

# origami の拡張における Veech 群とその計算方法

熊谷 駿 \*

2019 年 1 月 24 日

## 目次

1	Introduction	2
2	準備	5
2.1	被覆面 . . . . .	5
2.2	リーマン面, 代数曲線とガロア作用 . . . . .	9
2.3	Belyi 曲面と dessin . . . . .	10
3	flat structure と Teichmüller 理論	14
3.1	flat structure . . . . .	14
3.2	Teichmüller 空間 . . . . .	16
3.3	Teichmüller 空間の複素構造 . . . . .	17
3.4	Teichmüller disk, Veech 群 . . . . .	19
4	origami	21
4.1	定義と性質 . . . . .	21
4.2	origami の flat structure と Veech 群 . . . . .	23
4.3	アルゴリズム . . . . .	25
4.4	Teichmüller curve の概形, ガロア作用との関連性 . . . . .	30
4.5	例 . . . . .	32
5	origami の拡張	35
5.1	動機づけ . . . . .	35
5.2	定義とその flat structure . . . . .	36
5.3	Veech 群を調べるアプローチ . . . . .	38
5.4	アルゴリズム . . . . .	41
5.5	例 . . . . .	46
5.6	今後の課題 . . . . .	50

---

\* 東京工業大学理学院数学系 志賀研究室

# 1 Introduction

絶対ガロア群  $G_{\mathbb{Q}}$  は体同型写像を集めたある種の極限にあたる群で、代数学の主要な研究対象の一つである。本論文の研究の背景にある課題はその作用 (ガロア作用) をリーマン面の理論など多種多様な見地から調べることにある。典型的なガロア作用の対象として多項式で定義される代数曲線が挙げられる。

Serre[18] の GAGA 定理 (Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique) は代数幾何学と解析幾何学の間の強い結びつきを与えており、その特別な場合として代数曲線はリーマン面と同一視できることが知られている。Belyi, Gironde, González-Diez による絶対ガロア群の作用に対応するリーマン面の研究によってガロア作用が軌道有限であるような、作用対象として‘良い’リーマン面である Belyi 曲面の特徴付けがなされた。Belyi 曲面はその解析的特徴付けから dessin d'enfants という組合せ論的オブジェクトに過不足なく対応し、絶対ガロア群はこの dessin に対しても作用する。位相的な種数や dessin を用いて表せる値がその作用の不変量となっており、dessin を経由する形で絶対ガロア群の研究が進められている。

本論文のモチベーションは Grötherndieck[8] の「Esquisse d'un Programme」において発展性が示唆された数学の研究テーマの一つであるガロア理論と Teichmüller 理論との複合研究である。その進展として Belyi 曲面へのガロア作用とその構造空間におけるふるまいの間の関連性についての研究が進められており、そこで Lochak が導入した origami が重要な役割を果たしている。origami は正方形セルの貼り合わせ構造で特徴づけられて dessin に類似する組合せ論的オブジェクトに対応する対象であり、Herrlich, Schmithüsen, Möller らによって研究が進められてきた。それによれば origami のアフィン変形による構造空間のリーマン面全体がなす Teichmüller curve が Belyi 曲面として存在し、かつ「もとの Belyi 曲面の族へのガロア作用と Teichmüller curve へのガロア作用がある意味で一致する」という驚くべき性質が示されている。とくに origami 自体へ絶対ガロア群が作用して dessin の場合と同様の不変量の記述ができる。また、Schmithüsen によって origami の Teichmüller curve を特徴づける Veech 群を具体的に計算するアルゴリズムが整理されている。実際の形を視覚化することが難しい Teichmüller 理論の対象としてこのことは特筆すべき性質であり、Veech 群の具体的な計算ができるケースの拡張は興味がある問題であり、本論文ではこれを扱う。先行研究としては Shinomiya[19] による正八角形セルのある種の貼り合わせ構造に対するものが挙げられる。

本論文では origami の拡張を考え、これが origami と同様に Teichmüller curve を Belyi 曲面であるものとして与えること、具体的な計算アルゴリズムに準ずるものが構成できることを示した。この拡張は、Markovic[14] が Teichmüller 空間の Cararhéodory 距離に関する未解決問題を解いた際に用いたアイデアに基づくものである。主結果に対するアプローチは Schmithüsen, Shinomiya の先行研究と同様の被覆面の議論に基づくものであるが、次の意味で明確に異なる。先行研究は被覆される曲面の Veech 群が既知であるものに対して被覆面を対象として調べるものであるが、本研究では対象となる曲面についてこれを被覆する origami を構成し、その被覆面について Veech 群が計算可能であることからもとの曲面について調べるものである。ここで議論の軸となるのは被覆面のアフィン写像でもとの曲面に射影されるものが与える Veech 群の部分群である。origami における計算アルゴリズムを応用して計算できるのはこの群であって Veech 群そのものではないため、こ

れを Veech 群の特定に繋げることは今後の課題として残っている.

ここで本論文の流れについて述べる. 本章に続く第 2 章では本論文の議論の主な道具となる被覆面, リーマン面, dessin についての一般論を整理する. 第 3 章では本題への準備としてリーマン面の一意化, Teichmüller 空間の定義, Veech 群や Teichmüller curve といった Teichmüller 理論における主な題材について説明する. 第 4 章では origami の定義とその既存の研究結果について紹介し, 最後に第 5 章で origami の拡張の定義と主結果について述べる. また第 4 章, 第 5 章で構成したアルゴリズムをプログラムとして実装し, 実際に例の計算で用いたものを付録に示した.

## 謝辞

本研究にあたり指導教官として三年間の間多大なご指導を頂き, 論文主査としてもご助言を頂きました志賀啓成教授に深く感謝を申し上げます. 副指導教官として多々ご相談に乗って頂き, 論文副査を努めて頂いた川平友規准教授, 並びに論文副査を努めて頂いた藤川英華准教授に深く感謝を申し上げます. また, 本論文の執筆にあたり origami の研究に関するご助言を頂きました静岡大学の四之宮佳彦氏に感謝を申し上げます.

## 凡例

$\mathbb{N}$	自然数
$\mathbb{Z}$	整数, 整数環
$\mathbb{Q}$	有理数, 有理数体
$\bar{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$ の代数閉包 ( $\mathbb{Q}$ 係数多項式の根全体) の体
$\mathbb{R}$	実数, 実数体
$\mathbb{C}$	複素数, 複素数体, 複素数平面
$\mathbb{H}$	上半平面
$\mathbb{L}$	下半平面
$\mathbb{D}$	単位円盤
$F_2$	二元生成の自由群 $F_2(x, y)$
$G_{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}$ の体同型写像全体の群
$G_{\bar{\mathbb{Q}}}$	$\bar{\mathbb{Q}}$ の体同型全体の群, 絶対ガロア群

$i$  は虚数単位を表すものとする.

近傍とは開近傍を指すものとする.

領域とは位相空間の開, 連結な部分集合を指すものとする.

パスとは  $I = [0, 1]$  から位相空間への連続写像を指すものとする.

位相曲面とは連結な実二次元多様体を指すものとする.

同値類を  $[\ ]$ , または同値関係を特徴づける集合  $S$  を下に付け  $[\ ]_S$  などと表すものとする.

## 2 準備

この章では代数学の主要な研究対象の一つである絶対ガロア群の研究に **Belyi 曲面** という複素解析的カテゴリの対象を考えるアプローチがあること、並びにこの際 Belyi 曲面を表現する重要な道具となる **dessin d'enfants** (dessin) という対象について説明する。

1 節では本論文全体で重要な役割をもつ被覆面の一般論に関する定理と性質について整理する。2 節では Serre[18] の GAGA 定理の一例である代数解析的カテゴリと複素解析的カテゴリの同値性について説明する。3 節では Belyi 曲面とそれに対応する dessin を導入し、Belyi 曲面に対する絶対ガロア群の作用 (ガロア作用) と dessin がどのような関係にあるかについて紹介する。

本章 1 節は [16], [20], 2 節は [4], [10], [21], 3 節は [4], [5] にそれぞれ基づく。

### 2.1 被覆面

**定義 2.1.1.**  $\tilde{S}, S$  を位相曲面とする。

- (a)  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$  が局所同相写像, すなわちいたるところで十分小さな近傍への制限が上への同相写像となるとき, これを被覆写像といい, 組  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を分岐のない被覆面という。
- (b)  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$  が局所幕, すなわち全ての  $p \in \tilde{S}$  に対し  $p, f(p)$  の座標近傍  $(U, z) \subset \tilde{S}, (V, w) \subset S$  と  $n(p) \in \mathbb{N}$  が存在して  $w \circ f = z^{n(p)}$  on  $U \cap f^{-1}(V)$  とかけるとき, これを分岐被覆といい, 組  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を被覆面という。
- (c)  $S$  の被覆面  $(\tilde{S}_1, \sigma_1, S), (\tilde{S}_2, \sigma_2, S)$  に対し, 同相写像  $\varphi: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$  であって  $\sigma_1 \circ \varphi = \sigma_2$  をみたすものが存在するとき, これらは被覆として同値であるという。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{S}_2 \\ & \searrow \sigma_1 & \swarrow \sigma_2 \\ & & S \end{array}$$

**注意 2.1.2.** 被覆面  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  の分岐点集合  $B(\sigma) = \{p \in \tilde{S} \mid n(p) > 1\} \subset \tilde{S}$  は離散集合である。また,  $B(\sigma)$  を取り除いた  $(\tilde{S}' = \tilde{S} \setminus B(\sigma), \sigma|_{\tilde{S}'}, S' = S \setminus \sigma(B(\sigma)))$  は分岐のない被覆面である。

**定義 2.1.3.**  $(\tilde{S}, \sigma, S), (\tilde{S}_1, \sigma_1, S_1), (\tilde{S}_2, \sigma_2, S_2)$  を分岐のない被覆面とし,  $T$  を位相空間とする。

- (a) 連続写像  $\phi: T \rightarrow S$  に対し, 連続写像  $\tilde{\phi}: T \rightarrow \tilde{S}$  であって  $\tilde{\phi} \circ \sigma = \phi$  をみたすものが存在するとき, これを  $\sigma$  による  $\phi$  のリフトという。逆に, 連続写像  $\tilde{\phi}: T \rightarrow \tilde{S}$  がこれを  $\sigma$  によるリフトとするような  $\phi$  を持つとき,  $\tilde{\phi}$  は  $\sigma$  を通って降りる (descends via  $\sigma$ ) という。
- (b) 連続写像  $\phi: S_1 \rightarrow S_2$  に対し, 連続写像  $\tilde{\phi}: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$  であって  $\tilde{\phi} \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \phi$  をみたすものが存在するとき, これを  $\sigma_1, \sigma_2$  による  $\phi$  のリフトという。逆に, 連続写像  $\tilde{\phi}: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$  がこれを  $\sigma_1, \sigma_2$  によるリフトとするような  $\phi$  を持つとき,  $\tilde{\phi}$  は  $\sigma_1, \sigma_2$  を通って降りるという。

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} & & \tilde{S} \\ & \nearrow \tilde{\phi} & \downarrow \sigma \\ T & \xrightarrow{\phi} & S \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{S} \\ \downarrow \sigma & \circlearrowleft & \downarrow \sigma \\ S & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

**補題 2.1.4** (unique lifting lemma).  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を分岐のない被覆面とし,  $T$  を連結な位相空間とする.  $\sigma$  による連続写像  $\phi: T \rightarrow S$  のリフト  $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2: T \rightarrow \tilde{S}$  があったとき, これらは一点で一致すれば全体で一致する.

