から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ へのはめ込み $\psi = (N, h)$ について，hyperbolic Gauss map という写像 G を導入する．この G について，次の二つの定理が成り立つ．

定理 4.5. CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h) \colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．このとき ψ の hyperbolic Gauss map $G \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は，その正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとき，調和写像となる．

定理 4.6. CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h) \colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．このとき ψ の hyperbolic Gauss map $G \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は，その正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．このとき，調和写像 G は Weierstrass data $\{Q, \lambda u^2\}$ をもつ．

これらから，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込み ψ の hyperbolic Gauss map は Weierstrass data をもつ調

和写像であることが分かる．また，これらの定理は，それぞれ第 3 章の定理 3.9，定理 3.10 に対応する結果である．

これと反対に Weierstrass data をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みを構成するのが，本章の主定理 4.14 である．主定理に至るまでには，G の Weierstrass data によって定められる微分方程式を解いて ψ の第 4 座標に相当する関数 h を得る，その後，ψ の第一基本形式と angle function にあたる λ, u という関数も Weierstrass data を用いて定義すると，λ, u, h から ψ の moving frame にあたるベクトル値関数の組が求まるのでそれに適切な初期条件を与える，という行程をたどる必要がある．

定理 4.14. Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．$G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は調和写像で，Weierstrass data $\{Q, 2\tau\}$ をもつとする．また，G の正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．$z_0 \in \Sigma$ を G の正則点とし，$-\tau(z_0) + 2|\theta_0|^2 > 0$ を満たすような $\theta_0 \in \mathbb{C}$ をとる．

このときある開集合 $z_0 \in W \subset \Sigma$ 上で，次の条件を満たす，空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $\psi = (N, h)\colon W \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて唯一つ存在する．

1. G は ψ の hyperbolic Gauss map である．

2. $\tau = \lambda u^2/2$ である．ただし，$\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda\, |dz|^2$，$u$ は ψ の angle function である．

3. $dh(z_0) = \theta_0\, dz + \bar{\theta}_0\, d\bar{z}$.

この定理は，第 3 章における定理 3.18 に対応する定理である．しかし，定理 3.18 では調和写像から構成された CMC 1/2 はめ込みの定義域が与えられたリーマン面 Σ 全体であったのに対し，この定理 4.14 では，Σ のある開部分集合でしかはめ込みが定義されないという違いが見られる．

謝辞

アドバイザーである糸 健太郎氏においては，少人数クラスの他にも，未熟な筆者の知識を補い状況を整理してくださるなど様々な形でご尽力を賜った．また，納谷 信氏，赤嶺 新太郎氏，藤野 弘基氏，成田 知将氏においては，相談に応じていただく等格別のご助力を賜った．この場を借りて厚く御礼申し上げる．

目次

第 I 部
少人数クラス学習内容

2　$M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面と調和写像

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域から $\mathbb{R}^3$ への共形極小はめ込みに関しては，Weierstrass data とよばれる，ある条件をみたす有理型関数と正則 1 形式の組を用いた表現公式が与えられている．

[HST] の筆者たちは，$\mathbb{C}$ 内の単連結領域 Ω からリーマン面 M^2 と $\mathbb{R}$ との積多様体 $M^2 \times \mathbb{R}$ への共形極小はめ込みについて，Weierstrass data の類似物 g, η を与えている．$\mathbb{R}^3$ の場合とは異なり，g, η からただちに表現公式を与えることはできないが，これらは曲面のガウス写像や第一基本形式などの重要な量に関係するものである．

また，命題 2.7 では，この Weierstrass data の類似物 g, η を介して，調和写像 $h\colon \Omega \to M$ から $M \times \mathbb{R}$ への共形極小はめ込みを構成している．このことから，g, η が $M \times \mathbb{R}$ への極小はめ込みの情報を余すところなく持ち合わせていることが推し量られる．

[HST] の主定理は定理 2.11，定理 2.13 である．$M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合には，定理 2.13 から，単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上において共形極小はめ込み $X = (h, f)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ は，Ω 上の共形計量と正則 2 次微分から決定されることが分かる．さらに，定理 2.11 をあわせることで，定理 2.13 によって得られる曲面は，$M \times \mathbb{R}$ の等長変換の差をのぞいて一意的であることも分かる．

加えて，$M \times \mathbb{R}$ への共形はめ込みの associate 曲面を定義することも重要な目的の一つである．ある曲面の associate 曲面とは，元の曲面と等長で，それぞれのはめ込みの M 成分のホップ 2 次微分が互いに $e^{2i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ 倍の違いしかないような曲面のことであり，$M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合には存在や一意性まで示されている (定義 2.14，系 2.15)．これは，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面についての associate 曲面の一般化であり，一つの極小曲面から等長な極小曲面を構成する方法の一つでもある．今後，より広範な空間において，その存在が証明されることが期待される．

2.1　調和写像と共形極小はめ込み

最初に以下の記号を定義しよう．

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域，$w = u + iv$ を Ω の局所複素座標, M^2 を $\mathbb{R}^{p,q}$ に等長的に埋め込まれた 2 次元完備リーマン多様体とする．M にはリーマン面の構造が入る．z を M をリーマン面とみたときの局所複素座標, $\mu = \sigma^2(z)\,|dz|^2$ を M の計量とする．

また，$X = (h, f)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ を共形極小はめ込みとし，X による $M \times \mathbb{R}$ の計量 $g_{M\times\mathbb{R}} = \sigma^2\,|dz|^2 + dt^2$ からの誘導計量を $ds_X^2 = X^* g_{M\times\mathbb{R}} = \lambda^2\,|dw|^2$ と表す．ただし，$\mathbb{R}$ の局所座標を t とした．

さて，まずは次の結果を用いる．

補題 2.1 ([Law, Propositon 8])**.** N^m を連結リーマン多様体，$\psi\colon N \to \mathbb{R}^n$ を等長はめ込み，Δ^N を N 上のラプラシアンとする．

このとき，ψ の平均曲率ベクトル場 H は，$p \in N$ について，

$$mH_{\psi(p)} = \Delta^N \psi(p)$$

を満たす．

ただし，H は

$$H_{\psi(p)} := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\epsilon_k}\epsilon_k)^{\perp}_{\psi(p)}$$

で与えられる．ここで，$\nabla^{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な計量に関する Levi-Civita 接続とし，$\{\epsilon_k\}$ は $\psi(p)$ の周りの正規直交標構場である．

この結果を等長はめ込み $X\colon \Omega \to M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{p+1,q}$ に適用すると，次が得られる．

命題 2.2 ([HST, p.269])**.** X の $\mathbb{R}^{p+1,q}$ における平均曲率ベクトル H_0 は，

$$2H_0 = \Delta^{\Omega}X$$

で与えられる．

さらに，X の $M \times \mathbb{R}$ における平均曲率ベクトル H は，

$$\begin{aligned} 2H &= (\Delta^{\Omega}X)^{T_X(M\times\mathbb{R})} \\ &= ((\Delta^{\Omega}h)^{T_hM}, \Delta^{\Omega}f) \end{aligned}$$

で与えられる．

Proof. $2H_0 = \Delta^{\Omega}X$ は補題 2.1 からただちに得られる．

また，H_0 を $M\times\mathbb{R}$ に接する方向と直交する方向に分けることで，$2H = (\Delta^{\Omega}X)^{T_X(M\times\mathbb{R})}$ が得られる． □

今，X は極小であるから，$H = 0$ である．すなわち，

$$(\Delta^{\Omega}h)^{T_hM} = 0, \quad \Delta^{\Omega}f = 0$$

となる．ここで，等長的にはめ込まれた多様体 $N \subset \mathbb{R}^{p,q}$ について考える．写像 $g\colon \Omega \to N \subset \mathbb{R}^{p,q}$ に対して，ラプラシアンを作用させたとき N に接する方向の成分が 0 になるとき，g は調和写像である．よってこの式は，$h\colon \Omega \to M$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ がともに調和写像であることを示す．特に M への調和写像 $h\colon \Omega \to M$ に関しては次の関係式が成り立つ．

命題 2.3 ([HST, p.269, 式 (1)])**.** M の局所複素座標 z と Ω の局所複素座標 w に関する調和写像方程式は，

$$h_{w\bar{w}} + 2(\log\sigma)_z(h)h_w h_{\bar{w}} = 0 \tag{2.1}$$

で与えられる．

この命題の証明については [ScYa, p.8] が詳しいが，ここでは割愛する．

調和写像 h の性質を調べるにあたり，以下の二つの量が重要な役割を果たすことが知られている．

一つ目は，**ホップ 2 次微分**とよばれる次の微分形式である:

$$\begin{aligned} Q(h) &:= h^*(\sigma^2(z)\,|dz|^2)^{(2,0)} \\ &= (\sigma\circ h)^2 h_w \bar{h}_w\, dw^2 \\ &= \phi(w)\, dw^2. \end{aligned}$$

ただし，ここで $\phi(w) = (\sigma\circ h)^2 h_w \bar{h}_w$ とおいた．

二つ目は，**complex coefficient of dilation** とよばれる次の関数である:

$$a(w) = \frac{\overline{h_{\bar{w}}}}{h_w} = \frac{\bar{h}_w}{h_w}.$$

特にホップ微分は正則となることが分かる．これを示そう．

まず，調和写像方程式 (2.1) の複素共役をとると，

$$\bar{h}_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma}\bar{h}_{\bar{w}}\bar{h}_w = 0 \tag{2.2}$$

となる．ここで，$(\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w$ の $\bar{w}$ 偏微分を考えると，

$$((\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w)_{\bar{w}} = (\sigma\circ h)_{\bar{w}} h_w\bar{h}_w + (\sigma\circ h)^2(h_{w\bar{w}}\bar{h}_w + h_w\bar{h}_{w\bar{w}})$$

を得る．式 (2.1), (2.2) を用いると，

$$\begin{aligned}((\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w)_{\bar{w}} &= 2\sigma(\sigma_z h_{\bar{w}} + \sigma_{\bar{z}}\bar{h}_{\bar{w}})h_w\bar{h}_w + \sigma^2\left(-2\frac{\sigma_z}{\sigma}h_w h_{\bar{w}}\bar{h}_w - 2\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma}h_w\bar{h}_{\bar{w}}\bar{h}_w\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

となる．よって，調和写像のホップ 2 次微分は正則である．

さて，次に X の性質を見ていこう．$X = (h, f)\colon \Omega \to M\times\mathbb{R}$ は共形はめ込みだから，

$$\begin{aligned}X^* g_{M\times\mathbb{R}} &= X^*(\sigma^2\,|dz|^2 + \,dt^2)\\ &= (\sigma\circ h)^2(h_u\,du + h_v\,dv)(\overline{h_u}\,du + \overline{h_v}\,dv) + (f_u\,du + f_v\,dv)^2\\ &= ((\sigma\circ h)^2|h_u|^2 + f_u^2)\,du^2 + ((\sigma\circ h)^2|h_v|^2 + f_v^2)\,dv^2 + ((\sigma\circ h)^2(h_u\overline{h_v} + \overline{h_u}h_v) + 2f_u f_v)\,dudv\\ &= \lambda^2(du^2 + \,dv^2)\end{aligned}$$

と計算される．これを成分ごとに書き直すと，

$$\begin{aligned}(\sigma\circ h)^2|h_u|^2 + f_u^2 = (\sigma\circ h)^2|h_v| + f_v^2 = \lambda^2,\\ (\sigma\circ h)^2\mathrm{Re}\,\overline{h_u}h_v + f_u f_v = 0\end{aligned}$$

となる．これらの式を用いると，

$$(\sigma\circ h)^2(|h_u|^2 - |h_v|^2 - 2i\mathrm{Re}\,\overline{h_u}h_v) = -(f_u^2 - f_v^2 - 2if_u f_v) \tag{2.3}$$

が得られる．

ここで $(\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w$ を計算すると，

$$\begin{aligned}(\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w &= (\sigma\circ h)^2\frac{1}{4}(h_u - ih_v)(\overline{h_u} - i\overline{h_v})\\ &= (\sigma\circ h)^2\frac{1}{4}(|h_u|^2 - |h_v|^2 - 2i\mathrm{Re}\,\overline{h_u}h_v)\\ &= \frac{1}{4}((2.3)\text{ の左辺}),\end{aligned}$$

一方で，f_w^2 を計算すると，

$$\begin{aligned}f_w^2 &= \frac{1}{4}(f_u - if_v)^2\\ &= \frac{1}{4}(f_u^2 - f_v^2 - 2if_u f_v)\\ &= -\frac{1}{4}((2.3)\text{ の右辺})\end{aligned}$$

となる．

以上より，

$$f_w^2 = -(\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w = -\phi(w) \tag{2.4}$$

が得られた．

さらに，

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}((\sigma \circ h)^2(|h_u|^2 + |h_v|^2) + f_u^2 + f_v^2)$$

と表せるが，一方で

$$\begin{aligned} 4(\sigma \circ h)^2 |h_w||\bar{h}_w| &= 4|f_w|^2 \\ &= (f_u - if_v)(f_u + if_v) \\ &= f_u^2 + f_v^2 \end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned} 2(|h_w|^2 + |\bar{h}_w|^2) &= \frac{1}{2}(|h_u - ih_v|^2 + |h_u + ih_v|^2) \\ &= |h_u|^2 + |h_v^2| \end{aligned}$$

でもある．よって，

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (\sigma \circ h)^2(|h_w|^2 + |\bar{h}_w|^2 + 2|h_w||\bar{h}_w|) \\ &= (\sigma \circ h)^2(|h_w| + |\bar{h}_w|)^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

すなわち，

$$ds_X^2 = X^* g_{M \times \mathbb{R}} = (\sigma \circ h)^2(|h_w| + |\bar{h}_w|)^2 \, |dw|^2$$

が得られる．

さて，これからは $M \times \mathbb{R}$ の極小はめ込みに関して，Weierstrass data の類似物 (以下の η と g がそれにあたる) をつくり，X やその第一基本形式などを書き直していきたい．ただし，以下では $\phi(w)$ の零点の位数は全て偶数であることを仮定する．

まず，

$$\eta := \pm 2i\sqrt{\phi(w)}\, dw$$

と定める．これは ϕ に関する仮定から，正則 1 形式となる．ただし，符号は $f_w\, dw = \frac{1}{2}\eta$ となるようにとる．すると，

$$\begin{aligned} df &= f_w\, dw + f_{\bar{w}}\, d\bar{w} \\ &= 2\mathrm{Re}\,(f_w\, dw) \\ &= \mathrm{Re}\,\eta \end{aligned}$$

となる．Ω は単連結だから，

$$f = \int_w df = \mathrm{Re} \int_w \eta$$

が成り立つ．これで，f が正則 1 形式 η を使って表せた．

Weierstrass data のうち有理型関数の方は，はめ込みのガウス写像と関係していた．そこで，X のガウス写像を求めたい．

命題 2.4 ([HST, p.269, 式 (4), (5)])**.** 共形はめ込み $X = (h, f) \colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ の単位法ベクトル (ガウス写像) N を

$$N = N_1 \frac{\partial}{\partial x} + N_2 \frac{\partial}{\partial y} + N_3 \frac{\partial}{\partial t} = (N_1, N_2, N_3)$$

と書くとき，N は

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} \left(\frac{2}{\sigma} \operatorname{Re} g, \frac{2}{\sigma} \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1 \right) \tag{2.6}$$

と表せる．ただし，g は

$$g := \frac{f_w h_{\bar{w}} - f_{\bar{w}} h_w}{\sigma |h_{\bar{w}}| (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)}$$

で与えられ，

$$g^2 = -\frac{h_w}{\bar{h}_w} \tag{$*$}$$

を満たす．

$(*)$ の右辺は $-1/a(w)$ であり，g は complex coefficient of dilation $a(w)$ と深い関わりをもつことに注意する．

Proof. $M \times \mathbb{R}$ が 3 次元であるから，

- $g_{M \times \mathbb{R}}(X_u, N) = g_{M \times \mathbb{R}}(X_v, N) = 0$,

- $g_{M \times \mathbb{R}}(N, N) = 1$

を満たす N は符号を除いてただ一つに定まる．そこで，

$$\tilde{N} := \frac{1}{|g|^2 + 1} \left(\frac{2}{\sigma} \operatorname{Re} g, \frac{2}{\sigma} \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1 \right)$$

が上の条件を満たすことを確かめればよい．

まず，

$$\begin{aligned} g_{M \times \mathbb{R}}(\tilde{N}, \tilde{N}) &= \frac{1}{(|g|^2 + 1)^2} \left(\sigma^2 \left(\frac{4}{\sigma^2} ((\operatorname{Re} g)^2 + (\operatorname{Im} g)^2) \right) + (|g|^2 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{(|g|^2 + 1)^2} (4|g|^2 + (|g|^2 - 1)^2) \\ &= \frac{1}{(|g|^2 + 1)^2} (|g|^2 + 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

である．次に $f_w^2 = -\sigma^2 h_w \bar{h}_w$ と $f_{\bar{w}}^2 = -\sigma^2 \overline{h_w} h_{\bar{w}}$ を用いて，g^2 を計算すると，

$$\begin{aligned} g^2 &= \frac{f_w^2 h_{\bar{w}}^2 - 2|f_w|^2 h_w h_{\bar{w}} + f_{\bar{w}}^2 h_w^2}{\sigma^2 |h_{\bar{w}}|^2 (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)^2} \\ &= -\frac{h_w \bar{h}_w h_{\bar{w}}^2 + 2|h_w|^2 |\bar{h}_w|^2 h_w h_{\bar{w}} + \overline{h_w} h_{\bar{w}} h_w^2}{|h_{\bar{w}}|^2 (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)^2} \\ &= -\frac{h_w h_{\bar{w}} (|h_{\bar{w}}|^2 + 2|h_w||\bar{h}_w| + |h_w|^2)}{|h_{\bar{w}}|^2 (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)^2} \\ &= -\frac{h_w}{\bar{h}_w} \end{aligned}$$

が成り立つ．これを用いて，$g_{M\times\mathbb{R}}(X_u,\tilde{N})$ を計算すると，

$$g_{M\times\mathbb{R}}(X_u,\tilde{N})=\frac{2\sigma}{|g|^2+1}(\mathrm{Re}\,h_u\mathrm{Re}\,g+\mathrm{Im}\,h_u\mathrm{Im}\,g)+\frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}f_u$$

が成り立つ．ここで，$g^2=-h_w/\bar{h}_w$ より，

$$\begin{aligned}|g|^2-1&=\frac{|h_w|}{|h_{\bar{w}}|}-1\\&=\frac{1}{|h_{\bar{w}}|}(|h_w|-|h_{\bar{w}}|)\\&=\frac{|h_w|^2-|h_{\bar{w}}|^2}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}\end{aligned}$$

となる．さらに分子を計算すると，

$$\begin{aligned}|h_w|^2-|h_{\bar{w}}|^2&=\frac{1}{4}(h_u-ih_v)(\overline{h_u}+i\overline{h_v})-\frac{1}{4}(h_u+ih_v)(\overline{h_u}-i\overline{h_v})\\&=\frac{i}{2}(h_u\overline{h_v}-\overline{h_u}h_v)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$(|g|^2-1)f_u=\frac{\frac{i}{2}(h_u\overline{h_v}-\overline{h_u}h_v)f_u}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}$$

を得る．一方で，

$$\begin{aligned}2\sigma(\mathrm{Re}\,h_u\mathrm{Re}\,g+\mathrm{Im}\,h_u\mathrm{Im}\,g)&=2\sigma\left(\frac{h_u+\overline{h_u}}{2}\frac{g+\bar{g}}{2}+\frac{h_u-\overline{h_u}}{2i}\frac{g-\bar{g}}{2i}\right)\\&=\sigma(h_u\bar{g}+\overline{h_u}g)\end{aligned}$$

ここで，g の分子 $f_wh_{\bar{w}}-f_{\bar{w}}h_w$ も u を用いて書き直すと，

$$\begin{aligned}f_wh_{\bar{w}}-f_{\bar{w}}h_w&=\frac{1}{4}(f_u-if_v)(h_u+ih_v)-\frac{1}{4}(f_u+if_v)(h_u-ih_v)\\&=\frac{i}{2}(f_uh_v-f_vh_u)\end{aligned}$$

であるから，結局

$$2\sigma(\mathrm{Re}\,h_u\mathrm{Re}\,g+\mathrm{Im}\,h_u\mathrm{Im}\,g)=\frac{-\frac{i}{2}(h_u\overline{h_v}-\overline{h_u}h_v)f_u}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}$$

となる．以上より，

$$\begin{aligned}g_{M\times\mathbb{R}}(X_u,\tilde{N})=&\frac{2\sigma}{|g|^2+1}(\mathrm{Re}\,h_u\mathrm{Re}\,g+\mathrm{Im}\,h_u\mathrm{Im}\,g)+\frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}f_u\\=&\frac{1}{|g|^2+1}\left(\frac{-\frac{i}{2}(h_u\overline{h_v}-\overline{h_u}h_v)f_u}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}+\frac{\frac{i}{2}(h_u\overline{h_v}-\overline{h_u}h_v)f_u}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}\right)\\=&0\end{aligned}$$

が分かる．

同様に $g_{M\times\mathbb{R}}(X_v,\tilde{N})=0$ も分かる． □

ここで，特に $M=\mathbb{R}^2$ で $\sigma=1$ の場合を考えてみよう．$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面については，序文で紹介したように，正則関数 $\tilde{g}$，有理型 1 形式 ω を用いたワイエルシュトラスの表現公式という構成法が知られている．今ここで作った g,η は，この $\mathbb{R}^3$ の Weierstrass data $(\tilde{g},\omega)$ とそのままでは一致しないが， $g=\tilde{g}$, $\eta=2g\omega$ という関係がある．

さて，それでは今定義した関数 g と正則 1 形式 η を用いて，X の第一基本形式 λ を書き直そう．

補題 2.5 ([HST, p.270, 式 (9)])**.** X の第一基本形式 λ は，

$$ds_X^2=\lambda^2\,|dw|^2=\frac{1}{4}(|g|+|g^{-1}|)^2|\eta|^2$$

を満たす．

Proof. λ を g,η を用いて書き直すためには，h の偏微分を g,η で書く必要がある．

そのために $g\,dw$ を $f_w\,dw=\frac{1}{2}\eta$ を用いて，書き直すと

$$\begin{aligned} g\,dw &= \frac{f_w h_{\bar{w}}-f_{\bar{w}}h_w}{\sigma|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}\,dw \\ &= \frac{\eta h_{\bar{w}}-\bar{\eta}h_w}{2\sigma|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)} \end{aligned}$$

が成り立つ．すると，

$$\begin{aligned} \frac{g\eta}{2\sigma}\,dw &= \frac{\eta^2 h_{\bar{w}}-|\eta|^2 h_w}{4\sigma^2|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)} \\ &= \frac{-4\sigma^2 h_w\bar{h}_w h_{\bar{w}}h_{\bar{w}}-4\sigma^2|h_w||\bar{h}_w||h_{\bar{w}}|h_w}{4\sigma^2|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}\,dw^2 \\ &= -\frac{h_w|h_{\bar{w}}|+h_w|h_w|}{|h_{\bar{w}}|(|h_w|+|h_{\bar{w}}|)}\,dw^2=-h_w\,dw^2, \end{aligned}$$

すなわち，

$$h_w\,dw=-\frac{g\eta}{2\sigma} \tag{2.7}$$

となる．さらに，$g^2=-h_w/\bar{h}_w$ だったので，

$$\begin{aligned} \bar{h}_w\,dw &= -\frac{h_w\,dw}{g^2}=\frac{g^{-1}\eta}{2\sigma}, \\ h_{\bar{w}}\,d\bar{w} &= \overline{\bar{h}_w\,dw}=\frac{\overline{g^{-1}\eta}}{2\sigma} \end{aligned} \tag{2.8}$$

を得る．これらを式 (2.5) に代入することで，

$$ds_X^2=\lambda^2\,|dw|^2=\frac{1}{4}(|g|+|g^{-1}|)^2|\eta|^2$$

を得る．

これで，X の第一基本形式も g,η を使って表せた． □

この Weierstrass data の類似物 g,η は，$\mathbb{R}^3$ の Weierstrass data とは性質が異なる部分がある．それは，複素関数 g が有理型関数とは限らない点と，(2.7), (2.8) で示されているように，h の偏微分が $\sigma\circ h$ を用いて表されるので，h がそのまま積分できない点である．

今，g を $g=-ie^{\omega+i\psi}$ と表してみる．ただし，$\omega,\,\psi\colon\Omega\to\mathbb{R}$ である．特に $|g|=e^{\omega}$ であることに注意する．すると，次が成り立つ．

命題 2.6 ([HST, p.270, 式 (13), 式 (14)])**.** $g = -ie^{\omega + i\psi}$ とおくとき，ω は sinh-Gordon 方程式の解である．すなわち，

$$\Delta_0 \omega = -2K_M \sinh(2\omega)|\phi|$$

が成り立つ．ただし，Δ_0 は $\mathbb{R}^2$ の標準的な計量に関するラプラシアンで，K_M はリーマン面 M のガウス曲率である．

また，ω を用いた以下の式がなりたつ:

- $ds_X^2 = 4\cosh^2 \omega |\phi|\,|dw|^2$,

- $N_3 = \tanh \omega$，ただし，N_3 は N の第 3 成分である．

Proof. ω が sinh-Gordon 方程式の解となることについては，[ScYa, p.9] が詳しい．このことについての証明は割愛する．

残りの二つの式を計算すると，

$$\begin{aligned} ds_X^2 &= \frac{1}{4}(|g| + |g^{-1}|)^2 |\eta|^2 \\ &= (e^{\omega} + e^{-\omega})^2 |\phi|\,|dw|^2 \\ &= 4\cosh^2 \omega |\phi|\,|dw|^2, \\ N_3 &= \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \\ &= \frac{e^{2\omega} - 1}{e^{2\omega} + 1} = \tanh \omega \end{aligned}$$

を得る． □

今まで，g, η を用いて f や X の第一基本形式などを書き表してきたが，定義を見ると η は f を含まず h から定められた．このとき， f は η から作られる．そして g はその f と h から定められた．これらのことから，X の情報は h のみで書けるだろうと考えられる．このことをまとめたのが次の命題である．

命題 2.7 ([HST, Proposition 1])**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域，$h\colon \Omega \to M$ を調和関数で，ホップ 2 次微分 $Q(h) = \phi\, dw^2$ の零点は全て偶数位数のものとする．また正則 1 形式 η を

$$\eta = \pm 2i\sqrt{Q(h)}$$

とおく．$f = \mathrm{Re} \int \eta$ とするとき，$X = (h, f)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ は共形極小分岐はめ込みとなる．

また，複素関数 g を

$$g = \frac{f_w h_{\bar{w}} - f_{\bar{w}} h_w}{\sigma |h_{\bar{w}}|(|h_w| + |h_{\bar{w}}|)}$$

