重根を持つ 3 次多項式に対する Durand-Kerner 法の大域収束性について

奥田昇

東京工業大学大学院理学院数学系
川平研究室修士課程二年

1　要旨

本論文では，複素一変数多項式に対する数値解法である Durand-Kerner 法の「大域収束性」について考察する．Durand-Kerner 法は Newton 法に似た反復解法である．多項式 p に対する Newton 法 N_p は $z \in \mathbb{C}$ に対し $N_p(z) = z - p'(z)^{-1}p(z)$ と定義され，N_p を適当な初期値 $z \in \mathbb{C}$ に対し繰り返し作用させてできる軌道 $\{z, N_p(z), N_p(N_p(z)), \ldots\}$ が p の根に収束するものであり，1 次元の力学系と見ることができる．一方 n 次多項式 $p(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \alpha_i)$ に対する Durand-Kerner 法 F_p は

$$F_p(\zeta) \coloneqq \zeta - \left(\frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1\, j\neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_j)} \right)_{i=1}^{n}$$

と定義され，F_p を適当な初期値 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に繰り返し作用させてできる軌道

$$\{\zeta, F_p(\zeta), F_p(F_p(\zeta)), \ldots\}$$

が p の根を並べたベクトル $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に収束するものであり，n 次元の力学系として見ることができる．

Newton 法では多項式の複数の根のうち一つのみが得られるのに対し，Durand-Kerner 法ではすべての根を同時に得られることが特徴である．また，5 章で見るように Durand-Kerner 法，Newton 法ともに多項式が単根のみ持つ場合は局所収束することが知られている．すなわち，$|z - \alpha_1|$ が十分小さいとき z を初期値にもつ軌道 $\{z, N_p(z), N_p(N_p(z)), \ldots\}$ は α_1 に収束し，同様に $|\zeta - (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|$ が十分小さければ ζ を初期値にもつ軌道 $\{\zeta, F_p(\zeta), F_p(F_p(\zeta)), \ldots\}$ は $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に収束する．

一方，Newton 法 N_p または Durand-Kerner 法 F_p の軌道が，$\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^n$ のほとんどいたるところの初期値 z または ζ について p の何れかの根 α_i または $(\alpha_{\tau(1)}, \ldots, \alpha_{\tau(n)})$ に収束することを，N_p または F_p が大域収束するという．ただし，ここで τ は変数の添え字の置換を表す．7 章で述べるように，Newton 法が「大域収束」しない多項式の例が知られているのに対し，Durand-Kerner 法においては「大域収束性」を持たない多項式の例は知られていない．したがって，Durand-Kerner 法における「大域収束性」の有無は興味深い．8 章，9 章で見るように，多項式 p が 2 次の場合と $p(z) = z^3$ の場合には，Durand-Kerner 法の「大域収束性」について肯定的な結果が知られている ([1])．本論文では 3 次多項式 p が 2 重根，単根を一つずつ持つ場合の Durand-Kerner 法 F_p について調べた．

6 章で見るように，$p(z)=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}z^i$ のとき，$F_p(\zeta)$ は Dochev 平面 $H := \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \zeta_i = -a_1\}$ に属することが知られており，したがって，F_p は n 次元の力学系であったけれども，H 上の力学系，すなわち $n-1$ 次元の力学系に帰着される．p が 2 次多項式の場合はこれで F_p はすでに 1 次元の力学系に帰着されている．$p(z)=z^3$ の場合はこれだけでは F_p はまだ 2 次元の力学系に帰着されたに過ぎないが，次の対称性，すなわち任意の $\alpha \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$F_p(\alpha\zeta) = \alpha F_p(\zeta). \tag{1.1}$$

によってさらに 1 次元落として，F_p を 1 次元の力学系に帰着できる．このように 1 次元の力学系に帰着することによって p が 2 次多項式の場合と $p(z)=z^3$ の場合に大域収束性が示された．これに対し p が 2 重根，単根を 1 つずつ持つ場合は (1.1) が得られないため二次元の力学系として解析した．大域収束性の有無についてはわからず，また，p が重根を持つために非自明な局所的な収束性の有無についても明らかにはしていないが，F_p の収束領域が開集合を含むことや F_p に埋め込まれた力学系の存在は示すことができた．

2　Durand-Kerner 法の定義

この章では不動点，軌道などの用語と Durand-Kerner 法の定義を述べる．$n \in \mathbb{N}$ とする．

定義 2.1. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合，$F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は正則写像とする．$\zeta \in U$ が F の**不動点**であるとは $F(\zeta)=\zeta$ であることをいう．さらに，$\zeta \in U$ に対し $F^{(0)}(\zeta) := \zeta$ と書き，$k \geq 0$ に対して，$F^{(k)}(\zeta) \in U$ である場合に限り，$F^{(k+1)}(\zeta) := F(F^{(k)}(\zeta))$ と定める．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $F^{(k)}(\zeta)$ が定まるとき $(F^{(k)}(\zeta))_{k=0}^{\infty}$ を初期値 ζ での F による**軌道**という．

定義 2.2. p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式とし，$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_0 = 1$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対し $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}z^i$ であるとする．このとき $1 \leq i < j \leq n$ ならば $\zeta_i \neq \zeta_j$ であるような $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$F_p(\zeta) := \left(\zeta_i - \frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1\, j\neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^{n} \tag{2.1}$$

と定める．F_p を p に対する **Durand-Kerner 法**，または略して **DK 法**という．また，

$$\mathrm{Dom}(F_p) := \{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \mid i \neq j \text{ ならば} \zeta_i \neq \zeta_j\}$$

と書く．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, 0 \leq i < j \leq n$ ならば $\alpha_i \neq \alpha_j, p(z) = \prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ とすると $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は F_p の不動点である．また，

$$S_n := \{\tau : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \mid \tau \text{は全単射}\}$$

とかき，$\tau \in S_n$ に対し $\alpha_\tau := (\alpha_{\tau(1)}, \ldots, \alpha_{\tau(n)})$ とかく．このとき α_τ もまた F_p の不動点である．

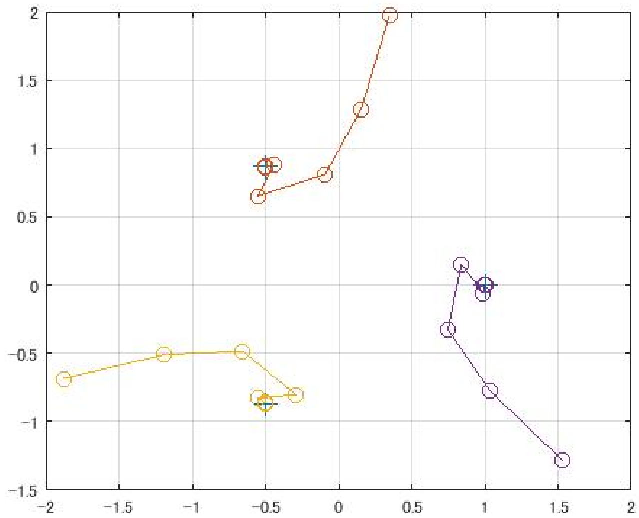


図 1: 3 次多項式 $P(z) = z^3 - 1$ に関して，初期値を $(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \zeta_3^{(0)}) = (2e^{\frac{4}{9}\pi i}, 2e^{\frac{10}{9}\pi i}, 2e^{\frac{16}{9}\pi i})$ として Durand-Kerner 法を行った．MATLAB を用いた．赤が第一成分黄色が第二成分，紫が第三成分を表す．

3　準備

この章では吸引的不動点や共役などの用語の定義をする．[2] の第 6 章を参照．$n \in \mathbb{N}$ とする．

定義 3.1. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とする．正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$，双正則写像 $\Phi : U \cup F(U) \longrightarrow \Phi(U \cup F(U)) \subset \mathbb{C}^n$ に対し **F の Φ による共役** $G : \Phi(U) \longrightarrow \Phi(F(U))$ を $\zeta \in \Phi(U)$ に対し

$$G(\zeta) = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(\zeta)$$

と定める．

定義 3.2. $U, V \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とし，正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n, G : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ に対して **F と G が共役**であるとは，双正則写像 $\Phi : U \cup F(U) \longrightarrow \Phi(U \cup F(U)) \subset \mathbb{C}^n$ が存在して G が F の Φ による共役であることをいう．