**補題 2.1.5.**  $\tilde{S}$  を相対コンパクトな位相曲面,  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を被覆面とするとき次が成り立つ.

- (a) 任意の  $q \in S$  上の点の重複を込めた個数  $d = \sum_{p \in \sigma^{-1}(q)} n(p)$  は  $q$  によらず一定で, とくに  $\sigma$  は全射である. (このとき  $\sigma$  は  $d$  葉の分岐被覆であるという.)
- (b) 分岐点を除いた被覆面  $(\tilde{S}', \sigma|_{\tilde{S}'}, S')$  に対し, 任意の  $S'$  のパス  $\gamma$ , その始点上の点  $p \in \sigma^{-1}(\gamma(0)) \subset \tilde{S}'$  に対し,  $\sigma$  による  $\gamma$  のリフト  $\tilde{\gamma}$  であって  $p$  を始点とするものが存在する.

**命題 2.1.6** (一価性の定理).  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を分岐のない被覆面とする.

$S$  のパス  $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow S$  は端点固定でホモトープとし, そのホモトピーを  $H(t, \tau): I \times I \rightarrow S$ ;  $H(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot), H(\cdot, 1) = \gamma_1(\cdot)$  とする. 端点  $q = H(0, \cdot)$  上の一点  $p \in \sigma^{-1}(q)$  について,  $\tilde{S}$  のパス  $\gamma_\tau(t) = H(t, \tau)$  の  $\sigma$  によるリフト  $\tilde{\gamma}_\tau$  で  $p$  を始点とするものが全ての  $\tau \in I$  で取れるとする. このとき  $\tilde{S}$  のパス  $\tilde{\gamma}_0$  と  $\tilde{\gamma}_1$  は同じ終点を持ち, また端点固定でホモトープである.

**証明.** 十分小な  $I$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  及び  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = 1$  をとれば各  $j, k$  で  $H([t_j, t_{j+1}] \times [\tau_k, \tau_{k+1}])$ ,  $\sigma \circ H([t_j, t_{j+1}] \times [\tau_k, \tau_{k+1}])$  の十分小な近傍  $U_{j,k} \subset S$ ,  $\tilde{U}_{j,k} \subset \tilde{S}$  が存在して  $\sigma_{j,k} = \sigma|_{U_{j,k}}: U_{j,k} \rightarrow \tilde{U}_{j,k}$  が同相写像であるようにできる.

各  $j, k$  で  $\tilde{H}_{j,k}(t, \tau) := \sigma_{j,k}^{-1} \circ H_{j,k}(t, \tau)$  on  $[t_j, t_{j+1}] \times [\tau_k, \tau_{k+1}]$  とおくと, 補題 2.1.4(a) により  $\forall t \in [t_j, t_{j+1}], \tilde{H}_{j,k}(t, \tau_k) = \tilde{\gamma}_{\tau_k}(t)$  が成り立つ. とくに  $\tilde{H}_{j-1,k}$  の終点と  $\tilde{H}_{j,k}$  の始点はともに  $\tilde{\gamma}_{\tau_k}(t_j)$  で一致し, 再び補題 2.1.4(a) より  $\forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \tilde{H}_{j-1,k}(t_j, \tau_k) = \tilde{H}_{j,k}(t_j, \tau_k)$  である.

各  $\tilde{H}_{j-1,k}(t_j, \tau_k)$  と  $\tilde{H}_{j,k}(t_j, \tau_k)$  は定義域の共通部分で一致するから定義域を繋げて連続に拡張できる. すべての  $j$  にわたり拡張すれば  $\tilde{H}_k: [0, 1] \times [\tau_k, \tau_{k+1}] \rightarrow \tilde{S}$  であって  $\tilde{H}_k(\cdot, \tau_k) = \tilde{\gamma}_{\tau_k}(\cdot)$ ,  $\tilde{H}_k(0, \tau) = p$ ,  $\sigma \circ \tilde{H}_k = H$  をみたすものが得られる. 隣り合う  $k$  について同様に補題 2.1.4(a) に基づき拡張することで  $\tilde{\gamma}_0$  と  $\tilde{\gamma}_1$  を結ぶホモトピーを得る.  $\square$

**例.**  $a \in \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}: a$  の近傍とその上の正則関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  からなる対  $(f, \Omega)_a$  を考える. ここで

$$(f_1, \Omega_1)_{a_1} \sim (f_2, \Omega_2)_{a_2} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ かつ } f_1 = f_2 \text{ on } \exists \Delta \subset \Omega_1 \cap \Omega_2: a_1 \text{ の近傍}$$

で定義される同値関係  $\sim$  の同値類  $[f, \Omega]_a$  を関数要素という. 関数要素全体のなす空間を  $\mathcal{F}$  とするとこれはハウスドルフ空間になり, その領域  $\tilde{S} \subset \mathcal{F}$  上の対応  $\sigma: [f, \Omega]_a \in \tilde{S} \mapsto a \in \mathbb{C}$  は  $S = \sigma(\tilde{S})$  の上への被覆写像を定義する.  $\tilde{S}$  上のパスは第一成分がなすパスに沿った関数要素の解析接続に対応しており, この分岐のない被覆面  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  についての定理 2.1.6 が複素解析学における解析接続の意味での一価性の定理にあたると思えることができる.

**命題 2.1.7** ([20]).  $\tilde{S}$  を相対コンパクトな位相曲面,  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を分岐のない被覆面,  $q \in S, p \in \sigma^{-1}(q)$  とする.  $\sigma_\# : \pi_1(\tilde{S}, p) \rightarrow \pi_1(S, q): [\tilde{\gamma}] \mapsto [\sigma \circ \tilde{\gamma}]$  は well-defined で, 次が成り立つ.

- (a)  $\sigma_\#$  は単射で, 同型  $\pi_1(\tilde{S}, p) \cong \sigma_\#(\pi_1(\tilde{S}, p)) =: H < \pi_1(S, q)$  を与える.
- (b)  $q \in S$  上の点  $p \in \sigma^{-1}(q)$  を任意に取り替えたとき, (a) の  $H$  は  $\pi_1(S, q)$  の中で共役な部分群全体をわたる.
- (c) 任意の  $[\gamma] \in \pi_1(S, q)$  に対し,  $\gamma$  のリフトで  $p$  を始点とするもの  $\tilde{\gamma}$  をとったとき, これが閉なるためには  $[\gamma] \in H$  が必要かつ十分.

(d) 指数  $[\pi_1(S, q) : H]$  は被覆面  $\sigma$  の葉数に一致し、特に有限である。

証明. (a) 定義により  $\sigma_{\#}$  は準同型である。各  $[\tilde{\gamma} \in \pi_1(\tilde{S}, p)]$  に対し、 $\sigma_{\#}([\tilde{\gamma}]) = 0$  のとき  $\sigma \circ \tilde{\gamma}$  はホモトープ零であるが、そのリフト  $\sigma$  は補題 2.1.6 よりホモトープ零であって結果がしたがう。

(b)  $p_1, p_2 \in \sigma^{-1}(q)$  に対し  $H_1 = \sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p_1)), H_2 = \sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p_2))$  とおく。  $p_1, p_2$  を結ぶパス  $\tilde{\delta}$  をとって  $\delta = \sigma \circ \tilde{\delta}$  とおけば  $[\delta] \in \pi_1(S, q)$  であってこれが  $[\delta]^{-1}H_1[\delta] = H_2$  を与える。逆に  $p \in \sigma^{-1}(q)$  と  $H = \sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p))$  を取ったとき、補題 2.1.7 より  $\pi_1(S, q)$  の任意の元は  $p$  から  $\sigma^{-1}(q)$  の点を結ぶあるパスにリフトされるからその共役は基点の取り替えに対応する。

(c)  $[\gamma] \in H$  のとき、ある閉曲線  $\tilde{\gamma}'$  があって  $[\sigma \circ \tilde{\gamma}'] = [\gamma]$  をみたすが、補題 2.1.4 より  $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$  でなくてはならない。よって  $\tilde{\gamma}$  は閉である。逆については明らか。

(d)  $q \in S$  と  $p_0 \in \sigma^{-1}(q)$  を一つとる。  $p \in \sigma^{-1}(q)$  に対し、  $p_0, p$  の間のパス  $\tilde{\gamma}_p$  を取って  $\gamma_p = \sigma \circ \tilde{\gamma}_p$  とするとこれは  $q$  を始点とする  $S$  の閉曲線であるが、ここで (c) より  $p_0 = p$  なるためには  $[\gamma_p] \in H$  なることが必要十分である。また補題 2.1.7 より  $q$  を始点とする  $S$  の任意の閉曲線は  $p_0$  を始点とするリフトを持つ。以上により対応  $\sigma^{-1}(q) \rightarrow \pi_1(S, q)/H : p \mapsto [\gamma_p]H$  が well-defined であって全単射であり、結果がしたがう。  $\square$

注意 2.1.8. 被覆がみちびく同型  $\sigma_{\#}$  は基点  $p$  を明示する際  $\sigma_{\#}^p$  とかくものとする。

位相曲面間の連続写像  $f : X \rightarrow Y$  は被覆の場合と同様に、各  $p \in X$  に対して準同型写像  $f_{\#} : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p)) : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$  を定める。

補題 2.1.9.  $S$  を位相曲面、  $H$  をその基本群の任意の部分群とすると、  $S$  の分岐のない被覆面  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  であって  $\sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p)) = H$  なるものが存在する。

証明.  $q_0 \in S$  を基本群  $H$  の基点とする。  $q_0$  を始点とするパス  $\gamma_1, \gamma_2$  に対し、  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  が  $H$  の元に端点固定でホモトープであるとき  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  と定めればこれは同値関係である。

$\tilde{S} := \{q \text{ を始点とする } S \text{ のパス} \} / \sim$ ,  $\sigma : [\gamma] \in \tilde{S} \mapsto \gamma(1) \in S$  と定める。各  $[\gamma] \in \tilde{S}$ ,  $q := \gamma(1) \in S$  の十分小な近傍を取ってその中の  $q$  を始点とするパスと  $\gamma$  の和全体がなす集合を  $p$  の近傍とし、この近傍系から位相を定める。このとき  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  は命題 2.1.7 の条件を満たし、また  $S$  のループ  $\gamma$  のリフト  $[\gamma|_{[0,t]}(\cdot/t)]$  が閉なるためには  $\gamma \in H$  が必要十分である。補題 2.1.4, 命題 2.1.7(c) より  $\sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p))$  は  $H$  に一致する。  $\square$

補題 2.1.10.  $j = 1, 2$  に対して  $\tilde{S}_j$  を相対コンパクトな位相曲面、  $(\tilde{S}_j, \sigma_j, S_j)$  を分岐のない被覆面とする。同相写像  $h : S_1 \rightarrow S_2$  に対し、リフト  $\tilde{h} : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$  が存在するためには次をみたすことが必要かつ十分である。

(\*) ある  $q_1 \in S_1, q_2 = h(q_1) \in S_2, p_1 \in \sigma_1^{-1}(q_1), p_2 \in \sigma_2^{-1}(q_2)$  に対し、  $h$  の与える基本群の同型  $h_{\#} : \pi_1(\tilde{S}_1, p_1) \rightarrow \pi_1(\tilde{S}_2, p_2)$  が  $h_{\#}(\sigma_{1\#}^{p_1}(\pi_1(\tilde{S}_1, p_1))) = \sigma_{2\#}^{p_2}(\pi_1(\tilde{S}_2, p_2))$  をみたす。

この条件は基点  $q_1, p_1, p_2$  のとり方によらず、またこのときリフトの存在は点の対応 ( $q \in S_1$  に対し、  $p_1 \in \sigma_1^{-1}(q), p_2 \in \sigma_2^{-1}(h(q))$  を取って  $p_1 \mapsto p_2$ ) を与えることに一意である。

証明. (\*)  $h_{\#}(\sigma_{1\#}^{p_1}(\pi_1(\tilde{S}_1, p_1))) = \sigma_{2\#}^{p_2}(\pi_1(\tilde{S}_2, p_2))$  が成り立つ。任意の  $p'_1 \in \tilde{S}_1$  に対し、  $p_1, p'_1$  を結ぶパス  $\tilde{\gamma}$  をとって  $\gamma = \sigma_1(\tilde{\gamma})$ ,  $h \circ \gamma$  の  $P_2$  を始点とするリフト  $\tilde{\gamma}'$  をとる。このとき  $\tilde{\gamma}$  を別のものに取り替えても  $\gamma$  は  $H_1$  の下で一致していて、(\*) より  $\tilde{\gamma}'$  は  $H_2$  の下で一致する。補題 2.1.9 より  $\tilde{\gamma}'$  の終点  $p'_2$  は  $\tilde{\gamma}$  のとり方によらず一意であるから、写像  $\tilde{h} : \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2 : p'_1 \mapsto p'_2$  が定義でき

て  $h \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \tilde{h}$  をみます. 二つのリフトは局所的な表示を考えれば一致する点の近傍では一致し, 一致しない点の近傍では一致しない必要があるから一意性がしたがう.