と定め，$|g| = e^{\omega}$ とかくとき，この X のガウス写像の第三成分 N_3 は，

$$N_3 = \tanh \omega$$

を満たす．また，

$$ds_X^2 = X^* g_{M \times \mathbb{R}} = \cosh^2 \omega |\eta|^2$$

であり，ω は sinh-Gordon 方程式

$$\Delta_0 \omega = -2K_M \sinh(2\omega)|\phi|$$

を満たす．

Proof. $f_w = \mathrm{Re}\int \eta$ のとき，$f_w^2 = -(\sigma\circ h)^2 h_w \bar{h}_w$ が成り立つ．式 (2.3) を得た経緯を考えると，実は $X=(h,f)$ が共形はめ込みであることと，$f_w^2 = -(\sigma\circ h)^2 h_w \bar{h}_w$ であることは同値であることが分かる．

さらに，η は正則であったことから，f は調和写像となる．h が調和であったことから，補題 2.1 により，X は共形極小分岐はめ込みであることが分かる．

残りの条件はすべて，今までの計算で得られた結果であった． $\square$

2.2 $M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ の場合の共形極小はめ込み

前節では一般的なリーマン面 M ついて，$M\times\mathbb{R}$ へのはめ込みに対して，Weierstrass data の類似物 g,η を定め，はめ込みの成分の一部や第一基本形式，ガウス写像を書き表した．

この節では，$M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ に限って，$M\times\mathbb{R}$ へのはめ込みの性質を調べたい．

なお， $M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ ならばそれぞれの場合で，$\sigma=1,\frac{2}{1-|z|^2},\frac{2}{1+|z|^2}$ であることを注意しておく．ここで，$\mathbb{H}^2$ のモデルとして円板モデルを考えている．

以下では準備として，$M=\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ の場合に，Ω から M への調和関数が存在するとき，それをガウス写像にもつような $\mathbb{L}^3,\mathbb{R}^3$ への CMC 1 はめ込みが存在することを示す．というのも，そのような CMC 1 曲面を介することで $M\times\mathbb{R}$ への二つのはめ込みを比較するという難しい操作を，$\mathbb{L}^3,\mathbb{R}^3$ へのはめ込みを比較するというより易しい操作に変えることができるからである．

さて，それではまず $\mathbb{H}^2$ の場合であるが，

- $\mathscr{H} := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{L}^3 | x_1^2+x_2^2-x_3^2=-1\}$,
- $\mathscr{H}_+ := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{H} | x_3\geq 1\}$

と定める．これらに関して，次の写像を導入する．

$$\Pi_+\colon \mathscr{H}_+\to\mathbb{H}^2,\quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto\frac{x_1+ix_2}{1+x_3}$$

これらは $(0,0,-1)$ からの立体射影である．特に，$\mathscr{H}$ に $\mathbb{L}^3$ の標準的な計量を制限した計量を入れると，Π_+ は等長写像となる．

このとき，次の命題と定理が成り立つ．

命題 2.8 ([AkNi, Proposition4.1, Proposition 5.1, Corollary 6.2])**.** Ω を単連結リーマン面とし，空間的な共形はめ込み $X\colon\Omega\to\mathbb{L}^3$ を考える．X の平均曲率 H は $H\colon\Omega\to\mathbb{R}\backslash\{0\}$ であるとし，$ds_X^2 = X^*g_{\mathbb{L}^3} = \lambda|dw|^2$ とおく．また，X のガウス写像 G は，$\mathscr{H}_+$ に値をとるとする．さらに，$\Psi(w) := \overline{\Pi_+ G(w)}$, $w\in\Omega$ と定める．

このとき，Ψ と H は次を満たす:

$$H\left(\Psi_{w\bar{w}}+\frac{2\bar{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\Psi_w\Psi_{\bar{w}}\right)=H_w\Psi_{\bar{w}}. \tag{2.9}$$

また，λ は Ψ と H を用いて，

$$\lambda=\frac{4|\Psi_{\bar{w}}|^2}{H^2(1-|\Psi|^2)^2}$$

と表せる．

定理 2.9 ([AkNi, Theorem 6.1])**.** Ω を単連結リーマン面とし，$H\colon \Omega \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を C^∞ 級関数とする．また，$G\colon \Omega \to \mathscr{H}_+$ を至る所正則でない C^∞ 級写像とする．

ここで，$w \in \Omega$，$\Psi(w) = \overline{\Pi_+(G(w))}$ とおく．

H と Ψ は，

$$H\left(\Psi_{w\bar{w}} + \frac{2\bar{\Psi}}{1-|\Psi|^2}\Psi_w\Psi_{\bar{w}}\right) = H_w\Psi_{\bar{w}} \tag{2.9}$$

をみたすとする．

このとき，以下を満たす空間的共形分岐はめ込み $X\colon \Omega \to \mathbb{L}^3$ が存在する．

- X の平均曲率は H, ガウス写像は G である，

- $X = (X_1, X_2, X_3)$ と書くとき，具体的に

$$\begin{aligned}
X_1(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{1}{H}\frac{1+\Psi^2}{(1-|\Psi|^2)^2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial w}\,dw + c_1,\\
X_2(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w -\frac{\sqrt{-1}}{H}\frac{1-\Psi^2}{(1-|\Psi|^2)^2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial w}\,dw + c_2,\\
X_3(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{2}{H}\frac{\Psi}{(1-|\Psi|^2)^2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial w}\,dw + c_3,
\end{aligned}$$

  と表すことができる．ただし，$c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{L}^3$ である．

これらの命題と定理から，式 (2.9) は $\mathbb{L}^3$ への空間的な共形はめ込みが存在するための必要十分条件となっていることが分かる．

次に $\mathbb{S}^2$ の場合の準備をしよう．

$\mathbb{H}^2$ の場合と同じように $(0,0,\pm1)$ からの立体射影をそれぞれ

- $\Pi_+\colon \mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1)\} =: U_1 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$,

- $\Pi_-\colon \mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1)\} =: U_2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto \frac{x_1+ix_2}{1+x_3}$

とおく．

このとき，次の定理が成り立つ．なお歴史的には，次の剱持の定理 2.10 の方が先に与えられ，その定理の $\mathbb{L}^3$ に関する類似を与えたのが，先の定理 2.9 である．

定理 2.10 ([Ken, Theorem 4, p.98, 式 (5.1)])**.** Ω を単連結リーマン面とし，$H\colon \Omega \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を C^1 級関数とする．また，$G\colon \Omega \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級関数とする．

ここで，$w \in \Omega$，$\Psi_1(w) = \Pi_+(G(w))$, $\Psi_2(w) = \overline{\Pi_-(G(w))}$ とおく．さらに，Ψ_1, Ψ_2 の両方に関して同じ式が成り立つ場合には，$\Psi = \Psi_j$ $(j = 1, 2)$ を用いて表示することとする．

H と Ψ は

$$H\left(\Psi_{w\bar{w}} - \frac{2\bar{\Psi}}{1+|\Psi|^2}\Psi_w\Psi_{\bar{w}}\right) = H_w\Psi_{\bar{w}}$$

をみたすとする．

このとき，以下を満たす共形分岐はめ込み $X\colon \Omega \to \mathbb{L}^3$ が存在する．

- X の平均曲率は H, ガウス写像は G である，

- $X = (X_1, X_2, X_3)$ と書くとき，具体的に以下のように表すことができる．
  もし $\Psi(w) \in U_1$ なら

$$
\begin{aligned}
X_1(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{-1}{H}\frac{1-\Psi_1^2}{(1+|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_1}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_1,\\
X_2(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{-\sqrt{-1}}{H}\frac{1+\Psi_1^2}{(1+|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_1}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_2,\\
X_3(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{-1}{H}\frac{2\Psi_1}{(1+|\Psi_1|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_1}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_3,
\end{aligned}
$$

  もし $\Psi(w) \in U_2$ なら

$$
\begin{aligned}
X_1(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{-1}{H}\frac{1-\Psi_2^2}{(1+|\Psi_2|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_2}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_1,\\
X_2(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{\sqrt{-1}}{H}\frac{1+\Psi_2^2}{(1+|\Psi_2|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_2}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_2,\\
X_3(w) &= 2\mathrm{Re}\int_w \frac{1}{H}\frac{2\Psi_2}{(1+|\Psi_2|^2)^2}\overline{\frac{\partial\Psi_2}{\partial\bar{w}}}\,dw + c_3.
\end{aligned}
$$

  ただし，$c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ である．

- X の計量は

$$
\frac{4|\Psi_{\bar{w}}|^2}{H^2(1+|\Psi|^2)^2}\,|dw|^2
$$

  で与えられる．

さて，以上の準備のもとで，$M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合には次の定理が成り立つことが分かる．

定理 2.11 ([HST, Theorem 6])**.** $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$，$\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とし，X, $X^*\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ を互いに等長な共形極小はめ込みとする．また，$X = (h, f), X^* = (h^*, f^*)$ と表す．

このとき，h, h^* それぞれのホップ微分 $Q(h), Q(h^*)$ が $Q(h) = Q(h^*)$ を満たすならば，X と X^* は congruent である．

Proof. h, h^* それぞれについて

- $g = -ie^{\omega+i\psi}$, $\eta = \pm 2i\sqrt{Q(h)}$,

- $g^* = -ie^{\omega^*+i\psi^*}$, $\eta^* = \pm 2i\sqrt{Q(h^*)}$

をつくる．

X と X^* は互いに等長だから，

$$
\begin{aligned}
ds_X^2 &= \frac{1}{4}(|g| + |g|^{-1})|\eta|^2\\
&= \frac{1}{4}(|g^*| + |g^*|^{-1})|\eta^*|^2 = ds_{X^*}^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．今．$Q(h) = Q(h^*)$ だから $|\eta| = |\eta^*|$ が分かる．
すると，上の式から

$$
\begin{aligned}
|g| + |g|^{-1} &= |g^*| + |g^*|^{-1}, \\
e^{\omega} + e^{-\omega} &= e^{\omega^*} + e^{-\omega^*}, \\
\cosh\omega &= \cosh\omega^*, \\
\omega^* &= \pm\omega
\end{aligned}
$$

が分かる．
以下では，一般性を失わず $\omega^* = \omega$ としてよい．実際，もし $\omega^* = -\omega$ なら，新たなはめ込み

$$X^{**} := (h^{**}, f^{**}) = (\bar{h}^*, f^*)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$$

を考える．複素共役をとる操作 $\bar{\cdot}$ は M 上の等長写像だから $X^{**} = (\bar{\cdot}, \mathrm{Id})X^*$ より，X^* と X^{**} は congruent である．
さらに，$f^{**} = f^*$ だから，

$$Q(h^{**}) = -(f^{**}_w)^2\,dw^2 = -(f^*_w)^2\,dw^2 = Q(h^*) = Q(h)$$

であり，X^{**} と X はホップ 2 次微分を共有する．
一方で，

$$(g^{**})^2 = -\frac{\bar{h}^*_w}{h^*_w} = \frac{1}{(g^*)^2}$$

であるから，

$$|g^{**}| = |g^*|^{-1} = |g|$$

となる．
以上から，$\omega^* = -\omega$ なら，X^* の代わりに X^{**} を考えることで $\omega^{**} = \omega$ とできる．よって，以下では $\omega^* = \omega$ としてよい．
それでは，まず $M = \mathbb{H}^2$ の場合を考える．
定理 2.9 にて，$H = 1$, $G = \Pi_+^{-1} \circ h$ とおく．$H = 1$ より，式 (2.9) は $\Psi = \bar{h}$ に関する調和関数方程式と一致する．さらに $h_{\bar{w}} = 0$ となる点は，ϕ の零点でもあり，ϕ は正則であるから，$h_{\bar{w}}$ の零点は孤立している．よって，G をガウス写像にもち，計量が $ds^2_{\tilde{X}} = (\sigma\circ h)^2|h_w|^2\,|dw|^2$ になるような CMC 1 はめ込み $\tilde{X}$ が，ある単連結領域 $V \subset \Omega$ 上存在する．
一方で，$\tilde{X}$ の第二基本形式を

$$I\!I = g_{\mathbb{L}^3}(d\tilde{X}, dG)$$

とかく．ここで，$g_{\mathbb{L}^3}$ は $\mathbb{L}^3$ の標準的な計量とした．これに関連して，$\tilde{\phi}(\tilde{X}) := 2g_{\mathbb{L}^3}(\tilde{X}_w, G_w)$ とおく．
すると，$\tilde{\phi}(\tilde{X})$ と h の間には次の関係がある．

定理 2.12 ([AkNi, Theorem 3.4])**.** $\tilde{\phi}(\tilde{X})$ と h は次の関係式を満たす:

$$1 \cdot \bar{h}_w = \bar{h}_{\bar{w}} \frac{\tilde{\phi}(\tilde{X})}{(\sigma\circ h)^2|h_w|^2}.$$

この定理の式を変形すると，

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\tilde{X}) &= (\sigma\circ h)^2|h_w|^2\frac{\bar{h}_w}{\overline{h_{\bar{w}}}}\\ &= (\sigma\circ h)^2 h_w\bar{h}_w = \phi\end{aligned}$$

であり，$Q(h) = \tilde{\phi}(\tilde{X})\,dw^2$ が得られる．

すると，$\tilde{X}$ の第二基本形式は

$$\begin{aligned}I\!I &= \frac{1}{2}\tilde{\phi}(\tilde{X})\,dw^2 + 2H\,ds^2_{\tilde{X}} + \overline{\frac{1}{2}\tilde{\phi}(\tilde{X})\,dw^2}\\ &= \frac{1}{2}\phi\,dw^2 + 2e^{2\omega}|\phi|\,|dw|^2 + \overline{\frac{1}{2}\phi\,dw^2}\end{aligned}$$

と表せる．

以上より，$\tilde{X}$ の第一基本形式と第二基本形式はともに ω と ϕ のみで表せることが分かった．

今，h から $\tilde{X}$ を作ったのと同様に，h^* から $\tilde{X}^*$ を作ることもできる．もともと，$\omega^* = \omega$, $Q(h) = Q(h^*)$ だったから，$\tilde{X}$ と $\tilde{X}^*$ は V 上第一基本形式と第二基本形式を共有するはめ込みである．

すると曲面論の基本定理から $\tilde{X}$ と $\tilde{X}^*$ は $\mathbb{L}^3$ 内で congruent である．すなわち，ある等長変換 $\Gamma = (v, A)$, $A \in O(2,1), v \in \mathbb{L}^3$ が存在して，V 上

$$\tilde{X}^* = \Gamma\circ\tilde{X} = A\tilde{X} + v$$

とかけている．特に，$\tilde{X}^*$ のガウス写像 G^* は，

$$G^* = AG,$$

すなわち，

$$\Pi_+^{-1}\circ h^* = A(\Pi_+^{-1}\circ h)$$

をみたす．ここで，$A\Pi_+^{-1} = \Pi_+^{-1}\circ\gamma$ となるような等長変換 $\gamma\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ を考えると，

$$\gamma = \Pi_+\circ A\circ\Pi_+^{-1}$$

となる．よって，V 上 $h^* = \gamma\circ h$ である．特に h, h^* が満たしている調和関数方程式の形から，h, h^* は Ω 上実解析的であることが分かるので，一致の定理から，Ω 上 $h^* = \gamma\circ h$ となることが分かる．

一方で，$(f^*_w)^2 = -\phi = f_w^2$ だから，

$$\begin{aligned}&f^*_w = \pm f_w,\\ &f^* = \pm f + c \quad (c\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

が分かる．

すると，

$$\begin{aligned}X^* = (h^*, f^*) &= (\gamma\circ h, \pm f + c)\\ &= (\gamma, (c, \pm 1))X\end{aligned}$$

となるが，特に変換 $(\gamma, (c, \pm 1))$ は等長である．よって，X^* と X は congruent である．

次に $\mathbb{S}^2$ の場合を考えよう．

この場合は $\mathbb{H}^2$ と同様にして示される．$\mathbb{H}^2$ の場合では h から $\mathbb{L}^3$ 内の CMC 1 はめ込みをつくったが，$\mathbb{S}^2$ の場合では h から定理 2.10 を用いて $\mathbb{R}^3$ 内の CMC 1 はめ込みをつくることで h^* と h の関係を導けばよい．

最後に $\mathbb{R}^2$ の場合を考える．

$M=\mathbb{R}^2$ の場合，共形極小はめ込みは Weierstrass data を用いた表示が与えられる．X, X^* それぞれの Weierstrass data は (g,η), (g^*,η^*) であったから，

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{2}\left(\overline{\int g^{-1}\eta}-\int g\eta,\,2\mathrm{Re}\int\eta\right),\\ X^*&=\frac{1}{2}\left(\overline{\int (g^*)^{-1}\eta^*}-\int g^*\eta^*,\,2\mathrm{Re}\int\eta^*\right),\end{aligned}$$

と表せる．今，

$$|g^*|=|g|,\quad (f_w^*)^2=f_w^2,$$

が分かっているので，ある $\theta\in\mathbb{R}$ を用いて

$$g^*=e^{i\theta}g,\quad \eta^*=\pm\eta$$

が成り立つことが分かる．これを X^* の表示式に代入して，

$$\begin{aligned}X^*&=\pm\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\left(\overline{\int (g^*)^{-1}\eta^*}-\int g^*\eta^*\right),\,2\mathrm{Re}\int\eta^*\right)\\ &=\pm\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\ \sin\theta&\cos\theta&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}X\end{aligned}$$

を得る．これより，X^* と X は congruent である． □

この証明のアイディアは，調和写像 $h\colon\Omega\to M$ を通して，$M\times\mathbb{R}$ 内の極小曲面と $\mathbb{R}^3,\mathbb{L}^3$ 内の極小曲面の間に関係があることを見出した点にある．つまり，命題 2.7 により調和写像 h から $M\times\mathbb{R}$ 内の極小曲面を構成できる一方で，[Ken]，[AkNi] の定理を用いて h から $\mathbb{R}^3,\mathbb{L}^3$ 内の極小曲面を構成できる，という関係を用いて，$M\times\mathbb{R}$ 内の極小曲面が congruent であるという情報を $\mathbb{R}^3,\mathbb{L}^3$ 内の極小曲面が congruent になることから導いているのである．

2.3 $M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ の場合の共形極小はめ込みの可積分条件

前節では，$M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ の場合の共形極小はめ込みについて，ホップ 2 次微分との関わりを調べた．

本節では，再び $M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$ の場合に，与えられた共形計量と正則 2 次微分をもつ共形極小はめ込みが存在するための条件を与える．このために $M\times\mathbb{R}$ 内の共形極小はめ込みの存在条件を，$\mathbb{R}^3,\mathbb{L}^3$ における曲面論の基本定理に帰着させる．

定理 2.13 ([HST, Theorem 7])**.** $M=\mathbb{R}^2,\mathbb{H}^2,\mathbb{S}^2$，$\Omega\subset\mathbb{C}$ を単連結領域とし，$ds^2=\lambda^2(w)\,|dw|^2$ を Ω 上の共形計量，$Q=\phi(w)\,dw^2$ を Ω 上の正則 2 次微分で，零点の位数は全て偶数位数であるようなものとする．

このとき，以下は同値である．

(1) 共形極小はめ込み $X=(h,f)\colon\Omega\to M\times\mathbb{R}$ で，$Q(h)=Q$, $ds_X^2=ds^2$ を満たすものが存在する．

(2) $\lambda^2 - 4|\phi| \geq 0$ であって，

$$\omega := \log \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2} - \frac{1}{2}\log|\phi|$$

とおくとき，$\phi \neq 0$ なる集合上で

$$\Delta_0 \omega = -2K_M \sinh(2\omega)|\phi|$$

が成り立つ．

Proof. ω を上のように置くとき，ω の極は ϕ の零点と一致する．特に，

$$\begin{aligned} e^{2\omega}|\phi| &= |\phi| \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2|\phi|^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．

それでは，$M = \mathbb{H}^2$ の場合を考える．まずは，下の条件から共形極小はめ込みの存在を示そう．

対称 2 テンソル II を

$$II := \frac{1}{2}\phi\, dw^2 + 2e^{2\omega}|\phi|\,|dw|^2 + \overline{\frac{1}{2}\phi\, dw^2}$$

のように定める．

すると $(e^{2\omega}|\phi|\,|dw|^2, II)$ は $\mathbb{L}^3$ におけるガウス・コダッチ方程式を満たすことが確かめられる．よって $\mathbb{L}^3$ における曲面論の基本定理より，$\mathbb{L}^3$ へのはめ込み $\tilde{X}\colon \Omega \to \mathbb{L}^3$ で，第一基本形式が $ds^2_{\tilde{X}} = e^{2\omega}|\phi|\,|dw|^2$, 第二基本形式が II であるようなものが得られる．特に，$\tilde{X}$ の平均曲率 H は，

$$H = \frac{1}{2}\frac{2e^{2\omega}|\phi|}{e^{2\omega}|\phi|} = 1$$

となるので，$\tilde{X}$ は空間的な CMC 1 はめ込みである．

一方で $\tilde{X}$ のガウス写像 N を考えると，N は $\mathscr{H}_+$ か $\mathscr{H}_-$ のどちらかに値をもつ．以下では，$\tilde{X}$ に $\mathbb{L}^3$ の等長変換を施すことで，$N \in \mathscr{H}_+$ としてよい．すると，$h := \Pi_+ \circ N \colon \Omega \to \mathbb{H}^2$ が定められる．$\tilde{X}$ が存在することから命題 2.8 により，平均曲率 H と $\bar{h}$ は式 (2.9) をみたす．すなわち，

$$H\left(\bar{h}_{w\bar{w}} + \frac{2h}{1-|h|^2}\bar{h}_w \bar{h}_{\bar{w}} \right) = H_w \bar{h}_{\bar{w}}$$

が成り立っている．今，$H = 1$ だから，

$$\bar{h}_{w\bar{w}} + \frac{2h}{1-|h|^2}\bar{h}_w \bar{h}_{\bar{w}} = 0.$$

辺々の複素共役をとることで，

$$h_{w\bar{w}} + \frac{2\bar{h}}{1-|h|^2} h_w h_{\bar{w}} = 0$$

を得る．これは，h が調和写像であることを表す．

また，命題 2.8 から，$\tilde{X}$ の第一基本形式は h を用いて $ds^2_{\tilde{X}} = (\sigma \circ h)^2 |h_w|^2\,|dw|^2$ と表せる．すなわち，

$$e^{2\omega}|\phi| = (\sigma \circ h)^2 |h_w|^2 \tag{2.10}$$

を得る．

ここで，$\tilde{X}$ のホップ 2 次微分の 2 倍は $\phi\, dw^2$ である．一方で定理 2.12 から，

$$\bar{h}_w = \bar{h}_{\bar{w}} \frac{\phi}{e^{2\omega}|\phi|}$$

を得るので，これを式 (2.10) を用いて変形すると，

$$\phi = (\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w$$

となる．特に, $Q(h) = (\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w\, dw^2$ だから，ϕ は $Q(h)$ の係数となっている．以上より，$Q(h) = Q$ が分かった．

すると，命題 2.7 から共形極小はめ込み $X = (h, f)\colon \Omega \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で，第一基本形式が $ds_X^2 = (\sigma \circ h)^2(|h_w| + |\bar{h}_w|)^2\, |dw|^2$ となるものが存在する．

また，$\phi = (\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w$ だから

$$|\phi| = (\sigma \circ h)^2 |h_w||\bar{h}_w|$$
$$(\sigma \circ h)|\bar{h}_w| = \frac{|\phi|}{(\sigma \circ h)|h_w|}$$

が成り立つ．これを用いて $(\sigma \circ h)^2(|h_w| + |\bar{h}_w|)^2$ を変形すると，

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ h)^2(|h_w| + |\bar{h}_w|)^2 \quad &= \left((\sigma \circ h)|h_w| + \frac{|\phi|}{(\sigma \circ h)|h_w|}\right)^2 \\
&= \left(e^{\omega}|\phi|^{\frac{1}{2}} + e^{-\omega}\frac{|\phi|}{|\phi|^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \\
&= (e^{\omega} + e^{-\omega})^2 |\phi| \\
&= \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2|\phi|^{\frac{1}{2}}} + \frac{2|\phi|^{\frac{1}{2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}\right)^2 |\phi| \\
&= \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2|\phi|^{\frac{1}{2}}} + \frac{2|\phi|^{\frac{1}{2}}}{4|\phi|}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|})\right)^2 |\phi| \\
&= \lambda^2
\end{aligned}$$

を得る．すなわち，$ds_X^2 = \lambda^2(w)\, |dw|^2$ となり，求める X が得られた．

反対に，X の存在から下の条件を求めよう．

共形極小はめ込み $X = (h, f)\colon \Omega \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で

$$Q(h) = \phi\, dw^2 = Q, \quad ds_X^2 = \lambda^2(w)\, dw^2$$

となるものが存在するとする．すると，命題 2.6 より，

$$\lambda^2 = 4\cosh^2 \omega_1 |\phi|$$

を満たすような ω_1 が存在する．これにより，$\lambda^2 - 4|\phi| \geq 0$ が分かる．

ここで，$\omega := \log \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2} - \frac{1}{2}\log|\phi|$ とおくと，$2\cosh\omega = \frac{\lambda}{|\phi|^{\frac{1}{2}}}$ だから，$4\cosh^2\omega|\phi| = \lambda^2$ が成り立つ．すなわち，

$$\cosh^2 \omega_1 = \cosh^2 \omega,$$
$$\cosh \omega_1 = \cosh \omega,$$
$$\omega = \pm\omega_1$$

を得る．

一方で，h を用いると

$$|\phi| = (\sigma \circ h)^2 |h_w||\bar{h}_w|, \quad \lambda^2 = (\sigma \circ h)^2 (|h_w| + |\bar{h}_w|)^2$$

と書けるので，

$$4\cosh^2 \omega_1 = \frac{\lambda^2}{|\phi|} = \frac{|h_w|}{|h_{\bar{w}}|} + 2 + \frac{|h_{\bar{w}}|}{|h_w|}$$

となる．ここで，$\omega_2 = \frac{1}{2} \log \frac{|h_w|}{|h_{\bar{w}}|}$ とおけば，

$$4\cosh^2 \omega_1 = e^{2\omega_2} + 2 + e^{-2\omega_2} = 4\cosh^2 \omega_2$$

となるので，$\omega_1 = \pm\omega_2$ となる．

以上より，$\omega = \pm\omega_2$ であるのだが，ω_2 については命題 2.4 と命題 2.6 から，

$$\Delta_0 \omega_2 = 2\sinh(2\omega_2)|\phi|$$

を満たすことが分かっている．この式から，$-\omega_2$ についても

$$\begin{aligned}\Delta_0(-\omega_2) &= -\Delta_0 \omega_2 \\ &= -2\sinh(2\omega_2)|\phi| \\ &= 2\sinh(2(-\omega_2))|\phi|\end{aligned}$$