命題 3.3. $U, V \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とし，正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n, G : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ に対して F と G が共役であるという関係は同値関係である．

命題 3.4. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とする．正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$，双正則写像 $\Phi : U \cup F(U) \longrightarrow \Phi(U \cup F(U)) \subset \mathbb{C}^n, F$ の Φ による共役 G に対し (i), (ii) は同値である．

(i)　$\zeta \in U$ が F の不動点．
(ii)　$\Phi(\zeta) \in \Phi(U)$ が G の不動点．

定義 3.5. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とする．また，$\alpha \in U$ は正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の不動点とする．このとき α が F の**吸引的不動点**であるとはヤコビ行列 $F'(\alpha)$ の固有値がすべて絶対値 1 未満であることと定める．また，α が F の吸引的不動点のとき α の**吸引領域**を $\{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(\zeta) = \alpha\}$ と定める．

命題 3.6. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とする．また，$\alpha \in U$ は正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の吸引的不動点とし，D は α の吸引領域とする．このとき $0 < s < 1$ と $0 < \delta$ が存在して次の (i) から (iii) が成立する．

(i) $|\alpha - \zeta| < \delta$ ならば $|F(\zeta) - \alpha| < s|\alpha - \zeta|$.
(ii) $\{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\alpha - \zeta| < \delta\} \subset D$.
(iii) D は開集合である．

命題 3.7. $U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とする．正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$，双正則写像 $\Phi : U \cup F(U) \longrightarrow \Phi(U \cup F(U)) \subset \mathbb{C}^n$, F の Φ による共役 G に対し (i),(ii) は同値である．

(i) α が F の吸引的不動点.
(ii) $\Phi(\alpha)$ が G の吸引的不動点.

また，α が F の吸引的不動点 のとき (iii),(vi) は同値である．

(iii) D が α の（F に関する）吸引領域.
(vi) $\Phi(D)$ が $\Phi(\alpha)$ の（G に関する）吸引領域.

4 Durand-Kerner 法の一般的な性質

Duraand-Kerner 法が持ついくつかの対称性を挙げる．$n \in \mathbb{N}$, p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式とする．また $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対し $p(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ とする．

命題 4.1. $\tau \in S_n$ とし，$\Phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$，$\Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) := (\zeta_{\tau(1)}, \ldots, \zeta_{\tau(n)})$ と定めると $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$\Phi \circ F_p \circ \Phi^{-1}(\zeta) = F_p(\zeta). \tag{4.1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\Phi \circ F_p \circ \Phi^{-1}(\zeta) &= \Phi \circ F_p(\zeta_{\tau(1)}, \ldots, \zeta_{\tau(n)}) \\
&= \Phi\left(\zeta_{\tau^{-1}(i)} - \frac{p(\zeta_{\tau^{-1}(i)})}{\prod_{j=1, j\neq i}^n (\zeta_{\tau^{-1}(i)} - \zeta_{\tau^{-1}(j)})}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_{\tau^{-1}(\tau(i))} - \frac{p(\zeta_{\tau^{-1}(\tau(i))})}{\prod_{j=1, j\neq i}^n (\zeta_{\tau^{-1}(\tau(i))} - \zeta_{\tau^{-1}(\tau(j))})}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n (\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^n .
\end{aligned}$$

□

命題 **4.2.** $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$，$\varphi(z) \coloneqq z + \alpha$，$\varPhi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$，$\varPhi(\zeta) \coloneqq (\zeta_i + \alpha)_{i=1}^n$ と定めると $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$\varPhi \circ F_{p\circ\varphi} \circ \varPhi^{-1}(\zeta) = F_p(\zeta). \tag{4.2}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\varPhi \circ F_{p\circ\varphi} \circ \varPhi^{-1}(\zeta) &= \varPhi\left(\zeta_i - \alpha - \frac{p \circ \varphi(\zeta_i - \alpha)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n((\zeta_i - \alpha) - (\zeta_j - \alpha))}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \alpha - \frac{p \circ \varphi(\zeta_i - \alpha)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n((\zeta_i - \alpha) - (\zeta_j - \alpha))} + \alpha\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^n.
\end{aligned}$$

□

命題 **4.3.** $t \in \mathbb{C}$，$q(z) = \prod_{i=1}^n (z - t\alpha_i)$, また $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$，$T(\zeta) \coloneqq (t\zeta_i)_{i=1}^n$ と定めると $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$T \circ F_p \circ T^{-1}(\zeta) = F_q(\zeta). \tag{4.3}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
T \circ F_p \circ T^{-1}(\zeta) &= T\left(t^{-1}\zeta_i - \frac{p(t^{-1}\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(t^{-1}\zeta_i - t^{-1}\zeta_j)}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \frac{tp(t^{-1}\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(t^{-1}\zeta_i - t^{-1}\zeta_j)}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \frac{t\prod_{i=1}^n (t^{-1}\zeta_i - \alpha_i)}{(t^{-(n-1)}\prod_{j=1, j\neq i}^n(\zeta_i - \zeta_j))}\right)_{i=1}^n \\
&= \left(\zeta_i - \frac{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - t\alpha_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^n.
\end{aligned}$$

□

命題 **4.4.** p の次数は $n \geq 3$ とする．$q(z) \coloneqq \prod_{i=1}^{n-1} (z - \alpha_i)$，$Q : \{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \mid \zeta_n = \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$，$Q(\zeta) \coloneqq (\zeta_i)_{i=1}^{n-1}$ と定めると $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_q)$ に対し

$$Q \circ F_p \circ Q^{-1}(\zeta) = F_q(\zeta). \tag{4.4}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
Q \circ F_p \circ Q^{-1}(\zeta) &= Q \circ F_p(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \alpha_n) \\
&= Q\left(\zeta_i - \frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^n \Bigg|_{\zeta_n=\alpha_n} \\
&= \left(\zeta_i - \frac{p(\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^n(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^{n-1} \Bigg|_{\zeta_n=\alpha_n} \\
&= \left(\zeta_i - \frac{q(\zeta_i)(\zeta_n - \alpha_n)}{(\zeta_n - \alpha_n)\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^{n-1} \\
&= \left(\zeta_i - \frac{q(\zeta_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n-1}(\zeta_i - \zeta_j)}\right)_{i=1}^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

5 Durand-Kerner 法と Newton 法

多項式 p が単根のみ持つ場合，Durand-Kerner 法は局所収束性を持つが，これは Duranad-Kerner 法が高次元の Newton 法として書けることから従う．この章ではこのことを見る．$n \in \mathbb{N}$ とする．

定義 5.1. U は $\mathbb{C}^n$ の開集合，$G : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ とする．このときヤコビ行列 $G'(\zeta)$ が正則行列であるような $\zeta \in U$ に対し

$$N_G(\zeta) = \zeta - G'(\zeta)^{-1}G(\zeta)$$

と定め，N_G を G に対する **Newton 法**と呼ぶ.