逆に  $p_1 \mapsto p_2$  なるリフト  $\tilde{h}$  が存在したとする. このとき任意の  $[\gamma] \in \sigma_{1\#}^{p_1}(\pi_1(\tilde{S}_1, p_1))$  に対し,  $\gamma$  の  $p_1$  を始点とするリフト  $\tilde{\gamma}$  は閉曲線より  $\tilde{h} \circ \tilde{\gamma}$  は  $p_2$  を始点とする閉曲線である.  $h \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \tilde{h}$  により  $\tilde{h} \circ \tilde{\gamma}$  は  $p_2$  を始点とする  $h \circ \gamma$  のリフトであり,  $h_{\#}([\gamma]) \in \sigma_{\#}^{p_2}(\pi_1(\tilde{S}_2, p_2))$  が成り立つ. とくに  $h_{\#}(\sigma_{1\#}^{p_1}(\pi_1(\tilde{S}_1, p_1))) \subset \sigma_{2\#}(\pi_1(\tilde{S}_2, p_2))$  であって, また  $h^{-1}, \tilde{h}'$  について考えれば逆の包含関係を得る.  $\square$

位相曲面  $S$  の被覆面  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  であって  $\tilde{S}$  が単連結なものを普遍被覆面という. 補題 2.1.9 より普遍被覆面は一般に存在し, 補題 2.1.10 よりこれは同値のもとで一意的である. また補題 2.1.10 より一般に, 位相曲面間の同相写像は普遍被覆面間の同相写像にリフトされる.

$\tilde{S}$  を相対コンパクトな位相曲面とし, 葉数  $d$  の被覆面  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を考える.

一点  $q \in S$  の逆像を  $p_1, \dots, p_d \in \tilde{S}$  とする.  $\gamma \in \pi_1(S, q)$  に対し, 各  $p_i$  を始点とするリフト  $\tilde{\gamma}_i$  が補題 2.1.4, 2.1.7 より一意に存在し, ある  $q$  の逆像  $p_{\gamma}(i)$  を終点とする. このとき  $p_i \mapsto p_{m_{\gamma}(i)} = \gamma_i(1)$  は  $\{p_1, \dots, p_d\}$  の並び替え  $m_{\gamma} \in \Sigma_d$  を定義し, 準同型写像  $m : \pi_1(S, q) \rightarrow \Sigma_d$  が得られる.

$m$  をこの被覆面のモノドロミー写像, 像  $m(\pi_1(S, q)) \subset \Sigma_d$  をモノドロミー群という. これに対し  $\Sigma_d$  内の共役は  $\{p_1, \dots, p_d\}$  の添字を置き換えたもので同じ並び替え群を与えており, これらはモノドロミー群として同値であるという.

なお,  $S$  の連結性よりモノドロミー群は  $\Sigma_d$  の部分群として推移的である.

**定義 2.1.11.**  $\tilde{S}$  の自己同相写像  $g$  であって  $g \circ \sigma = \sigma$  をみたすものを  $\sigma$  の被覆変換という.  $\sigma$  の被覆変換全体がなす群を被覆変換群といい,  $\text{Deck}(\sigma)$ ,  $\text{Gal}(\tilde{S}/S)$  などとかく.

**補題 2.1.12.**  $\tilde{S}$  を相対コンパクトな位相曲面,  $(\tilde{S}, \sigma, S)$  を分岐のない被覆面とする. これに対し次が成り立つ.

- (a)  $\text{Gal}(\tilde{S}/S)$  の非自明な ( $\text{id}_{\tilde{S}}$  でない) 元は  $\tilde{S}$  に固定点をもたない. すなわち  $\tilde{S}$  への  $\text{Gal}(\tilde{S}/S)$  の作用は自由である.
- (b) 任意の  $p \in \tilde{S}, q = \sigma(p)$  に対し,  $H = \sigma_{\#}(\pi_1(\tilde{S}, p))$  が  $\pi_1(S, q)$  の正規部分群であるとき  $\text{Gal}(\tilde{S}/S)$  は  $\pi_1(S, q)/H$  に同型である.
- (c) 任意の  $q \in \tilde{S}$  に対し十分小さい近傍  $U$  をとれば  $U \cap g(U) \neq \emptyset$  なる  $g \in \text{Gal}(\tilde{S}/S)$  は高々有限個である. すなわち,  $\text{Gal}(\tilde{S}/S)$  は  $\tilde{S}$  に真性不連続に作用する.

**証明.** (a)  $q \in S$  と  $p, p' \in \sigma^{-1}(q)$  を任意にとり,  $g \in \text{Gal}(\tilde{S}/S)$  が  $p$  を固定点に持ったとする. 任意の  $p' \in S$  と  $p, p'$  を結ぶパス  $\tilde{\gamma}$  に対し  $\tilde{\gamma}, g \circ \tilde{\gamma}$  は共通の  $S$  の閉曲線  $\sigma \circ \tilde{\gamma}$  のリフトであり, 仮定と補題 2.1.4 より  $g \circ \tilde{\gamma}$  は  $p'$  を終点にもつ. とくに常に  $g(p) = p'$  であるから  $g = \text{id}_{\tilde{S}}$ .

(b) 各  $g \in \text{Gal}(\tilde{S}/S)$  に対し,  $p, g(p)$  を結ぶ  $\tilde{S}$  のパス  $\tilde{\gamma}, \gamma = \sigma(\tilde{\gamma})$  をとって同値類  $[\gamma]_H$  を考える.  $p, g(p)$  を結ぶ他の  $\tilde{S}$  のパス  $\tilde{\gamma}', \gamma' = \sigma(\tilde{\gamma}')$  をとったとき  $[\gamma^{-1}\gamma'] = [\sigma(\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}')] \in H$  であるから写像  $\Psi : \text{Gal}(\tilde{S}/S) \rightarrow \pi_1(S, q)/H : g \mapsto [\gamma]_H$  が well-defined である. これが同型であることを示す. まず  $g_1, g_2 \in \text{Gal}(\tilde{S}/S)$  に対して  $p, g_1(p)$  を結ぶパス  $\tilde{\gamma}_1, p, g_2(p)$  を結ぶパス  $\tilde{\gamma}_2, g_1(p), g_2 \circ g_1(p)$  を結ぶパス  $\tilde{\gamma}'_2$  をとったとき,  $\sigma \circ \tilde{\gamma}'_2$  の  $p$  を始点とするリフトを考えれば  $[\sigma \circ \tilde{\gamma}'_2]_H = [\sigma \circ \tilde{\gamma}_2]_H$  である.  $\Psi(g_2 \circ g_1) = [\sigma(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}'_2)] = [\sigma(\tilde{\gamma}_1)][\sigma(\tilde{\gamma}'_2)] = [\sigma(\tilde{\gamma}_1)][\sigma(\tilde{\gamma}_2)] = \Psi(g_1)\Psi(g_2)$  より  $\Psi$  は準同型. 任意の  $p' \in \sigma^{-1}(q)$  に対し, 補題 2.1.7 より  $\sigma_{\#}^p(\pi_1(\tilde{S}, p)) = \sigma_{\#}^{p'}(\pi_1(\tilde{S}, p'))$ , 補題 2.1.10 より  $p \mapsto p'$



なる被覆変換が存在する. ここで任意の  $[\gamma] \in \pi_1(S, q)$  に対し  $p$  を  $m(\gamma)(p)$  に送るような被覆変換  $g$  をとれば  $\Psi(g) = [\gamma]_H$  をみたく. また明らかに  $\Psi(\text{id}_{\tilde{S}}) = [1]_H$  であり,  $\Psi$  は同型写像である.

(c)  $p_1, p_2 \in \tilde{S}$  をとる.  $\sigma(p_1) \neq \sigma(p_2)$  のときは十分小さい近傍  $p_j \in U_j \subset \tilde{S} (j = 1, 2)$  をとって  $\sigma(U_1) \cap \sigma(U_2) = \emptyset$  とできるから, このとき任意の  $g \in \text{Gal}(\tilde{S}/S)$  に対し  $g(U_1) \cap U_2 = \emptyset$  である.  $\sigma(p_1) = \sigma(p_2) = q$  とする.  $q$  の十分小さい近傍  $V \subset S$  をとれば  $\sigma$  は  $\sigma^{-1}(V)$  の各成分から  $V$  への同相写像とできるが, この各成分は互いにディスジョイントであって  $\sigma^{-1}(q)$  の点と一対一対応する.  $p \in \sigma^{-1}(q)$  の属する成分を  $U_p$  とかくと  $g(U_p) = U_{g(p)} (g \in \text{Gal}(\tilde{S}/S))$  が成り立つが, 補題 2.1.10 より  $g(p_1) = p_2$  なる  $g$  は存在しても一つであって結果がしたがう.  $\square$

## 2.2 リーマン面, 代数曲線とガロア作用

**定義 2.2.1.** 連結な一次元複素多様体をリーマン面という. また, リーマン面の中の写像であっていたるところの座標近傍での表示が正則関数であるものを正則写像, リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への正則写像を有理型関数という.

例.

- (a) モジュラス  $\tau$  のトーラス  $E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda(1, \tau)$  ( $\Lambda(1, \tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau, \tau \in \mathbb{H}$ )
- (b) モジュラス  $\tau$  の楕円関数  $f_\tau$  ( $\Lambda(1, \tau)$  の作用で不変な  $\mathbb{C}$  上の有理型関数) を用いてかける  
トーラス上の関数  $[z] \in E_\tau \mapsto f_\tau(z) \in \hat{\mathbb{C}}$

**補題 2.2.2.** リーマン面の中の正則写像は分岐被覆である.

**証明.**  $f : X \rightarrow Y$  をリーマン面の中の正則写像とする. 任意の  $p \in X$  に対し,  $q = f(p)$  を中心とする座標近傍をとる.  $f$  は正則より  $p$  を中心とする座標近傍  $(U, z')$  を十分小さくとれば冪級数展開ができて, ある  $n \in \mathbb{N}$  と  $p$  で非零な正則関数  $g$  があって  $U$  上  $w(f(z')) = z'^n \cdot g(z')$  とできる. とくに  $p$  の周りで  $\log f$  の正則な分枝  $L$  がとれて,  $z := z' \cdot \exp(L/n)$  は  $p$  を中心とする局所座標を与える. これに対して局所的に  $w(f) = z^n$  が成り立つから  $f$  は分岐被覆の定義をみたく.  $\square$

**補題 2.2.3 ([3]).**  $X$  をコンパクトリーマン面とする.

- (a) 任意の  $p \in X$  に対し, 有理型関数  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  であって  $p$  を 1 位の零点とするものが存在する.
- (b) 任意の相異なる  $p_1, \dots, p_k \in X$  に対し, 有理型関数  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  であって  $f(p_1), \dots, f(p_k) \in \hat{\mathbb{C}}$  が相異なるものが存在する.