となるので，結局 ω についても

$$\Delta_0 \omega = 2\sinh(2\omega)|\phi|$$

が成り立つ．

これで $\mathbb{H}^2$ の場合は証明できた．

次に $\mathbb{S}^2$ の場合を考える．

この場合は $\mathbb{H}^2$ の場合と同様である．$\mathbb{L}^3$ でなく，$\mathbb{R}^3$ の場合の曲面論の基本定理を用いて CMC 1 はめ込みをつくり，はめ込みとガウス写像の関係を [Ken] に見出すことで $\mathbb{H}^2$ の場合と同様に証明できる．

最後に $\mathbb{R}^2$ の場合を考えよう．

まず，下の条件から共形極小はめ込みの存在を示そう．$K_M = 0$ であるから，

$$\Delta_0 \omega = 0$$

が成り立つ．すなわち，ω は調和関数である．今，Ω は単連結より，ある正則関数 $\psi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ で，$\mathrm{Re}\,\psi = \omega$ であるようなものが存在する．

さて，

$$\eta := -2i\sqrt{\phi}\,dw, \quad g := e^{\psi}$$

とおくと，g は正則関数であり，仮定より η は正則 1 形式である．すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(|g^{-1}| + |g|)^2 |\eta|^2 &= (e^{\omega} + e^{-\omega})^2 |\phi|\,|dw|^2 \\ &= 4\cosh^2 \omega |\phi|\,|dw|^2 \\ &= \lambda^2(w)\,|dw|^2\end{aligned}$$

となる．$0 < \lambda < +\infty$ だから (g, η) を Weierstrass data としてもつような共形極小はめ込み $X = (h, f)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ が存在する．このとき，

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}\overline{\int_w g^{-1}\eta} - \frac{1}{2}\int_w g\eta, \\
f &= \mathrm{Re}\int_w \eta
\end{aligned}
$$

とかける．すると，

$$
\begin{aligned}
dh &= h_w\,dw + h_{\bar{w}}\,d\bar{w} \\
&= -\frac{1}{2}g\eta + \frac{1}{2}\overline{g^{-1}\eta}
\end{aligned}
$$

より，$h_w\,dw = -\frac{1}{2}g\eta$, $h_{\bar{w}}\,d\bar{w} = \frac{1}{2}\overline{g^{-1}\eta}$ を得る．これより，$\bar{h}_w\,dw = \overline{h_{\bar{w}}\,d\bar{w}} = \frac{1}{2}g^{-1}\eta$ だから，

$$
Q(h) = h_w \bar{h}_w\,dw^2 = -\frac{1}{4}\eta^2 = Q
$$

が分かる．

また，X の第一基本形式は

$$
ds_X^2 = \frac{1}{4}(|g^{-1}| + |g|)^2|\eta|^2 = \lambda^2(w)\,|dw|^2
$$

となっている．よって，この X が求めるものであった．

反対に，共形極小はめ込みの存在から下の条件を導こう．

共形極小はめ込み $X = (h, f)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ で，$Q(h) = Q$, $ds_X^2 = \lambda^2(w)\,|dw|^2$ を満たすものが存在するとする．

X の Weierstrass data を (g, η) とすると，X の第一基本形式は

$$
ds_X^2 = \frac{1}{4}(|g^{-1}| + |g|)^2|\eta|^2 = \lambda^2(w)\,|dw|^2
$$

とかける．ここで，$g = -ie^{\omega_1 + i\psi}$ とおけば，$\eta = -2i\sqrt{\phi}\,dw$ より

$$
\lambda^2 = (e^{\omega_1} + e^{-\omega_1})^2|\phi| = 4\cosh^2\omega_1|\phi|
$$

となる．これより，$\lambda^2 - 4|\phi| \geq 0$ が分かる．

そこで，$\omega := \log\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4|\phi|}}{2} - \frac{1}{2}\log|\phi|$ とおくと，ω は $4\cosh^2\omega|\phi| = \lambda^2$ を満たすので，$\omega = \pm\omega_1$ が得られる．ここで g は有理型関数だから，

$$
\begin{aligned}
\Delta_0\omega_1 &= \Delta_0 \log|g| \\
&= \frac{1}{2}(\Delta_0 g + \Delta_0 \bar{g}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{g_{\bar{w}}}{g}\right)_w + \left(\frac{\bar{g}_w}{\bar{g}}\right)_{\bar{w}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が分かる． $\square$

この定理の証明も，調和写像 $h\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ を介して，$M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面と $\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3$ 内の極小曲面が関係していることを利用している．すなわち，$M \times \mathbb{R}$ 内の極小曲面が存在する条件を，$\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3$ 内の極小曲面の存在条件に帰着することで求めているのである．

2.4 associate 曲面

この節では，$M \times \mathbb{R}$ の内の曲面について associate 曲面とよばれるものを定義する．

$\mathbb{R}^3$ 内のホップ微分 $Q\,dz^2$ をもつ CMC H 曲面 S を考えよう．このとき S と同じ第一基本形式をもち，ホップ微分が

$$Q^{(t)} = e^{it}Q$$

であるような，CMC H 曲面の族 $\{S^{(t)}\}$ が存在することが知られている．このようにして得られた曲面 $S^{(t)}$ を，もとの曲面 S の associate 曲面とよぶ．この $\mathbb{R}^3$ における associate 曲面という概念を，より一般の空間でも定義しようというのが [HST] における主目的の一つである．

さて，それでは定理 2.11 を踏まえて，次のような定義をする．

定義 2.14 ([HST, Definition 8])**.** M をリーマン面とし，$X = (h, f)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ と $X^* = (h^*, f^*)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ をともに共形極小はめ込みとする．

このとき，$\theta \in \mathbb{R}$ について，X と X^* が **θ-associate** であるとは，以下の条件を満たすことと定める．

- X と X^* は互いに等長である．
- $Q(h^*) = e^{i\theta}Q(h)$.

また，$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときは，X と X^* は conjugate であるという．

特に，$M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ のときは，定理 2.11 より，X の θ-associate 曲面 X_θ は等長変換の違いを除いてただ一つに定まることが分かる．また，これらの場合には一意性だけでなく，θ-associate 曲面の存在も分かる．

系 2.15 ([HST, Corollary 10])**.** $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$，$X = (h, f)\colon \Omega \to M \times \mathbb{R}$ を共形極小はめ込みとする．

このとき，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ について，X の θ-associate 曲面が存在する．

Proof. $Q(h) = \phi(w)\,dw^2$, $ds_X^2 = \lambda^2(w)\,|dw|^2$ とおく．これらは，定理 2.13 の下の条件を満たしている．

ここで，ϕ を $e^{i\theta}\phi$ に変えることを考える．この変形によって，正則性や零点の位数などの条件は変化しないうえに，定理 2.13 の (2) は $|\phi|$ のみに依存するので，$(ds_X^2, e^{i\theta}\phi)$ も定理 2.13 の (2) を満たしている．ゆえに，X の θ-associate 曲面が存在する． □

なお，$M = \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^2$ の場合には，X と θ-associate 曲面 X_θ それぞれから $\mathbb{L}^3, \mathbb{R}^3$ への CMC 1 はめ込みを作ることができる．今までの議論からそれらふたつの CMC 1 はめ込みの像も互いに associate 曲面の関係にあることが分かる．

3 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC $\frac{1}{2}$ 曲面と hyperbolic Gauss map

この章では [FeMi] に沿って，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC $\frac{1}{2}$ 曲面を $\mathbb{H}^2$ への調和写像から構成する方法について述べる．

定義 3.3 では，$\mathbb{H}^2$ への調和写像 G について Weierstrass data を定めている．Weierstrass data の存在は，G をガウス写像にもつ $\mathbb{L}^3$ への CMC 1/2 はめ込みの存在を示しており，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面と $\mathbb{L}^3$ 内の CMC 1/2 曲面とを結びつける役割を担う．

また，定義 3.8 では，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の曲面 ψ について hyperbolic Gauss map という写像を定めている．特に ψ が CMC 1/2 曲面の場合には，定理 3.9，定理 3.10 より，ψ の hyperbolic Gauss map は $\mathbb{H}^2$ への調和写像であり，かつ Weierstrass data をもつことが分かる．

このこととは逆に，Weierstrass data をもつ調和写像 G から，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みを構成する方法を与えているのが，主定理 3.18 である．この定理は，調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ が存在するための十分条件は G をガウス写像にもつ CMC 1/2 はめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ が存在することである，という結果を導く．

なお，[FeMi] の結果の一部は，[DFM] にてより一般化された結果として与えられている．また，[DFM] では，調和写像から構成できる $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の曲面の平均曲率 1/2 についての意味付けも行われている．

3.1 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の曲面の moving frame

$\mathbb{R}^4$ の座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) で表す．このとき $\mathbb{L}^4$ を，$\mathbb{R}^4$ に $\langle\cdot,\cdot\rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ という擬計量を与えた擬リーマン多様体とする．また，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^4$ を

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1,\, x_0 > 0\}$$

と定義し，$\mathbb{L}^4$ から定まる誘導計量を入れる．

さて，単連結リーマン面 $(\Sigma, z = u + iv)$ から $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への共形はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ を考える．このとき，h_z, $h_{\bar{z}}$ の零点は孤立しているものとする．また，$\langle d\psi, d\psi\rangle = \lambda\,|dz|^2$, $\lambda > 0$ とおく．

ψ の $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内での単位法ベクトルを η とすると，$\langle \eta, \eta\rangle = 1$ である．ゆえに，$\eta\colon \Sigma \to \mathbb{S}^3_1 \subset \mathbb{L}^4$ であり，これを $\eta = (\hat{N}, u)$ と表すこととする．ただし，$\mathbb{S}^3_1$ はド・ジッター空間

$$\mathbb{S}^3_1 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

である．ここで，u のことを ψ の angle function とよぶ．この η を用いて，ψ のホップ微分 $p\,dz^2$ を $p\,dz^2 := -\langle \psi_z, \eta_z\rangle\,dz^2$ と定め，さらに $A := -uh_z$ と定める．また，$1 = \langle \eta, \eta\rangle = \langle \hat{N}, \hat{N}\rangle + u^2$ であり，しかも $\langle N, \hat{N}\rangle = 0$ であるから，$\langle \hat{N}, \hat{N}\rangle \geq 0$ である．ゆえに，$|u| \leq 1$ が成り立つ．

単位法ベクトル η はその定義から，$\langle d\psi, \eta\rangle = 0$ を満たしている．また，N は $\langle N, N\rangle = -1$ であることから，$T\mathbb{H}^2$ に直交している．加えて N の第 4 座標は 0 であるから，N は $T(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T\mathbb{H}^2 \oplus T\mathbb{R}$ に直交している．ゆえに $\langle N, \eta\rangle = 0$ が成り立つことも分かる．

さて，ψ がはめ込みであることから，$\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ は $\mathbb{L}^4$ の moving frame となっている．この σ について，σ_z, $\sigma_{\bar{z}}$ を求めよう．

補題 3.1 ([FeMi, p.1149, 式 (2.2)])**.** $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ とするとき，σ_z, $\sigma_{\bar{z}}$ は次の式を満たす．

$$\sigma_z = \mathcal{U}\sigma, \quad \sigma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\sigma, \tag{3.1}$$

ただし，

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (\log\lambda)_z & 0 & p & -h_z^2 \\ 0 & 0 & H\lambda/2 & (\lambda - 2|h_z^2|)/2 \\ -H & -2p/\lambda & 0 & A \\ 1 - 2|h_z^2|/\lambda & -2h_z^2/\lambda & A & 0 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H\lambda/2 & (\lambda - 2|h_z|^2)/2 \\ 0 & (\log\lambda)_{\bar{z}} & \bar{p} & -h_{\bar{z}}^2 \\ -2\bar{p}/\lambda & -H & 0 & \bar{A} \\ -2h_{\bar{z}}^2/\lambda & 1 - 2|h_z|^2/\lambda & \bar{A} & 0 \end{pmatrix}$$

である．

Proof. ψ_{zz} について考えてみる．σ は moving frame だから $\psi_{zz} = a\psi_z + b\psi_{\bar{z}} + c\eta + dN$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とかける．$\langle \psi_z, \psi_z \rangle = 0$ の両辺を z で偏微分すると，

$$2\langle \psi_{zz}, \psi_z \rangle = 2b\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = b\lambda = 0$$

を得る．$\lambda > 0$ より，$b = 0$.

次に，$\langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle = \lambda/2$ の両辺を z で偏微分して，

$$\langle \psi_{zz}, \psi_{\bar{z}} \rangle + \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z \rangle = a\frac{\lambda}{2} + \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z \rangle = \frac{\lambda_z}{2}.$$

ここで，

$$2\langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z \rangle = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\langle \psi_z, \psi_z \rangle = 0$$

であるから，$a = \lambda_z/\lambda = (\log\lambda)_z$ を得る．

次に，$\langle \psi_z, \eta \rangle = 0$ の両辺を z で偏微分することで，

$$\begin{gathered} \langle \psi_{zz}, \eta \rangle + \langle \psi_z, \eta_z \rangle = 0, \\ c = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle = -\langle \psi_z, \eta_z \rangle = p \end{gathered}$$

となるので，$c = p$ となる．

最後に，N は $\langle N, N \rangle = -1$ を満たすので，$\langle N, N_z \rangle = 0$ である．すると，

$$\langle \psi_z, N \rangle = \langle N_z, N \rangle = 0$$

であるから，両辺を z で偏微分して，

$$\begin{gathered} \langle \psi_{zz}, N \rangle + \langle \psi_z, N_z \rangle = 0, \\ -d = \langle \psi_{zz}, N \rangle = -\langle \psi_z, N_z \rangle. \end{gathered}$$

ここで，
$$0 = \langle \psi_z, \psi_z \rangle = \langle \psi_z, N_z \rangle + h_z^2$$
であるから，$d = -h_z^2$ を得る．

ψ_{zz} の場合と同様に他の場合も計算していくと，(3.1) を得る． □

式 (3.1) の第 4 座標のみ取り出した式は
$$\begin{aligned}(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)_z^\top &= \mathcal{U}(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)^\top,\\ (h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)_{\bar{z}}^\top &= \mathcal{V}(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)^\top\end{aligned}$$
である．これを整理すると，次を得る．
$$h_{zz} = (\log\lambda)_z h_z + pu, \tag{C.1}$$
$$h_{z\bar{z}} = \frac{H\lambda u}{2}, \tag{C.2}$$
$$u_z = -Hh_z - \frac{2p}{\lambda} h_{\bar{z}}, \tag{C.3}$$
$$1 - u^2 = \frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \tag{C.4}$$
式 (3.1) の可積分条件を考えると，それは
$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0$$
で与えられる ([UmYa, 定理 B-9.4] 参照)．これをすべての成分にわたって計算すると，自明に 0 になってしまう成分などもあるため，可積分条件は $(1,1)$ 成分，$(1,3)$ 成分，$(1,4)$ 成分，$(3,4)$ 成分から得られる以下の 4 つの関係式に書き換えられる．
$$\lambda(\log\lambda)_{z\bar{z}} = 2\left(|p|^2 - \lambda^2 \frac{H^2-1}{4} - \lambda|h_z|^2\right), \tag{I.1}$$
$$2p_{\bar{z}} = \lambda(H_z + A), \tag{I.2}$$
$$-(h_z^2)_{\bar{z}} + (|h_z|^2)_z = \frac{AH\lambda}{2} - \bar{A}p + \frac{\lambda_z|h_z|^2}{\lambda}, \tag{I.3}$$
$$A_{\bar{z}} - \bar{A}_z = \frac{4i}{\lambda}\mathrm{Im}\,(\bar{p}h_z^2). \tag{I.4}$$
これらが可積分条件であるが，実は次が成り立つ．

命題 3.2 ([FeMi, Proppositin 1])**.** Σ を単連結リーマン面とする．このとき，(3.1) の解 $\sigma\colon \Sigma \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4$ が存在する必要十分条件は，$\lambda, u, h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $H\colon \Sigma \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ と $p\colon \Sigma \to \mathbb{C}$ が条件 (C.1) から (C.4) と，$Q := 2Hp + h_z^2$ についての式
$$Q_{\bar{z}} = 2H_{\bar{z}}p + \lambda H H_z \tag{C.5}$$
を満たすことである．

Proof. 可積分条件 (I.1) から (I.4) が，(C.1) から (C.4) を使って書けることをみていこう．

(I.4) について：

$$
\begin{aligned}
\text{(I.4) の左辺} =& A_{\bar z} - \bar A_z \\
=& -(uh_z)_{\bar z} + (uh_{\bar z})_z \\
=& -u_{\bar z}h_z - uh_{z\bar z} + u_z h_{\bar z} + uh_{z\bar z} \\
=& -u_{\bar z}h_z + u_z h_{\bar z} \\
=& \left(Hh_{\bar z} + \frac{2\bar p}{\lambda}h_z\right)h_z - \left(Hh_z + \frac{2p}{\lambda}h_{\bar z}\right)h_{\bar z} \qquad \text{(C.3) より} \\
=& \frac{2}{\lambda}(\bar p h_z^2 - p h_{\bar z}^2) \\
=& \frac{4i}{\lambda}\mathrm{Im}\,(\bar p h_z^2) = \text{(I.4) の右辺}.
\end{aligned}
$$

よって，(C.3) が成り立てば，(I.4) が成り立つ．

(I.3) について:

$$
\begin{aligned}
\text{(I.3) の左辺} =& -(h_z^2)_{\bar z} + (|h_z|^2)_z \\
=& -2h_z h_{z\bar z} + h_{zz}h_{\bar z} + h_z h_{z\bar z} \\
=& -h_z h_{z\bar z} + h_{zz}h_{\bar z} \\
=& -\frac{H\lambda u}{2}h_z + \frac{\lambda_z}{\lambda}h_z h_{\bar z} + puh_{\bar z} \qquad \text{(C.1)，(C.2) より} \\
=& \frac{AH\lambda}{2} - \bar A p + \frac{\lambda_z |h_z|^2}{\lambda} = \text{(I.3) の右辺}.
\end{aligned}
$$

よって，(C.1)，(C.2) が成り立てば，(I.3) が成り立つ．

(I.1) について:

$$
\text{(I.1) の左辺} = \lambda(\log\lambda)_{z\bar z} = \lambda_{z\bar z} - \frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda}.
$$

(C.1) の両辺を $\bar z$ 偏微分すると，

$$
\begin{aligned}
h_{zz\bar z} =& \left(\frac{\lambda_z}{\lambda}h_z\right)_{\bar z} + (pu)_{\bar z} \\
=& \frac{h_z}{\lambda}\lambda_{z\bar z} - \frac{h_z}{\lambda}\frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda} + \frac{\lambda_z}{\lambda}h_{z\bar z} + p_{\bar z}u + pu_{\bar z} \\
=& \frac{h_z}{\lambda}\left(\lambda_{z\bar z} - \frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda}\right) + \frac{H\lambda_z u}{2} + \frac{\lambda}{2}(H_z + A)u - pHh_{\bar z} - \frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \qquad \text{(I.2)，(C.2)，(C.3) より}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方で，

$$
\begin{aligned}
h_{zz\bar z} =& (h_{z\bar z})_z \\
=& \left(\frac{H\lambda u}{2}\right)_z \qquad \text{(C.2) より} \\
=& \frac{H_z\lambda u}{2} + \frac{H\lambda_z u}{2} + \frac{H\lambda u_z}{2} \\
=& \frac{H_z\lambda u}{2} + \frac{H\lambda_z u}{2} - \frac{H^2\lambda}{2}h_z - pHh_{\bar z} \qquad \text{(C.3) より}
\end{aligned}
$$

であるので，辺々を比較して整理すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{h_z}{\lambda}\left(\lambda_{z\bar{z}}-\frac{\lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\right) &= -\frac{H^2\lambda}{2}h_z-\frac{\lambda A u}{2}+\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \\
&= -\frac{H^2\lambda}{2}h_z+\frac{\lambda h_z}{2}u^2+\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \\
&= -\frac{H^2\lambda}{2}h_z+\frac{\lambda h_z}{2}(1-\frac{4|h_z|^2}{\lambda})+\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z. \qquad \text{(C.4) より}
\end{aligned}
$$

すると，$h_z \neq 0$ なる集合上で，

$$
\begin{aligned}
\lambda_{z\bar{z}}-\frac{\lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} &= -\frac{H^2\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}-2\lambda|h_z|^2+2|p|^2 \\
&=2\left(|p|^2-\lambda^2\frac{H^2-1}{4}-\lambda|h_z|^2\right)=\text{(I.1) の右辺}.
\end{aligned}
$$

連続性から $h_z=0$ なる点でもこの式は成り立つ．

よって，(I.2) と (C.1) から (C.4) が成り立つならば，(I.1) は成り立つ．

(I.2) について: (I.2) は (C.2) を用いることで，(C.5) に書き換えられる．

$Q=2Hp+h_z^2$ であるから，

$$
\begin{aligned}
Q_{\bar{z}} &=2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}+2h_zh_{z\bar{z}} \qquad \text{(I.2)，(C.2) より} \\
&=2H_{\bar{z}}p+\lambda H(H_z+A)+\lambda H u h_z \\
&=2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z+\lambda HA-\lambda HA.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
Q_{\bar{z}}=2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z
$$

となる．

一方で，(C.5) が成り立つとすれば，

$$
\begin{aligned}
Q_{\bar{z}} &=2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}+2h_zh_{z\bar{z}} \qquad \text{(C.2) より} \\
&=2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}-\lambda HA.
\end{aligned}
$$

これと $Q_{\bar{z}}=2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z$ を比較して，

$$
\begin{aligned}
2Hp_{\bar{z}} &=\lambda HH_z+\lambda HA=H\lambda(H_z+A) \qquad H\neq 0 \text{ なるとき} \\
2p_{\bar{z}} &=\lambda(H_z+A)
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち，(C.2) と $H\neq 0$ が成り立っていれば，(I.2) と (C.5) は同値であることが分かった． □

特に，H が定数である場合には，(C.5) から Q は正則関数となる．この場合，正則 2 次微分 $Q\,dz^2$ を **Abresch-Rosenberg differential** とよぶ．

3.2 調和写像の Weierstarass data

この節では，$\mathbb{H}^2$ への調和写像 $G\colon \Sigma\to\mathbb{H}^2$ について Weierstrass data とよばれる二つの関数の組を導入し，調和写像の満たす性質を調べる．ただし Σ は $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．

まず調和写像 G について，$Q_0\,dz^2 := \langle G_z, G_z\rangle\,dz^2$ と定める．すると G が調和であることから，

$$(Q_0)_{\bar z} = 2\langle G_{z\bar z}, G_z\rangle = 0$$

が成り立ち，Q_0 は正則であることが分かる．この正則 2 次微分 $Q_0\,dz^2$ は調和写像 G の**ホップ微分**とよばれる．この Q_0 を用いると

$$\langle dG, dG\rangle = Q_0\,dz^2 + \mu\,|dz|^2 + \overline{Q_0\,dz^2}$$

とかける．ただし，μ は $\mu\colon \Sigma \to [0,\infty)$ なる関数である．このとき，G の特異点，すなわち $\langle dG, dG\rangle$ が退化してしまう点は $\mu^2 - 4|Q_0|^2 = 0$ で与えられる．

さて，空間的な共形はめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ で G を単位法ベクトルにもつものが存在するとしよう．なお，Σ から $\mathbb{L}^3$ への曲面 f の単位法ベクトル n は，

$$\det(f_u, f_v, n) > 0$$

を満たすものをとることとする．さて，f の平均曲率を H とすると，よく知られているように G が調和写像であることは，H が定数であることと同値である．そこで，特に $H = 1/2$ である場合を考える．また，$\tau_0\colon \Sigma \to (0,\infty)$ を用いて f の第一基本形式 $I = \langle df, df\rangle$ を $I = \tau_0\,|dz|^2$ とおく．このとき，I のみから定まる量であるガウス曲率 K は，I が共形であることにより，$K = -2(\log\tau_0)_{z\bar z}/\tau_0$ と表せる．

さて，第一基本形式 I, 第二基本形式 $I\!I = -\langle df, dG\rangle$, 第三基本形式 $I\!I\!I = \langle dG, dG\rangle$ の間の関係式

$$I\!I\!I = 2H\,I\!I - \det(I^{-1}I\!I)\,I = I\!I - \det(I^{-1}I\!I)\,I \tag{3.2}$$

の辺々の dz^2 部分を考えると，

$$I\!I\!I^{(2,0)} = I\!I^{(2,0)}$$

となるので，G のホップ微分と f のホップ微分は一致する．すると，

$$I\!I = Q_0\,dz^2 + H\,I + \overline{Q_0\,dz^2} = Q_0\,dz^2 + \frac{\tau_0}{2}\,|dz|^2 + \overline{Q_0\,dz^2}$$

であることが分かる．

ここで，f についてのガウス方程式を考えると，$\mathbb{L}^3$ は平坦であることから，$K = -\det(I^{-1}I\!I)$ となる．今，

$$\begin{aligned} K &= -\frac{2}{\tau_0}(\log\tau_0)_{z\bar z}, \\ \det(I^{-1}I\!I) &= \frac{1}{\tau_0^2}\left(\frac{\tau_0^2}{2} - 4|Q_0|^2\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0^2} \end{aligned}$$

であるから，f についてのガウス方程式は，

$$(\log\tau_0)_{z\bar z} = \frac{\tau_0}{8} - \frac{2|Q_0|^2}{\tau_0} \tag{3.3}$$

となる．さらに，式 (3.2) の $|dz|^2$ 部分を考えると，

$$\begin{aligned} \mu\,|dz|^2 &= I\!I\!I^{(1,1)} \\ &= I\!I^{(1,1)} - \det(I^{-1}I\!I)\,I \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0^2}\right)\tau_0\,|dz|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0^2}\right)\tau_0\,|dz|^2. \end{aligned}$$

即ち，

$$\mu = \frac{\tau_0}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{\tau_0} \tag{3.4}$$

である．

これをもとにして，次のように Weierstrass data を定めよう．

定義 3.3 ([FeMi, Definition 3])**.** $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は調和写像で，

$$\langle dG, dG\rangle = Q_0\,dz^2 + \mu\,|dz|^2 + \overline{Q_0\,dz^2}$$

とかけるとする．G が Weierstrass data を許容するとは，この Q_0 と μ について式 (3.4) を満たすような正値関数 $\tau_0\colon \Sigma \to (0,\infty)$ が存在することと定める．また，そのような τ_0 が存在するとき，組 $\{Q_0, \tau_0\}$ のことを G の Weierstrass data とよぶ．

特に，ある空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ で G を単位法ベクトルにもつものが存在する場合には，$\langle df, df\rangle = \tau_0\,|dz|^2$ によって与えられる正値関数 τ_0 が式 (3.4) を満たすので，G は必ず Weierstrass data を許容する．