定理 5.2. U は $\mathbb{C}^n$ の開集合，$G : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は正則関数とする．また，点 $\beta \in U$ は $G(\beta) = (0, \ldots, 0)$ かつ $G'(\beta)$ は正則行列なるものとする．このとき β は N_G の吸引的不動点であり，さらに N_G は β において局所二次収束する．すなわち，ある $\delta, c > 0$ が存在して $\zeta \in U$ に対し

$$|\zeta - \beta| < \delta \text{ならば} \ |N_G(\zeta) - \beta| \leq c|\zeta - \beta|^2.$$

Proof. 任意の n 行 m 列行列 A に対し，

$$\|A\| := \max\{|A\xi| \mid \xi \in \mathbb{C}^m, |\xi| = 1\}$$

と定める．すると $\det(G'(\alpha)) \neq 0$ ゆえ $\|G'(\alpha)\| \neq 0$ である．また $G'(\zeta)$ は ζ に関して連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して $|\zeta - \alpha| < \delta$ となる任意の δ に対し

$$\|G'(\zeta)\| > \frac{\|G'(\alpha)\|}{2} \tag{5.1}$$

となる．そこで $|\zeta - \alpha| < \delta$ ととると，

$$\begin{aligned} |\alpha - (\zeta - G'(\zeta)^{-1}G(\zeta))| &= |G'(\zeta)^{-1}(G'(\zeta)(\alpha - \zeta) + G(\zeta))| \\ &\leq \|G'(\zeta)^{-1}\| \, |G'(\zeta)(\alpha - \zeta) + G(\zeta)| \end{aligned} \tag{5.2}$$

である．$G = (G_1, \ldots, G_n)$ とかくと，各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し G_i は正則ゆえ，$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ に対し

$$\begin{aligned} |\nu| &:= \sum_{k=1}^{n} \nu_k \\ c_{i,\nu} &:= \frac{1}{\nu_1! \cdots \nu_n!} \frac{\partial G_i(\alpha)}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \cdots \partial \zeta_n^{\nu_n}} \end{aligned}$$

とかくと

$$\begin{aligned} G_i(\zeta) &= \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0} c_{i,\nu}(\zeta_1 - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (\zeta_n - \alpha_n)^{\nu_n} \\ &= G_i(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i(\alpha)}{\partial \zeta_k}(\zeta_k - \alpha_k) + \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0 \\ |\nu| > 1}} c_{i,\nu}(\zeta_1 - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (\zeta_n - \alpha_n)^{\nu_n} \end{aligned}$$

である．したがって $E(\zeta) = G'(\alpha)(\alpha - \zeta) + G(\zeta)$ とおくと E の各成分は α を中心とした冪級数展開において二次以上の項しか持たないから，ある $c > 0$ が存在して $|\zeta - \alpha| < \delta$ のとき

$$|E(\zeta)| \leq c|\zeta - \alpha|^2.$$

よって (5.2)，(5.1) から

$$\begin{aligned} |\alpha - (\zeta - G'(\zeta)^{-1}G(\zeta))| &\leq \|G'(\zeta)^{-1}\| \, |G'(\zeta)(\alpha - \zeta) + G(\zeta)| \\ &\leq \|G'(\zeta)^{-1}\| c|\zeta - \alpha|^2 \\ &\leq 2c\|G'(\alpha)^{-1}\| \, |\zeta - \alpha|^2. \end{aligned}$$

□

命題 5.3 ([3])**.** p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式とし，$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_0 = 1$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対し $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i$ であるとする．$m, l \in \mathbb{N}, m \leq l$ に対し

$$\varphi_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_l) \coloneqq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq l} \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_m} \tag{5.3}$$

とおき，$1 \leq i \leq n$ に対し

$$f_i(\zeta) \coloneqq (-1)^i \varphi_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - a_i \tag{5.4}$$

とおき

$$G(\zeta) \coloneqq (f_1(\zeta), \ldots, f_n(\zeta)) \tag{5.5}$$

とおく．このとき，G' で G のヤコビアン $(\partial f_i / \partial \zeta_j)_{ij}$ を表すと，任意の $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対して

$$F_p(\zeta) = \zeta - G'(\zeta)^{-1} G(\zeta) = N_G(\zeta). \tag{5.6}$$

Proof. まず

$$G'(\zeta)^{-1} = \left(-\zeta_i^{n-j} \Big/ \prod_{k=1, k \neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_k) \right)_{i,j} \tag{5.7}$$

が証明できる．(5.7) の証明は難しくないが付録にゆずる．さて (5.7) から

$$G'(\zeta)^{-1} G(\zeta) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} (-\zeta_i^{n-j} f_j(\zeta))}{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_k)} \right)_{i=1}^{n}$$

である．第 i 成分の分子を整理すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (-\zeta_i^{n-j} f_j(\zeta)) &= \sum_{j=1}^{n} (-\zeta_i^{n-j} (-1)^j \varphi_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)) + \sum_{j=1}^{n} \zeta_i^{n-j} a_j \\ &= -\prod_{j=1}^{n} (\zeta_i - \zeta_j) + p(\zeta_i) \\ &= p(\zeta_i). \end{aligned}$$

よって $G'(\zeta)^{-1} G(\zeta) = \left(\dfrac{p(\zeta_i)}{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_k)} \right)_{i=1}^{n}$ がいえた． □

定理 5.4. p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式，$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, p(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ とし，$1 \le i < j \le n$ のとき $\alpha_i \ne \alpha_j$ とする．このとき任意の $\tau \in S_n$ に対し，$\alpha_\tau := (\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)})$ とかくと，ある $\delta, c > 0$ が存在して任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $|\zeta - \alpha_\tau| < \delta$ ならば $|F_p(\zeta) - \alpha_\tau| \le c|\zeta - \alpha_\tau|^2$.

Proof. 命題 5.3 と Newton 法の局所二次収束性すなわち定理 5.2 から従う． □

特に，重根を持たない多項式に対する Durand-Kerner 法は局所収束することが従う．

系 5.5. p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式，$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, p(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ とし，任意の $1 \le i < j \le n$ に対し $\alpha_i \ne \alpha_j$ とする．このとき任意の $\tau \in S_n$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$|\zeta - \alpha_\tau| < \delta \text{ならば} \lim_{k\to\infty} F_p^{(k)}(\zeta) = \alpha_\tau.$$

6 Dochev 平面

Durand-Kerner 法の持つ強い性質として，$F_p(\zeta)$ が Dochev 平面に落ちることがある．これによって Durand-Kerner 法は $\mathrm{Dom}(F_p)$ より一次元低い Dochev 平面上の力学系に帰着できる．[3] にしたがう．p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式，$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n = 1$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対し $p(z) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} z^i$ であるとする．

定理 6.1. $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ にたいし $F_p(\zeta) = (\zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(1)})$ とかくと

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^{(1)} = -a_1. \tag{6.1}$$

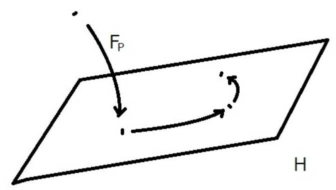
Proof. G は命題 5.3 で定めたものとすると，命題 5.3 から $F_p(\zeta) = \zeta - G'(\zeta)^{-1} G(\zeta)$ だから，両辺に $G'(\zeta)$ をかけて

$$G'(\zeta)(F_p(\zeta) - \zeta) = -G(\zeta) \tag{6.2}$$

である．ここで G の第一成分は G のとり方によって $f_1(\zeta) = -\sum_{i=1}^n \zeta_i - a_1$ であることに注意すると $G'(\zeta)$ の 1 行目は $(\partial f_1/\partial\zeta_1, \dots, \partial f_1/\partial\zeta_n) = (-1, \dots, -1)$ である．よって (6.2) の左辺第一成分は $\sum_{i=1}^n (-(\zeta_i^{(1)} - \zeta_i))$ であるから，(6.2) の両辺の第一成分の比較によって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (-(\zeta_i^{(1)} - \zeta_i)) &= -f_1(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^n \zeta_i + a_1.\end{aligned}$$

□



定義 6.2.

$$H_p := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \zeta_i = -a_1 \right\}$$

とおき H_p を F_p の **Dochev 平面**と呼ぶ．多項式 p が何を指すか文脈により明らかなとき，p を省略して単に H と書くことがある．

系 6.3. $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$F_p(\zeta) \in H_p.$$

7 大域収束性

大域収束性を定義し Newton 法が大域収束しないような多項式の例 [4] を見る．

定義 7.1. p は次数 $n > 1$ の複素一変数多項式，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$ とする．このとき Newton 法 N_p が**大域収束**するとは，a.e. $z \in \mathbb{C}$ に対しある j が存在し，$\lim_{k\to\infty} N_p^{(k)}(z) = \alpha_j$ となることと定める．Durand-Kerner 法 F_p が**大域収束**するとは，a.e. $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対しある $\tau \in S_n$ が存在し，$\lim_{k\to\infty} F_p^{(k)}(\zeta) = \alpha_\tau$ となることと定める．