一般にコンパクトリーマン面に対しては補題 2.2.3 により非定値な有理型関数  $f, g$  を取ることができる.  $d = \deg f, F := \{\infty\} \cup \{f \text{ の分岐値}\} \cup f(\{g^{-1}(\infty)\})$ ,  $S := \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  とする. 補題 2.2.2 により  $F$  は有限集合である.  $q \in \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  に対し, その逆像を  $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_d\}$  とかくと,

$$r_1(p) := \sum_{i=1}^d g(p_i), r_2(p) := \sum_{i,j=1, i<j}^d g(p_i)g(p_j), \dots, r_d(p) := \prod_{i=1}^d g(p_i)$$

で定義される対称式  $(r_i)_{i=1}^d$  は全ての  $q \in \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  に対して well-defined であるが, これは  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  上正則で,  $\hat{\mathbb{C}}$  上の有理型関数まで自然に拡張される. とくに各  $r_i$  は有理関数である. さらに,

$$A_q(y) := \prod_{i=1}^d (y - g(p_i)) = \sum_{i=1}^d (-1)^i r_i(q) y^i$$

で定義される  $A_q(y) \in \mathbb{C}[q][y]$  が  $\forall p \in X \setminus f^{-1}(F)$  に対して  $A_{f(p)}(g(p)) = 0$  をみたす.

**補題 2.2.4.**  $X$  の有理型関数  $g$  であって全ての  $p \in X \setminus f^{-1}(F)$ ,  $q = f(p)$  に対し  $A_q(y)$  が  $\mathbb{C}[q][y]$  の既約多項式となるものが存在する.

**証明.** 一点  $q^* \in \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  を取る. 補題 2.2.3(b) により  $g$  を逆像  $f^{-1}(q^*) = \{p_1^*, \dots, p_d^*\}$  で異なる値を取るものして取ることができるが, このとき  $A_q(y)$  は  $\mathbb{C}[q][y]$  の既約多項式になることを示す.

$A_q(y) = b_q(y) \cdot c_q(y)$  と  $\mathbb{C}[q][y]$  内の積に分解されたとする.  $f$  は  $p_1^*$  の周りで分岐しないから局所双正則 ( $\because$  補題 2.2.2(a)) であり,  $z(p) = f(p) - f(p_1^*)$  を  $p_1$  の局所座標に用いることができる. この座標における  $g$  のべき級数表示を  $u$  とかく.

いま  $A_q(u) = 0$  であるから,  $b_q(u) = 0$  として一般性を失わない. 各  $i$ ,  $p_1^*$  と  $p_i^*$  を結ぶ  $X \setminus f^{-1}(F)$  内の曲線に沿って解析接続すると,  $u$  は  $b_q(u) = 0$  を満たしながら  $p_i^*$  の周りまで拡張される. 固定した  $q = f(p)$  に対して  $b_q$  は異なる  $d$  個の解  $g(p_1^*), \dots, g(p_d^*)$  を持つから  $b_q$  は少なくとも  $d$  次で,  $A_q$  自体が  $d$  次より  $c_q$  は定数でなければならない. よって  $A_q(y)$  は既約である.  $\square$

$A_{f(\cdot)}(g(\cdot)) = 0$  は  $X$  上の有理型関数として自然に拡張されて定値 0 であり,  $X$  上いたるところで  $(f, g)$  を根とするような既約多項式  $F(x, y) := A_x(y) \in \mathbb{C}[x, y]$  が得られる.

**定理 2.2.5** ([21]). リーマン面  $X$  上の有理型関数  $f, g$  をある既約代数方程式  $F(x, y) = 0$  をみたすようにとったとき,  $X$  上の任意の有理型関数は  $f, g$  の有理関数である.

**定義 2.2.6.**  $n$  変数の既約多項式  $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  に対し,  $S_F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid F(\mathbf{x}) = 0\}$  を  $F$  が定める複素代数曲線という. また,  $F$  が  $\mathbb{C}^n$  上いたるところである偏導関数が 0 でないとき, 正則な代数曲線であるという.

定理 2.2.5 により, 一般にコンパクトリーマン面はその上の有理型関数  $f, g$  を適当にとってこれが生成する代数関数体  $\mathbb{C}(f, g) = \{R(f, g) \mid R(x, y) : \mathbb{C} \text{ 係数二変数有理関数}\}$  と同一視される. さらにこの同一視の下でコンパクトリーマン面間の正則写像は  $\mathbb{C}$ -代数準同型に対応している. このような「 $\mathbb{C}$  上代数関数体とその間の  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像」は「正則な複素代数曲線とその間の有理写像」に同一視されることが知られており, このようにコンパクトリーマン面は写像を備えた強い意味において代数曲線と同一視される.

## 2.3 Belyi 曲面と dessin

**定義 2.3.1.** コンパクトリーマン面  $X$  が  $\mathbb{K} < \mathbb{C}$  (部分体) 上で定義されるとは, ある  $\mathbb{K}$  係数多項式  $G$  があってこれが定義する代数曲線  $S_G$  と同型であることをいう.

(例) 単位正方形トーラス  $\mathbb{C}/\Lambda(1, i)$  は楕円曲線  $y^2 = 4x^3 - x$  と同型であり,  $\mathbb{Q}$  上で定義される.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \bar{\mathbb{Q}}$  とする.  $\mathbb{K}$  上で定義された代数曲線  $S = S_F \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  に対し, 体同型写像  $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$  が

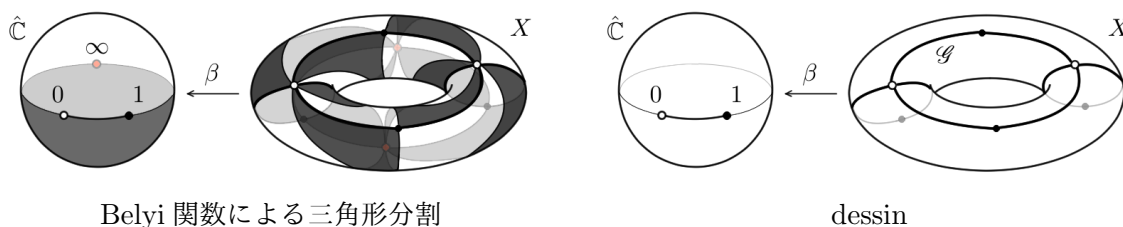
$$F(\mathbf{x}) = \sum a_n \mathbf{x}^n \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \mapsto F^\sigma(\mathbf{x}) := \sum \sigma(a_n) \mathbf{x}^n, S = S_F \mapsto S^\sigma := S_{F^\sigma}$$

で定義される対応により作用する.  $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{Q}}$  のとき, この作用をガロア作用という. ガロア作用の対象となる代数曲線は次の定理により特徴づけられる.

**定理 2.3.2 (Belyi).** コンパクトリーマン面  $X$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  上で定義されるためには, 有理型関数  $\beta: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  であって高々三点のみを分岐値とするものが存在することが必要十分である.

**定義 2.3.3.** コンパクトリーマン面上の有理型関数  $\beta: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  であって高々三点  $\{0, 1, \infty\}$  のみを分岐値とするものを **Belyi 関数** といい, Belyi 関数が存在するコンパクトリーマン面を **Belyi 曲面**, またその対  $(X, \beta)$  を **Belyi pair** という. また, Belyi pair  $(X_1, \beta_1), (X_2, \beta_2)$  に対し  $\beta_1 = \beta_2 \circ f$  をみたす双正則写像  $f: X_1 \rightarrow X_2$  が存在するとき, この二つは同値であるという.

Belyi pair  $(X, \beta)$  に対し, ‘三角形’  $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{C}}$  の逆像  $\beta^{-1}(\mathbb{R}) \subset X$  は  $\beta^{-1}(\{0, 1, \infty\})$  でのみ分岐する  $X$  の三角形分割を与える. これを  $[0, 1] \subset \hat{\mathbb{C}}$  に限って考えると逆像  $\mathcal{G} := \beta^{-1}([0, 1]) \subset X$  は  $\beta^{-1}(\{0, 1\})$  でのみ分岐する  $X$  のグラフで, 各辺の両端点は常に一方が  $\beta^{-1}(\{0\})$ , もう一方が  $\beta^{-1}(\{1\})$  にそれぞれ属する.  $\beta^{-1}(\{0\}), \beta^{-1}(\{1\})$  の頂点を白, 黒で色分けして 2 色グラフを得る. また  $\mathcal{G}$  の補集合  $X \setminus \mathcal{G}$  の各成分は  $\beta^{-1}(\{\infty\})$  の各点に対応する ‘ $2n$  角形’ になる (とくに単連結). グラフの頂点集合  $\mathcal{V}$ , 辺集合を  $\mathcal{E}$  でそれぞれ表記するものとする.



Belyi 関数による三角形分割

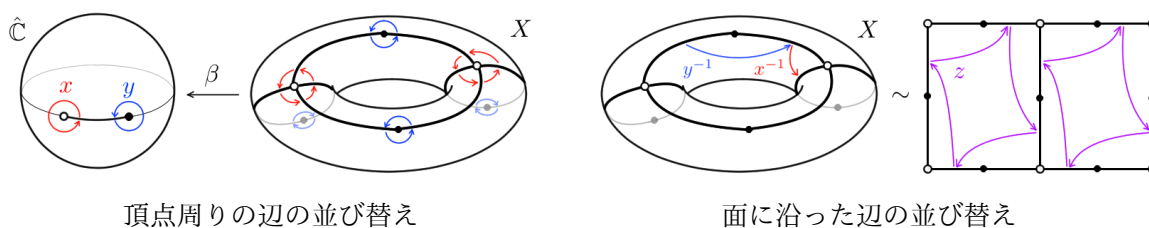
dessin

逆に, このようなグラフ  $\mathcal{G}$  が dessin と呼ばれるものである. 厳密には次で定義される.

**定義 2.3.4.** 位相曲面  $S$  に埋め込まれた有限・連結な 2 色グラフ  $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}_1, \mathcal{E}) \hookrightarrow S$  であって, 補集合  $S \setminus \mathcal{G}$  のすべての成分が単連結であるようなものを **dessin** という. また, 二つの dessins  $\mathcal{G}_1 \hookrightarrow S_1, \mathcal{G}_2 \hookrightarrow S_2$  の間に  $\mathcal{G}_2 = f(\mathcal{G}_1)$  をみたす同相写像  $f: S_1 \rightarrow S_2$  が存在するとき, この二つは同値であるという.

Belyi pair  $(X, \beta)$  とこれが定める dessin  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  について考える. 各辺  $e \in \mathcal{E}$  は適当な非分岐値のファイバーと一対一対応しており, 被覆の葉数は辺の数  $d = |\mathcal{E}|$  に一致する.

葉数  $d$  の被覆  $\beta: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  におけるモノドロミー群は  $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*) \cong F_2$  により二つの生成元;  $0 \in \hat{\mathbb{C}}$  周りのループと  $1 \in \hat{\mathbb{C}}$  周りのループに対応する二元で生成される推移的な並べ替え群  $G = \langle x, y \rangle < \Sigma_d$  である. ここで  $x, y$  はグラフ上では白, 黒頂点の周りで正の向きに一番近い辺へ送るものである. また  $z = y^{-1}x^{-1}$  は  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  の周りのループに対応しており, 各面を時計回りに回るような面に沿った並べ替えを与えるものである.