ここで，G が Weierstrass data $\{Q_0, \tau_0\}$ をもつとしよう．実は $\tau^{\#} = 16|Q_0|^2/\tau_0$ とおくと，これも式 (3.4) を満たすことが簡単に確かめられる．つまり，Σ 上 $Q_0 \neq 0$ であれば，G は Weierstrass data を二つもつ．また，方程式

$$\mu = \frac{x}{4} + \frac{4|Q_0|^2}{x}$$

は x の 2 次方程式に帰着するので，その解は高々二つである．よって，G の Weierstrass data は高々二つである．

式 (3.3) は，G を単位法ベクトルにもつ $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ の存在を仮定していたが，実はこれを仮定しなくても式 (3.3) は成り立つことが次の補題によって分かる．

補題 3.4 ([FeMi, Lemma 4])**.** 調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ が Weierstrass data $\{Q_0, \tau_0\}$ をもつとする．このとき，Q_0 と τ_0 は式 (3.3) を満たす．

Proof. まず，G が共形，すなわち $Q_0 = 0$ で，かつ特異点をもたない場合を考える．この場合，式 (3.4) より $\tau_0 = 4\mu$ である．

今，$G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$ とみると，G の単位法ベクトルは G 自身である．すると，G についての第一基本形式 I は，

$$I = \langle dG, dG\rangle = \frac{\tau_0}{4}\,|dz|^2$$

となる．さらに，第二基本形式 $I\!I$ は，

$$I\!I = -\langle dG, dG\rangle = -I$$

となる．ここで，G についてのガウス方程式を考えよう．I のみから定まる G のガウス曲率を K とする．$\mathbb{L}^3$ は平坦だから，G についてのガウス方程式は $K = -\det(I^{-1}I\!I)$ となる．今，

$$K = -\frac{8}{\tau_0}\left(\log\frac{\tau_0}{4}\right)_{z\bar{z}} = -\frac{8}{\tau_0}\,(\log\tau_0)_{z\bar{z}}\,,$$
$$\det(I^{-1}I\!I) = \det(-\mathbb{1}) = 1$$

であるから，$K = -\det(I^{-1}I\!I)$ は

$$(\log \tau_0)_{z\bar{z}} = \frac{\tau_0}{8}$$

となる．これは $Q_0 = 0$ のときの，式 (3.3) に他ならない．

次に，G が共形で特異点をもつ場合を考えよう．$z_0 \in \Sigma$ が G の特異点だとすると，z_0 で

$$\tau_0 = 4\mu = 8\langle G_z, G_{\bar{z}}\rangle = 0$$

となり，これは $\{Q_0, \tau_0\}$ が Weierstrass data であることに矛盾する．よって，G が共形で特異点をもつ場合は考えなくてよい．

最後に，G が共形ではない，すなわち $Q_0 \neq 0$ なる点がある場合を考えよう．G が調和であることから，Q_0 は正則である．よって，Q_0 の零点は孤立している．そこで $Z \subset \Sigma$ を Q_0 の零点の集合とする．$z_0 \in \Sigma \setminus Z$ をとると，その単連結な近傍上で G が至る所正則でない．するとその近傍上で，定理 2.9 により G はある $\mathbb{L}^3$ への空間的な共形 CMC 1/2 はめ込み f のガウス写像となる．$\langle df, df\rangle = \tau\,|dz|^2$ とおくと，前述のように Q_0 と τ は式 (3.3) を満たす．ここで，τ は τ_0 と $\tau^{\#}$ のどちらかである．$\tau = \tau_0$ であれば，証明は終了する．$\tau = \tau^{\#}$ であっても，τ_0 について式 (3.3) が成り立つことを確認しよう．

$$\begin{aligned}
(\log \tau^{\#})_{z\bar{z}} =& \left(\log \frac{16|Q_0|^2}{\tau_0}\right)_{z\bar{z}} \\
=& (\log Q_0 + \log \overline{Q_0})_{z\bar{z}} - (\log \tau_0)_{z\bar{z}} \\
=& \left(\frac{(Q_0)_{\bar{z}}}{Q_0}\right)_z + \left(\frac{(\overline{Q_0})_z}{Q_0}\right)_{\bar{z}} - (\log \tau_0)_{z\bar{z}} \qquad Q_0 \text{ は正則だから} \\
=& -(\log \tau_0)_{z\bar{z}}
\end{aligned}$$

となる．一方で，

$$\frac{\tau^{\#}}{8} - \frac{2|Q_0|^2}{\tau^{\#}} = -\frac{\tau_0}{8} + \frac{2|Q_0|^2}{\tau_0}$$

となるので，結局 $\tau^{\#}$ に関する式 (3.3) は τ_0 に関する式 (3.3) に帰着する． □

以下では，共形でない調和写像 G が Weierstrass data をもつならば，G をガウス写像にもつ $\mathbb{L}^3$ への CMC 1/2 はめ込みが存在することを示そう．

命題 3.5. 調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ が Weierstrass data $\{Q_0, \tau_0\}$ をもつとする．また，G は共形でないとする．このとき Q_0 の零点は孤立している．さらに，G の正則点，すなわち特異点でない点 $z_0 \in \Sigma$ が存在するとする．このとき，G をガウス写像にもつ $\mathbb{L}^3$ への特異点付き CMC 1/2 はめ込みが存在する．

Proof. 補題 3.4 から，調和写像 G の Weierstrass data $\{Q_0, \tau_0\}$ を用いて

$$\begin{aligned}
I =& \tau_0\,|dz|^2, \\
I\!I =& Q_0\,dz^2 + \frac{\tau_0}{2}\,|dz|^2 + \overline{Q_0\,dz^2}
\end{aligned}$$

と定めれば，これらは $\mathbb{L}^3$ のガウス·コダッチ方程式を満たすことが分かる．ゆえに，あるはめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ で，上の $I, I\!I$ をそれぞれ第一基本形式，第二基本形式としてもつようなものが存在する．

f の単位法ベクトルを n とすると，

$$\begin{aligned} I\!I\!I =& \langle dn, dn\rangle \\ =& I\!I - (\det I^{-1} I\!I)\, I \\ =& Q_0\, dz^2 + \mu\, |dz|^2 + \overline{Q_0\, dz^2} \\ =& \langle dG, dG\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ．また $I\!I = Q_0\, dz^2 + H\, I + \overline{Q_0\, dz^2}$ と比較することで，f は CMC 1/2 はめ込みであることも分かる．これにより，特に n は調和写像である．

$G, n\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ とみたときに，G と n は第一基本形式を共有しているが，これらの向きが一致しているとは限らない．ゆえに n と向きの異なる単位法ベクトルをもつ写像を導入したい．

そこで，$\tilde{f} = f + 2n\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ と定める．$\langle n, n\rangle = -1$ より

$$\langle df + 2\, dn, n\rangle = \langle df, n\rangle = 0$$

が成り立つ．ゆえに，$\tilde{f}$ の単位法ベクトルは $n, -n$ のどちらかである．ここで，f_u, f_v, n は $\mathbb{L}^3$ を張るので，これらを用いて n_u, n_v を表示すると

$$\begin{aligned} n_u &= -\frac{\frac{\tau_0}{2} + Q_0 + \bar{Q}_0}{\tau_0} f_u - \frac{i(Q_0 - \bar{Q}_0)}{\tau_0} f_v, \\ n_v &= -\frac{i(Q_0 - \bar{Q}_0)}{\tau_0} f_u - \frac{\frac{\tau_0}{2} - Q_0 - \bar{Q}_0}{\tau_0} f_v \end{aligned}$$

となる．すると，$Q_0 \neq 0$ なる点で，

$$\begin{aligned} \det(f_u + 2n_u, f_v + 2n_v, n) =& \det(f_u, f_v, n) + 2\det(n_u, f_v, n) + 2\det(f_u, n_v, n) + 4\det(n_u, n_v, v) \\ =& \det(f_u, f_v, n) - \frac{\tau_0 + 2Q_0 + 2\bar{Q}_0}{\tau_0} \det(f_u, f_v, n) - \frac{\tau_0 - 2Q_0 - 2\bar{Q}_0}{\tau_0} \det(f_u, f_v, n) \\ &+4\left(\left(-\frac{\frac{\tau_0}{2} + Q_0 + \bar{Q}_0}{\tau_0}\right)\left(-\frac{\frac{\tau_0}{2} - Q_0 - \bar{Q}_0}{\tau_0}\right) - \left(-\frac{i(Q_0 - \bar{Q}_0)}{\tau_0}\right)^2\right) \det(f_u, f_v, n) \\ =& -\det(f_u, f_v, n) + \frac{\tau_0^2 - 16|Q_0|^2}{\tau_0^2} \det(f_u, f_v, n) \\ =& -\frac{16|Q_0|^2}{\tau_0^2} \det(f_u, f_v, n) < 0 \end{aligned}$$

であるから，$\tilde{f}$ の単位法ベクトルは $-n$ である．$\tilde{f}$ の第一基本形式 $\tilde{I}$，第二基本形式 $\tilde{I\!I}$ と第三基本形式 $\tilde{I\!I\!I}$

は，

$$\begin{aligned}
\tilde{I} =&\langle df + 2\,dn, df + 2\,dn\rangle \\
=&I - 4\,\mathit{II} + 4\,\mathit{III} \\
=&\frac{16|Q_0|^2}{\tau_0}\,|dz|^2, \\
\tilde{\mathit{II}} =&-\langle df + 2\,dn, -\,dn\rangle \\
=&-\,\mathit{II} + 2\,\mathit{III} \\
=&Q_0\,dz^2 + \frac{8|Q_0|^2}{\tau_0}\,|dz|^2 + \overline{Q_0\,dz^2}, \\
\tilde{\mathit{III}} =&\langle -\,dn, -\,dn\rangle \\
=&\mathit{III} \\
=&\langle dG, dG\rangle
\end{aligned}$$

となるので，$Q_0 \neq 0$ における $\tilde{f}$ の平均曲率も $1/2$ で一定である．

さて，$G, n, -n\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$ とみると，これらは第一基本形式を共有している．ゆえに $z_0 \in \Sigma$ を G の正則点とすると，z_0 の近傍上で $G, n, -n$ は特異点をもたない曲面を定める．ここで G と n の曲面の向きが異なるとすると，G と $-n$ の曲面の向きは一致する．よってこの場合には，f と $\tilde{f}$ を取り替えることによって，以下では G と n の曲面の向きが一致するとしてよい．すると，G, n は第二基本形式も共有する．すると曲面論の基本定理により，z_0 の近傍上では，ある向きを保つ変換 $A \in O(2,1)$ を用いて，$G = An$ と表せる．一方で，調和写像は解析的であるから，一致の定理により Σ 全体で $G = An$ が成り立つ．すると，G は特異点付き CMC $1/2$ はめ込み $Af\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ のガウス写像となっていることが分かる． □

最後に，もう一つ調和写像についての性質を示しておこう．

補題 3.6 ([FeMi, Lemma 6])**.** 二つの調和写像 $G, \tilde{G}\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ が，

$$\langle dG, dG\rangle = \langle d\tilde{G}, d\tilde{G}\rangle$$

を満たすとする．さらに，$z_0 \in \Sigma$ を G の正則点とし，この点で $G(z_0) = \tilde{G}(z_0)$, $G_z(z_0) = \tilde{G}_z(z_0)$ が成り立つとする．このとき，$G = \tilde{G}$ が成り立つ．

Proof. $G, \tilde{G}\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$ とみると，仮定より G の第一基本形式と $\tilde{G}$ の第一基本形式は一致する．すると，z_0 の近傍上で G と $\tilde{G}$ は特異点をもたない曲面を定める．また，$G_z(z_0) = \tilde{G}_z(z_0)$ という条件から，曲面 G と $\tilde{G}$ の向きは一致している．よって，曲面 G と $\tilde{G}$ の単位法ベクトルは同じ向きを向いているので，G の第二基本形式と $\tilde{G}$ の第二基本形式は一致する．すると，曲面論の基本定理から，ある $A \in O(2,1)$ について，$\tilde{G} = AG$ が成り立っている．ここで，$G(z_0) = \tilde{G}(z_0)$, $G_z(z_0) = \tilde{G}_z(z_0)$ から，A は frame $\{G(z_0), G_z(z_0), G_{\bar{z}}(z_0)\}$ を変えないことが分かる．これは，$A = \mathbb{1}$ であることを意味する．よって，z_0 の近傍上で $G = \tilde{G}$ が成り立つ．一方で，調和写像は解析的であるから，一致の定理より Σ 全体で $G = \tilde{G}$ が成り立つ． □

3.3 hyperbolic Gauss map と調和写像

はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で，$N\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$ が沈め込み，すなわち N の微分 dN が各点で線型同型となるようなものを考える．この節では，はめ込み ψ について hyperbolic Gauss map とよばれる

写像を定義し，特別な場合にはそれが調和となることを示す．

補題 3.7 ([FeMi, p.1154])**.** N が沈め込みである場合，$u \neq 0$ である．

Proof. $u=0$ なる点が存在したとしよう．$\langle d\psi, \eta\rangle = 0 = \langle N, \eta\rangle$ より，

$$\begin{aligned} \langle N_z, \hat{N}\rangle =& \langle N_{\bar{z}}, \hat{N}\rangle = 0, \\ \langle N, \hat{N}\rangle =& 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

である．dN は線型同型より，N_u と N_v は一次独立だから $\{N, N_u, N_v\}$ は $\mathbb{L}^3$ を張る．すると，式 (4.2) より $\hat{N}=0$ が分かる．すると，$u=0$ なる点で，$\eta=(0,0)$ となり η が単位法ベクトルであることに矛盾する．ゆえに，N が沈め込みであるときには，$u \neq 0$ である． □

以上のことから，u の正負と曲面の向きを対応づけられる．以降は $u>0$ となる向きを標準的な向きとしよう．

さて，

$$\xi = \frac{1}{u}(\eta + N) \colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$$

と定めると，ξ は

$$\mathbb{N}^3 := \{x \in \mathbb{L}^4 | \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\}$$

に値をもつことが分かる．これを示そう．まず，ξ が光円錐に入るのは

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi\rangle =& \frac{1}{u^2}(\langle \eta, \eta\rangle + 2\langle \eta, N\rangle + \langle N, N\rangle) \\ =& \frac{1}{u^2}(1-1) = 0 \end{aligned}$$

となるからである．次に ξ の第 1 座標が正であることを示そう．まず $O(1,3) \subset \mathbf{GL}_4$ を，$\mathbb{L}^4$ の擬計量を保つ行列の集合としよう．さらに $O_+(1,3) \subset O(1,3)$ を特に

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\}$$

を保つような行列の集合とする．$O_+(1,3)$ の行列は $\mathbb{H}^3$ だけでなく，$\mathbb{N}^3$ も保つ．

ここで $N \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ の第 1 座標は正だから，ある $A \in O_+(1,3)$ で，$A(1,0,0,0)^\top = N$ となるものが存在する．すると $Ax = \xi$ となるような，$x \in \mathbb{L}^4$ がとれる．このとき，

$$-\frac{1}{u} = \langle \xi, N\rangle = \langle (1,0,0,0)^\top, x\rangle = -x_0$$

となり，x の第 1 座標 $x_0 > 0$ が分かる．ゆえに，$\xi \in \mathbb{N}^3$ が得られる．

特に，ξ の第 4 成分は 1 であるから，ある写像 $G \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$ を用いて，$\xi = (G, 1)$ とも表せる．

定義 3.8 ([FeMi, Definition 7])**.** $G \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を $\psi \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の hyperbolic Gauss map とよぶ．

ψ の hyperbolic Gauss map の正則点の集合が Σ の稠密開部分集合で，ψ の平均曲率 H が $1/2$ の場合には G が調和写像となることが示せる．

定理 3.9 ([FeMi, Theorem 8])**.** CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h) \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．このとき，ψ の hyperbolic Gauss map $G \colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は，その正則点の集合が Σ の稠密開部分集合のとき，調和写像となる．

Proof. まず，$\langle G_z, G_z\rangle$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\langle G_z, G_z\rangle =& \langle \xi_z, \xi_z\rangle \\
=& \langle \xi_z, \frac{1}{u}(\eta_z + N_z) + \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi\rangle \\
=& \langle \xi_z, \frac{1}{u}(\eta_z + N_z)\rangle \\
=& \langle \frac{1}{u}(\eta_z + N_z) + \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi, \xi_z - \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi\rangle \\
=& \langle \frac{1}{u}(\eta_z + N_z), \frac{1}{u}(\eta_z + N_z)\rangle \\
=& \frac{1}{u^2}(\langle \eta_z, \eta_z\rangle + \langle N_z, N_z\rangle + 2\langle \eta_z, N_z\rangle)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，式 (3.1) により，η_z, N_z が計算できる．すると，

$$
\begin{aligned}
\langle \eta_z, \eta_z\rangle =& \langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN, -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN\rangle \\
=& 2Hp - A^2, \\
\langle N_z, N_z\rangle =& \langle \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta, \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta\rangle \\
=& -2h_z^2\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) + A^2, \\
2\langle \eta_z, N_z\rangle =& 2\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN, \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta\rangle \\
=& 2Hh_z^2 - 2p\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

となる．これらから，

$$
\begin{aligned}
Q_0 = \langle G_z, G_z\rangle =& \frac{1}{u^2}\left(2Hp - 2h_z^2\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) + 2Hh_z^2 - 2p\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\right) \\
=& \frac{1}{u^2}(p + h_z^2)\left(2H - 2 + \frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right) \\
=& \frac{1}{u^2}(p + h_z^2)(2H - 1 - u^2) \qquad \text{式 (C.4) より} \\
=& -(p + h_z^2) \qquad H = \frac{1}{2} \text{ より} \\
=& -Q.
\end{aligned}
$$

ただし，Q は ψ の Abresch-Rosenberg differential である．Q は正則であったので，

$$\langle G_{z\bar{z}}, G_z\rangle = 0.$$

これは，G の正則点において，$G_{z\bar{z}}$ が $\mathbb{H}^2$ に接する成分をもたないことを表す．ここで，仮定より G の正則点の集合は Σ の稠密開部分集合だから，$G_{z\bar{z}}$ の連続性より，Σ 全体で $G_{z\bar{z}}$ は $\mathbb{H}^2$ に接する成分をもたない．ゆえに G は調和写像となる． $\square$

ξ を介することで CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の hyerbolic Gauss map は必ず Weierstrass data をもつことが分かる．

定理 3.10 ([FeMi, Theorem 9])**.** CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．ψ の hyperbolic Gauss map $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ はその正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．このとき，調和写像 G は Weierstrass data $\{-Q, \lambda u^2\}$ をもつ．

Proof.

$$\mu = 2\langle G_z, G_{\bar{z}}\rangle = 2\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}}\rangle.$$

これを，定理 3.9 の証明と同様にして計算すると，

$$\mu = \frac{\lambda u^2}{4} + \frac{4|Q|^2}{\lambda u^2}$$

が分かる．特に $\lambda u^2 > 0$ であるから，$\{-Q, \lambda u^2\}$ は G の Weierstrass data となる． $\square$

G が ψ の hyperbolic Gauss map であるときには，Weierstrass data $\{-Q, \lambda u^2\}$ をもつことが分かった．ここで，$2\tau = \lambda u^2$ とおく．すると式 (C.4) とあわせることで，

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\tau + 4|h_z|^2, \\ u &= \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}}, \end{aligned}$$

が成り立つ．

以下では G の Weierstrass data Q, τ を用いて，(C.1) と (C.2) を書き換えてみよう．

補題 3.11 ([FeMi, p.1157])**.** $h_{zz}, h_{z\bar{z}}$ は Q, τ を用いて，

$$\begin{aligned} h_{zz} =& (\log \tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}, \\ h_{z\bar{z}} =& \frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)} \end{aligned}$$

と表せる．

Proof. (C.1) と (C.2) を書き換えていくと，

$$
\begin{aligned}
h_{zz} =& (\log\lambda)_z h_z + pu \\
=& \left(\log\frac{2\tau}{u^2}\right)_z h_z + (Q - h_z^2)u \\
=& (\log\tau)_z h_z - 2\frac{u_z}{u} h_z + (Q - h_z^2)u \\
=& (\log\tau)_z h_z + \left(\frac{1}{u} h_z + 4\frac{Q - h_z^2}{\lambda u} h_{\bar z}\right) h_z + (Q - h_z^2)u && \text{(C.3) より} \\
=& (\log\tau)_z h_z + \frac{h_z^2}{u} + 4\frac{Q - h_z^2}{\lambda u}|h_z|^2 + (Q - h_z^2)u \\
=& (\log\tau)_z h_z + \frac{h_z^2}{u} + \frac{1}{u}(Q - h_z^2)(1 - u^2) + (Q - h_z^2)u && \text{(C.4) より} \\
=& (\log\tau)_z h_z + \frac{Q}{u} \\
=& (\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}, \\
h_{z\bar z} =& \frac{\lambda u}{4} \\
=& \frac{\tau}{2u} \\
=& \frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)}
\end{aligned}
$$

となる． □

これらの式は次節にて重要な役割を果たす．

3.4 調和写像を用いた曲面の構成

前節では，CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであれば，ψ の hyperbolic Gauss map は調和写像となり，かつ Weierstrass data をもつことを確かめた．

ここでは，これと逆の問題，すなわち，Weierstrass data をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ が存在した時，これを hyperbolic Gauss map にもつような CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ を構成することはできるのか，という問題を考える．

結論から言うと，これは可能である．すなわち，Weierstrass data $\{-Q, 2\tau\}$ をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を与えると，G を hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ が存在することが証明できるのである (定理 3.18)．

さて，以下では ψ の存在を証明するのだが，まずは G の Weierstrass data から ψ の第 4 座標の関数にあたる h を積分する．その後，ψ の第一基本形式と angle function にあたる λ, u も Weierstrass data から定義し，λ, u, h が (3.1) の可積分条件 (C.1) から (C.5) を満たすことを示す．すると，ψ の moving frame にあたるベクトル値関数の組が求まるので，それらに適切な初期条件を与えることで，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込み ψ が定まることが示される．

また，定理 3.18 より調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ が存在するための十分条件は，G をガウス写像にもつ CMC 1/2 はめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ が存在することであることも分かる．

さて，上にも述べた通り，次の補題は ψ の存在を示すための第一歩となる．

補題 3.12 ([FeMi, Lemma 10])**.** Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．また，$\{-Q, 2\tau\}$ をある調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ の Weierstrass data とする．さらに，任意の点 $z_0 \in \Sigma$ と $\theta_0 \in \mathbb{C}$ をとる．

このとき，2 階の偏微分方程式系

$$\begin{aligned} h_{zz} =& (\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}, \\ h_{z\bar{z}} =& \frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau + 2|h_z|^2)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

は，初期条件 $h(z_0) = \theta_0$ のもとで，平行移動の差をのぞいて唯一の大域解 $h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ をもつ．

Proof. 簡単のため，$z_0 = 0 + i0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

$h_z = \theta$ とおくと，2 階の偏微分方程式系 (3.6) は，

$$\begin{aligned} \theta_z =& (\log\tau)_z \theta + Q\sqrt{\frac{\tau + 2|\theta|^2}{\tau}}, \\ \theta_{\bar{z}} =& \frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau + 2|\theta|^2)}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

という 1 階の偏微分方程式系に書き換えられる．

偏微分方程式 (3.7) の解 θ は，

$$\left((\log\tau)_z \theta + Q\sqrt{\frac{\tau + 2|\theta|^2}{\tau}} \right)_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau + 2|\theta|^2)} \right)_z \tag{3.8}$$

を満たすことが計算で確かめられる．

$\theta = s + it = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおく．同じように $\theta_0 = s_0 + it_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ とおく．これと $z = u + iv$ を用いて，上の偏微分方程式系 (3.7) を書き直すと，

$$\begin{aligned} \theta_u =& \theta_z + \theta_{\bar{z}}, \\ \theta_v =& i(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \end{aligned}$$

であるから，各辺の実部と虚部を考えることで，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_u =& \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\theta_z + \theta_{\bar{z}}) \\ \mathrm{Im}\,(\theta_z + \theta_{\bar{z}}) \end{pmatrix} =: f_1, \\ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_v =& \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\,(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \\ \mathrm{Re}\,(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \end{pmatrix} =: f_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

と表せる．

常微分方程式について，次の定理を認めよう．

定理 3.13 ([Kan, 定理 3.10, p.70])**.** ベクトル値関数 $f(x, y)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 内の閉領域 $|x| \leq a$, $|y - c| \leq b$ で連続で $|f(x, y)| \leq M$, かつ $y \in \mathbb{R}^n$ につき一様リプシッツ連続となるとする．このとき，連立微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の初期条件 $y(0) = c$ を満たす解が $|x| \leq \min\{a, b/M\}$ においてただ一つ存在する．

特に，$f(x, y)$ が y について無制限に仮定を満たすならば，解は $|x| \leq a$ でただ一つ存在する．

以下では，f_1, f_2 が一様リプシッツ条件を満たすことを示し，この定理を用いて (3.9) の解を求めよう．そのために，$\sqrt{\tau+2|\theta|^2} = \sqrt{\tau+2(s^2+t^2)}$ が s, t について $\mathbb{R}^2$ 上一様リプシッツ連続となることを示したい．

まず，s か t の一つについて，それぞれ $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続となることを示す．

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\tau+2(s^2+t^2)}\right| = \left|\frac{2s}{\sqrt{\tau+2(s^2+t^2)}}\right| \leq \frac{|2s|}{|\sqrt{2}s|}| \leq \sqrt{2}$$

すると，平均値の定理によって，$\sqrt{\tau+2(s^2+t^2)}$ は s について $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続となることが分かる．同様にして，t についても $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続となっている．三角不等式を使うことで，$\sqrt{\tau+2(s^2+t^2)}$ は s, t について $\mathbb{R}^2$ 上一様リプシッツ連続でもあることが示せる．

任意の実数 R_1, R_2 に対して，上の事実により，f_1, f_2 はともに $|u| \leq R_1$, $|v| \leq R_2$ という範囲で s, t について $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続となることが容易に示せる．

さて，それでは (3.9) の解を，初期条件 $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ のもとで $|u| \leq R_1$, $|v| \leq R_2$ という範囲で求めよう．そこで，

$$\frac{d}{du}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(u) = f_1(u, 0, \psi_1, \psi_2), \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

という常微分方程式を考える．f_1 は u, ψ_1, ψ_2 について C^∞ 級で，ψ_1, ψ_2 について $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続であるから定理 3.13 により，$|u| \leq R_1$ の範囲でただ一つの C^∞ 級の解 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(u)$ が存在する．

各 u に対して，

$$\frac{d}{dv}\begin{pmatrix} \phi_1^u \\ \phi_2^u \end{pmatrix}(v) = f_2(u, v, \phi_1^u, \phi_2^u), \quad \begin{pmatrix} \phi_1^u \\ \phi_2^u \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(u)$$