Newton 法は一般には大域収束しないことが知られている．

定義 7.2. $n \in \mathbb{N}, U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とし，$F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は正則写像とする．$k \in \mathbb{N}$ に対し $\alpha \in U$ が F の k **周期点**であるとは $F^{(k)}(\alpha) = \alpha$ であって $0 \leq j < k$ である j に対し $F^{(j)}(\alpha) \neq \alpha$ となることと定める．また，α が F の k 周期点のとき $\{F^{(0)}(\alpha), \ldots, F^{(k-1)}(\alpha)\}$ は F の k **周期軌道**であるという．さらに，$O = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ が F の k 周期軌道のとき O が F の**吸引的な** k **周期軌道**であるとはヤコビ行列 $F^{(k)\prime}(\alpha_j)$ の全ての固有値の絶対値が 1 未満であることと定める．

命題 7.3. $n, k \in \mathbb{N}, U \subset \mathbb{C}^n$ は開集合とし，$O = \{F^{(0)}(\alpha), \ldots, F^{(k-1)}(\alpha)\}$ は正則写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の吸引的な k 周期軌道とする．このとき $0 < s < 1$ と $0 < \delta$ が存在して次の (i)，(ii) が成立する．

(i) 任意の j に対し $|F^{(j)}(\alpha) - \zeta| < \delta$ ならば $|F^{(j+k)}(\zeta) - \alpha| \leq s|F^{(j)}(\zeta) - \alpha|$.

(ii) 任意の j に対し $|F^{(j)}(\alpha) - \zeta| < \delta$ ならば $\lim_{i\to\infty} F^{(j+ik)}(\zeta) = F^{(j)}(\alpha)$.

例 7.4 ([4]). $n = 1$ の場合を考える．多項式 p を $p(z) = z^3 - 2z + 2$ とおき $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を p の根とする．このときある空でない開集合 $O \subset \mathbb{C}$ が存在して，任意の $z \in O$ に対し初期値 z での p に対する Newton 法の軌道 $(N_p^{(k)}(z))_{k=0}^{\infty}$ は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のいずれにも収束しない．

Proof. 多項式 $p(z) = z^3 - 2z + 2$ に対する Newton 法 $f = N_p$ は

$$f(z) = z - \frac{z^3 - 2z + 2}{3z^2 - 2}$$

である．f が吸引的な二周期軌道をもつことをいえば十分である．いま，$f(0) = 1, f(1) = 0$ であることから $\{0, 1\}$ は f の二周期軌道である．$\{0, 1\}$ が吸引的であることをいうには $|f'(0)f'(1)| < 1$ であればよい．いま $f'(z) = (6z^4 - 12z^2 + 12z)/(3z^2 - 2)^2$ だから $f'(0) = 0$．とくに $f'(0)f'(1) = 0$ だから $\{0, 1\}$ は吸引的な 2 周期軌道であることがいえた． □

8　2 次多項式に対する Durand-Kerner 法の大域収束性

定理 8.1. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ とし，$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$ とする．このとき a.e. $\zeta \in \mathbb{C}^2$ に対し，ある $\tau \in S_2$ が存在し

$$\lim_{n \to \infty} F_p^{(n)}(\zeta) = (\alpha_{\tau(1)}, \alpha_{\tau(2)}).$$

Proof. (1) $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合
$q(z) = z^2, \Phi(\zeta) := (\zeta_1 + \alpha_1, \zeta_2 + \alpha_1)$ とおくと，命題 4.2 から $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$\Phi \circ F_q \circ \Phi^{-1}(\zeta) = F_p(\zeta).$$

よって F_p と F_q は共役だから $p(z) = z^2$ すなわち $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ と仮定してよい．さて p に対する Durand-Kerner 法 F_p は

$$F_p(\zeta) = \zeta - \left(\frac{\zeta_1^2}{\zeta_1 - \zeta_2}, \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2 - \zeta_1} \right)$$

であり Dochev 平面は

$$H = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta_1 + \zeta_2 = 0\}$$

である．いま F_p を H に制限して $F_H := F_p|H$ とおくと，$(\zeta_1, -\zeta_1) \in \mathrm{Dom}(F_H)$ に対し，

$$F_H(\zeta_1, -\zeta_1) \;\; = \;\; 2^{-1}\zeta_1(1, -1).$$

そこで $P : H \longrightarrow \mathbb{C}, P(\zeta_1, -\zeta_1) = \zeta_1$ と定め，F_H の共役 $G := P \circ F_H \circ P^{-1}$ をとると，$z \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対し

$$G(z) = 2^{-1}z.$$

よって F_H は $z \longmapsto z/2$ に共役である．$z \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対し $G^{(n)}(z) \to 0$ $(n \to \infty)$ であることに注意すると，$\zeta \in \mathrm{Dom}(F_H) = H \cap \mathrm{Dom}(F_p) = \{(\zeta_1, -\zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta_1 \neq 0\}$ に対し $F_H^{(n)}(\zeta) \to P^{-1}(0) = (0,0)$ $(n \to \infty)$ である．よって $F_p(\zeta) \neq (0,0)$ となるとき $F_p^{(n)}(\zeta) \to (0,0)$ $(n \to \infty)$．一方 $F_p(\zeta) \notin \mathrm{Dom}(F_H)$ すなわち $F_p(\zeta) = (0,0)$ となる ζ は $\{\zeta_1 = 0\} \cup \{\zeta_2 = 0\}$ の点に限られるが，この集合は測度 0 である．

(2) $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合

$q(z) = (z - (\alpha_1 - \alpha_2)/2)(z - (\alpha_2 - \alpha_1)/2), \Phi(\zeta) := \zeta + ((\alpha_1 + \alpha_2)/2, (\alpha_1 + \alpha_2)/2)$ とおくと命題 4.2 から

$$\Phi \circ F_q \circ \Phi^{-1} = F_p$$

ゆえ F_p と F_q は共役．さらに $r(z) = (z+1)(z-1), \Psi(\zeta) := ((\alpha_1 - \alpha_2)/2)^{-1}\zeta$ とおくと命題 4.3 から

$$\Psi \circ F_q \circ \Psi = F_r$$

ゆえ F_q と F_r は共役である．以上から F_p と F_r は共役だから，$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ と仮定してよい．さて $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$F_p(\zeta) = \zeta - \left(\frac{\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1 - \zeta_2}, \frac{\zeta_2^2 - 1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right)$$

であり，Dochev 平面 $H = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta_1 + \zeta_2 = 0\}$ である．そこで F_p を H に制限して $F_H := F_p|H$ とおくと

$$F_H(\zeta) = F_H(\zeta_1, -\zeta_1) = \frac{\zeta_1^2 + 1}{2\zeta_1}(1, -1)$$

である．そこで $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合と同じ P によって $G := P \circ F_H \circ P^{-1}$ とおくと

$$G(z) = (z^2 + 1)/2z$$

である．さらにメビウス変換 $\varphi(z) = (z+1)/(z-1)$ によって $g := \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ とおけば

$$g(w) = w^2$$

である．以上から F_H は $w \mapsto w^2$ に共役である．$\hat{\mathbb{C}}$ 上の力学系 $w \mapsto w^2$ の吸引的不動点は $0, \infty$ であり，∞ の吸引領域は $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$，0 の吸引領域は $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ であることに注意する．F_H の吸引的不動点は $(1,-1), (-1,1)$ であり，$(1,-1)$ の吸引領域は $\{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\zeta_1) > 0\}$ で $(-1,1)$ の吸引領域は $\{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\zeta_1) < 0\}$ である．$F_p^{-1}(\{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\zeta_1) = 0\})$ は測度 0 だから a.e. $\zeta \in \mathbb{C}^2$ に対し $F_p^{(n)} \to (1,-1)$ または $F_p^{(n)} \to (-1,1)$ $(n \to \infty)$ がいえた． □