頂点周りの辺の並び替え

面に沿った辺の並び替え

とくに  $x, y$  のサイクルは各白, 黒頂点の周りで伸びる辺,  $z$  のサイクルは各面と一対一対応し, こ

の意味で二元生成の推移的な並べ替え群はグラフと一対一対応する。

**定義 2.3.5.** 二元生成の推移的な並べ替え群  $G = \langle x, y \rangle < \Sigma_d$  を **dessin** という。

dessin  $G = \langle x, y \rangle$  に対し,  $x, y, z = y^{-1}x^{-1}$  の周期をそれぞれ  $l, m, n$  とおく. 内角が  $\pi/l, \pi/m, \pi/n$  の双曲三角形による  $\mathbb{H}$  のテセレーションの被覆変換群, 周期  $l, m, n$  の三角群  $\Delta = \Delta(l, m, n) = \langle \gamma_l, \gamma_m, \gamma_n \mid \gamma_l^l = \gamma_m^m = \gamma_n^n = \gamma_l \gamma_m \gamma_n = 1 \rangle$  は, 上への準同型  $\psi : \Delta(l, m, n) \rightarrow G : \gamma_l \mapsto x, \gamma_m \mapsto y$  によって  $\Gamma = \psi^{-1}(G) \cong G$  を有限指数の部分群にもつとみなせる. とくに有限被覆  $X^* = \mathbb{H}/\Gamma \ni [z]_\Gamma \mapsto [z]_\Delta \in \mathbb{H}/\Delta(l, m, n) = \hat{\mathbb{C}}^*$  が誘導され, 分岐点を埋めて Belyi pair をなす. この Belyi pair の定める dessin はもとの  $G$  と一致し, 以上をもって次が成り立つ.

**命題 2.3.6.**  $d \in \mathbb{N}$  に対し, 以下は同値のもとで一対一に対応して一意な dessin を定める.

- (a) 位相曲面の埋め込みグラフとしての dessin  $\mathcal{G} \mapsto S$  であって,  $\#\mathcal{E} = d$  なるもの.
- (b) 高々三点を分岐値とする  $d$  葉のリーマン球面の分岐被覆  $\beta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ .
- (c)  $F_2$  の指数  $d$  の部分群  $H$ .
- (d) モノドロミー写像  $m : F_2 \rightarrow \Sigma_d$ .
- (e) 推移的な並べ替え群としての dessin  $G = \langle x, y \rangle < \Sigma_d$ .

**注意 2.3.7.**  $x \in G$  の一つのサイクルに対応するグラフの頂点について, 伸びる辺の本数  $l'$  は周期  $l$  の約数である. この頂点の周りで  $\Gamma$  が定める被覆は  $\mathbb{H} \rightarrow X^* : z \mapsto z^{l/l'}$  として表示される. ( $y, z \in G$  についても同様である.)

以上でガロア作用の対象である Belyi 曲面と組合せ論的特徴づけをもつ dessin が過不足なく対応付けられた. 最後にガロア作用との関連性について説明する.

コンパクトリーマン面  $S = S_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid F(\mathbf{x}) = 0\}$  の上の正則関数は  $n$  個の射影  $\pi_i : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  の有理関数としての表示  $R(\pi_1, \dots, \pi_n)$  をもち, 体同型  $\sigma \in G_{\mathbb{C}}$  の自然な作用が  $S^\sigma$  上の正則関数  $R^\sigma(\pi_1, \dots, \pi_n)$  を与えるものとして定まる. ここでまず, 各点  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n$  に対して  $\mathbf{p}$  での  $R(\mathbf{x})$  の重複度と  $\sigma(\mathbf{p})$  での  $R^\sigma(\mathbf{x})$  の重複度は明らかに一致する. さらに各射影  $\pi_i$  の重複度は定義多項式の偏導関数  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  の零点としての位数 (非零であれば 0 位とする) にのみ依存するから,  $\mathbf{p}, \sigma(\mathbf{p})$  における  $S, S^\sigma$  上の射影  $\pi_i$  の重複度は一致する. このことから次が成り立つ.

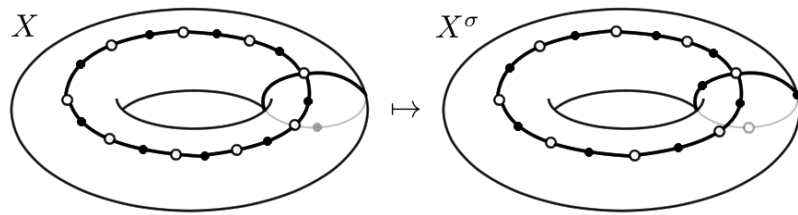
**命題 2.3.8.**  $G_{\mathbb{C}}$  の作用のもとで有理型関数の重複度は不変である.

とくに Belyi 曲面に対するガロア作用は Belyi 関数の重複度を変えない. dessin の頂点と面は Belyi 関数の分岐点に, 頂点から伸びる辺の数と面を囲う辺の数はそれぞれの重複度に, 辺の数は Belyi 関数の次数であって非分岐値の逆像の個数にそれぞれ対応し, これらは不変である. とくに Belyi 関数が与える曲面の三角形分割において頂点, 辺, 面の数が変わらないため, そのオイラー数と種数は不変である. 以上より, ガロア作用と dessin の関係として次が成り立つ.

**命題 2.3.9.** dessin の次の要素はガロア作用のもとで不変である.

- (a) 辺の数  $d$ .
- (b)  $x, y, z \in G$  の各サイクルの長さ ('valency list').
- (c) 曲面の種数  $g$ .

例 (Berg[5]).  $\zeta$  を 1 の 20 乗根とする.  $\zeta \mapsto \zeta^3$  なる  $\sigma \in G_{\overline{\mathbb{Q}}}$  に対し,  
 $X = \{y^2 = (x-1)(x+1)(x - \cos \frac{\pi}{10})\}$ ,  $X^\sigma = \{y^2 = (x-1)(x+1)(x - \cos \frac{3\pi}{10})\}$



### 3 flat structure と Teichmüller 理論

一般にリーマン面に対してはある種の複素構造を集めて作られる **Teichmüller 空間**, **モジュライ空間** といった構造空間が定義され, とくに Teichmüller 空間をつくる擬等角写像についての考察がこれらの構造空間の複素構造を与える. また一般にリーマン面には **flat structure** という特殊な複素構造が入り, その線形変形が与える複素構造を集めることにより構造空間の中のリーマン面 (Teichmüller disk, Teichmüller curve) を得ることができる. Belyi 曲面の研究との関連としてそのガロア作用が構造空間の中でどのようにふるまうかといったことに興味があるが, 4章で扱う ‘origami’ の Teichmüller curve についての考察がその説明を与えるものになる.

本章は [1], [6], [10], [11], [12], [16], [17] に基づく.

#### 3.1 flat structure

符号反転とは  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto -z$  を指すものとする.

**定義 3.1.1.**  $X$  をリーマン面,  $\{(U, z_U)\}$  をそのアトラスとする.  $X$  をおおう関数要素の族  $\mathcal{F} = \{[U, f]\}$  ( $\bigcup U = X$  をみたすもの) に対し,

- (a) 任意の  $[U, f], [V, g] \in \mathcal{F}$  であって  $U, V$  が交わる  $X$  の座標近傍であるものに対して  $U \cap V$  上で  $f(z_U) = g(z_V) \left(\frac{dz_V}{dz_U}\right)^2$  をみたすとき, これを  $X$  上の正則二次微分という.
- (b) 任意の  $[U, f], [V, g] \in \mathcal{F}$  であって  $U, V$  が交わる  $X$  の座標近傍であるものに対して  $U \cap V$  上で  $f(z_U) = g(z_V) \left(\frac{dz_V}{dz_U}\right)$  をみたすとき, これを  $X$  上の正則一次微分という.

リーマン面  $X$  上の正則二次微分の全体がなす空間を  $Q(X)$  とかくものとする.

**定義 3.1.2.**

- (a) リーマン面上の複素構造のうち, 全ての座標変換が符号反転と平行移動のみからなるアトラスのみを集めたものを **flat structure** という.
- (b) リーマン面上の複素構造のうち, 全ての座標変換が平行移動のみからなるアトラスのみを集めたものを **translation structure** という.
- (c) リーマン面に対し, 高々有限個の点を除いた部分空間に flat structure (resp. translation structure) を与えたものを **flat surface** (resp. **translation surface**) という.

コンパクトリーマン面  $X$  の上の正則二次微分  $\phi = \{[U, f]\}$  に対し, その零点集合  $Z(\phi)$  は有限集合である.  $X^* = X \setminus Z(\phi)$  の各点  $x_0 \in X^*$  の十分小で単連結な近傍  $U \subset X^*$  の上で,  $w_{U, x_0} : x \in U \mapsto \int_{x_0}^x \sqrt{f}(z_U) dz_U$  は  $\sqrt{f}$  の分枝を固定することにより上への同相写像を定める.  $U \cap V \neq \emptyset$  なる十分小な  $U, V$  と  $(U, w_{U, x_0}), (V, w_{V, y_0})$  に対し,  $\sqrt{f}(z_U) = \pm \sqrt{g}(z_V) \left(\frac{dz_V}{dz_U}\right)$  であるから  $w_{U, x_0} \pm w_{V, y_0}$  の一方は定数  $\int_{x_0}^{y_0} \sqrt{f}(z_U) dz_U$  に一致する. とくに座標変換は高々符号反転と平行移動の合成からなる関数で, アトラス  $\mu = \{(U, \pm w_{U, x_0})\}$  が  $X^*$  上の flat structure を定める. また, リーマン面  $X$  上の正則一次微分  $\phi$  が存在するとき, 同様に考えればこれは零点集合を除いた  $X^* = X \setminus Z(\phi)$  上の translation structure を定める. 以下ではこのような flat surface, translation surface を考えるものとする.

$f : X \rightarrow Y$  を flat surfaces  $(X, \mu), (Y, \nu)$  の間の同相写像とする。これが  $p \in X^*$  の周りで線形写像であった、すなわちある  $p \in X^*$  の周りの座標近傍  $(U, \mu_U) \in \mu$  と  $f(p) \in Y^*$  の周りの座標近傍  $(V, \nu_V) \in \nu$  に対して  $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  があって  $\nu_V \circ f \circ \mu_U^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}$  であったとする。このとき flat structure の定義より  $p \in X$  の周りでの  $f$  の表示は座標近傍のとり方によらずに線形写像である上、そこでの表現行列も符号反転を除いて一意である。

**定義 3.1.3.** flat surface  $(X, \mu)$  の向きを保つ自己同相写像  $f : X \rightarrow X$  が  $\mu$  について  $X^*$  上いたるところ局所的に線形写像であるとき、これを  $(X, \mu)$  上の **affine map** という。  $(X, \mu)$  上の affine map 全体がなす集合を  $\mathrm{Aff}^+(X, \mu), \mathrm{Aff}^+(X)$  などとかく。

また、affine map  $f \in \mathrm{Aff}^+(X)$  に対してその表現行列を  $D(f) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  とかき、これによって準同型写像  $D : \mathrm{Aff}^+(X) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  を定義する。

**注意 3.1.4.** translation surface の場合は表現行列は  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  の元として well-defined であり、 $D$  は  $\mathrm{Aff}^+(X) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  として定義する。また、双正則同値類を見る上で表現行列は  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  で考えれば十分である。

**命題 3.1.5.**  $(X, \mu)$  を flat surface,  $u : \tilde{X} \rightarrow X^*$  を  $X^*$  の普遍被覆とする。  $\nu$  を被覆  $u$  で引き戻して得られる  $\tilde{X}$  の flat structure とし、座標近傍  $(U, \nu_U) \in \nu$  を一つ固定する。これに対し、正則関数  $\mathrm{dev} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  であって次をみたすものが存在する。

- (a)  $\mathrm{dev}|_U = \nu_U$
- (b) 任意の  $(V, \nu_V) \in \nu$  に対し、 $\mathrm{dev}|_V$  は  $\pm \nu_V$  と平行移動の合成の形。