を考えると，f_2 が u, v, ϕ_1^u, ϕ_2^u について C^∞ 級で，ϕ_1^u, ϕ_2^u について $\mathbb{R}$ 上一様リプシッツ連続であることから定理 3.13 により，$|u| \leq R_1, |v| \leq R_2$ の範囲で C^∞ 級の解 $\begin{pmatrix} \phi_1^u \\ \phi_2^u \end{pmatrix}(v)$ がただ一つ存在し，かつこの解はパラメータ u についても C^∞ 級となっている．

$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} \phi_1^u \\ \phi_2^u \end{pmatrix}(v)$ とおくと，これが求める解であることを示そう．作り方より，

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{d}{dv}\begin{pmatrix} \phi_1^u \\ \phi_2^u \end{pmatrix}(v) = f_2(u, v, \phi_1^u, \phi_2^u) = f_2(u, v, s, t).$$

つまり，$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_v = f_2$ が成り立つ．$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ は u, v について C^∞ 級だから，$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_{uv} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_{vu}$ である，また，(3.8) を変形すると，$(f_1(u, v, s(u,v), t(u,v)))_v = (f_2(u, v, s(u,v), t(u,v)))_u$ が成り立つ．すると，各 u に対して，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_u - f_1\right) &= \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_{uv} - (f_1)_v \\
&= \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_{vu} - (f_2)_u \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_v - f_2\right) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_u (u,0) - f_1(u,0,s(u,0),t(u,0)) = \frac{d}{dv}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(u) - f_1(u,0,\psi_1(u),\psi_2(u)) = 0$$

でもあるから，常微分方程式の解の一意性より，$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_u = f_1$ が成り立つ．

以上より，$|u| \leq R_1, |v| \leq R_2$ なる範囲で，(3.9) の解 $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ が存在する．R_1, R_2 は任意だから (3.9) の解が Σ 全体で存在する．

$\theta = s + it$ は上のようにして得られた．今度は $h_z = \theta(z)$ なる微分方程式を解くために，次の定理を用いる．

定理 3.14 ([Ino, 定理 1.3.5])**.** $\mathbb{C}$ の座標を $z = x + iy$ とする．単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の C^∞ 級関数 $U\colon D \to \mathbb{C}, V\colon D \to \mathbb{C}$ が，

$$V_x - U_y = 0 \tag{3.10}$$

を満たすとき，初期条件 $F(z_0) = F_0 \in \mathbb{C}$ を満たす微分方程式系

$$F_x = U, \quad F_y = V,$$

の C^∞ 級の解 $F\colon D \to \mathbb{C}$ が存在する．

特に，U, V が $\mathbb{R}$ に値をもち，$F_0 \in \mathbb{R}$ であるならば，解 F は $\mathbb{R}$ に値をもつ．

$h_z = \theta = s + it$ を $z = x + iy$ を用いて，書き換えると，

$$h_x = 2s, \quad h_y = -2t$$

となる．よって，s, t が $s_y + t_x = 0$ を満たすとき，初期値が $h(z_0) \in \mathbb{R}$ を満たすとすれば，定理 3.14 により，$h_z = \theta$ の解 $h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ は存在する．ところで，

$$\begin{aligned} 2\theta_{\bar{z}} =& 2(s_{\bar{z}} + it_{\bar{z}}) \\ =& s_x + is_y + it_x - t_y \\ =& (s_x - t_y) + i(s_y + t_x) \end{aligned}$$

であるから，$\theta_{\bar{z}} \in \mathbb{R}$ であれば，$s_y + t_x = 0$ が成り立つ．いま (3.7) から，$\theta_{\bar{z}} \in \mathbb{R}$ が分かる．ゆえに，定理 3.14 により大域解 $h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ が，平行移動の差をのぞいてただ一つ存在することが分かる． □

以下では，Weierstrass data $\{-Q, 2\tau\}$ をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ で，正則点の集合が Σ の稠密開部分集合となるようなものが存在するとしよう．すると，今の補題 3.12 により，(3.6) の解 $h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ が得られる．ただし，$h(z_0) = \theta_0$ とする．

補題 3.15 ([FeMi, Lemma 12])**.** G の Weierstrass data $\{-Q, 2\tau\}$ と，h を用いて，Σ 上の関数 λ, H, u, p を

$$\lambda := 2\tau + 4|h_z|^2, \quad H := \frac{1}{2},$$
$$u := \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}}, \quad p := Q - h_z^2,$$

を定めると，これらは (C.1) から (C.5) を満たす．

Proof. Q は正則関数であるから，$H=1/2$ のもとで式 (C.5) は成り立っている．ゆえに u, λ, h が以下の等式を満たすことを示せばよい:

$$h_{zz} =(\log \lambda)_z h_z + pu, \tag{3.11}$$

$$h_{z\bar{z}} =\frac{\lambda u}{4}, \tag{3.12}$$

$$u_z = -\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar{z}} = -\frac{1}{2}h_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}, \tag{3.13}$$

$$1-u^2 =\frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \tag{3.14}$$

式 (3.12) と (3.14) は，u, λ の定義から直ちに成り立つ．さらに，$2\tau = \lambda u^2$ も直ちに成り立つことが分かる．
$u^2 = \tau/(\tau + 2|h_z|^2)$ の辺々を z 偏微分して，

$$\begin{aligned}
2uu_z =&\frac{\tau_z}{\tau+2|h_z|^2} - \tau\frac{\tau_z + 2h_{zz}h_{\bar{z}} + 2h_z h_{z\bar{z}}}{(\tau+2|h_z|^2)^2} \\
=&\frac{2\tau_z}{\lambda} - \frac{4\tau}{\lambda^2}\left(\tau_z + 2h_{\bar{z}}\left(\frac{\tau_z}{\tau}h_z + \frac{Q}{u}\right) + 2h_z\frac{\lambda u}{4}\right) && \text{(3.6) より} \\
=&\frac{2\tau_z}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2}\left(\tau\tau_z + 2\tau_z|h_z|^2 + \frac{2Q\tau}{u}h_{\bar{z}} + 2h_z\tau\frac{\lambda u}{4}\right) \\
=&\frac{2\tau_z}{\lambda}(1-u^2) - \frac{8\tau_z|h_z|^2}{\lambda^2} - \frac{4Qh_{\bar{z}}u}{\lambda} - h_z u^3 && 2\tau = \lambda u^2 \text{ より} \\
=&-u\left(h_z u^2 + \frac{4Qh_{\bar{z}}}{\lambda}\right) && \text{式 (3.14) より}
\end{aligned}$$

となる．$u>0$ だから辺々 $2u$ で割ると，

$$\begin{aligned}
u_z =& -\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar{z}} \\
=& -\frac{1}{2}h_z - \frac{2Q-2h_z^2}{\lambda}h_{\bar{z}} && \text{式 (3.14) より} \\
=& -\frac{1}{2}h_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

を得る．

次に (3.6) より，

$$
\begin{aligned}
h_{zz} =&(\log\tau)_z h_z + \frac{Q}{u}\\
=&\left(\log\frac{\lambda u^2}{2}\right)_z h_z + \frac{Q}{u}\\
=&(\log\lambda)_z h_z + 2\frac{u_z}{u}h_z + \frac{Q}{u}\\
=&(\log\lambda)_z h_z + \frac{Q}{u} + \frac{2h_z}{u}\left(-\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar z}\right) \qquad \text{式 (3.13) より}\\
=&(\log\lambda)_z h_z + \frac{Q}{u} - h_z^2 u - \frac{Q}{u}\frac{4|h_z|^2}{\lambda}\\
=&(\log\lambda)_z h_z + \frac{Q}{u} - h_z^2 u - \frac{Q}{u}(1-u^2) \qquad \text{式 (3.14) より}\\
=&(\log\lambda)_z h_z - h_z^2 u + Qu\\
=&(\log\lambda)_z h_z + (Q-h_z^2)u\\
=&(\log\lambda)_z h_z + pu
\end{aligned}
$$

となる． □

この補題により，(3.1) は与えられた u,λ,h,p について可積分であり，Σ 上大域的な解 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)^\top$ が存在する．

ここで，$\eta := \sigma_3, N := \sigma_4$ とおく．これらを用いて，

$$\xi := \frac{1}{u}(\eta + N)$$

を定めると，

$$\xi_z = \frac{1}{u}(\eta_z + N_z) - \frac{u_z}{u}\xi$$

となる．これを，(3.1) と (3.13) を用いて計算すると，

$$
\begin{aligned}
\xi_z =&\frac{u}{2}\sigma_1 - \frac{2Q}{\lambda u}\sigma_2 + \frac{1}{2}\left(-uh_z + \frac{4Qh_{\bar z}}{\lambda u}\right)\xi\\
=&\frac{u}{2}\sigma_1 - \frac{2Q}{\lambda u}\sigma_2 - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\xi
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

となる．同様に，$\xi_{\bar z}$ も計算すると，

$$\xi_{\bar z} = -\frac{2\bar Q}{\lambda u}\sigma_1 + \frac{u}{2}\sigma_2 - \frac{u}{2}\left(h_{\bar z} - \frac{2\bar Q h_z}{\tau}\right)\xi \tag{3.16}$$

となる．これらから，σ_1,σ_2 を $\xi,\xi_z,\xi_{\bar z}$ を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)\sigma_1 =&\frac{u}{2}\xi_z + \frac{2Q}{\lambda u}\xi_{\bar z} + \frac{u^2}{4}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\xi - \frac{Q}{\lambda}\left(h_{\bar z} - \frac{2\bar Q h_z}{\tau}\right)\xi,\\
\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)\sigma_2 =&\frac{2\bar Q}{\lambda u}\xi_z + \frac{u}{2}\xi_{\bar z} + \frac{u^2}{4}\left(h_{\bar z} - \frac{2\bar Q h_z}{\tau}\right)\xi - \frac{\bar Q}{\lambda}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\xi
\end{aligned}
$$

となる．

ところで，

$$\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}=\frac{u^2}{4}\left(1-\frac{4|Q|^2}{\tau^2}\right)$$

である．いま点 $z_0\in\Sigma$ で，$\tau=2|Q|$ と仮定すると，式 (3.4) より，

$$\mu=\frac{2\tau}{4}+\frac{4|Q|^2}{2\tau}=2|Q|$$

を得る．すると $\mu^2-4|Q|^2=0$ となり，z_0 は G の特異点であることが分かる．よって，反対に G の正則点では，

$$\begin{aligned}\sigma_1=&\frac{1}{\left(\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)}\left(\frac{u}{2}\xi_z+\frac{2Q}{\lambda u}\xi_{\bar z}+\frac{u^2}{4}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\xi-\frac{Q}{\lambda}\left(h_{\bar z}-\frac{2\bar Qh_z}{\tau}\right)\xi\right),\\ \sigma_2=&\frac{1}{\left(\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)}\left(\frac{2\bar Q}{\lambda u}\xi_z+\frac{u}{2}\xi_{\bar z}+\frac{u^2}{4}\left(h_{\bar z}-\frac{2\bar Qh_z}{\tau}\right)\xi-\frac{\bar Q}{\lambda}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\xi\right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

と表示できる．この表示と $\xi\in\mathbb{L}^4$ より，G の正則点では $\overline{\sigma_1}=\sigma_2$ が成り立つことが分かる．特に，G の正則点の集合は Σ の稠密開部分集合であるから，σ_1,σ_2 の連続性より，Σ 全体で $\overline{\sigma_1}=\sigma_2$ が成り立つ．

ここで，微分方程式系 $\psi_z=\sigma_1,\psi_{\bar z}=\sigma_2$ を考える．$z=x+iy$ を用いて書き換えると，

$$\begin{aligned}\psi_x&=\sigma_1+\sigma_2\in\mathbb{R},\\ \psi_y&=i(\sigma_1-\sigma_2)\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

となる．定理 3.14 の式 (3.10) は，この場合，

$$\begin{aligned}i(\sigma_1)_x-i(\sigma_2)_x-(\sigma_1)_y-(\sigma_2)_y&=0,\\ i((\sigma_1)_x+i(\sigma_1)_y)-i((\sigma_2)_x-i(\sigma_2)_y)&=0,\\ (\sigma_1)_{\bar z}-(\sigma_2)_z&=0\end{aligned}$$

となる．いま式 (3.1) より，$(\sigma_1)_{\bar z}=(\sigma_2)_z$ だから，定理 3.14 により大域的な解 $\psi\colon\Sigma\to\mathbb{L}^4$ が存在する．

なお，現段階では，η,N は ψ から定まる単位法ベクトルや ψ の第 1 から第 3 座標にあたるベクトル値関数とは限らないことを注意しておく．

さて，ψ が $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みとなるように (3.1) の初期条件を定める必要がある．ξ を用いて，次のような初期条件を考えよう．

定義 3.16 ([FeMi, Definition 13])**.** $z_0\in\Sigma$ を G の正則点とする．

$\sigma=(\psi_z,\psi_{\bar z},\eta,N)^\top$ は次の初期条件によって得られる (3.1) の唯一つの解とする:

$$\begin{aligned}\xi(z_0)=(G(z_0),1),\quad \xi_z(z_0)&=(G(z_0),0),\\ N_3(z_0)=0,\quad \langle N,\xi\rangle(z_0)&=-\frac{1}{u(z_0)},\\ \langle N,\xi_z\rangle&=\frac{1}{2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)(z_0).\end{aligned}$$

ただし，N_3 は N の第 4 座標を表す．

式 (3.17) より，$\psi_z(z_0), \psi_{\bar{z}}(z_0)$ は値を与えた $\{\xi(z_0), \xi_z(z_0), \xi_{\bar{z}}(z_0)\}$ によって唯一通りに表せる．$N(z_0)$ は次の補題の証明中に，具体的に $\{G(z_0), G_z(z_0), G_{\bar{z}}(z_0)\}$ によって唯一通りに記述される．すると，ξ の定義から，$\eta(z_0)$ も上の定義で決定される．ゆえに，定義 3.16 によって $\sigma(z_0) = (\psi_z(z_0), \psi_{\bar{z}}(z_0), \eta(z_0), N(z_0))$ は唯一つに定まる．

補題 3.17 ([FeMi, Lemma 14])**.** 定義 3.16 で定めた $\sigma\colon \Sigma \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4$ の z_0 での値について以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_z, \psi_z \rangle(z_0) =& 0, \quad \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle(z_0) = \frac{\lambda(z_0)}{2}, \\
\langle N, N \rangle =& -1, \quad \langle \eta, \eta \rangle(z_0) = 1, \\
\langle N, \psi_z \rangle(z_0) =& 0, \quad \langle \eta, \psi_z \rangle(z_0) = 0, \\
\langle N, \eta \rangle(z_0) =& 0.
\end{aligned}$$

Proof. 簡単のため，z_0 の記述を省略する．まず，$\xi = (G, 1)$，$\xi_z = (G_z, 0)$ より，$\langle \xi, \xi_z \rangle = \langle G, G_z \rangle = 0$ が分かる．すると，

$$0 = \langle \xi, \xi_z \rangle = \frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle$$

が成り立つ．この式の複素共役をとった式も考え合わせると，

$$\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2} \right) \langle \psi_z, \xi \rangle = \frac{u^2}{4} \left(1 - \frac{4|Q|^2}{\tau^2} \right) \langle \psi_z, \xi \rangle = 0$$

を得る．いま z_0 は G の正則点であるから，$4|Q|^2/\tau^2 \neq 1$ である．ゆえに，$\langle \psi_z, \xi \rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle = 0$ が成り立つ．

定義 3.16 より，

$$\langle \xi_z, \xi_z \rangle = \langle G_z, G_z \rangle = -Q$$

が成り立つ．一方で，式 (3.15) より，

$$\langle \xi_z, \xi_z \rangle = \frac{u}{2} \langle \psi_z, \xi \rangle - \frac{2Q}{\lambda u} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle$$

同様に，

$$\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle = \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{4|Q|^2}{\tau} \right)$$

である一方で，

$$\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle = \frac{u}{2} \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle - \frac{2\bar{Q}}{\lambda u} \langle \psi_z, \xi_z \rangle$$

が成り立つ．これらの式をあわせると，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{2} - \frac{8|Q|^2}{\lambda^2 u^3} \right) \langle \psi_z, \xi_z \rangle =& -Q + \frac{Q}{\lambda u^2} \left(\tau + \frac{4|Q|^2}{\tau} \right) \\
=& -Q + \frac{Q}{\lambda u^2} \left(\frac{\lambda u^2}{2} + \frac{8|Q|^2}{\lambda u^2} \right) \\
=& -\frac{Q}{u} \left(\frac{u}{2} - \frac{8|Q|^2}{\lambda^2 u^3} \right)
\end{aligned}$$

となるので，$\langle\psi_z,\xi_z\rangle=-Q/u$ となる．これを $\langle\xi_z,\xi_{\bar z}\rangle$ の式に代入すると，$\langle\psi_{\bar z},\xi_z\rangle=\lambda u/4$ を得る．

さらに，ξ_z を展開することで，

$$\begin{aligned}-\frac{Q}{u}=\langle\psi_z,\xi_z\rangle=&\frac{u}{2}\langle\psi_z,\psi_z\rangle-\frac{2Q}{\lambda u}\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle,\\ \frac{\lambda u}{4}=\langle\psi_z,\xi_{\bar z}\rangle=&\frac{u}{2}\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle-\frac{2\bar Q}{\lambda u}\langle\psi_z,\psi_z\rangle\end{aligned}\tag{$*$}$$

という連立方程式を得る．$(*)$ から $\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle$ を消去すると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{2}-\frac{8|Q|^2}{\lambda^2u^3}\right)\langle\psi_z,\psi_z\rangle=&-\frac{Q}{u}+\frac{\lambda u}{4}\cdot\frac{2}{u}\cdot\frac{2Q}{\lambda u}\\ =&-\frac{Q}{u}+\frac{Q}{u}=0.\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\langle\psi_z,\psi_z\rangle=0$ となる．元の式に代入して $\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle=\lambda/2$ を得る．

次に $\langle N,N\rangle=-1$ を計算しよう．定義 3.16 より，$N=(n,0)\in\mathbb{L}^3\times\mathbb{R}$ と書ける．z_0 は G の正則点であるから，n は $\{G,G_z,G_{\bar z}\}$ によって表せる．つまり，複素数 α,β,γ を用いて，

$$n=\alpha G_z+\beta G_{\bar z}+\gamma G$$

と書ける．特に，$\bar n=n$ より，$\beta=\bar\alpha,\,\gamma\in\mathbb{R}$ が分かる．すなわち，

$$n=\alpha G_z+\bar\alpha G_{\bar z}+\gamma G,\quad \alpha\in\mathbb{C},\,\gamma\in\mathbb{R}$$

である．再び定義 3.16 から，

$$\begin{aligned}\langle N,\xi\rangle=\langle n,G\rangle=-\frac{1}{u},\\ \langle N,\xi_z\rangle=\langle n,G_z\rangle=\frac{1}{2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\alpha=2\frac{2\bar Qh_z+\tau h_{\bar z}}{\tau^2-4|Q|^2},\quad\gamma=\frac{1}{u}$$

を得る．すると，

$$\begin{aligned}\langle N,N\rangle=&\langle n,n\rangle\\ =&\langle n,\alpha G_z+\bar\alpha G_{\bar z}+\gamma G\rangle\\ =&\frac{\alpha}{2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)+\frac{\bar\alpha}{2}\left(h_{\bar z}-\frac{2\bar Qh_z}{\tau}\right)-\frac{1}{u^2}\end{aligned}$$

となる．α を代入して具体的に計算していくと，

$$
\begin{aligned}
\langle N, N\rangle =&\frac{2\bar{Q}h_z+\tau h_{\bar{z}}}{\tau^2-4|Q|^2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)+\frac{2Qh_{\bar{z}}+\tau h_z}{\tau^2-4|Q|^2}\left(h_{\bar{z}}-\frac{2\bar{Q}h_z}{\tau}\right)-\frac{1}{u^2}\\
=&\frac{1}{\tau^2-4|Q|^2}\left(2\bar{Q}h_z^2-\frac{4|Q|^2|h_z|^2}{\tau}+\tau|h_z|^2-2Qh_{\bar{z}}^2+2Qh_{\bar{z}}^2-\frac{4|Q|^2|h_z|^2}{\tau}+\tau|h_z|^2-2\bar{Q}h_z^2\right)-\frac{1}{u^2}\\
=&\frac{2|h_z|^2}{\tau}-\frac{1}{u^2}\\
=&\frac{4|h_z|^2}{\lambda u^2}-\frac{1}{u^2}\\
=&\frac{1-u^2}{u^2}-\frac{1}{u^2}\\
=&-1
\end{aligned}
$$

を得る．これと定義 3.16 の $\langle N, \xi\rangle = -1/u$ から，

$$\langle N, \eta\rangle = 0$$

が分かる．また $\langle \xi, \xi\rangle = 0$ より，

$$\langle \eta, \eta\rangle = 1$$

も分かる．

最後に，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)=\langle N, \xi_z\rangle=\frac{u}{2}\langle N, \psi_z\rangle-\frac{2Q}{\lambda u}\langle N, \psi_{\bar{z}}\rangle+\frac{1}{2}\left(h_z-\frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right),\\
\frac{u}{2}\langle N, \psi_z\rangle-\frac{2Q}{\lambda u}\langle N, \psi_{\bar{z}}\rangle=0.
\end{aligned}
$$

これは，$\langle \xi_z, \xi\rangle$ から導出された式と同様の式であるから，$\langle N, \psi_z\rangle = 0$ である．また，$\langle \xi, \psi_z\rangle = 0$ から，$\langle \eta, \psi_z\rangle = 0$ も得られる． □

さて，それでは定義 3.16 という初期条件から $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みが得られることを示そう．

定理 3.18 ([FeMi, Theorem 11])**.** Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．$G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は調和写像で，Weierstrass data $\{-Q, 2\tau\}$ をもつとする．また，G の正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．$z_0 \in \Sigma$ を G の正則点とし，任意の複素数 $\theta_0 \in \mathbb{C}$ をとる．

このとき次の条件を満たす，空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ で N が沈め込みであるものが，$\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて唯一つ存在する:

1. G は ψ の hyperbolic Gauss map である．

2. $\tau = \lambda u^2/2$ である．ただし，$\langle d\psi, d\psi\rangle = \lambda\,|dz|^2$，$u$ は ψ の angle function である．

3. $dh(z_0) = \theta_0\, dz + \bar{\theta}_0\, d\bar{z}$.

Proof. 条件 1〜3 をみたす $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の存在を示そう．

まず，h を偏微分方程式系 (3.6) の初期条件 $h_z(z_0) = \theta_0$ による解とする．そして，補題 3.15 から得られる (3.1) の解で，定義 3.16 をみたすものを $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^\top = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ とおく．そこで，

$\Phi_{ij} = \langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$, $(i, j = 1, \ldots, 4)$ と定める．ここで，(3.1) の $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の成分を $\mathcal{U} = (U_{ij}), \mathcal{V} = (V_{ij})$ とおくと，Φ_{ij} は線型偏微分方程式系

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{ij})_z =& \langle (\sigma_i)_z, \sigma_j \rangle + \langle \sigma_i, (\sigma_j)_z \rangle \\
=& \sum_{k=1}^{4} \left(U_{ik} \langle \sigma_k, \sigma_j \rangle + U_{jk} \langle \sigma_i, \sigma_k \rangle \right) \\
=& \sum_{k=1}^{4} \left(U_{ik} \Phi_{kj} + U_{jk} \Phi_{ki} \right),
\end{aligned}
$$

$$
(\Phi_{ij})_{\bar{z}} = \sum_{k=1}^{4} \left(V_{ik} \Phi_{kj} + V_{jk} \Phi_{ki} \right),
$$

の解である．これらは行列 $\Phi = (\Phi_{ij})$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\Phi_z &= \mathcal{U}\Phi + (\mathcal{U}\Phi)^\top, \\
\Phi_{\bar{z}} &= \mathcal{V}\Phi + (\mathcal{V}\Phi)^\top,
\end{aligned}
$$

とも書ける．

一方で，$\phi_{ij} = \phi_{ji}$ を

$$
\begin{aligned}
\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{13} = \phi_{23} = \phi_{14} = \phi_{24} = \phi_{34} = 0, \\
\phi_{12} = \frac{\lambda}{2}, \quad \phi_{33} = -\phi_{44} = 1,
\end{aligned}
$$

と定めると，これらが Φ_{ij} と同じ線型偏微分方程式系の解となることが容易に確かめられる．補題 3.17 より，二つの解は点 z_0 で一致する．このことから，Σ 上で二つの解は一致する．すると，

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_z, \psi_z \rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 0, \\
\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda}{2} > 0,
\end{aligned}
$$

であり，$\psi \colon \Sigma \to \mathbb{L}^4$ は空間的な共形はめ込みである．

次に，$(\psi_z)_3 = h_z, N_3 = 0, \eta_3 = u$ を示そう．$\gamma := ((\psi_z)_3, (\psi_{\bar{z}})_3, \eta_3, N_3)^\top$ とおくと，(3.1) の第 4 座標を抜き出すことで

$$
\gamma_z = \mathcal{U}\gamma, \quad \gamma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\gamma
$$

をみたす．補題 3.15 より，この偏微分方程式系は $(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)^\top$ も解にもつ．これらが z_0 で一致していることを確かめる．定義 3.16 より，$N_3(z_0) = 0, \xi_3(z_0) = 1$ である．すると，ξ の定義により $\eta_3 = u(z_0)$ が分かる．また，$(\xi_z)_3(z_0) = 0$ である一方で，

$$
\xi_z = \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau} \right)\xi
$$

だから，z_0 において，

$$
0 = \frac{u}{2}(\psi_z)_3 - \frac{2Q}{\lambda u}(\psi_{\bar{z}})_3 - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau} \right)
$$

となる．同じように $(\overline{\xi_z})_3(z_0) = (\xi_{\bar{z}})_3(z_0) = 0$ も考えると，$(\psi_3)_z(z_0) = h_z(z_0)$ が分かる．すると，解の一意性から $(\psi_z)_3 = h_z, N_3 = 0, \eta_3 = u$ が成り立つ．

(3.1) より，

$$N_z = \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + uh_z\eta$$

である．$\tilde{h} = (0,0,0,h)$ とおくと $(\psi_z)_3 = h_z$ より，

$$\langle \tilde{h}, \eta\rangle = uh_z,\ \langle \tilde{h}, N\rangle = 0,$$
$$\langle \tilde{h}, \psi_z\rangle = h_z^2,\ \langle \tilde{h}, \psi_{\bar{z}}\rangle = |h_z|^2$$

となる．これらより，

$$\tilde{h}_z = \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\psi_z + \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + uh_z\eta$$