9　3重根を持つ3次多項式に対する Durand-Kerner 法の大域収束性

[1] に従い $p(z) = z^3$ に対する Durand-Kerner 法の大域収束性を示す．

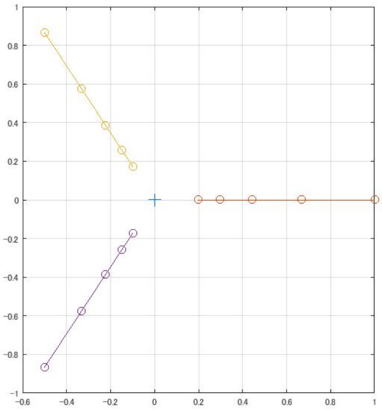


図 2: balanced な軌道が原点へ収束する状況．成分ごとに色を変えている．

定理 9.1 ([1])**.** $p(z) = z^3$ のとき，a.e. $\zeta \in \mathbb{C}^3$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} F_p^{(n)}(\zeta) = (0, 0, 0).$$

Proof. p に対する Durand-Kerner 法 F_p は $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$F_p(\zeta) = \zeta - \left(\frac{\zeta_1^3}{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)}, \frac{\zeta_2^3}{(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_3)}, \frac{\zeta_3^3}{(\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_3 - \zeta_2)} \right).$$

F_p は $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p), \alpha \in \mathbb{C}$ に対し次の強い性質を持つ．

$$F_p(\alpha\zeta) = \alpha F_p(\zeta) \tag{9.1}$$

$\omega = \exp(2\pi i/3)$ と置くとき $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\zeta = \alpha(1, \omega, \omega^2)$ または $\zeta = \alpha(1, \omega^2, \omega)$ とかける ζ を，**balanced** であるという．balanced な点においては F_p は 2/3 倍する作用として働く．

$$F_p(\alpha(1, \omega, \omega^2)) = (2/3)\alpha(1, \omega, \omega^2). \tag{9.2}$$

したがって F_p において balanced な点を初期値にもつ軌道は具体的に計算できる特殊な軌道であり，

$$F_p^{(n)}(\alpha(1, \omega, \omega^2)) = (2/3)^n \alpha(1, \omega, \omega^2) \tag{9.3}$$

が成立する．したがって特に $F_p^{(n)}(\zeta) \to (0, 0, 0)$ $(n \to \infty)$ であることに注意する．また，

$$\frac{|F_p(1, \omega, \omega^2)|}{|(1, \omega, \omega^2)|} = \frac{2}{3}$$

で，$|F_p(\zeta)||\zeta|^{-1}$ が $(1, \omega, \omega^2)$ で連続であることに注意すると $2/3 < s < 1$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|\zeta - (1, \omega, \omega^2)| < \delta$ のとき

$$\frac{|F_p(\zeta)|}{|\zeta|} < s \tag{9.4}$$

であることに注意する．さて F_p の Dochev 平面 H は $\{\zeta \in \mathbb{C}^3 \mid \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0\}$ である．F_p を H に制限して $F_H := F_p|H$ とかく．まず次のことを示す．

$$\text{任意の}\zeta \in \{\zeta \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Im}(\zeta_2/\zeta_1) \neq 0, \zeta_1 \neq 0\} \text{ に対し } \lim_{n\to\infty} F_H^{(n)}(\zeta) = (0,0,0). \tag{9.5}$$

まず $P : H \longrightarrow \mathbb{C}^2, P(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \longrightarrow (\zeta_1,\zeta_2)$ と定め，$F_{\mathbb{C}^2} := P \circ F_H \circ P^{-1}$ とおくと，$\rho = (\rho_1,\rho_2) \in \mathrm{Dom}(F_{\mathbb{C}^2})$ に対し

$$F_{\mathbb{C}^2}(\rho) = \rho - \left(\frac{\rho_1^3}{(\rho_1-\rho_2)(2\rho_1+\rho_2)}, \frac{\rho_2^3}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+2\rho_2)}\right)$$

である．P は線形だから (9.1) は $F_{\mathbb{C}^2}$ に引き継がれ，$\alpha \in \mathbb{C}, \rho \in \mathrm{Dom}(\mathrm{F}_{\mathbb{C}^2})$ に対し

$$F_{\mathbb{C}^2}(\alpha\rho) = \alpha F_{\mathbb{C}^2}(\rho). \tag{9.6}$$

そこで $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ における同値関係 $\sim$ を $\rho,\sigma \in \mathbb{C}^2$ に対し $\sigma = \alpha\rho$ となる $\alpha \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ が存在するとき $\rho \sim \sigma$ とさだめる．また，$F_{\mathbb{C}^2}$ は $(0,0)$ を値にとらないことに注意する．(9.6) から $Q : \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})/\sim, Q(\rho) = [\rho] = [\rho_1,\rho_2]$ は $\rho = (\rho_1,\rho_2)$ の代表元と定めたとき図式 $Q \circ F_{\mathbb{C}^2} = G \circ Q$ を成り立たせる G が一意に存在する．$R : (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})/\sim \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$R[\rho_1,\rho_2] = \begin{cases} \rho_2/\rho_1 & \rho_1 \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & \rho_1 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{9.7}$$

とし，$\hat{f} := R\circ G\circ R^{-1}$ と定めると $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} - \{1,-2,-1/2\} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ で $u \in \hat{\mathbb{C}} - \{1,-2,-1/2,\infty\}$ に対し

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= R \circ G[1,u] \\ &= R[F_{\mathbb{C}^2}(1,u)] \\ &= R\left[\frac{(1-u-u^2)}{(1-u)(2+u)}, \frac{(u^3-u^2-u)}{(u-1)(1+2u)}\right] \\ &= \frac{u(2+u)(u^2-u-1)}{(1+2u)(u^2+u-1)} \end{aligned} \tag{9.8}$$

であるから $\hat{f}$ は有理関数

$$\hat{f}(u) = \frac{u(2+u)(u^2-u-1)}{(1+2u)(u^2+u-1)}$$

である．さてメビウス変換 $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を $\varphi(z) = (z-\omega^2)/(z-\omega)$ と定め $f = \varphi\circ\hat{f}\circ\varphi^{-1}$ とおくと f は次の Blaschke 積

$$f(v) = \frac{v(2v^3+1)}{v^3+2}$$

である．この右辺は有理関数だから，$\{\varphi(1), \varphi(-2), \varphi(-1/2)\}$ での値を補って f を $\hat{\mathbb{C}}$ 上に拡張したものを $\tilde{f}$ とかく．$\tilde{f}$ は二つの吸引的不動点 $0, \infty$ を持ち 0 の吸引領域

は $D_0 = \{v \in \mathbb{C} \mid |v| < 1\}$，$\infty$ の吸引領域は $D_\infty = \{v \in \mathbb{C} \mid |v| > 1\} \cup \{\infty\}$ であり $C = \{v \in \mathbb{C} \mid |v| = 1\}, D_0, D_\infty$ はそれぞれ $\tilde{f}$ の不変集合である．$\varphi(\{\mathrm{Im}(u) = 0\}) = C$ ゆえ $\varphi(1), \varphi(-2), \varphi(-1/2) \in C$ であることに注意すると f においても $0, \infty$ の吸引領域はそれぞれ D_0, D_∞ である．$\hat{f}$ は f の φ^{-1} による共役だったから $\hat{f}$ の吸引的不動点は $\varphi^{-1}(0) = \omega^2, \varphi^{-1}(\infty) = \omega$ であり ω^2, ω の吸引領域はそれぞれ $\varphi(D_0) = \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(u) < 0\}, \varphi^{-1}(D_\infty) = \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(u) > 0\}$ である．いま $n \in \mathbb{N}, \rho \in \mathrm{Dom}(F_{\mathbb{C}^2})$ に対し