これを  $(U, \nu_U)$  に対する  $(\tilde{X}, \nu)$  の **developing map** という。

**証明.** 任意の  $(V, \nu_V) \in \nu$  に対して  $U$  内の点と  $V$  内の点を結ぶパス  $\gamma$  をとり、座標近傍の列  $\{(V_j, \nu_{V_j})\}_{j=0}^n \subset \nu$  を  $V_0 = U, V_n = V, V_{j-1} \cup V_j \neq \emptyset, \cap_{j=1}^n V_j \supset \gamma$  をみたすようにとる。各  $j$  で座標変換  $\nu_{V_{j-1}} \circ \nu_{V_j}^{-1}$  は局所的に  $z \mapsto \pm z + b$  ( $b \in \mathbb{C}$ ) の形であり、 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  の写像に自然に拡張される。これを用いて  $V$  上  $F_V := (\nu_{V_0} \circ \nu_{V_1}^{-1}) \circ (\nu_{V_1} \circ \nu_{V_2}^{-1}) \cdots (\nu_{V_{n-1}} \circ \nu_{V_n}^{-1}) \circ \nu_{V_n}$  とおくとこれは  $[U, \nu_U]$  から  $\{(V_j, F_{V_j})\}$  を通って接続される関数要素を与える。  $\tilde{X}$  は単連結であるから一価性の定理より、その全体への解析接続が  $\tilde{X}$  上の一価な正則関数  $\mathrm{dev}$  を与える。これは  $F_V$  の構成により求める条件をみたす。  $\square$

flat surface  $(X, \mu)$  上の affine map  $f \in \mathrm{Aff}^+(X, \mu)$  に対し、普遍被覆面  $(\tilde{X}, \nu)$  へのリフト  $\tilde{f} \in \mathrm{Aff}^+(\tilde{X}, \nu)$  はいたるところ局所的に  $\nu_V \circ \tilde{f} \circ \nu_U^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}'$  と表示できる。とくにいたるところで  $\mathrm{dev} \circ \tilde{f} = ((\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}) \circ \mathrm{dev}$  が成り立っていて、線形写像  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}$  は developing map を決めるごとに一意である。これを  $\mathbf{aff}(f)$  とかき、普遍被覆面の座標近傍を止めるごとに決まる、 $\mathrm{Aff}^+(X, \mu)$  から線形写像を与える対応  $\mathbf{aff}$  を定義する。ここで  $\mathrm{Aff}^+(X, \mu) \ni f \mapsto \mathbf{aff}(f) = ((\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}) \mapsto [A] \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  が写像  $D$  にあたる。

**例.**  $0 \leq k < 1$  とする。  $(X, \mu = \{(U, z)\})$  を flat surface とするとき、各  $(U, z) \in \mu$  に対し  $z_k := z + k\bar{z}$  において得られる  $\mu_k := \{(U, z_k) \mid (U, z) \in \mu\}$  は再び  $X^*$  の flat structure を与える。ここで位相的な恒等写像  $\mathrm{id}_X : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_k)$  は局所的に  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z_k = z + k\bar{z} = \begin{pmatrix} (1+k)x \\ (1-k)y \end{pmatrix}$  と表示される affine map であって  $D(\mathrm{id}_X) = \begin{bmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{bmatrix}$  である。

## 3.2 Teichmüller 空間

一般にリーマン面の普遍被覆面には被覆が誘導する複素構造が入り、これをもってリーマン面とみなすものとする. この構造は次の定理によりリーマン面ごとに一意に決まる.

**定理 3.2.1** (一意化定理). 単連結なリーマン面は, 次のいずれかに双正則である.

- (a) リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}}$ .
- (b) 複素数平面  $\mathbb{C}$ .
- (c) 上半平面  $\mathbb{H}$ .

**補題 3.2.2.**

- (a)  $\text{Aut}\hat{\mathbb{C}} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d, \in \mathbb{C}, ad - bc = 1\} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$
- (b)  $\text{Aut}\mathbb{C} = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- (c)  $\text{Aut}\mathbb{H} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d, \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

リーマン面とその普遍被覆面  $(\tilde{X}, u, X)$  をとったとき, その被覆変換群  $\text{Gal}(\tilde{X}/X)$  は  $\text{Aut}(\tilde{X})$  の部分群であって,  $\tilde{X}$  に真性不連続に作用するものである (これを **離散部分群** という). 離散部分群  $\Gamma < \text{Aut}(\tilde{X})$  に対して  $X_\Gamma := \tilde{X}/\Gamma$  は  $\text{Gal}(\tilde{X}/X_\Gamma) = \Gamma$  をみたすリーマン面であり,  $X$  と双正則である. 補題 3.2.2(a)(b) の離散部分群についての考察から次の分類を得る.

**補題 3.2.3.**  $\tilde{X}$  を単連結なリーマン面とする.  $\Gamma < \text{Aut}(\tilde{X})$ : 離散部分群に対し, 次が成り立つ.

- (a)  $\tilde{X} = \hat{\mathbb{C}}$  のとき  $\Gamma = \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  である. とくに  $\hat{\mathbb{C}}$  を普遍被覆面にもつリーマン面は  $\hat{\mathbb{C}}$  (種数 0) に双正則なものに限られる.
- (b)  $\tilde{X} = \mathbb{C}$  のとき  $\Gamma$  は  $\mathbb{C}$  自身またはその一元生成, 二元生成の部分群のいずれかである. とくに,  $\mathbb{C}$  を普遍被覆面にもつリーマン面は  $\mathbb{C}$  (種数 0),  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (種数 0), またはトーラス  $\mathbb{C}/\Lambda(1, \tau)$  ( $\tau \in \mathbb{H}$ ) (種数 1) のいずれかに双正則である.
- (c) 閉リーマン面が  $\mathbb{H}$  を普遍被覆面にもつためには種数が 2 以上であることが必要十分で, そのようなリーマン面は  $\mathbb{H}/\Gamma$  ( $\Gamma < \text{Aut}(\tilde{X})$ : 離散部分群) の形のリーマン面に双正則である.

**定義 3.2.4** (擬等角写像).  $\mathbb{C}$  の領域間の同相写像  $f: D_1 \rightarrow D_2$  が以下をみたすとき, **擬等角写像 (quasiconformal mapping, qc)** であるという.

- (a)  $f$  は弱偏微分をもつ. すなわち,  $f = f(x+iy) = f(x, y)$  について関数  $F(= \frac{\partial f}{\partial x})$ ,  $G(= \frac{\partial f}{\partial y})$  があって, 任意の  $D_1$  にコンパクト台をもつ  $C^\infty$  関数  $\phi$  に対して次をみたす.

$$\iint f \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = - \iint F \phi_x dx dy, \quad \iint f \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = - \iint G \phi_y dx dy$$

- (b)  $f$  の弱微分は局所二乗可積分で Beltrami 方程式  $f_{\bar{z}} = \mu f_z$  a.e.  $\|\mu\|_\infty < 1$  をみたす.

(ただし,  $f_z := \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $f_{\bar{z}} := \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}$ .)

$\mu_f := f_{\bar{z}}/f_z$  を  $f$  の **Beltrami 係数** という. また  $k := \|\mu_f\|_\infty$  を  $f$  の **最大歪曲度** といい,  $K(f) := \frac{1+k}{1-k} \geq 1$  が  $K \geq K(f)$  をみたすとき,  $f$  は  $K$ -**擬等角写像 (K-**qc**)** であるという. また, リーマン面間の同相写像  $f: X_1 \rightarrow X_2$  に対し, これがいたるところで局所座標について擬等角写像であるとき擬等角写像という. その局所的な Beltrami 係数の族に対する最大歪曲度の上限として全体の最大歪曲度を定め, これにより  $K$ -**qc** を定義する.



例.  $K \geq 1$  に対し,  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto x + iKy$  は  $K$ -qc である.

前節末の例で挙げた flat surfaces 間の affine map  $\text{id}_X : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_k)$  は  $(\frac{1+k}{1-k})$ -qc である.

**補題 3.2.5.**

- (a)  $K$ -qc の逆関数は  $K$ -qc である.
- (b)  $K_1$ -qc と  $K_2$ -qc の合成は  $K_1K_2$ -qc である.
- (c)  $K$ -qc が双正則であるためには  $K = 1$  が必要かつ十分である.

**補題 3.2.6.** 擬等角写像  $f, g$  に対して  $\mu_g \circ f \cdot \frac{\bar{f}_z}{f_z} = \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \mu_f \mu_{g \circ f}}$  が成り立つ.

また正則写像  $\varphi, \psi$  に対して  $f \circ \varphi = \psi \circ f$  であるとき,  $\mu_f \circ \varphi \cdot \frac{\bar{\varphi}'}{\varphi'} = \mu_f$  が成り立つ.

コンパクトリーマン面から高々有限個の点を除いた形で表されるリーマン面のを有限型のリーマン面という. 有限型のリーマン面は元のコンパクトリーマン面の種数が  $g$ , 除いた点の数が  $n$  であるとき  $(g, n)$  型のリーマン面という.

以下ではリーマン面は有限型のものを考えるものとする.

**定義 3.2.7** (Teichmüller 空間). リーマン面  $X_0$  を一つ固定する.  $X_0$  から他のリーマン面への擬等角写像  $f : X_0 \rightarrow X$  による対  $(X, f)$  全体の上に同値関係  $\sim$  を次で定義する.

$$(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2) \Leftrightarrow \exists h : X_1 \rightarrow X_2 : \text{双正則 s.t. } h \circ f_1 \sim f_2 \text{ (homotopic)}$$

またその同値類がなす空間を  $X_0$  の **Teichmüller 空間** といい,  $\mathcal{T}(X_0)$  とかく.

**定義 3.2.8** (モジュライ空間). リーマン面  $X_0$  を一つ固定する.  $X_0$  の Teichmüller 空間  $\mathcal{T}(X_0)$  の第一成分への射影による像を  $\mathcal{M}(X_0)$  とかき,  $X_0$  のモジュライ空間という. また,  $X_0$  から自身への擬等角写像  $f : X_0 \rightarrow X_0$  ( $X_0$  と  $f(X_0)$  が双正則なもの) のホモトピー同値類全体がなす群を  $\text{Mod}(X_0)$  とかき,  $X_0$  の写像類群という.

**定理 3.2.9.**  $\text{Mod}(X_0)$  は  $[\varphi] \in \text{Mod}(X_0) : [X, f] \in \mathcal{T}(X_0) \mapsto [X, f \circ \varphi^{-1}]$  として  $\mathcal{T}(X_0)$  に作用し, この作用は真性不連続である. さらに  $\mathcal{M}(X_0) = \mathcal{T}(X_0)/\text{Mod}(X_0)$  が成り立つ.

例.  $X_0$  が種数 1 のとき  $\mathcal{T}(X_0) = \mathbb{H}$ ,  $\mathcal{M}(X_0) = \mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

**命題 3.2.10.**  $d_T : \mathcal{T}(X_0) \times \mathcal{T}(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$  を次で定義する.  $[X_1, f_1], [X_2, f_2] \in \mathcal{T}(X_0)$  に対し,

$$d_T([X_1, f_1], [X_2, f_2]) := \inf \{ \log K(h) \mid h : X_1 \rightarrow X_2 : \text{qc } \sim f_1 \circ f_2^{-1} \text{ (homotopic)} \}$$

このとき  $d_T$  は  $\mathcal{T}(X_0)$  上の距離関数を定める. これを **Teichmüller 距離** という.

### 3.3 Teichmüller 空間の複素構造

リーマン面  $X_0$  を固定し, その普遍被覆面を  $\tilde{X}$ ,  $X_0 = \tilde{X}/\Gamma_0$  とする.