が成り立つ．すると，

$$N_z + h_z = (N_z, h_z) = \psi_z$$

となるので，平行移動の差を除いて，解 $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ が存在することが分かる．このとき，ψ の単位法ベクトルは η であり，補題 3.15 の式と (C.1) から (C.4) を見比べて，ψ の平均曲率 H が $H = 1/2$ をみたすことが分かる．以上より，空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ が得られた．

u, λ の定め方から，$\tau = \lambda u^2/2$ であり，補題 3.12 から

$$dh(z_0) = \theta_0\, dz + \bar{\theta_0}\, d\bar{z}$$

も分かる．

次に N が沈め込みであることを確かめよう．$\langle \psi_z, \psi_z\rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}}\rangle = 0$ より，$\langle N_z, N_z\rangle = -h_z^2, \langle N_{\bar{z}}, N_{\bar{z}}\rangle = -h_{\bar{z}}^2$ を得る．また，$\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}}\rangle = \lambda/2$ より，$\langle N_z, N_{\bar{z}}\rangle = \lambda/2 - |h_z|^2$ も得られる．$z = u + iv$ を用いてこれらを書き直すと，

$$\begin{aligned}\langle N_u, N_u\rangle =& \lambda - h_u^2,\\ \langle N_v, N_v\rangle =& \lambda - h_v^2,\\ \langle N_u, N_v\rangle =& -h_u h_v\end{aligned}$$

となる．ここで，N_u, N_v が一次従属だと仮定する．ある $\alpha \in \mathbb{R}$ を用いて $N_v = \alpha N_u$ となる場合を考えると，$\langle N_v, N_v\rangle = \alpha^2\langle N_u, N_u\rangle, \langle N_u, N_v\rangle = \alpha\langle N_u, N_u\rangle$ となるから，

$$\begin{aligned}\lambda - h_v^2 =& \alpha^2(\lambda - h_u^2),\\ -h_u h_v =& \alpha(\lambda - h_u^2)\end{aligned}$$

となる．α を消去して，

$$\begin{aligned}h_u^2 h_v^2 = \alpha^2(\lambda - h_u^2)^2 =& (\lambda - h_v^2)(\lambda - h_u^2)\\ \lambda(\lambda - h_u^2 - h_v^2) =& 0\end{aligned}$$

を得る．$\lambda \neq 0$ より，$\lambda = h_u^2 + h_v^2$ となる．一方で $\lambda = 2\tau + 4|h_z|^2 = 2\tau + h_u^2 + h_v^2$ だから，$\tau = 0$ となってしまう．$N_u = \alpha N_v$ と書ける場合でも同様であるから，N_u, N_v は一次独立であり，N は沈め込みである．

最後に ψ の hyperbolic Gauss map は G であることを示そう．ψ の hyperbolic Gauss map を $\mathcal{G}$ とおこう．すなわち，$\xi = (\mathcal{G}, 1)$ となっているとしよう．このとき

$$\xi_z = \frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} - \frac{u}{2}\left(h_z - \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)\xi$$

より，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_z\rangle =& \langle \xi_z, \xi_z\rangle \\ =& 2\cdot\frac{u}{2}\cdot\left(-\frac{2Q}{\lambda u}\right)\cdot\frac{\lambda}{2} \\ =& -Q = \langle G_z, G_z\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_{\bar{z}}\rangle =& \langle \xi_z, \xi_{\bar{z}}\rangle \\ =& \frac{\lambda u^2}{8} + \frac{2|Q|^2}{\lambda u^2} \\ =& \frac{\tau}{4} + \frac{|Q|^2}{\tau} \\ =& \frac{\mu}{2} = \langle G_z, G_{\bar{z}}\rangle\end{aligned}$$

である．加えて定義 3.16 から

$$\mathcal{G}(z_0) = G(z_0), \quad \mathcal{G}_z(z_0) = G_z(z_0)$$

であるから補題 3.6 より，$\mathcal{G} = G$ が得られる．

以上で，条件 1〜3 をみたす $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の存在が示せた．

次にこのような ψ の一意性を示そう．$\tilde{\psi} = (\tilde{N}, \tilde{h})\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ を定理の仮定と条件 1〜3 をみたすような，空間的な CMC 1/2 はめ込みとする．また，$\langle d\tilde{\psi}, d\tilde{\psi}\rangle = \tilde{\lambda}\,|dz|^2$，$\tilde{\psi}$ の単位法ベクトルを $\tilde{\eta}$，$\tilde{\psi}$ の angle function を $\tilde{u}$ とする．条件 2 より $\tau = \tilde{\lambda}\tilde{u}^2/2$ であり，$\tilde{h}, \tilde{\lambda}, \tilde{u}$ について (C.1) から (C.4) が成り立っていることから，$\tilde{h}_z$ は (3.6) をみたしている．さらに，$\tilde{h}_z(z_0) = \theta_0 = h_z(z_0)$ より，解の一意性から $\tilde{h}_z = h_z$ である．また，$\tau = \tilde{\lambda}\tilde{u}^2/2$ と，式 (C.4)

$$1 - \tilde{u}^2 = \frac{4|h_z|^2}{\tilde{\lambda}}$$

から，

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= 2\tau + 4|h_z|^2 = \lambda, \\ \tilde{u} &= \sqrt{\frac{\tau}{\tau + 2|h_z|^2}} = u\end{aligned}$$

が分かる．すると，$\tilde{\sigma} = (\tilde{\psi}_z, \tilde{\psi}_{\bar{z}}, \tilde{\eta}, \tilde{N})^\top$ は σ と同じく (3.1) の解になっていることが分かる．しかも，z_0 にて定義 3.16 と同じ条件をみたすから，解の一意性より $\tilde{\sigma} = \sigma$ が成り立つ．

ゆえに，$\tilde{N} = N$ であり，$\tilde{\psi}$ と ψ は $\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて一致していることが分かる． □

第 II 部

自主学習内容

4 $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の内の $\mathrm{CMC}\ \frac{1}{2}$ 曲面と hyperbolic Gauss map

この章では，第 3 章で $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ という空間を対象にして作られた手法が $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ という空間にも適用できることを示す．ただし，$\mathbb{S}^2_1$ は 2 次元のド・ジッター空間

$$\mathbb{S}^2_1 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 | - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

である．

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ での議論と $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ での議論はほぼ平行に行われるが，両者の間には様々な差が見られる．$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ では符号が $+$ だったものが，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ では $-$ になっている，といった軽微な差が多い．しかし一番大きい差異は，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ では，調和写像から構成された曲面の定義域が最初に与えたリーマン面 Σ 全体であるのに対し，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の場合では，Σ のある開部分集合上でしか曲面を構成できず，その開集合は明示できない，というものである．これは空間が $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ に変わるとともに，ある関数の符号が変化した結果，根号内が正値関数とは限らなくなってしまうことに起因している．

また，実は $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ という空間においても，第 3 章の手法は適用できる．ただし，$\mathbb{R}^1_1$ とは，$\mathbb{R}$ の座標を t としたとき，$\mathbb{R}$ に $-dt^2$ という計量を与えたものとする．このことについては，第 4 章の最後の節で，一部についてだが述べる．この際，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の場合と同様に，調和写像から構成された曲面が，与えられたリーマン面 Σ 上全体では一般に定義できず，その定義域も明示できないという問題を抱えている．しかし [Ito] では，調和写像から $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ への $\mathrm{CMC}\, 1/2$ はめ込みを，Σ 全体ではないものの明示的に与えられた集合の上で構成する方法が与えられている．[Ito] と同様の手法を用いることで，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ でも同様の改善ができることが期待される．

4.1 $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ 内の曲面の moving frame

$\mathbb{R}^4$ の座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) で表す．$\mathbb{L}^4$ を，$\mathbb{R}^4$ に $\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ という擬計量を与えた擬リーマン多様体とする．また，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^4$ を

$$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R} := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

という多様体と定め，$\mathbb{L}^4$ から定まる誘導計量を入れる．

さて，単連結リーマン面 $(\Sigma, z = u + iv)$ から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への空間的な共形はめ込み $\psi = (N, h) \colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ を考える．このとき，$h_z, h_{\bar{z}}$ の零点は孤立しているものとする．また，$\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$, $\lambda > 0$ とおく．

η を ψ の $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ 内での単位法ベクトルの中でも，

$$\eta \colon \Sigma \to \mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{L}^4$$

であるものをとる．これを $\eta = (\hat{N}, u)$ と表すこととし，ここで，u のことを ψ の angle function とよぶこととする．また，η を用いて，ψ のホップ微分 $p\, dz^2$ を $p\, dz^2 := -\langle \psi_z, \eta_z \rangle\, dz^2$ と定める．さらに，$A := u h_z$ と定める．

このとき，単位法ベクトル η は定義から，$\langle d\psi, \eta\rangle = 0$ を満たす．さらに N は $\langle N, N\rangle = 1$ であることから，$T\mathbb{S}^2_1$ に直交する．加えて N の第 4 座標が 0 であることから，N は $T(\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}) = T\mathbb{S}^2_1 \oplus T\mathbb{R}$ に直交する．ゆえに，$\langle N, \eta\rangle = 0$ も成り立つことが分かる．

ψ がはめ込みであることから，$\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ は $\mathbb{L}^4$ の moving frame となっている．この σ について，σ_z, $\sigma_{\bar{z}}$ を求める．

補題 4.1. $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ とおくと，

$$\sigma_z = \mathcal{U}\sigma, \quad \sigma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\sigma \tag{4.1}$$

が成り立つ．ただし，

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (\log\lambda)_z & 0 & -p & h_z^2 \\ 0 & 0 & -H\lambda/2 & -(\lambda - 2|h_z^2|)/2 \\ -H & -2p/\lambda & 0 & A \\ 1 - 2|h_z^2|/\lambda & -2h_z^2/\lambda & A & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -H\lambda/2 & -(\lambda - 2|h_z|^2)/2 \\ 0 & (\log\lambda)_{\bar{z}} & -\bar{p} & h_{\bar{z}}^2 \\ -2\bar{p}/\lambda & -H & 0 & \bar{A} \\ -2h_{\bar{z}}^2/\lambda & 1 - 2|h_z|^2/\lambda & \bar{A} & 0 \end{pmatrix}$$

である．

Proof. ψ_{zz} について考えてみよう．σ は moving frame だから $\psi_{zz} = a\psi_z + b\psi_{\bar{z}} + c\eta + dN$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とかける．$\langle \psi_z, \psi_z\rangle = 0$ の両辺を z で偏微分すると，

$$0 = 2\langle \psi_{zz}, \psi_z\rangle = 2b\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}}\rangle = b\lambda$$

を得る．$\lambda > 0$ より，$b = 0$ が成り立つ．

次に，$\langle \psi_{\bar{z}}, \psi_z\rangle = \lambda/2$ の両辺を z で偏微分して，

$$\langle \psi_{zz}, \psi_{\bar{z}}\rangle + \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z\rangle = a\frac{\lambda}{2} + \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z\rangle = \frac{\lambda_z}{2},$$

$$2\langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z\rangle = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\langle \psi_z, \psi_z\rangle = 0$$

であるから，$a = \lambda_z/\lambda = (\log\lambda)_z$ を得る．

次に，$\langle \psi_z, \eta\rangle = 0$ の両辺を z で偏微分することで，

$$\begin{aligned} \langle \psi_{zz}, \eta\rangle + \langle \psi_z, \eta_z\rangle &= 0, \\ -c = \langle \psi_{zz}, \eta\rangle &= -\langle \psi_z, \eta_z\rangle = p \end{aligned}$$

となるので，$c = -p$ となる．

最後に，N は $\langle N, N\rangle = 1$ を満たすので，$\langle N, N_z\rangle = 0$ である．すると，

$$\langle \psi_z, N\rangle = \langle N_z, N\rangle = 0$$

であるから，両辺を z で偏微分して，

$$\langle \psi_{zz}, N\rangle + \langle \psi_z, N_z\rangle = 0,$$
$$d = \langle \psi_{zz}, N\rangle = -\langle \psi_z, N_z\rangle$$

を得る．ここで，

$$0 = \langle \psi_z, \psi_z\rangle = \langle \psi_z, N_z\rangle + h_z^2$$

であるから，$d = h_z^2$ を得る．

ψ_{zz} の場合と同様に他の場合も計算していくと，(4.1) を得る． □

式 (4.1) の第 4 座標のみ取り出した式は，

$$(h_z, h_{\bar z}, u, 0)_z^\top = \mathcal{U}(h_z, h_{\bar z}, u, 0)^\top,$$
$$(h_z, h_{\bar z}, u, 0)_z^\top = \mathcal{V}(h_z, h_{\bar z}, u, 0)^\top$$

でありこれを整理すると，次を得る:

$$h_{zz} =(\log\lambda)h_z - pu, \tag{C'.1}$$
$$h_{z\bar z} =-\frac{H\lambda u}{2}, \tag{C'.2}$$
$$u_z =-Hh_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar z}, \tag{C'.3}$$
$$u^2+1 =\frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \tag{C'.4}$$

一方で，式 (4.1) の可積分条件を考えると，それは

$$\mathcal{U}_{\bar z} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0$$

で与えられる ([UmYa, 定理 B-9.4] 参照)．これをすべての成分にわたって計算すると，自明に 0 になってしまう成分などもあるため，可積分条件は $(1,1)$ 成分，$(1,3)$ 成分，$(1,4)$ 成分，$(3,4)$ 成分から得られる以下の 4 つの関係式に書き換えられる:

$$\lambda(\log\lambda)_{z\bar z} =-2\left(|p|^2 - \frac{H^2-1}{4}\lambda^2 - \lambda|h_z|^2\right), \tag{I'.1}$$
$$2p_{\bar z} =\lambda(H_z + A), \tag{I'.2}$$
$$-(h_z^2)_{\bar z} + (|h_z|^2)_z =\frac{AH\lambda}{2} - \bar A p + \frac{\lambda_z|h_z|^2}{\lambda}, \tag{I'.3}$$
$$A_{\bar z} - \bar A_z =-\frac{4i}{\lambda}\operatorname{Im}(\bar p h_z^2). \tag{I'.4}$$

これらが (4.1) の可積分条件であるが，実は次が成り立つ．

命題 4.2. Σ を単連結リーマン面とする．このとき，(4.1) の解 $\sigma\colon \Sigma \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4$ が存在する必要十分条件は，$\lambda, u, h\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $H\colon \Sigma \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ と $p\colon \Sigma \to \mathbb{C}$ が条件 (C'.1) から (C'.4) と，$Q = 2Hp + h_z^2$ についての式

$$Q_{\bar z} = 2H_{\bar z}p + \lambda H H_z \tag{C'.5}$$

を満たすことである．

Proof. (I'.4) について：

$$\begin{aligned}
\text{(I'.4) の左辺} =& A_{\bar z} - \bar A_z \\
=& (uh_z)_{\bar z} - (uh_{\bar z})_z \\
=& u_{\bar z}h_z + uh_{z\bar z} - u_z h_{\bar z} - uh_{z\bar z} \\
=& u_{\bar z}h_z - u_z h_{\bar z} \\
=& -\left(Hh_{\bar z} + \frac{2\bar p}{\lambda}h_z\right)h_z + \left(Hh_z + \frac{2p}{\lambda}h_{\bar z}\right)h_{\bar z} \qquad \text{(C'.3) より} \\
=& -\frac{2}{\lambda}(\bar p h_z^2 - p h_{\bar z}^2) \\
=& -\frac{4i}{\lambda}\mathrm{Im}\,(\bar p h_z^2) = \text{(I'.4) の右辺}.
\end{aligned}$$

よって，(C'.3) が成り立てば，(I'.4) が成り立つ．

(I'.3) について:

$$\begin{aligned}
\text{(I'.3) の左辺} =& -(h_z^2)_{\bar z} + (|h_z|^2)_z \\
=& -2h_z h_{z\bar z} + h_{zz}h_{\bar z} + h_z h_{z\bar z} \\
=& -h_z h_{z\bar z} + h_{zz}h_{\bar z} \\
=& \frac{H\lambda u}{2}h_z + \frac{\lambda_z}{\lambda}h_z h_{\bar z} - puh_{\bar z} \qquad \text{(C'.1)，(C'.2) より} \\
=& \frac{AH\lambda}{2} - \bar A p + \frac{\lambda_z |h_z|^2}{\lambda} = \text{(I'.3) の右辺}.
\end{aligned}$$

よって，(C'.1)，(C'.2) が成り立てば，(I'.3) が成り立つ．

(I'.1) について:

$$\text{(I'.1) の左辺} = \lambda(\log\lambda)_{z\bar z} = \lambda_{z\bar z} - \frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda}$$

であり，(C'.1) の両辺を $\bar z$ 偏微分すると，

$$\begin{aligned}
h_{zz\bar z} =& \left(\frac{\lambda_z}{\lambda}h_z\right)_{\bar z} - (pu)_{\bar z} \\
=& \frac{h_z}{\lambda}\lambda_{z\bar z} - \frac{h_z}{\lambda}\frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda} + \frac{\lambda_z}{\lambda}h_{z\bar z} - p_{\bar z}u - pu_{\bar z} \\
=& \frac{h_z}{\lambda}\left(\lambda_{z\bar z} - \frac{\lambda_z\lambda_{\bar z}}{\lambda}\right) - \frac{H\lambda_z u}{2} - \frac{\lambda}{2}(H_z + A)u + pHh_{\bar z} + \frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \qquad \text{(I'.2)，(C'.2)，(C'.3) より}
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，

$$\begin{aligned}
h_{zz\bar z} =& (h_{z\bar z})_z \\
=& -\left(\frac{H\lambda u}{2}\right)_z \qquad \text{(C'.2) より} \\
=& -\frac{H_z\lambda u}{2} - \frac{H\lambda_z u}{2} - \frac{H\lambda u_z}{2} \\
=& -\frac{H_z\lambda u}{2} - \frac{H\lambda_z u}{2} + \frac{H^2\lambda}{2}h_z + pHh_{\bar z} \qquad \text{(C'.3) より}
\end{aligned}$$

であるので，辺々を比較して整理すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{h_z}{\lambda}\left(\lambda_{z\bar{z}}-\frac{\lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\right)=&\frac{H^2\lambda}{2}h_z+\frac{\lambda A u}{2}-\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z\\
=&\frac{H^2\lambda}{2}h_z+\frac{\lambda h_z}{2}u^2-\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z\\
=&\frac{H^2\lambda}{2}h_z+\frac{\lambda h_z}{2}\left(-1+\frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right)-\frac{2|p|^2}{\lambda}h_z \qquad \text{(C'.4) より}
\end{aligned}
$$

となる．すると，$h_z\neq 0$ なる集合上で，

$$
\begin{aligned}
\lambda_{z\bar{z}}-\frac{\lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}=&\frac{H^2\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}+2\lambda|h_z|^2-2|p|^2\\
=&-2\left(|p|^2-\frac{H^2-1}{4}\lambda^2-\lambda|h_z|^2\right)=\text{(I'.1) の右辺}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．連続性から $h_z=0$ なる点でもこの式は成り立つ．

よって，(I'.2) と (C'.1) から (C'.4) が成り立つならば，(I'.1) は成り立つ．

(I'.2) について: (I'.2) は (C'.2) を用いることで，別の式に書き換えられる．$Q=2Hp+h_z^2$ であるから，

$$
\begin{aligned}
Q_{\bar{z}}=&2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}+2h_zh_{z\bar{z}}\\
=&2H_{\bar{z}}p+\lambda H(H_z+A)-\lambda Huh_z \qquad \text{(I'.2)，(C'.2) より}\\
=&2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z+\lambda HA-\lambda HA
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，

$$Q_{\bar{z}}=2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z$$

となる．

一方で，(C'.5) が成り立つとすれば，

$$
\begin{aligned}
Q_{\bar{z}}=&2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}+2h_zh_{z\bar{z}}\\
=&2H_{\bar{z}}p+2Hp_{\bar{z}}-\lambda HA \qquad \text{(C'.2) より．}
\end{aligned}
$$

よってこれと $Q_{\bar{z}}=2H_{\bar{z}}p+\lambda HH_z$ を比較して，

$$
\begin{aligned}
2Hp_{\bar{z}}=&\lambda HH_z+\lambda HA=H\lambda(H_z+A) \qquad H\neq 0 \text{ なるとき}\\
2p_{\bar{z}}=&\lambda(H_z+A)
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち，(C'.2) と $H\neq 0$ が成り立っていれば，(I'.2) と (C'.5) は同値であることが分かった． □

特に，H が定数である場合には，(C'.5) から Q は正則関数となる．今回の場合も，正則 2 次微分 $Q\,dz^2$ を Abresch-Rosenberg differential とよぶこととする．

4.2 hyperbolic Gauss map と調和写像

はめ込み $\psi=(N,h)\colon\Sigma\to\mathbb{S}^2_1\times\mathbb{R}$ で，$N\colon\Sigma\to\mathbb{S}^2_1\subset\mathbb{L}^3$ が沈め込み，すなわち，dN が各点で線型同型となるものを考える．ψ について，$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ の場合と同様に hyperbolic Gauss map を定め，それが特別な場合には調和となることを示す．

まず，$u\neq 0$ であることを示そう．

補題 4.3. N が沈め込みである場合，$u \neq 0$ である．

Proof. $u=0$ なる点が存在したとしよう．$\langle d\psi, \eta\rangle = 0 = \langle N, \eta\rangle$ より，

$$\begin{aligned}\langle N_z, \hat{N}\rangle =& \langle N_{\bar{z}}, \hat{N}\rangle = 0,\\ \langle N, \hat{N}\rangle =& 0\end{aligned} \tag{4.2}$$

である．dN は線型同型より，N_u と N_v は一次独立だから $\{N, N_u, N_v\}$ は $\mathbb{L}^3$ を張る．よって，式 (4.2) より $\hat{N}=0$ が分かる．すると，$u=0$ なる点で，$\eta=(0,0)$ となり η が単位法ベクトルであることに矛盾する．ゆえに，N が沈め込みであるときには，$u \neq 0$ である． □

以上のことから，u の正負と曲面の向きを対応づけられる．以降は $u>0$ となる向きを標準的な向きとしよう．

さて，

$$\xi = \frac{1}{u}(\eta + N)\colon \Sigma \to \mathbb{N}^3$$

と定めると，ξ は

$$\mathbb{N}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 | \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\}$$

に値をもつことが分かる．これを示そう．まず，ξ が光円錐に入るのは

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi\rangle =& \frac{1}{u^2}(\langle \eta, \eta\rangle + 2\langle \eta, N\rangle + \langle N, N\rangle)\\ =& \frac{1}{u^2}(-1+1) = 0\end{aligned}$$

となるからである．次に ξ の第 1 座標が正であることを示そう．まず $O(1,3) \subset \mathbf{GL}_4$ を，$\mathbb{L}^4$ の擬計量を保つ行列の集合としよう．さらに $O_+(1,3) \subset O(1,3)$ を特に $\mathbb{H}^3$ を保つような行列の集合とする．$O_+(1,3)$ の行列は $\mathbb{H}^3$ だけでなく，$\mathbb{N}^3$ も保つ．

ここで $\eta \in \mathbb{H}^3$ の第 1 座標は正だから，ある $A \in O_+(1,3)$ で，$A(1,0,0,0)^\top = \eta$ となるものが存在する．すると $Ax = \xi$ となるような，$x \in \mathbb{L}^4$ がとれる．このとき，

$$-\frac{1}{u} = \langle \xi, \eta\rangle = \langle (1,0,0,0)^\top, x\rangle = -x_0$$

となり，x の第 1 座標 $x_0 > 0$ が分かる．ゆえに，$\xi \in \mathbb{N}^3$ が得られる．

特に，ξ の第 4 座標は常に 1 であるから，ある写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ を用いて，$\xi = (G, 1) \in \mathbb{L}^3 \times \mathbb{R}$ と表せる．

定義 4.4. 上のように得られた $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の hyperbolic Gauss map とよぶ．

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の場合と同じようにこの ξ が調和となる場合があることを示そう．

定理 4.5. CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．このとき ψ の hyperbolic Gauss map $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は，その正則点の集合が Σ の稠密開部分集合のとき，調和写像となる．

Proof. いま，

$$
\begin{aligned}
\langle G_z, G_z\rangle =&\langle \xi_z, \xi_z\rangle \\
=&\langle \xi_z, \frac{1}{u}(\eta_z + N_z) + \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi\rangle \\
=&\langle \xi_z, \frac{1}{u}(\eta_z + N_z)\rangle \\
=&\langle \frac{1}{u}(\eta_z + N_z) + \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi, \xi_z - \left(\frac{1}{u}\right)_z u\xi\rangle \\
=&\langle \frac{1}{u}(\eta_z + N_z), \frac{1}{u}(\eta_z + N_z)\rangle \\
=&\frac{1}{u^2}(\langle \eta_z, \eta_z\rangle + \langle N_z, N_z\rangle + 2\langle \eta_z, N_z\rangle)
\end{aligned}
$$

である．ここで，η_z，N_z は (4.1) により以下のように計算できる:

$$
\begin{aligned}
\langle \eta_z, \eta_z\rangle =&\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN, -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN\rangle \\
=&2Hp + A^2, \\
\langle N_z, N_z\rangle =&\langle \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta, \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta\rangle \\
=& - 2h_z^2\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) - A^2, \\
2\langle \eta_z, N_z\rangle =&2\langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + AN, \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta\rangle \\
=&2Hh_z^2 - 2p\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\langle G_z, G_z\rangle =&\frac{1}{u^2}\left(2Hp - 2h_z^2\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right) + 2Hh_z^2 - 2p\left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\right) \\
=&\frac{1}{u^2}(p + h_z^2)\left(2H - 2 + \frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right) \\
=&\frac{1}{u^2}(p + h_z^2)\left(2H - 1 + u^2\right) \qquad \text{式 (C'.4) より} \\
=&p + h_z^2 \qquad H = \frac{1}{2} \text{ より} \\
=&Q
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，Q は ψ の Abresch-Rosenberg differential である．Q は正則であるので，

$$\langle G_{z\bar{z}}, G_z\rangle = 0$$

である．これは，G の正則点において $G_{z\bar{z}}$ が $\mathbb{H}^2$ に接する成分をもたないことを表す．仮定より G の正則点の集合は Σ の稠密開部分集合だから，$G_{z\bar{z}}$ の連続性より Σ 全体で $G_{z\bar{z}}$ は $\mathbb{H}^2$ に接する成分をもたない．ゆえに，G は調和写像となる． □

ξ を介することで，CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の hyperbolic Gauss map は必ず Weierstrass data をもつことが分かる (3.2 節参照).