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(n)}(R[\rho]) &= R \circ G^{(n)} \circ R^{-1}(R[\rho]) \\ &= R \circ G^{(n)}[\rho] \\ &= R[F^{(n)}_{\mathbb{C}^2}(\rho)]. \end{aligned}$$

さらに ρ を $R[\rho] \in \{\mathrm{Im}(u) \neq 0\}$ととると $\{\mathrm{Im}(u) \neq 0\}$ は $\hat{f}$ の不変集合ゆえ $\hat{f}^{(n)}(R[\rho]) \in \{\mathrm{Im}(u) \neq 0\}$ だから，とくに $\hat{f}^{(n)}(R[\rho]) \neq \infty$ であり，$F^{(n)}_{\mathbb{C}^2}(\rho) = (F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(\rho), F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,2}(\rho))$ とかくと $F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(\rho) \neq 0$ である．したがって

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(n)}(R[\rho]) &= R[F^{(n)}_{\mathbb{C}^2}(\rho)] \\ &= F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,2}(\rho)/F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(\rho) \end{aligned}$$

である．以上から $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_H)$ を $R[P(\zeta)] \in \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(u) \neq 0\}$ ととると

$$\begin{aligned} F^{(n)}_H(\zeta) &= P^{-1} \circ F^{(n)}_{\mathbb{C}^2} \circ P(\zeta) \\ &= (F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(P(\zeta))\,,\ F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,2}(P(\zeta))\,,\ -F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(P(\zeta)) - F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,2}(P(\zeta))) \\ &= F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(P(\zeta))\,(1\,,\ \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)])\,,\ -1 - \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)])). \end{aligned}$$

(1) $R[P(\zeta)] \in \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(u) > 0\}$ **の場合**

$R[P(\zeta)]$ は $\hat{f}$ に関して ω の吸引領域に属するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq N$ に対し $|\omega - \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)])| < 2^{-1}\delta$ となる．よって任意の $n \geq N$ に対し

$$|(1, \omega, \omega^2) - (1, \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)]), -1 - \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)]))| < \delta$$

だから任意の $n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned} |F^{(n+1)}_H(\zeta)| &= |F_H(F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(P(\zeta))(1, \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)]), -1 - \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)])))| \\ &\leq s|F^{(n)}_{\mathbb{C}^2,1}(P(\zeta))(1, \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)]), -1 - \hat{f}^{(n)}(R[P(\zeta)]))| \\ &= s|F^{(n)}_H(\zeta)|. \end{aligned}$$

よって任意の $j \geq N$ に対し $|F^{(N+j)}_H(\zeta)| \leq s^j|F^{(N)}_H(\zeta)|$ だから $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}_H(\zeta) = (0, 0, 0)$.

(2) $R[P(\zeta)] \in \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(u) < 0\}$ **の場合**

(1) と同様にして $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}_H(\zeta) = (0, 0, 0)$ が得られる．

(1),(2) から (9.5) が得られた．したがって a.e. $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_H)$ に対して $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}_H(\zeta) = (0, 0, 0)$ である．さて $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し $F'_p(\zeta) = (f_{ij}(\zeta))$ とかくと，

$$\frac{f_{12}(\zeta) f_{23}(\zeta) f_{31}(\zeta)}{f_{32}(\zeta) f_{13}(\zeta) f_{21}(\zeta)} = -1 \neq 1$$

であることから $F'_p(\zeta)$ のランクは 1 ではありえず，したがってランク 2 の行列であることに注意すると，a.e. $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}_p(\zeta) = (0, 0, 0)$ を得る．□

10　2重根と単根を持つ3次多項式に対するDurand-Kerner法について

この章では2重根と単根を一つずつ持つ3次多項式 p に対するDurand-Kerner法を調べる．

定理 10.1. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \alpha_1 \neq \alpha_2$ とし，三次多項式 p を $p(z) = (z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)$ とおくと，任意の $\tau \in S_3$ に対しある開集合 $U \subset \mathbb{C}^3$ が存在し次の性質をみたす．便宜的に $\alpha_3 \coloneqq \alpha_1$ とおく．

(i) $F_p(U) \subset U$.

(ii) 任意の$\zeta \in U$ に対し $\lim\limits_{n\to\infty} F_p^{(n)}(\zeta) = (\alpha_{\tau(1)}, \alpha_{\tau(2)}, \alpha_{\tau(3)})$.

Proof. 4章の命題4.2，命題4.3から，$p(z) = z^2(z+3)$ と仮定してよいことに注意する．また，この F_p における軌道が収束すると期待される $(-3,0,0), (0,-3,0), (0,0,-3)$ は命題4.1によって対称性を持つので，$(0,0,-3)$ に収束する軌道について成り立つことは残りの二点に収束する軌道についても成り立つ．したがって定理は次の命題10.3に帰着される． □

命題4.4の特別な場合として，2次多項式に対するDurand-Kerner法と共役な力学系が，$F_{z^2(z+3)}$ に $(0,0,-3)$ を通るように埋め込まれる。

命題 10.2. $F_{z^2(z+3)}|_{\{\zeta_1=0\}}$，$F_{z^2(z+3)}|_{\{\zeta_2=0\}}$ は $F_{z(z+3)}$ に共役である．また $F_{z^2(z+3)}|_{\{\zeta_3=-3\}}$ は F_{z^2} に共役である．

Proof. 命題4.4から直ちに従う． □

とくに $F_{z^2(z+3)}$ において $\{\zeta_3 = -3\}$ の上の軌道は吸引的な性質を持っており，命題10.3で主要な役割をもつ．

命題 10.3. 多項式 $p(z) = z^3 + 3z^2$ に対し，以下の性質を満たす開集合 $U \subset \mathbb{C}^3$ が存在する．

(i) $F_p(U) \subset U$.

(ii) 任意の$\zeta \in U$ に対し $\lim\limits_{n\to\infty} F_p^{(n)}(\zeta) = (0,0,-3)$.

Proof. $p(z) = z^2(z+3)$ とする．このとき $\zeta \in \mathrm{Dom}(F_p)$ に対し

$$F_p(\zeta) = \zeta - \left(\frac{\zeta_1^3 + 3\zeta_1^2}{(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)}, \frac{\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_3)}, \frac{\zeta_3^3 + 3\zeta_3^2}{(\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_3-\zeta_2)}\right).$$

Dochev平面は $H = \{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = -3\}$ である．$F_H \coloneqq F_p|_H$ とかく．$P_H : H \longrightarrow \mathbb{C}^2$，$P_H(\zeta_i)_{i=1}^3 \coloneqq (\zeta_i)_{i=1}^2$ と定めると P_H は H から $\mathbb{C}^2$ への双正則写像であ

る．そこで $F_{\mathbb{C}^2} := P_H \circ F_H \circ {P_H}^{-1}$ と定める．このとき $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathrm{Dom}(F_{\mathbb{C}^2})$ に対し

$$F_{\mathbb{C}^2}(\xi) = \xi - \left(\frac{\xi_1^3 + 3\xi_1^2}{(\xi_1 - \xi_2)(2\xi_1 + \xi_2 + 3)}, \frac{\xi_2^3 + 3\xi_2^2}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 + 2\xi_2 + 3)} \right).$$

さらに $A : (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$，$A(\xi_1, \xi_2) := (\xi_1, \xi_2/\xi_1)$ と定めると A は $(\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ から $(\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ への双正則写像である．そこで $F_A := A \circ F_{\mathbb{C}^2} \circ A^{-1}$ と定める．$(z, t) \in \mathrm{Dom}(F_A)$ に対し

$$F_A(z, t) = \left(\frac{z(z - tz - t^2 z - 3t)}{(1 - t)(3 + z(2 + t))}, \frac{-t(t^2 z - tz - z - 3)(3 + z(2 + t))}{(z - zt - t^2 z - 3t)(3 + z(2t + 1))} \right) \tag{10.1}$$