$i = 1, 2$  に対し  $[X_i = \tilde{X}/\Gamma_i, f_i] \in \mathcal{T}(X_0)$  を取り,  $u_i : \tilde{X} \rightarrow X_i : x \mapsto [x]_{\Gamma_i}$  とおく. 同相写像  $f : X_1 \rightarrow X_2$  とそのリフト  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  を考える. 任意の  $x \in \tilde{X}$ ,  $\gamma_1 \in \Gamma_1$  に対して  $\gamma_1(x)$  の  $f \circ u_1 = u_2 \circ \tilde{f}$  による像  $f \circ u_1(\gamma_1(x)) = f \circ u_1, u_2 \circ \tilde{f}(\gamma_1(x)) = u_2 \circ \tilde{f}_{\#}(\gamma_1) \circ \tilde{f}$  は一致するから,  $f$  が導く同型写像  $f_{\#}$  は同型  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  を与える.

**補題 3.3.1.** 同相写像  $f_1, f_2 : S_1 \rightarrow S_2$  がホモトピックであるためには, それらが導く基本群の同型写像  $f_{1\#}, f_{2\#}$  が  $\pi_1(\tilde{S})(\tilde{S} : S_1, S_2 \text{ の 普遍被覆面})$  の共役で一致することが必要十分である.

**定理 3.3.2.** 任意の  $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$  で  $\|\mu\|_\infty < 1$  なるものに対し, Beltrami 方程式  $f_{\bar{z}} = \mu f_z$  a.e. をみたす同相写像  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  が  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  を法として一意に存在する.

**系 3.3.3.** 任意の  $\mu \in L^\infty(\mathbb{H})$  で  $\|\mu\|_\infty < 1$  なるものに対し, Beltrami 方程式  $f_{\bar{z}} = \mu f_z$  a.e. をみたす擬等角写像  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  が存在する.

系 3.3.3 の仮定をみたす  $\mu$  は Beltrami 方程式の解  $f^\mu$  をもつ. これが  $X_0 = \mathbb{H}/\Gamma_0$  上の擬等角写像に降りるためには補題 3.2.6 により  $(*) \forall \gamma \in \Gamma_0, (\mu \circ \gamma) \frac{\bar{z}'}{\gamma'} = \mu$  a.e. をみたすことが必要であるが, 逆にこのとき  $\Gamma^\mu := f_{\#}^\mu(\Gamma_0)$  に対し  $f^\mu$  は擬等角写像  $F^\mu : \tilde{X}/\Gamma^0 \rightarrow \tilde{X}/\Gamma^\mu$  に降りる.  $\text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H}) := \{\mu \in L^\infty(\mathbb{H}) \mid \|\mu\|_\infty < 1, \forall \gamma \in \Gamma_0 \mu \circ \gamma \cdot \frac{\bar{z}'}{\gamma'} = \mu \text{ a.e.}\}$  とおくと  $\mu \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$  から  $[X^\mu, F^\mu] \in \mathcal{T}(X_0)$  を与える上への対応  $p : \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{T}(X_0)$  が定義できる.

よって  $\text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$  上の同値関係  $\sim$  を  $\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow p(\mu_1) = p(\mu_2)$  ( $\mu_1, \mu_2 \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$ ) とおけば  $\text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})/\sim$  は  $\mathcal{T}(X_0)$  と同一視できる. 補題 3.3.1 より  $\mu_1 \sim \mu_2$  は  $f_{\#}^{\mu_1}$  と  $f_{\#}^{\mu_2}$  が  $\pi_1(\tilde{X})$  の共役で一致することと同値である.

続いて  $\mu \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$  に対し, これを下半平面上で恒等的に 0 として  $L^\infty(\mathbb{C})$  の元に拡張する. このとき定理 3.3.2 より  $f_\mu : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  であって  $\mathbb{H}$  上  $\mu_{f_\mu} = \mu$ ,  $\mathbb{L}$  上  $\mu_{f_\mu} = 0$  なるものが存在する. とくに  $f_\mu$  は下半平面から像の上への双正則写像である. ここで次が成り立つ.

**補題 3.3.4.**  $\mu_1, \mu_2 \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$  に対し,  $\mu_1 \sim \mu_2$  なるためには  $\mathbb{R} \cup \mathbb{L}$  上  $f_{\mu_1} = f_{\mu_2}$  であることが必要十分である.

**補題 3.3.5.**  $\mathbb{C}$  の領域上の正則関数  $\varphi$  であって  $\varphi' \neq 0$  なるものに対し,  $S_\varphi := (\frac{\varphi''}{\varphi'})' - (\frac{\varphi''}{\varphi'})^2$  とおく. このとき, このような  $f, g$  に対して次が成り立つ.

(a)  $S_{f \circ g} = (S_f \circ g)g'^2 + S_g$

(b)  $S_f = 0 \Leftrightarrow \exists \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  s.t.  $f$  は  $\gamma$  の制限

(c)  $\gamma, \gamma' \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  に対し  $f \circ \gamma = \gamma' \circ f$  が成り立つとき,  $(S_f \circ \gamma)\gamma'^2 = S_f$

これを  $f$  の **Schwarz 微分** という

Beltrami 係数  $\mu \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})$  に対し, 中への双正則写像  $f_\mu : \mathbb{L} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  の Schwarz 微分  $S_{f_\mu}$  は補題 3.3.5 により  $\mathbb{L}/\Gamma_0 = \bar{X}_0$  上の正則二次微分を定めるが, ここで次が成り立つ.

**命題 3.3.6.**  $\beta : \mathcal{T}(X_0) \rightarrow Q(\bar{X}_0) : [X, f] \mapsto [\mu] \mapsto S_{f_\mu}$  は Teichmüller 距離と  $Q(\bar{X}_0)$  に定義されるノルムについて同相な埋め込みである. これを **Bers 埋め込み** という.

$X_0$  の種数  $g \geq 2$  に対し, 正則二次微分の空間  $Q(\bar{X}_0)$  は  $\mathbb{C}^{3g-3}$  の有界領域と同一視されることが知られており, とくに命題 3.3.6 から Teichmüller 空間の複素構造が誘導される.

### 3.4 Teichmüller disk, Veech 群

リーマン面  $X_0 = \mathbb{H}/\Gamma_0$  を固定する.  $X_0$  には補題 3.3.5 に続く部分の考察により正則二次微分による flat structure  $\mu = \mu_\phi$  ( $\phi \in Q(X_0)$ ) が入るが, これと Teichmüller 空間  $\mathcal{T}(X_0)$  の間には次の定理で特徴づけられる関係がある.

**定理 3.4.1** (Teichmüller existence theorem).  $[X_j, f_j] \in \mathcal{T}(X_0)$  ( $j = 1, 2$ ) に対し, ある  $0 \leq k < 1$ ,  $\phi_j \in Q(X_j)$  ( $j = 1, 2$ ) と擬等角写像  $F : X_1 \rightarrow X_2$  が存在して次をみたす.

$F \sim f_2 \circ f_1^{-1}$ , かつ  $f$  は局所座標  $\zeta_j = \int \sqrt{\phi_j}$  ( $j = 1, 2$ ) を用いていたところ局所的に  $\zeta_1 \mapsto \zeta_2 = \zeta_1 + k\bar{\zeta}_1$  と表示される affine map となる. このような  $F$  を **Teichmüller map** という.

**定理 3.4.2** (Teichmüller uniqueness theorem).  $[X_j, f_j] \in \mathcal{T}(X_0)$  ( $j = 1, 2$ ) に対し, 擬等角写像  $f : X_1 \rightarrow X_2$  が  $f \sim f_2 \circ f_1^{-1}$  をみたすとする. このとき定理 3.4.1 の  $F$  に対して  $K(F) \leq K(f)$  であって, 等号が成り立つとき  $F = f$  が成り立つ.

定理 3.4.1, 3.4.2 により, 任意の  $[X, f] \in \mathcal{T}(X_0)$  は Teichmüller map  $F : X_0 \rightarrow X$  によって特徴づけられる.  $\phi \in Q(X_0)$  を固定したとき,  $\zeta = \int \sqrt{\phi}$  を用いた局所的な表示は  $\zeta \mapsto \zeta + k\bar{\zeta}$  であるから Beltrami 係数は  $k\frac{\sqrt{\bar{\phi}}}{\sqrt{\phi}} = k\frac{\bar{\phi}}{|\phi|}$  であり, 系 3.3.3 と合わせて Teichmüller map は  $0 \leq k < 1$  と  $\phi \in Q(X)$  による  $k\frac{\bar{\phi}}{|\phi|}$  で特徴づけられる. ここで次が成り立つ.

**補題 3.4.3.**  $\phi \in Q(X_0)$  を一つとる. 各  $\lambda \in \mathbb{D}$  に対し,  $\mu_\lambda := [\lambda\frac{\bar{\phi}}{|\phi|}] \in \text{Belt}(\Gamma_0 : \mathbb{H})/\sim$ , また  $\iota_\phi(\lambda) := p(\mu_\lambda) = [X^{\mu_\lambda}, F^{\mu_\lambda}] \in \mathcal{T}(X_0)$  とおき, これにより  $\iota_\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{T}(X_0)$  を定義する. このとき  $\iota_\phi$  は等長, 正則な埋め込み  $\mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{T}(X_0)$  を与える.

この  $\iota_\phi$  の像  $\Delta_\phi := \iota_\phi(\mathbb{D})$  を **Teichmüller disk** という.

**命題 3.4.4.**  $X$  をリーマン面とする.  $d_C : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を次で定義する.  $p, q \in X$  に対し,

$$d_T(p, q) := \sup\{d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q)) \mid f : X \rightarrow \mathbb{H} : \text{正則}\} \text{ (ただし } d_{\mathbb{H}} \text{ は } \mathbb{H} \text{ 上の双曲計量. )}$$

このとき  $d_C$  は  $X$  上の距離関数を定める. これを **Carathéodory 距離** という.

Teichmüller disk 上で定義される Teichmüller 距離と Carathéodory 距離についてこれらがどういう関係にあるか, とくに一致するかどうか検証する問題は解決されていない研究課題であった. これは Markovic の論文 [14] において, 5 章で紹介する ‘L-shaped pillowcase’ という flat surface の Teichmüller disk を考えることで解決された.

**問題 3.4.5** (参照 : 5.1.2). 一般に flat surface の Teichmüller disk において, Teichmüller 距離と Carathéodory 距離は一致するか.

Teichmüller disk  $\Delta_\phi \subset \mathcal{T}(X_0)$  に対し, これを射影  $\mathcal{T}(X_0) \rightarrow \mathcal{M}(X_0)$  で落としたモジュライ空間の中の像を考える. これは定理 3.2 により, Teichmüller disk を変えない写像がなす写像類群の部分群  $\Gamma$  の商によって得られる. Teichmüller disk はリーマン面の flat structure の線形変形がなす複素構造の集合であり, これを固定する同相写像は前後の flat structure について局所線形であ

る. とくに写像類群の中では前後の構造が双正則であり, 次が成り立つ.

**補題 3.4.6.** リーマン面  $X_0$  とその上の正則二次微分  $\phi \in Q(X_0)$  に対し, 次が成り立つ.

(a)  $\text{Stab}_{\text{Mod}(X_0)}(\Delta_\phi) = \text{Aff}^+(X_0, \mu_\phi)$

(b)  $\text{Trans}(X_0, \mu_\phi) = \{f \in \text{Aff}^+(X_0, \mu_\phi) \mid D(f) = I\}$  は  $\Delta_\phi$  に対して恒等的に作用する.

このことから Teichmüller disk の像を特徴づける群  $\Gamma$  は affine group の表現行列がなす群と同型である.  $\Gamma(X_0, \mu_\phi) := D(\text{Aff}^+(X_0, \mu_\phi))$  を flat surface  $(X_0, \mu_\phi)$  の **Veech 群** という.

flat surface  $(X_0, \mu_\phi)$  に対してその Veech 群が有限の covolume を持つ, すなわち  $\Gamma(X_0, \mu_\phi)$  の  $\mathbb{H}$  への作用の基本領域が有界領域であるとき, Teichmüller disk の像は  $\mathbb{H}/\Gamma(X_0, \mu_\phi)$  に双正則なコンパクトリーマン面を与える. これを **Teichmüller curve** という.