定理 4.6. CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ で，N が沈め込みであるものを考える．このとき ψ の hyperbolic Gauss map $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は，その正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．このとき，調和写像 G は Weierstrass data $\{Q, \lambda u^2\}$ をもつ．

Proof. いま，

$$\begin{aligned}
\mu =& 2\langle G_z, G_{\bar z}\rangle \\
=& 2\langle \xi_z, \xi_{\bar z}\rangle \\
=& \frac{2}{u^2}\left(\langle \eta_z, \eta_{\bar z}\rangle + \langle \eta_z, N_{\bar z}\rangle + \langle N_z, \eta_{\bar z}\rangle + \langle N_z, N_{\bar z}\rangle\right)
\end{aligned}$$

であるから，これを定理 4.5 の証明と同様にして計算すると，

$$\begin{aligned}
\langle \eta_z, \eta_{\bar z}\rangle =& \langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar z} + AN, -\frac{2\bar p}{\lambda}\psi_z - H\psi_{\bar z} + \bar A N\rangle \\
=& \frac{H^2\lambda}{2} + \frac{2|p|^2}{\lambda} + |A|^2 \\
=& \frac{\lambda}{8} + \frac{2|p|^2}{\lambda} + |A|^2, \\
\langle N_z, N_{\bar z}\rangle =& \langle \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_z^2}{\lambda}\psi_{\bar z} + A\eta, -\frac{2h_{\bar z}^2}{\lambda}\psi_z + \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_{\bar z} + \bar A\eta\rangle \\
=& \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda}{2} + \frac{2|h_z|^4}{\lambda} - |A|^2 \\
=& \frac{\lambda}{2} - 2|h_z|^2 + \frac{4|h_z|^4}{\lambda} - |A|^2, \\
\langle \eta_z, N_{\bar z}\rangle =& \langle -H\psi_z - \frac{2p}{\lambda}\psi_{\bar z} + AN, -\frac{2h_{\bar z}^2}{\lambda}\psi_z + \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_{\bar z} + \bar A\eta\rangle \\
=& -\frac{H\lambda}{2} + H|h_z|^2 + \frac{2ph_{\bar z}^2}{\lambda} \\
=& -\frac{\lambda}{4} + \frac{|h_z|^2}{2} + \frac{2ph_{\bar z}^2}{\lambda}, \\
\langle N_z, \eta_{\bar z}\rangle =& \overline{\langle \eta_z, N_{\bar z}\rangle} \\
=& -\frac{\lambda}{4} + \frac{|h_z|^2}{2} + \frac{2\bar p h_z^2}{\lambda}
\end{aligned}$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned}
\mu =& 2\langle \xi_z, \xi_{\bar z}\rangle \\
=& \frac{2}{u^2}\left(\langle \eta_z, \eta_{\bar z}\rangle + \langle \eta_z, N_{\bar z}\rangle + \langle N_z, \eta_{\bar z}\rangle + \langle N_z, N_{\bar z}\rangle\right) \\
=& \frac{2}{u^2}\left(\frac{\lambda}{8} + \frac{2|p|^2}{\lambda} - |h_z|^2 + \frac{4|h_z|^4}{\lambda} + \frac{2ph_{\bar z}^2}{\lambda} + \frac{2\bar p h_z^2}{\lambda}\right) \\
=& \frac{2}{u^2}\left(\frac{2}{\lambda}(|p|^2 + \bar p h_z^2 + ph_{\bar z}^2 + |h_z|^4) + \left(\frac{\lambda}{8} - |h_z|^2 + \frac{2|h_z|^4}{\lambda}\right)\right) \\
=& \frac{4|Q|^2}{\lambda u^2} + \frac{2}{u^2}\left(\frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda}{4}(u^2+1) + \frac{\lambda}{8}(u^2+1)^2\right) \qquad Q = p + h_z^2 \text{ と式 (C'.4) より} \\
=& \frac{4|Q|^2}{\lambda u^2} + \frac{\lambda}{4u^2}(1 - 2(u^2+1) + (u^2+1)^2) \\
=& \frac{4|Q|^2}{\lambda u^2} + \frac{\lambda u^2}{4}
\end{aligned}$$

となるので，$\{Q, \lambda u^2\}$ は G の Weierstrass data である． $\square$

CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の hyperbolic Gauss map G は Weierstrass data $\{Q, \lambda u^2\}$ をもつことが分かった．ここで，$2\tau = \lambda u^2$ とおこう．これと式 (C'.4)，$u > 0$ をあわせると，

$$\begin{aligned}\lambda =& -2\tau + 4|h_z|^2 > 0,\\ u =& \sqrt{\frac{\tau}{-\tau + 2|h_z|^2}}\end{aligned}$$

が分かる．それでは Q, τ を用いて (C'.1) と (C'.2) を書き換えてみよう．

補題 4.7. $h_{zz}, h_{z\bar{z}}$ は Q, τ を用いて，

$$\begin{aligned}h_{zz} =& (\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{-\tau + 2|h_z|^2}{\tau}},\\ h_{z\bar{z}} =& -\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|h_z|^2)}\end{aligned}$$

と書き表せる．

Proof. (C'.1) と (C'.2) を Q, τ を用いて書き換える．

$$\begin{aligned}h_{zz} =& (\log\lambda)_z h_z - pu\\ =& \left(\log\frac{2\tau}{u^2}\right)_z h_z - (Q - h_z^2)u\\ =& (\log\tau)_z h_z - 2\frac{u_z}{u}h_z - (Q - h_z^2)u\\ =& (\log\tau)_z h_z + 2\frac{h_z}{u}\left(\frac{h_z}{2} + \frac{2p}{\lambda}h_{\bar{z}}\right) - (Q - h_z^2)u \qquad \text{(C'.3) より}\\ =& (\log\tau)_z h_z + \frac{h_z^2}{u} + \frac{4p|h_z|^2}{\lambda u} - (Q - h_z^2)u\\ =& (\log\tau)_z h_z + \frac{h_z^2}{u} + \frac{Q - h_z^2}{u}(u^2 + 1) - (Q - h_z^2)u \qquad \text{(C'.4) より}\\ =& (\log\tau)_z h_z + \frac{Q}{u}\\ =& (\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{\tau}{-\tau + 2|h_z|^2}},\\ h_{z\bar{z}} =& -\frac{H\lambda u}{2}\\ =& -\frac{\lambda u}{4}\\ =& -\frac{\tau}{2u}\\ =& -\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|h_z|^2)}\end{aligned}$$

となる． $\square$

この補題の式は，次の節において重要な役割を果たす．

4.3 調和写像を用いた曲面の構成

前節では，CMC 1/2 はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ で N が沈め込みであるものの hyperbolic Gauss map が調和写像であり，かつ Weierstrass data をもつことを示した．

この節では，これとは逆の問題，すなわち Weierstrass data をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ が存在するとき，これを hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が構成できるか，という問題を考える．

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の場合と同様に，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ でもこれは可能である．すなわち，Weierstrass data $\{Q, 2\tau\}$ をもつ調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を与えると，これを hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が構成できることが証明できる (定理 4.14).

さて，これより上で述べたような ψ の存在を証明するのだが，まず G の Weierstrass data から ψ の第 4 座標に相当する関数 h を積分する．ここで，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の場合とは異なり，h の定義域は Σ 全体ではない．これは h を求めるときに用いた微分方程式が，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の場合とは異なることに依る違いである (補題 3.12，補題 4.8 参照)．その後，ψ の第一基本形式と angle function にあたる λ, u という関数も Weierstrass data を用いて定義し，λ, u, h が (4.1) の可積分条件である (C'.1) から (C'.5) を満たすことを示す．すると，ψ の moving frame にあたるベクトル値関数の組が求まるので，適切な初期条件を与えることで $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込み ψ が定まることが証明できる．

また，定理 4.14 より共形でない調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ を hyperbolic Gauss map にもつ CMC 1/2 はめ込み $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が存在するための十分条件は，G をガウス写像にもつ CMC 1/2 はめ込み $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ が存在することであることも分かる．

さて上で述べたように，次の補題が ψ の存在を示すための第一歩である．

補題 4.8. Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．また，調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ で Weierstrass data $\{Q, 2\tau\}$ をもつものを考える．さらに，任意の点 $z_0 \in \Sigma$ をとり，この z_0 について $-\tau(z_0) + 2|\theta_0|^2 > 0$ となるような $\theta_0 \in \mathbb{C}$ をとる．

このとき，2 階の偏微分方程式系

$$\begin{aligned} h_{zz} =& (\log \tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{-\tau + 2|h_z|^2}{\tau}}, \\ h_{z\bar{z}} =& -\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|h_z|^2)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

は初期条件 $h_z(z_0) = \theta_0$ のもとで，平行移動の差をのぞいて唯一の局所解 $h\colon W \to \mathbb{R}$ をもつ．ただし，W は z_0 を含むある開集合 $W \subset \Sigma$ である．

Proof. 簡単のため，$z_0 = 0 + i0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

(4.3) で $h_z = \theta$ とおくと，(4.3) は一階偏微分方程式系

$$\begin{aligned} \theta_z =& (\log \tau)_z \theta + Q\sqrt{\frac{-\tau + 2|\theta|^2}{\tau}}, \\ \theta_{\bar{z}} =& -\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|\theta|^2)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．また $z = u + iv$ であるから，

$$\begin{aligned}\theta_u =& \theta_z + \theta_{\bar{z}}, \\ \theta_v =& i(\theta_z - \theta_{\bar{z}})\end{aligned}$$

となる．さらに $\theta = s + it = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおき，$\theta_0 = s_0 + it_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおく．これを用いて θ に関する偏微分方程式を書き直すと，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_u =& \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\theta_z + \theta_{\bar{z}}) \\ \mathrm{Im}\,(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \end{pmatrix} =: f_1, \\ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}_v =& \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\,(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \\ \mathrm{Re}\,(\theta_z - \theta_{\bar{z}}) \end{pmatrix} =: f_2\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．

さて，ここで次の定理を用いる．

定理 4.9 ([Spi, p.187, Theorem 1])**.** 開集合 $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ をとる．ただし，U は $0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍とする．ここで，$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の座標は $(t^1, \ldots, t^m, x^1, \ldots, x^n)$ と表すこととする．また，$f_i\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$ は C^∞ 級ベクトル値関数とする．

このとき，$x \in V$ に対して，偏微分方程式系

$$\begin{aligned}\alpha(0) =& x, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t^j}(t) =& f_j(t, \alpha(t))\end{aligned}$$

を考える．$(0, x) \in U \times V$ の近傍で，f_i が

$$\frac{\partial f_j}{\partial t^i} - \frac{\partial f_i}{\partial t^j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^k} f_i^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} f_j^k = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{4.6}$$

を満たすとき，上の偏微分方程式系は 0 のある近傍 $W \subset \mathbb{R}^m$ 上で C^∞ 級の唯一つの解 $\alpha\colon W \to V$ をもつ．

(4.5) をこの定理にあてはめると，$m = n = 2$ であり，θ が α に相当する．f_1, f_2 には $\sqrt{-\tau + 2|\theta|^2}$ という関数が含まれており，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 全体で C^∞ 級かは分からない．しかし，$-\tau(z_0) + 2|\theta_0|^2 > 0$ という仮定と，$-\tau + 2|\theta|^2 = -\tau + 2(s^2 + t^2)$ という $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上の関数の連続性から $-\tau + 2|\theta|^2 > 0$ を満たすような $(0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の開近傍 $U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ がとれる．この開近傍上では，f_1, f_2 は C^∞ 級である．

さらに f_1, f_2 は具体的に，

$$\begin{aligned} f_1 =& \begin{pmatrix} \frac{1}{2\tau}(\tau_u s + \tau_v t) + \mathrm{Re}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2|\theta|^2}{\tau}} - \frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|\theta|^2)} \\ \frac{1}{2\tau}(\tau_u t - \tau_v s) + \mathrm{Im}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2|\theta|^2}{\tau}} \end{pmatrix}, \\ f_2 =& \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\tau}(\tau_u t - \tau_v s) - \mathrm{Im}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2|\theta|^2}{\tau}} \\ \frac{1}{2\tau}(\tau_u s + \tau_v t) + \mathrm{Re}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2|\theta|^2}{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau + 2|\theta|^2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表示される．これを用いて式 (4.6) の左辺の第 1 成分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tau_{uv}s+\tau_{vv}t}{2\tau}-\frac{\tau_v}{2\tau^2}(\tau_u s+\tau_v t)+(\mathrm{Re}\,Q)_u\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}-\mathrm{Re}\,Q\frac{\tau_v(s^2+t^2)}{\tau^2}\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2(s^2+t^2)}}\\
&-\frac{\tau_v}{4\sqrt{\tau}}\sqrt{-\tau+2(s^2+t^2)}+\frac{\tau_v\sqrt{\tau}}{4\sqrt{-\tau+2(s^2+t^2)}}+\frac{\tau_{uu}-\tau_{uv}s}{2\tau}-\frac{\tau_u}{2\tau^2}(\tau_u t-\tau_v s)+(\mathrm{Im}\,Q)_u\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}\\
&-\mathrm{Im}\,Q\frac{\tau_u(s^2+t^2)}{\tau^2}\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2(s^2+t^2)}}\\
&+\left(\frac{\tau_u}{2\tau}+\frac{2\mathrm{Re}\,Qs}{\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}}-s\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2(s^2+t^2)}}\right)\left(-\frac{\tau_u t-\tau_v s}{2\tau}-\mathrm{Im}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}\right)\\
&+\left(\frac{\tau_v}{2\tau}+\frac{2\mathrm{Re}\,Qt}{\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}}-t\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2(s^2+t^2)}}\right)\cdot\\
&\left(\frac{\tau_u s+\tau_v t}{2\tau}+\mathrm{Re}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}+\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}\right)\\
&-\left(\frac{\tau_v}{2\tau}-\frac{2\mathrm{Im}\,Qs}{\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}}\right)\left(\frac{\tau_u s+\tau_v t}{2\tau}+\mathrm{Re}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}-\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}\right)\\
&+\left(\frac{\tau_u}{2\tau}-\frac{2\mathrm{Im}\,Qt}{\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}}\right)\left(\frac{\tau_u t-\tau_v s}{2\tau}+\mathrm{Im}\,Q\sqrt{\frac{-\tau+2(s^2+t^2)}{\tau}}\right)\\
&=\frac{\tau_v}{4\sqrt{\tau(-\tau+2(s^2+t^2))}}(\tau-2(s^{+}t^2)+\tau-2\tau+4(s^2+t^2)-2(s^2+t^2))\\
&=0
\end{aligned}
$$

となる．同様に第 2 成分も計算すると，0 になることが確かめられる．よって， f_1, f_2 は可積分条件 (4.6) を満たしている．ゆえに (4.5) は，ある z_0 の開近傍 $W\subset\Sigma$ 上で唯一の解 $\theta\colon W\to V$ をもつ．

次に $h_z=\theta$ という偏微分方程式を考えると，(4.4) から W 上 $\theta_{\bar z}\in\mathbb{R}$ が分かるので，定理 3.14 により，平行移動の差をのぞいて唯一の解 $h\colon W\to\mathbb{R}$ が存在する． □

注意 4.10. $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ の場合には，[Kan] の定理を引用したが，今回は [Spi] の定理を引用した．この違いは微分方程式の解の存在範囲の違いに起因する．$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ の場合には Σ 全体における h の存在を証明するために，微分方程式の解の存在範囲が明示されている定理 [Kan] を引用する必要があった．これに対し，$\mathbb{S}^2_1\times\mathbb{R}$ の場合には微分方程式の形から，Σ 全体での解の存在は直ちに証明できない．ゆえに，解の存在範囲が明示されていない [Spi] の定理を用いた．

以下では，Weierstrass data $\{Q,2\tau\}$ をもつ調和写像 $G\colon\Sigma\to\mathbb{H}^2$ で，正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるようなものが存在することを仮定しよう．すると，今の補題 4.8 により，(4.3) の解 h がある開集合 $z_0\in W\subset\Sigma$ 上得られる．ただし $-\tau(z_0)+2|\theta_0|^2>0$ を満たすような $\theta_0\in\mathbb{C}$ に対して，$h_z(z_0)=\theta_0$ とする．

補題 4.11. G の Weierstrass data $\{Q,2\tau\}$ と，h を用いて W 上の関数 λ,H,u,p を

$$
\lambda:=-2\tau+4|h_z|^2,\quad H:=\frac{1}{2},
$$
$$
u:=\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2|h_z|^2}},\quad p:=Q-h_z^2
$$

と定めると，これらは (C'.1) から (C'.5) を満たす．

Proof. Q は正則関数であるから，$H=1/2$ のもとで式 (C'.5) は成り立っている．ゆえに，定義した関数 u,λ と h が次の等式を満たすことを示せばよい．

$$h_{zz} =(\log\lambda)_z h_z - pu, \tag{4.7}$$

$$h_{z\bar z} =-\frac{\lambda u}{4}, \tag{4.8}$$

$$u_z = \frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar z} =-\frac{1}{2}h_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar z}, \tag{4.9}$$

$$1+u^2 =\frac{4|h_z|^2}{\lambda}. \tag{4.10}$$

まず，式 (4.8) と (4.10) は，u,λ の定義から直ちに成り立つ．さらに $2\tau=\lambda u^2$ も直ちに成り立つことが分かる．次に $u^2=\tau/(-\tau+2|h_z|^2)$ の両辺を z 偏微分して，

$$\begin{aligned}
2uu_z =& \frac{\tau_z}{-\tau+2|h_z|^2} - \tau\frac{-\tau_z+2h_{zz}h_{\bar z}+2h_z h_{z\bar z}}{(-\tau+2|h_z|^2)^2}\\
=& \frac{2\tau_z}{\lambda} - \frac{4\tau}{\lambda^2}\left(-\tau_z + 2h_{\bar z}\left(\frac{\tau_z}{\tau}h_z + \frac{Q}{u}\right) - 2h_z\frac{\lambda u}{4}\right) \qquad \text{(4.3) より}\\
=& \frac{2\tau_z}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2}\left(-\tau\tau_z + 2\tau_z|h_z|^2 + \frac{2Q\tau}{u}h_{\bar z} - 2h_z\tau\frac{\lambda u}{4}\right)\\
=& \frac{2\tau_z}{\lambda}(1+u^2) - \frac{8\tau_z|h_z|^2}{\lambda^2} - \frac{4h_{\bar z}Qu}{\lambda} + h_z u^3, \qquad 2\tau=\lambda u^2 \text{ より}\\
=& u\left(u^2h_z - \frac{4h_{\bar z}Q}{\lambda}\right) \qquad \text{式 (4.10) より}
\end{aligned}$$

を得る．両辺を $2u>0$ で割って，

$$\begin{aligned}
u_z =& \frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar z},\\
=& -\frac{1}{2}h_z - \frac{2Q-2h_{\bar z}^2}{\lambda}h_{\bar z},\\
=& -\frac{1}{2}h_z - \frac{2p}{\lambda}h_{\bar z}
\end{aligned}$$

を得る．

最後に (4.7) を求めよう．

$$
\begin{aligned}
h_{zz} =&(\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{\tau}{-\tau+2|h_z|^2}},\\
=&\left(\log\frac{\lambda u^2}{2}\right)_z h_z + \frac{Q}{u},\\
=&(\log\lambda)_z h_z + 2\frac{u_z}{u}h_z + \frac{Q}{u},\\
=&(\log\lambda)_z h_z + 2\frac{h_z}{u}\left(\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar z}\right) + \frac{Q}{u}, \qquad \text{(4.9) より}\\
=&(\log\lambda)_z h_z + uh_z^2 - \frac{4|h_z|^2}{\lambda u}Q + \frac{Q}{u},\\
=&(\log\lambda)_z h_z + uh_z^2 - \frac{Q}{u}(u^2+1) + \frac{Q}{u}, \qquad \text{(4.10) より}\\
=&(\log\lambda)_z h_z - (Q-h_z^2)u,\\
=&(\log\lambda)_z h_z - pu
\end{aligned}
$$

と計算できる． □

この補題から，(4.1) は与えられた u,λ,h,p について可積分であり，W 上の解 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)^\top$ が存在する．

ここで $\eta:=\sigma_3$, $N:=\sigma_4$ とおき，これらを用いて

$$
\xi := \frac{1}{u}(\eta+N)
$$

を定めると，

$$
\begin{aligned}
\xi_z =&\frac{1}{u}(\eta_z+N_z) - \frac{u_z}{u}\xi,\\
=&\frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{2p}{\lambda}\sigma_2 + AN + \left(1-\frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\sigma_1 - \frac{2h_z^2}{\lambda}\sigma_2 + A\eta\right) - \frac{1}{u}\left(\frac{u^2}{2}h_z - \frac{2Q}{\lambda}h_{\bar z}\right)\xi,\\
=&\frac{1}{2u}\left(1-\frac{4|h_z|^2}{\lambda}\right)\sigma_1 - \frac{2Q}{\lambda u}\sigma_2 + uh_z\xi - \frac{u}{2}h_z\xi + \frac{2Q}{\lambda u}h_{\bar z}\xi
\end{aligned}
$$

となる．さらに式 (4.10) により

$$
\begin{aligned}
\xi_z =& -\frac{u}{2}\sigma_1 - \frac{2Q}{\lambda u}\sigma_2 + \frac{1}{2}\left(uh_z + \frac{4Q}{\lambda u}h_{\bar z}\right)\xi\\
=& -\frac{u}{2}\sigma_1 - \frac{2Q}{\lambda u}\sigma_2 + \frac{u}{2}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar z}\right)\xi
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

と計算できる．同様に $\xi_{\bar z}$ も計算すると，

$$
\xi_{\bar z} = -\frac{2\bar Q}{\lambda u}\sigma_1 - \frac{u}{2}\sigma_2 + \frac{u}{2}\left(h_{\bar z} + \frac{2\bar Q}{\tau}h_z\right)\xi \tag{4.12}
$$

となる．これらを用いて，σ_1, σ_2 を ξ, ξ_z, $\xi_{\bar z}$ によって表すと，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)\sigma_1 =& -\frac{u}{2}\xi_z + \frac{2Q}{\lambda u}\xi_{\bar z} + \frac{u^2}{4}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar z}\right)\xi - \frac{Q}{\lambda}\left(h_{\bar z} + \frac{2\bar Q}{\tau}h_z\right)\xi,\\
\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)\sigma_2 =&\frac{2\bar Q}{\lambda u}\xi_z - \frac{u}{2}\xi_{\bar z} - \frac{u^2}{4}\left(h_{\bar z} + \frac{2\bar Q}{\tau}h_z\right)\xi + \frac{\bar Q}{\lambda}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar z}\right)\xi
\end{aligned}
$$

となる．

ところで，

$$\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}=\frac{u^2}{4}\left(1-\frac{4|Q|^2}{\tau^2}\right)$$

である．いま点 $z_0\in\Sigma$ で，$\tau=2|Q|$ と仮定すると，式 (3.4) より，

$$\mu=\frac{2\tau}{4}+\frac{4|Q|^2}{2\tau}=2|Q|$$

を得る．すると $\mu^2-4|Q|^2=0$ となり，z_0 は G の特異点であることが分かる．よって，G の正則点では，

$$\begin{aligned}\sigma_1=&\frac{1}{\left(\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)}\left(-\frac{u}{2}\xi_z+\frac{2Q}{\lambda u}\xi_{\bar z}+\frac{u^2}{4}\left(h_z+\frac{2Q}{\tau}h_{\bar z}\right)\xi-\frac{Q}{\lambda}\left(h_{\bar z}+\frac{2\bar Q}{\tau}h_z\right)\xi\right),\\ \sigma_2=&\frac{1}{\left(\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q|^2}{\lambda^2u^2}\right)}\left(\frac{2\bar Q}{\lambda u}\xi_z-\frac{u}{2}\xi_{\bar z}-\frac{u^2}{4}\left(h_{\bar z}+\frac{2\bar Q}{\tau}h_z\right)\xi+\frac{\bar Q}{\lambda}\left(h_z+\frac{2Q}{\tau}h_{\bar z}\right)\xi\right)\end{aligned}\tag{4.13}$$

という表示ができる．この表示と $\xi\in\mathbb{L}^4$ より，$\overline{\sigma_1}=\sigma_2$ が分かる．いま，G の正則点の集合は W の稠密開部分集合であるから，σ_1,σ_2 の連続性より，W 上全体で $\overline{\sigma_1}=\sigma_2$ が成り立つ．

ここで，微分方程式系 $\psi_z=\sigma_1,\psi_{\bar z}=\sigma_2$ を考え，$z=x+iy$ を用いて書き換えると，

$$\begin{aligned}\psi_x&=\sigma_1+\sigma_2\in\mathbb{R},\\ \psi_y&=i(\sigma_1-\sigma_2)\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

となる．この場合，定理 3.14 の式 (3.10) は，

$$\begin{aligned}i(\sigma_1)_x-i(\sigma_2)_x-(\sigma_1)_y-(\sigma_2)_y&=0,\\ i((\sigma_1)_x+i(\sigma_1)_y)-i((\sigma_2)_x-i(\sigma_2)_y)&=0,\\ (\sigma_1)_{\bar z}-(\sigma_2)_z&=0\end{aligned}$$

となる．いま式 (4.1) より，$(\sigma_1)_{\bar z}=(\sigma_2)_z$ だから，定理 3.14 により大域的な解 $\psi\colon W\to\mathbb{L}^4$ が存在する．

なお，現段階では，η,N は ψ から定まる単位法ベクトルや ψ の第 1 から第 3 座標にあたるベクトル値関数とは限らないことを注意しておく．

この ξ を用いて，ψ が $\mathbb{S}^2_1\times\mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みとなるように適切な初期条件を定めよう．

定義 4.12. G の正則点 $z_0\in W$ をとり，$\sigma=(\psi_z,\psi_{\bar z},\eta,N)^\top$ は，次の初期条件によって得られる (4.1) の唯一つの解とする:

$$\begin{aligned}\xi(z_0)=(G(z_0),1),\quad \xi_z(z_0)&=(G_z(z_0),0),\\ N_3(z_0)=0,\quad \langle N,\xi\rangle(z_0)&=\frac{1}{u(z_0)},\\ \langle N,\xi_z\rangle(z_0)&=\frac{1}{2}\left(h_z+\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)(z_0)\end{aligned}$$

ただし，N_3 は N の第 4 座標とする．

式 (4.13) から $\psi_z(z_0)$，$\psi_{\bar z}(z_0)$ は $\xi(z_0)$，$\xi_z(z_0)$，$\xi_{\bar z}(z_0)$ を使って唯一通りに表せている．$N(z_0)$ は次の補題の証明中に，具体的に $G(z_0)$，$G_z(z_0)$，$G_{\bar z}(z_0)$ により記述される．すると，ξ の定義から $\eta(z_0)$ も上の定義で決定される．ゆえに，定義 4.12 により，$\sigma(z_0)=\{\psi_z(z_0),\psi_{\bar z}(z_0),\eta(z_0),N(z_0)\}$ は唯一通りに定まる．

補題 4.13. 定義 4.12 で定めた $\sigma\colon W \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{L}^4 \times \mathbb{L}^4$ の z_0 での値について次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\langle \psi_z, \psi_z \rangle(z_0) =& 0, \quad \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle(z_0) = \frac{\lambda(z_0)}{2}, \\ \langle N, N \rangle =& 1, \quad \langle \eta, \eta \rangle(z_0) = -1, \\ \langle N, \psi_z \rangle(z_0) =& 0, \quad \langle \eta, \psi_z \rangle(z_0) = 0, \\ \langle N, \eta \rangle(z_0) =& 0.\end{aligned}$$