であることに注意すると F_A は $z = 0$ である点にも解析的に拡張できる．さらに F_A は $(0, -1)$ を不動点に持つことと，F_A の $(0, -1)$ でのヤコビアン ${F_A}'(0, -1)$ が

$${F_A}'(0, -1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

であることから $(0, -1)$ は F_A の吸引的不動点であることがいえる．

そこで D_A を F_A による $(0, -1)$ の吸引領域とすると，命題 3.6 より D_A は開集合である．いま $F_A^{-1}\{z = 0\} = \{z = 0\}$ であることに注意すると，$\widetilde{D_A} := D_A - \{z = 0\}$ とおいたとき $\widetilde{D_A}$ は開集合で

$$F_A(\widetilde{D_A}) \subset \widetilde{D_A}$$

$$\text{任意の } (z, t) \in \widetilde{D_A} \text{ に対し} \lim_{n\to\infty} F_A^{(n)}(\zeta) = (0, -1)$$

をみたす．いま A の逆写像 A^{-1} を $\mathbb{C}^2$ 全体上に拡張して $\widetilde{A^{-1}}$ と書くと任意の $\xi \in A^{-1}(\widetilde{D_A})$ に対し，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{C}^2}^{(n)}(\xi) &= \lim_{n\to\infty} A^{-1} \circ F_{\mathbb{C}^2}^{(n)} \circ A(\xi) \\ &= \widetilde{A^{-1}}(\lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{C}^2}^{(n)} \circ A(\xi)) \\ &= \widetilde{A^{-1}}(0, -1) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\text{任意の} \xi \in A^{-1}(\widetilde{D_A}) \text{ に対し} \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{C}^2}^{(n)}(\zeta) = (0, 0).$$

同様に P_H^{-1} も $(0, 0)$ を含む $\mathbb{C}^2$ 全体で解析的，特に連続に定まるから，

$$\text{任意の} \zeta \in P_H^{-1} \circ A^{-1}(\widetilde{D_A}) \text{ に対し} \lim_{n\to\infty} F_H^{(n)}(\zeta) = (0, 0, -3)$$

となる．以上から $U := F_p^{-1}(P_H^{-1} \circ A^{-1}(\widetilde{D_A}))$ とおくと，

- $F_p(U) \subset U$
- 任意の $\zeta \in U$ に対し $\lim_{n\to\infty} F_p^{(n)}(\zeta) = (0, 0, -3)$

となることが得られた． □

11　二重根と単根を持つ三次多項式に対するDurand-Kerner法の収束領域の描画

この章では，定理 10.1 で得られた開集合を経由して収束する点を収束先ごとに色分けして描画する．以下，$F_A, F_{\mathbb{C}^2}, P_H$ は命題 10.3 の証明で用いた記号とする．

$$D \coloneqq \{(z,t) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1/4,\ |t+1| < 1/4, z \neq 0\}$$

とおくとノルムの評価により次が成り立つ．

- $F_A(D) \subset D$.
- $\forall (z,t) \in D, \lim_{n\to\infty} F_A^{(n)}(z,t) = (0,-1)$.

そこで $E \coloneqq A^{-1}(D)$ とおくと，

- $E = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi_1| < 1/4,\ |\xi_2+\xi_1|/|\xi_1| < 1/4, \xi \neq 0\}$
- $F_{\mathbb{C}^2}(E) \subset E$.
- $\forall \xi \in E, \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{C}^2}^{(n)}(\xi) = (0,0)$.

命題4.1，すなわちDurand-Kerner法の自己共役性から，各$\tau \in S_3$ に対し $\Phi_\tau(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = (\zeta_{\tau(1)},\zeta_{\tau(2)},\zeta_{\tau(3)})$ とおき，$E_\tau \coloneqq P_H \circ \Phi_\tau \circ P_H^{-1}(E)$ とおくと，

- $F_{\mathbb{C}^2}(E_\tau) \subset E_\tau$.
- $\forall \xi \in E_\tau, \lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{C}^2}^{(n)}(\xi) = P_H \circ \Phi_\tau \circ P_H^{-1}(0,0)$.

$F_{\mathbb{C}^2}^{(n)}(\xi) \in E_\tau$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在するとき ξ は $(0,0),(0,-3),(-3,0)$ のうち τ に対応するものに収束することを利用して各 $\xi \in \mathbb{C}^2$ の収束先を調べることができる．図 3 は MATLAB を用いて描画した．用いた MATLAB ソースコードは付録に上げる．

12　付録

12.1　命題 5.3 の証明中の (5.7) の証明

Proof. これを示すには $(-\delta_{ij}\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(\zeta_i-\zeta_k)^{-1})_{ij}(\zeta_i^{n-j})_{ij}G'(\zeta) = I$ が得られれば十分である．そこで，両辺 $(-\delta_{ij}\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(\zeta_i-\zeta_k))_{ij}$ をかけて

$$(\zeta_i^{n-j})_{ij}G'(\zeta) = \left(-\delta_{ij}\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(\zeta_i-\zeta_k)\right)_{ij}$$

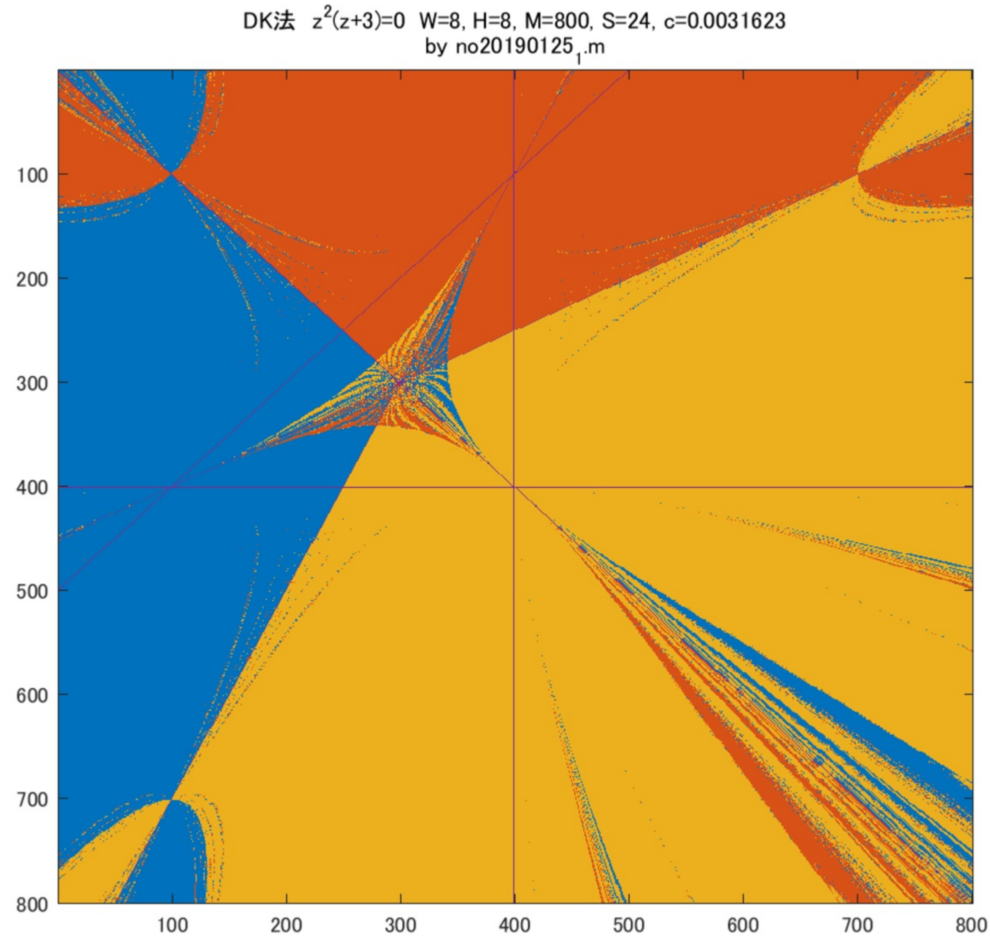


図 3: $\mathbb{R}^2$ の閉区間 $\xi \in [-4,4]\times[-4,4]$ を各成分 800 等分し，$F_{\mathbb{C}^2}^{(24)}(\xi)$ が $\{E_\tau\}_{\tau\in S_3}$ のどれに属しているかで着色している．$(0,0)$ に収束する点は黄色，$(-3,0)$ に収束する点は青，$(0,-3)$ に収束する点は赤で表し，$F_{\mathbb{C}^2}^{(24)}(\xi)$ が $\{E_\tau\}_{\tau\in S_3}$ のどれにも属していない点は紫である．(0,0) が (400,400) に，(0,-3) が (400,100) に対応する．