Proof. 簡単のため z_0 の記述を省略する．まず，$\xi = (G, 1)$，$\xi_z = (G_z, 0)$ より $\langle \xi, \xi \rangle = 0, \langle \xi, \xi_z \rangle = \langle G, G_z \rangle = 0$ が分かる．すると，

$$0 = \langle \xi, \xi_z \rangle = -\frac{u}{2}\langle \psi_z, \xi \rangle - \frac{2Q}{\lambda u}\langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle$$

が成り立つ．これの複素共役をとった式も考え合わせると，

$$\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)\langle \psi_z, \xi \rangle = \frac{u^2}{4}\left(1 - \frac{4|Q|^2}{\tau^2}\right)\langle \psi_z, \xi \rangle = 0$$

となる．いま，z_0 は G の正則点であるから $4|Q|^2/\tau^2 \neq 1$ である．ゆえに $\langle \psi_z, \xi \rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \xi \rangle = 0$ が成り立つ．

次に，定義 4.12 より

$$\langle \xi_z, \xi_z \rangle = \langle G_z, G_z \rangle = Q$$

である一方で，式 (4.11) より

$$\langle \xi_z, \xi_z \rangle = -\frac{u}{2}\langle \psi_z, \xi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u}\langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle$$

が成り立つ．同様に，

$$\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle = \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle = \frac{\mu}{2} = \frac{\tau}{4} + \frac{|Q|^2}{\tau}$$

である一方で，

$$\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle = -\frac{u}{2}\langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle - \frac{2\bar{Q}}{\lambda u}\langle \psi_z, \xi_z \rangle$$

が成り立つ．これらの式をあわせると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)\langle \psi_z, \xi_z \rangle =& -\frac{Qu}{2} + \frac{2Q}{\lambda u}\left(\frac{\tau}{4} + \frac{|Q|^2}{\tau}\right) \\ =& -\frac{Qu}{2} + \frac{2Q}{\lambda u}\left(\frac{\lambda u^2}{8} + \frac{2|Q|^2}{\lambda u^2}\right) \\ =& -\frac{Qu}{2} + \frac{Qu}{4} + \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^3} \\ =& -\frac{Q}{u}\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2} \neq 0$ より，$\langle \psi_z, \xi_z \rangle = -Q/u$ を得る．これを $\langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle$ の式に代入すると，$\langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = -\lambda u/4$ を得る．これらの式においてさらに ξ_z を展開することで，連立方程式

$$\begin{aligned}-\frac{Q}{u} = \langle \psi_z, \xi_z \rangle = -\frac{u}{2}\langle \psi_z, \psi_z \rangle - \frac{2Q}{\lambda u}\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle, \\ -\frac{\lambda u}{4} = \langle \psi_{\bar{z}}, \xi_z \rangle = \langle \psi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle = \frac{2\bar{Q}}{\lambda u}\langle \psi_z, \psi_z \rangle - \frac{u}{2}\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle\end{aligned}$$

を得る．$\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle$ を消去すると

$$\left(\frac{u^2}{4}-\frac{4|Q^2|}{\lambda^2u^2}\right)\langle\psi_z,\psi_z\rangle=-\frac{Q}{u}\cdot\frac{u}{2}+\frac{\lambda u}{4}\cdot\frac{2Q}{\lambda u}=0$$

となるので，$\langle\psi_z,\psi_z\rangle=0$ となる．これを $\langle\psi_z,\xi_{\bar z}\rangle$ の式に代入して，$\langle\psi_z,\psi_{\bar z}\rangle=\lambda/2$ を得る．

次に $\langle N,N\rangle=1$ を計算しよう．定義 4.12 より $N=(n,0)\in\mathbb{L}^3\times\mathbb{R}$ と表せる．z_0 は G の正則点だから n は $\{G,G_z,G_{\bar z}\}$ によって書き表せる．つまり，複素数 α,β,γ を用いて

$$n=\alpha G_z+\beta G_{\bar z}+\gamma G$$

と書ける．特に $\bar n=n$ より，$\beta=\bar\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ が分かる．すなわち，

$$n=\alpha G_z+\bar\alpha G_{\bar z}+\gamma G,\quad \alpha\in\mathbb{C},\,\gamma\in\mathbb{R}$$

である．すると，定義 4.12 から

$$\begin{aligned}\langle N,\xi\rangle=\langle n,G\rangle&=\frac{1}{u},\\ \langle N,\xi_z\rangle=\langle n,G_z\rangle&=\frac{1}{2}\left(h_z+\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\alpha=2\frac{-2\bar Qh_z+\tau h_{\bar z}}{\tau^2-4|Q|^2},\quad \gamma=-\frac{1}{u}$$

を得る．すると，

$$\begin{aligned}\langle N,N\rangle=&\langle n,n\rangle\\ =&\langle n,\alpha G_z+\bar\alpha G_{\bar z}+\gamma G\rangle\\ =&\frac{\alpha}{2}\left(h_z+\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)+\frac{\bar\alpha}{2}\left(h_{\bar z}+\frac{2\bar Qh_z}{\tau}\right)-\frac{1}{u^2}\end{aligned}$$

となる．α を代入すると，

$$\begin{aligned}\langle N,N\rangle=&\frac{-2\bar Qh_z+\tau h_{\bar z}}{\tau^2-4|Q|^2}\left(h_z+\frac{2Qh_{\bar z}}{\tau}\right)+\frac{-2Qh_{\bar z}+\tau h_z}{\tau^2-4|Q|^2}\left(h_{\bar z}+\frac{2\bar Qh_z}{\tau}\right)-\frac{1}{u^2}\\ =&\frac{1}{\tau^2-4|Q|^2}\left(-2\bar Qh_z^2-\frac{4|Q|^2|h_z|^2}{\tau}+\tau|h_z|^2+2Qh_{\bar z}^2-2Qh_{\bar z}^2-\frac{4|Q|^2|h_z|^2}{\tau}+\tau|h_z|^2+2\bar Qh_z^2\right)-\frac{1}{u^2}\\ =&\frac{2|h_z|^2}{\tau}-\frac{1}{u^2}\\ =&\frac{4|h_z|^2}{\lambda u^2}-\frac{1}{u^2}\\ =&\frac{u^2+1}{u^2}-\frac{1}{u^2}\qquad (4.10)\text{ より}\\ =&1\end{aligned}$$

を得る．またこれより，

$$\langle N,\xi\rangle=\frac{1}{u}\langle N,N+\eta\rangle=\frac{1}{u}+\frac{1}{u}\langle N,\eta\rangle=\frac{1}{u}$$

が成り立つので，$\langle N, \eta\rangle = 0$ を得る．さらに，

$$
\begin{aligned}
0 = \langle \xi, \xi\rangle =& \frac{1}{u^2}(\langle N, N\rangle + 2\langle N, \eta\rangle + \langle \eta, \eta\rangle) \\
=& \frac{1}{u^2}(1 + 0 + \langle \eta, \eta\rangle)
\end{aligned}
$$

であるから，$\langle \eta, \eta\rangle = -1$ を得る．

次に $\langle \psi_z, N\rangle = 0$ を求めたい．定義 4.12 より

$$
\langle N, \xi_z\rangle = \frac{1}{2}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar{z}}\right)
$$

である一方で，

$$
\langle N, \xi_z\rangle = -\frac{u}{2}\langle N, \psi_z\rangle - \frac{2Q}{\lambda u}\langle N, \psi_{\bar{z}}\rangle + \frac{u}{2}\cdot\frac{1}{u}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar{z}}\right)
$$

であるから，

$$
\frac{u}{2}\langle N, \psi_z\rangle + \frac{2Q}{\lambda u}\langle N, \psi_{\bar{z}}\rangle = 0
$$

が成り立つ．この式の複素共役をとった式も考え合わせると，

$$
\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)\langle N, \psi_z\rangle = 0
$$

となり，$\langle N, \psi_z\rangle = 0$ を得る．すると，

$$
0 = \langle \psi_z, \xi\rangle = \frac{1}{u}\langle \psi_z, N + \eta\rangle = \frac{1}{u}\langle \psi_z, \eta\rangle
$$

となるから，$\langle \psi_z, \eta\rangle = 0$ も得られる． □

以上をもとにして，初期条件定義 4.12 から $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への CMC 1/2 はめ込みが得られることを示そう．

定理 4.14. Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結リーマン面とする．$G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ は調和写像で，Weierstrass data $\{Q, 2\tau\}$ をもつとする．また，G の正則点の集合が Σ の稠密開部分集合であるとする．$z_0 \in \Sigma$ を G の正則点とし，$-\tau(z_0) + 2|\theta_0|^2 > 0$ を満たすような $\theta_0 \in \mathbb{C}$ をとる．

このときある開集合 $z_0 \in W \subset \Sigma$ 上で，次の条件を満たす，空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $\psi = (N, h)\colon W \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて唯一つ存在する:

1. G は ψ の hyperbolic Gauss map である．

2. $\tau = \lambda u^2/2$ である．ただし，$\langle d\psi, d\psi\rangle = \lambda\,|dz|^2$，$u$ は ψ の angle function である．

3. $dh(z_0) = \theta_0\,dz + \bar{\theta}_0\,d\bar{z}$.

Proof. 条件 1〜3 を満たす ψ の存在を示そう．

まず，補題 4.8 により，偏微分方程式系

$$
\begin{aligned}
h_{zz} =&(\log\tau)_z h_z + Q\sqrt{\frac{-\tau+2|h_z|^2}{\tau}},\\
h_{z\bar{z}} =&-\frac{1}{2}\sqrt{\tau(-\tau+2|h_z|^2)},\\
h_z(z_0) =&\theta_0
\end{aligned}
$$

の局所解 h をとり，その定義域を W とする．そして，補題 4.11 により得られる (4.1) の解で定義 4.12 を満たすものを $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)^\top=(\psi_z,\psi_{\bar{z}},\eta,N)^\top$ とおく．そこで，$\Phi_{ij}=\langle\sigma_i,\sigma_j\rangle$，$(i,j=1,\ldots,4)$ と定め，ここで，(4.1) の $\mathcal{U},\mathcal{V}$ の成分を $\mathcal{U}=(U_{ij}),\mathcal{V}=(V_{ij})$ とおくと，Φ_{ij} は線型偏微分方程式系

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{ij})_z =&\langle(\sigma_i)_z,\sigma_j\rangle+\langle\sigma_i,(\sigma_j)_z\rangle\\
=&\sum_{k=1}^{4}\left(U_{ik}\langle\sigma_k,\sigma_j\rangle+U_{jk}\langle\sigma_i,\sigma_k\rangle\right)\\
=&\sum_{k=1}^{4}\left(U_{ik}\Phi_{kj}+U_{jk}\Phi_{ki}\right),
\end{aligned}
$$

$$
(\Phi_{ij})_{\bar{z}}=\sum_{k=1}^{4}\left(V_{ik}\Phi_{kj}+V_{jk}\Phi_{ki}\right),
$$

の解であることが分かる．また，これらは行列 $\Phi=(\Phi_{ij})$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\Phi_z &= \mathcal{U}\Phi+(\mathcal{U}\Phi)^\top,\\
\Phi_{\bar{z}} &= \mathcal{V}\Phi+(\mathcal{V}\Phi)^\top,
\end{aligned}
$$

とも書ける．

一方で，$\phi_{ij}=\phi_{ji}$ を

$$
\begin{aligned}
\phi_{11}=\phi_{22}=\phi_{13}=\phi_{23}=\phi_{14}=\phi_{24}=\phi_{34}=0,\\
\phi_{12}=\frac{\lambda}{2},\quad -\phi_{33}=\phi_{44}=1,
\end{aligned}
$$

と定めると，これらが Φ_{ij} と同じ線型偏微分方程式系の解となることが容易に確かめられる．補題 4.13 より二つの解は点 z_0 で一致する．このことから，W 上で二つの解は一致する．すると，

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_z,\psi_z\rangle=\langle\psi_{\bar{z}},\psi_{\bar{z}}\rangle=0,\\
\langle\psi_z,\psi_{\bar{z}}\rangle=\frac{\lambda}{2}>0,
\end{aligned}
$$

であり，$\psi\colon W\to\mathbb{L}^4$ は空間的な共形はめ込みであることが分かる．

次に $(\psi_z)_3=h_z,N_3=0,\eta_3=u$ となることを示そう．$\gamma=((\psi_z)_3,(\psi_{\bar{z}})_3,\eta_3,N_3)^\top$ とおくと，これらは σ の第 4 座標のみとりだしたものだから，

$$
\gamma_z=\mathcal{U}\gamma,\quad \gamma_{\bar{z}}=\mathcal{V}\gamma
$$

が成り立つ．一方で，補題 4.11 から $(h_z, h_{\bar{z}}, u, 0)$ も γ と同じ微分方程式系を満たすことが分かる．ゆえに，これらが z_0 で一致していれば，W 上で $(\psi_z)_3 = h_z, N_3 = 0, \eta_3 = u$ が得られる．定義 4.12 より，$N_3(z_0) = 0$ であった．すると，$\xi_3(z_0) = 1$ より $\eta_3(z_0) = u(z_0)$ が得られる．さらに，$(\xi_z)_3(z_0) = 0$ より

$$-\frac{u}{2}(\psi_z)_3(z_0) - \frac{2Q}{\lambda u}(\psi_{\bar{z}})_3(z_0) + \frac{u}{2}\left(h_z + \frac{2Q}{\tau}h_{\bar{z}}\right)(z_0) = 0$$

が成り立つ．この式の複素共役をとった式も考え合わせると，

$$\left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)(\psi_z)_3(z_0) = \left(\frac{u^2}{4} - \frac{4|Q|^2}{\lambda^2 u^2}\right)h_z(z_0)$$

となるので，$(\psi_z)_3(z_0) = h_z(z_0)$ が得られる．

以上のことを用いて，適切な平行移動を施すことで ψ が $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ への写像となることを示そう．まず，(4.1) より

$$N_z = \left(1 - \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\right)\psi_z - \frac{2h_{\bar{z}}^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} + A\eta$$

であった．次に $\tilde{h} = (0, 0, 0, h)^\top$ とおくと，$(\psi_z)_3 = h_z$ より

$$\begin{aligned}\langle \tilde{h}_z, \psi_z\rangle = \langle (\psi_z)_3, \psi_z\rangle = h_z^2, \quad \langle \tilde{h}_z, \psi_{\bar{z}}\rangle = |h_z|^2,\\ \langle \tilde{h}, \eta\rangle = uh_z, \quad \langle \tilde{h}, N\rangle = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．すると，

$$\begin{aligned}\tilde{h}_z =& \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\psi_z + \frac{2h_{\bar{z}}^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - uh_z\eta\\ =& \frac{2|h_z|^2}{\lambda}\psi_z + \frac{2h_{\bar{z}}^2}{\lambda}\psi_{\bar{z}} - A\eta\end{aligned}$$

が得られる．これから，$N_z + \tilde{h}_z = \psi_z$ が分かる．ゆえに，$\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて解 $\psi = (N, h)\colon W \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が存在することが分かる．このとき，ψ の単位法ベクトルは η であり，(4.7) から (4.10) と (C'.1) から (C'.4) を比較して，ψ の平均曲率 H について $H = 1/2$ を得る．以上より，空間的な CMC 1/2 共形はめ込み $\psi\colon W \to \mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ が存在することが分かった．

一方で u, λ の定め方から $2\tau = \lambda u^2$ である．さらに h の定め方から $dh(z_0) = \theta_0\, dz + \bar{\theta}_0\, d\bar{z}$ である．

次に N が沈め込みであることを確かめよう．$\langle \psi_z, \psi_z\rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}}\rangle = 0$ より，$\langle N_z, N_z\rangle = -h_z^2, \langle N_{\bar{z}}, N_{\bar{z}}\rangle = -h_{\bar{z}}^2$ を得る．また，$\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}}\rangle = \lambda/2$ より，$\langle N_z, N_{\bar{z}}\rangle = \lambda/2 - |h_z|^2$ も得られる．$z = u + iv$ を用いてこれらを書き直すと，

$$\begin{aligned}\langle N_u, N_u\rangle =& \lambda - h_u^2,\\ \langle N_v, N_v\rangle =& \lambda - h_v^2,\\ \langle N_u, N_v\rangle =& -h_u h_v\end{aligned}$$

となる．ここで，N_u, N_v が一次従属だと仮定する．ある $\alpha \in \mathbb{R}$ を用いて $N_v = \alpha N_u$ となる場合を考えると，$\langle N_v, N_v\rangle = \alpha^2\langle N_u, N_u\rangle$, $\langle N_u, N_v\rangle = \alpha\langle N_u, N_u\rangle$ となるから，

$$\begin{aligned}\lambda - h_v^2 =& \alpha^2(\lambda - h_u^2),\\ -h_u h_v =& \alpha(\lambda - h_u^2)\end{aligned}$$

となる．α を消去して，

$$
\begin{aligned}
h_u^2 h_v^2 = \alpha^2(\lambda - h_u^2)^2 =& (\lambda - h_v^2)(\lambda - h_u^2) \\
\lambda(\lambda - h_u^2 - h_v^2) =& 0
\end{aligned}
$$

を得る．$\lambda \neq 0$ より，$\lambda = h_u^2 + h_v^2$ となる．一方で $\lambda = -2\tau + 4|h_z|^2 = -2\tau + h_u^2 + h_v^2$ だから，$\tau = 0$ となってしまう．$N_u = \alpha N_v$ と書ける場合でも同様であるから，N_u, N_v は一次独立であり，N は沈め込みである．これによって，ψ の hyperbolic Gauss map が定義できる．

最後に ψ の hyperbolic Gauss map は G であることを示そう．ψ の hyperbolic Gauss map を $\mathcal{G}$ とおく．すなわち，$\xi = (\mathcal{G}, 1)$ となっているとする．すると

$$
\xi_z = -\frac{u}{2}\psi_z - \frac{2Q}{\lambda u}\psi_{\bar{z}} + \frac{u}{2}\left(h_z + \frac{2Qh_{\bar{z}}}{\tau}\right)\xi
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_z \rangle =& \langle \xi_z, \xi_z \rangle \\
=& 2 \cdot \frac{u}{2} \cdot \frac{2Q}{\lambda u} \cdot \frac{\lambda}{2} \\
=& Q = \langle G_z, G_z \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_{\bar{z}} \rangle =& \langle \xi_z, \xi_{\bar{z}} \rangle \\
=& \frac{\lambda u^2}{8} + \frac{2|Q|^2}{\lambda u^2} \\
=& \frac{\tau}{4} + \frac{|Q|^2}{\tau} \\
=& \frac{\mu}{2} = \langle G_z, G_{\bar{z}} \rangle
\end{aligned}
$$

である．さらに定義 4.12 から

$$
\mathcal{G}(z_0) = G(z_0), \quad \mathcal{G}_z(z_0) = G_z(z_0)
$$

であるから補題 3.6 より，$\mathcal{G} = G$ が得られる．

以上で，条件 1〜3 をみたす $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ の存在が示せた．

次にこのような ψ の一意性を示そう．$\psi = (N.h), \tilde{\psi} = (\tilde{N}, \tilde{h})\colon W \to \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ の二つを定理の仮定と条件 1〜3 をみたすような，空間的な CMC 1/2 共形はめ込みとする．また，$\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda\,|dz|^2$, $\langle d\tilde{\psi}, d\tilde{\psi} \rangle = \tilde{\lambda}\,|dz|^2$, ψ の単位法ベクトルを η，$\tilde{\psi}$ の単位法ベクトルを $\tilde{\eta}$，ψ の angle function を u, $\tilde{\psi}$ の angle function を $\tilde{u}$ とする．条件 2 より $\tau = \lambda u^2/2 = \tilde{\lambda}\tilde{u}^2/2$ であり，h, λ, u，$\tilde{h}, \tilde{\lambda}, \tilde{u}$ それぞれについて (C'.1) から (C'.4) が成り立っていることから，h_z，$\tilde{h}_z$ は (4.3) を満たしている．さらに，$\tilde{h}_z(z_0) = \theta_0 = h_z(z_0)$ より，解の一意性から $\tilde{h}_z = h_z$ である．ここで $\tau = \lambda u^2/2 = \tilde{\lambda}\tilde{u}^2/2$ と，式 (C'.4)

$$
\begin{aligned}
1 - u^2 = \frac{4|h_z|^2}{\lambda}, \\
1 - \tilde{u}^2 = \frac{4|h_z|^2}{\tilde{\lambda}}
\end{aligned}
$$

から，

$$\tilde{\lambda} = -2\tau + 4|h_z|^2 = \lambda,$$
$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{\tau}{-\tau + 2|h_z|^2}} = u$$

が分かる．すると，$\tilde{\sigma} = (\tilde{\psi}_z, \tilde{\psi}_{\bar{z}}, \tilde{\eta}, \tilde{N})^\top$ は $\sigma = (\psi_z, \psi_{\bar{z}}, \eta, N)^\top$ と同じく (4.1) の解になっていることが分かる．しかも，z_0 にて定義 4.12 と同じ条件をみたすから，解の一意性より $\tilde{\sigma} = \sigma$ が成り立つ．

ゆえに，$\tilde{N} = N$ であり，$\tilde{\psi}$ と ψ は $\mathbb{R}$ 方向の平行移動の差をのぞいて一致していることが分かる． □

4.4 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ の hyperbolic Gauss map について

第 4 章の冒頭で述べたように，調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{H}^2$ から $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 内の CMC 1/2 曲面を構成する方法を模倣することで，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ という空間についても，調和写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$ から $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ 内の CMC 1/2 曲面を構成する方法を与えることができる．ただし，$\mathbb{R}^1_1$ とは，$\mathbb{R}$ の座標を t としたとき，$\mathbb{R}$ に $-dt^2$ という計量を与えたものとする．ここでは $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ 内の曲面の構成法の全てを述べることはせず，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}^1_1$ 内の CMC 1/2 曲面を構成するにあたって，重要な役割を担う hyperbolic Gauss map を定めるにとどめる．

$\mathbb{R}^4$ の座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) とする．このとき $\mathbb{L}^4$ を，$\mathbb{R}^4$ に $\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ という擬計量を与えた擬リーマン多様体とする．また，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ を

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

という多様体と定め，$\mathbb{L}^4$ から定まる誘導計量を入れる．

さて，単連結リーマン面 $(\Sigma, z = u + iv)$ から $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ への空間的な共形はめ込み $\psi = (N, h)\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ を考える．このとき，h_z, $h_{\bar{z}}$ の零点は孤立しているものとする．また，$\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$, $\lambda > 0$ とおく．

ψ の $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ 内のでの単位法ベクトルを η とする．すなわち，$\langle \eta, \eta \rangle = -1$ であり，特に η は $\eta\colon \Sigma \to \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ であるとする．ただし，

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 | x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$$

と定める．ここで，$\eta = (\hat{N}, u)$ と表すこととすると，$u > 0$ である．また，単位法ベクトル η は，$\langle d\psi, \eta \rangle = 0$ を満たす．さらに $N\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$ であることから，N は $T\mathbb{S}^2$ に直交している．加えて N の第 4 座標は 0 であるから，N は $T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1) = T\mathbb{S}^2 \oplus T\mathbb{R}^1_1$ に直交している．ゆえに $\langle N, \eta \rangle = 0$ を満たす．

さて，

$$\xi = \frac{1}{u}(\eta + N)$$

とおくと，これは

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0$$

を満たす．特に，ξ の第 4 座標は 1 であるから，ある写像 $G\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{L}^3$ を用いて，$\xi = (G, 1)$ と表せる．

定義 4.15. $G\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$ を $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ の hyperbolic Gauss map とよぶ.

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ の場合と同様に，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ への CMC 1/2 はめ込みに関する hyperbolic Gauss map は，$\mathbb{S}^2$ への調和写像となることが証明できる．

上のように hyperbolic Gauss map を定義した後は，$\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$ のときと同じように $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の手法を模倣することで，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1_1$ 内の曲面の構成法を得られる．

参考文献

[AAW] Reiko Aiyama, Kazuo Akutagawa and Tom YH Wan, “Minimal maps between the hyperbolic discs and generalized Gauss maps of maximal surfaces in the anti-de Sitter 3-space”, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 52.3 (2000): 415-429.

[AiAk] Reiko Aiyama and Kazuo Akutagawa, “Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the 3-sphere”, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 52.1 (2000): 95-105.

[AkNi] Kazuo Akutagawa and Seiki Nishikawa, “The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space”, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 42.1(1990): 67-82.

[Dan1] Benoît Daniel,“Isometric immersions into 3- dimensional homogeneous manifolds”, Commentarii Mathematici Helvetici 82.1 (2007): 87-131.

[Dan2] Benoît Daniel, “The Gauss Map of Minimal Surfaces in the Heisenberg Group”, International Mathematics Research Notices 2011.3(2011): 674-695.

[DFM] Benoît Daniel, Isabel Fernández and Pablo Mira, “The Gauss map of surfaces in $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{R})$”, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 52.3-4 (2015): 507-528.

[EeLe] James Eells and Luc Lemaire, “A report on harmonic maps”, Bulletin of the London mathematical society 10.1 (1978): 1-68.

[FeMi] Isabel Fernández and Pablo Mira, “Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$”, American Journal of Mathematics 129.4 (2007): 1145-1181.

[HST] Laurent Hauswirth, Ricardo Sa Earp and Eric Toubiana, “Associate and conjugate minimal immersions in $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{R}$”, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 60.2(2008): 267-286.

[Ino] 井ノ口順一, 現代基礎数学 18 曲面と可積分系, 株式会社 朝倉書店, 2015.

[Ito] 伊藤 柊介, “Lorentzian BCV 空間内の平均曲率一定な空間的曲面の Gauss 写像について”, 東京工業大学修士論文, 2020.

[Kan] 金子 晃，ライブラリ数理・情報系の数学講義=4 微分方程式講義，株式会社 サイエンス社，2014.

[Ken] Katsuei Kenmotsu, “Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature”, Mathematische Annalen 245.2(1979): 89-99.

[Law] H.Blaine Lawson, Lectures on Minimal Submanifolds Volume I, Mathematics Lectures Series 9, Publish or Perish, Berkeley, 1980.

[Lee] Hojoo Lee, “Maximal surfaces in Lorentzian Heisenberg space”, Differential Geometry and its Applications 29.1 (2011): 73-84.

[ScYa] R.Schoen and S.T.Yau, Lectures on harmonic maps, Conference Proceedings and Lecutre Notes in Geometry and Topology Volume II, International Press, 1997.

[Spi] Michael Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry v.1, Publish or Perish Inc., 1999.

[UmYa] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ- （改訂版）, 株式会社 裳華房, 2015.

[Ura] 浦川肇, 変分法と調和写像, 株式会社 裳華房, 1990.