を示せばよい．いま $\varphi_0 := 1$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
G'(\zeta) &= (\partial f_i(\zeta)/\partial\zeta_j)_{ij} \\
&= ((-1)^i \partial\varphi_i(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)/\partial\zeta_j)_{ij} \\
&= ((-1)^i \varphi_{i-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n))_{ij}
\end{aligned}
$$

だから $(\zeta_i^{n-j})_{ij} G'(\zeta) = (\sum_{k=1}^n \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n))_{ij}$ そこで，(5.7) を得るには，任意の $1 \le i < j \le n$ に対して

$$
\sum_{k=1}^{n} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n) = -\delta_{ij} \prod_{k=1,k\neq i}^{n} (\zeta_i - \zeta_k) \tag{12.1}
$$

がいえればよい．

$i \neq j$ の場合

$$
\begin{aligned}
\text{(12.1) の左辺} &= \zeta_i^{n-1}(-1)\varphi_0(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad 1(-1)^n \varphi_{n-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n) \\
&= -\zeta_i^{n-1} + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad (-1)^n \textstyle\prod_{k=1,k\neq j}^{n} (\zeta_k)
\end{aligned} \tag{12.2}
$$

である．(12.2) の右辺第二項を整理すると，

$$
\begin{aligned}
\text{(12.2) の右辺第二項} &= \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \zeta_i \varphi_{k-2}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) \\
&= (-1) \textstyle\sum_{k=1}^{n-2} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \zeta_i^{n-k}(-1)^k \varphi_{k-1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) \\
&= (-1)\zeta_i^{n-1}(-1)\varphi_0(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) + \\
&\quad \zeta_i(-1)^{n-1}\varphi_{n-2}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) \\
&= \zeta_i^{n-1} + (-1)^{n-1} \textstyle\prod_{k=1,k\neq j}^{n} (\zeta_k).
\end{aligned}
$$

ゆえに (12.2) の左辺 の右辺は 0 である．よって $i \neq j$ のとき (12.1) がなりたつ．

$i = j$ の場合

n に関する帰納法によって示す．

$n = 2$ のとき，m は $\{1,2\} = \{i,m\}$ なるものとすると

$$
\begin{aligned}
\text{(12.1) の左辺} &= \zeta_i(-1)\varphi_0(\zeta_m) + (-1)^2\varphi_1(\zeta_m) \\
&= -\zeta_i + \zeta_m
\end{aligned}
$$

だから (12.1) は $n=2$ のとき成り立っている．
$n=m-1$ のとき (12.1) が成り立つとする．このとき必要ならば変数の取り換えて $i\neq m$ と仮定してよいことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
(12.1)\text{ の右辺} &= -\prod_{k=1,k\neq i}^{m}(\zeta_i-\zeta_k)\\
&= (\zeta_i-\zeta_m)(-1)\prod_{k=1,k\neq i}^{m-1}(\zeta_i-\zeta_k)\\
&= (\zeta_i-\zeta_m)\sum_{k=1}^{m-1}\zeta_i^{m-1-k}(-1)^k\varphi_{k-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})\\
&= \sum_{k=1}^{m-1}\zeta_i^{m-k}(-1)^k\varphi_{k-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})+\\
&\quad \sum_{k=2}^{m}\zeta_m\zeta_i^{m-k}(-1)^k\varphi_{k}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})\\
&= \zeta_i^{m-1}(-1)\varphi_0(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})+\\
&\quad \sum_{k=2}^{m-1}\zeta_i^{n-k}(-1)^k\varphi_{k-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})+\\
&\quad \sum_{k=2}^{m-1}\zeta_i^{n-k}(-1)^k\zeta_m\varphi_{k-2}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})+\\
&\quad \zeta_m(-1)^m\varphi_{m-2}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m-1})\\
&= \zeta_i^{m-1}(-1)+\\
&\quad \sum_{k=2}^{m-1}\zeta_i^{m-k}(-1)^k\varphi_{k-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m})+\\
&\quad (-1)^m\prod_{k=1,k\neq i}^{m}\zeta_k\\
&= \sum_{k=1}^{m}\zeta_i^{m-k}(-1)^k\varphi_{k-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},\zeta_{j+1},\dots,\zeta_{m}).
\end{aligned}
$$

よって $i=j$ のとき (12.1) が成り立つことが帰納的に示された．以上で (5.7) が言えた． □

12.2 MATLAB ソースコード

```
%{ パラメータ (c は使っていない)%}
W=2^3;
H=2^3;
S=24;
c=10^(-5/2)
M=800;

X=1:M;
Y=(1:M)';

%{ 初期値はいずれの成分も実数とする%}
x01=((X*W/M)-W/2)+0;
x02=((Y*H/M)-H/2)+0;
```

%{ 後で参照するためこちらは変更しない%}

```
X01=x01;
X02=x02;

xx1=x01;
xx2=x02;
```

%{ 全ての初期値に対し，$F_{\mathbb{C}^2}$ を S 回適用する．%}

```
for k=1:S

x1=x01-(x01.^3+3*x01.^2)./((x01-x02).*(2*x01+x02+3));
x2=x02-(x02.^3+3*x02.^2)./((x02-x01).*(2*x02+x01+3));

xx1=x1;
xx2=x2;

x01=x1;
x02=x2;

end
```

%{ 収束領域の色分け。何れかの開集合 E_τ に到達した初期値にその τ に対応する不動点の番号を振る。%}

```
cloc=ones(M)*(3+1);
cloc(abs(xx2(:,:))<1/4 & abs((-xx1(:,:)-3)./xx2(:,:))<1/4)=1;
cloc(abs(-xx1(:,:)-xx2(:,:)-3)<1/4 & abs((-xx1(:,:)-3)./(-xx1(:,:)-
xx2(:,:)-3))<1/4)=1;
cloc(abs(-xx1(:,:)-xx2(:,:)-3)<1/4 & abs((-xx2(:,:)-3)./(-xx1(:,:)-
xx2(:,:)-3))<1/4)=2;
cloc(abs(xx1(:,:))<1/4 & abs((-xx2(:,:)-3)./xx1(:,:))<1/4)=2;
cloc(abs(xx1(:,:))<1/4 & abs((xx1(:,:)+xx2(:,:))./xx1(:,:))<1/4)=3;
cloc(abs(xx2(:,:))<1/4 & abs((xx2(:,:)+xx1(:,:))./xx2(:,:))<1/4)=3;
```

%{1 から 3 で表した収束先を三色で描画する．%}

```
image(cloc)
title (['DK法  z^2(z+3)=0 W=',num2str(W),', H=',num2str(H),', M=
',num2str(M),', S=',num2str(S),', c=',num2str(c),newline,'by
no20190125_1.m'])
```

```
%{ コンソールへの出力（なくともよい）%}
DISP(['z^2(z+3)=0 W=',num2str(W),', H=',num2str(H),', M=',num2str(M),',
S=',num2str(S),', c=',num2str(c),' by no20190125_1.m'])
```

参考文献

[1] Y. Yamagishi. Global convergence of the Durand-Kerner method applied to the equation $z^3 = 0$. J.Comp.Appl.Math., Vol. 70, pp.67-73,1996.

[2] 上田哲夫・谷口雅彦・諸沢俊介．複素力学系序説．培風館，1995.

[3] 長谷川武光・吉田俊之・細田陽介．工学のための数値計算．数理工学社，2008.

[4] 杉原正顯・室田一雄．数値計算法の数理．岩波書店，1994.