**注意 3.4.7.** translation surface  $(X, \mu)$  に対して Veech 群は  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  の部分群として定義されるが, この場合は  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  に射影した像  $\bar{\Gamma}(X, \mu) < \text{SL}_2(\mathbb{R})$  が Teichmüller disk の像を特徴づける.

## 4 origami

Teichmüller curve の詳細な観察をするのに適した flat surface として **origami(square-tiled surface)** が挙げられる. その構成から origami には translation structure が入り, 被覆面の理論に基づくアプローチでその Veech 群を調べることができる.

任意の origami は Schmithüsen[17] のアルゴリズムに沿ってその Veech 群を計算し, Belyi 曲面である Teichmüller curve を得ることができる. さらに, Möller[15], Ellenberg, McReynolds[2] の研究結果が origami が持つガロア作用との関連性を特徴づけており, その観点から origami の研究は進められている.

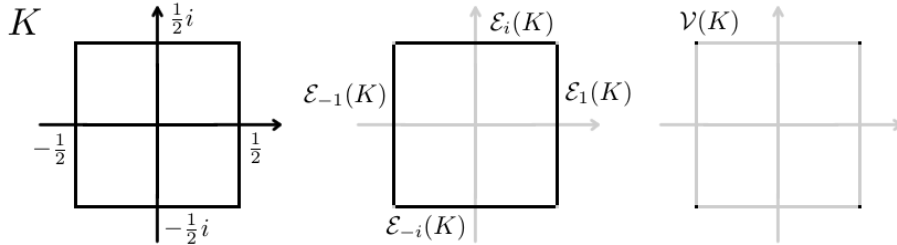
本章は [9], [10], [17] に基づく.

### 4.1 定義と性質

Dessin と同様に origami は複数の同値な定義を持つ. まずは flat surface としての定義をする.

$\mathbb{C}$  の単位正方形とは  $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}z| < \frac{1}{2}, |\operatorname{Im}z| < \frac{1}{2}\}$  を指すものとする. その辺, 頂点を  $\mathcal{E}_j(K) := \{j(\frac{1}{2} + it) \mid -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\}$  ( $j = \pm 1, \pm i$ ),  $\mathcal{V}(K) := \{\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\}$  で表す.

$\mathbb{C}$  の単位正方形と双正則で境界まで同相なりリーマン面を単位正方形セルとよぶ. 単位正方形セル  $C$  に対して存在する写像  $\varphi_C$  ( $C \rightarrow K$ : 双正則,  $\bar{C} \rightarrow \bar{K}$ : 同相) をその座標関数とよび, その辺, 頂点を  $\mathcal{E}_j(C) := \varphi_C^{-1}(\mathcal{E}_j(K))$  ( $j = \pm 1, \pm i$ ),  $\mathcal{V}(C) := \varphi_C^{-1}(\mathcal{V}(K))$  で表す.



#### 定義 4.1.1.

$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_d\}$  を有限枚の単位正方形セルの集合,  $(\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}$  を座標関数の族とする.

$D = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} (\bar{C} \setminus \mathcal{V}(C))$  上の同値関係  $\sim$  であって次をみたすものを **origami rule** という.

(1) 相異なる  $x, y \in D$  に対し  $x \sim y$  ならば, これらはある  $C_{i_1}, C_{i_2} \in \mathcal{C}$ ,  $j_1, j_2 \in \{\pm 1, \pm i\}$  に対しセルの边上の点  $x \in \mathcal{E}_{j_1}(C_{i_1})$ ,  $y \in \mathcal{E}_{j_2}(C_{i_2})$  であって次をみたす.

また  $j_1 + j_2 = 0$ , ある  $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  に対し  $x = \varphi_{C_{i_1}}^{-1}(j_1(\frac{1}{2} + it))$ ,  $y = \varphi_{C_{i_2}}^{-1}(j_2(\frac{1}{2} - it))$

すなわち  $\sim$  は各セルで ‘左側’ の辺を ‘右側’ の辺に, ‘上側’ の辺を ‘下側’ の辺に貼り合わせる.

(2) 任意の  $x \in \mathcal{E}_{j_1}(C_{i_1})$  に対し, (1) のように貼り合う  $y \in \mathcal{E}_{j_2}(C_{i_2})$  がただ一つ存在する.

(3) 貼り合わせ曲面  $X^* = D / \sim$  は連結である.

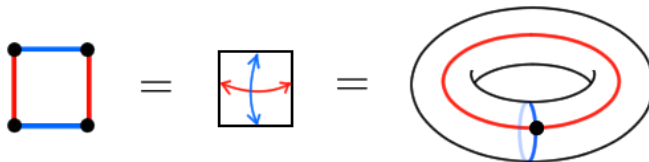
このとき組  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  のことを **origami** という. また,  $X := \overline{X^*}$  とかく.

二つの origami  $(\mathcal{C}_1, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}_1}, \sim_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}_2}, \sim_2)$  とその貼り合わせ曲面  $X_1, X_2$  に対し, 向きを保つ同相写像  $f: X_1 \rightarrow X_2$  であって単位正方形セルを単位正方形セルに写すものが存在するとき, これらは同値であるという.

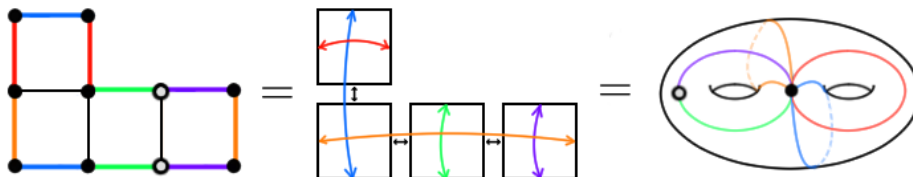
例.

(a) Trivial origami

セル枚数  $d = 1$  の origami は  $E^* = \mathbb{C}/\Lambda(1, i) \setminus \{[0]\}$  に双正則な一点抜きトーラスを与える.



(b) L-shaped origami



**定義 4.1.2.** 辺の貼り合わせを表す際は上図のように辺の色分け等を用いるものとする. また, 以下単に単位正方形セルを図示した際には自然な向きの座標関数が入ったものを表しているものとする.

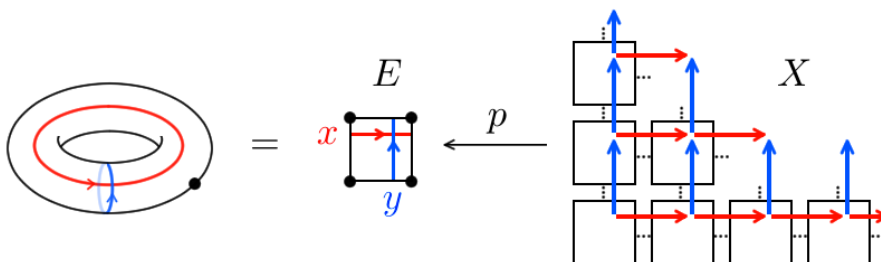
origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  が定める貼り合わせ曲面  $X^*$  において, 各辺  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_j(C_1) \sim \mathcal{E}_{-j}(C_2)$  の近傍  $U_{\mathcal{E}}$  の座標関数  $\varphi_{\mathcal{E}}$  を

$$\varphi_{\mathcal{E}} := \begin{cases} \varphi_{C_1} & \text{on } U_{\mathcal{E}} \cap \bar{C}_1 \\ \varphi_{C_2} + j & \text{on } U_{\mathcal{E}} \cap \bar{C}_2 \end{cases}$$

とおけば well-defined な同相写像を定め, アトラス  $\mathcal{A} := \{(U, \varphi_U) \mid U \in \mathcal{C} \sqcup \mathcal{E}(\mathcal{C})\}$  の座標変換はいたるところで平行移動である. よって  $\mathcal{A}$  は  $X^*$  の translation structure を定める.

一般に origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  に対し,  $x \in C \mapsto [\varphi_C(x)]$  は well-defined な葉数  $d$  の分岐のない被覆写像  $p: X^* \rightarrow E^*$  を定める. この被覆写像は境界まで自然に拡張できて, 一点  $[0] \in E$  のみを分岐値とする葉数  $d$  の分岐被覆  $p: X \rightarrow E$  が得られる. 特に  $X^*, X$  には  $p$  が誘導するリーマン面の構造が入り,  $E$  は Belyi 曲面であるから  $X$  もまた Belyi 曲面である.

葉数  $d$  の被覆  $\mathcal{O} = (p: X \rightarrow E)$  におけるモノドロミー群は  $\pi_1(E^*) \cong F_2$  より dessin の場合と同様に, 二元生成の推移的な並べ替え群  $G = \langle x, y \rangle < \Sigma_d$  である. ここで  $x, y$  はそれぞれ  $E^*$  の  $x, y$  方向のループに関する並べ替えで, 各サイクルが  $X^*$  において  $x, y$  方向に一周するセルの並びに対応する. また  $xyx^{-1}y^{-1}$  は分岐値周りのループに関する並べ替えで, 4 サイクル毎に  $X$  の分岐点周りに並ぶセルに対応する.



この意味で二元生成の推移的な並べ替え群  $G = \langle x, y \rangle < \Sigma_d$  は単位正方形セルの貼り合わせ構造を (同値のもとで) 一意に定める. とくに次が成り立つ.

**命題 4.1.3** ([9]).  $d \in \mathbb{N}$  に対し, 以下は同値のもとで一対一に対応して一意な origami を定める.

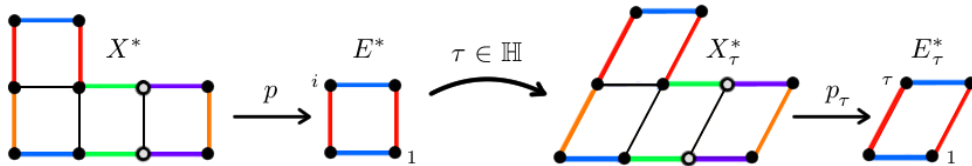
- (a)  $d$  枚の単位正方形セルの貼り合わせ構造  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$ .
- (b)  $F_2$  の指数  $d$  の部分群  $H$ .
- (c) モノドロミー写像  $m : F_2 \rightarrow \Sigma_d$ .
- (d) 推移的な並べ替えの群  $G = \langle x, y \rangle$

## 4.2 origami の flat structure と Veech 群

本節以降では  $I$  は単位行列を表すものとする.

$\mathcal{O} = (p : X \rightarrow E)$  を origami とする. トーラス  $E$  には複素構造が定める自然な一次微分  $dz$  による translation structure  $\mu_0 = \mu_{dz}$  が入るが, これを非分岐被覆  $p : X^* \rightarrow E^*$  によって引戻すことで  $X^*$  の translation structure  $\mu = p^*\mu_0$  が定義される. これは貼り合わせ構造  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  において  $(\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}$  が定めるアトラスが生成する translation structure にもなっている.

origami の translation structure についての Teichmüller disk  $\Delta_\mu \subset \mathcal{T}(X)$  を考える.  $p$  で引き戻すという translation structure の構成により, 各  $\tau \in \mathbb{H}$  に対して単位セルの代わりに  $(1, \tau)$  で張られる平行四辺形を貼り合わせて得られる曲面  $X_\tau^*$  が対応する. これをリーマンの拡張定理による自然な埋めこみ  $\mathcal{T}(X^*) \hookrightarrow \mathcal{T}(X)$  で送った像が  $\Delta$  になっており, 下図のようなパラメトライズをしたものであると考えることができる.



先程の origami の translation structure を普遍被覆  $u : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  で引き戻した  $\mathbb{H}$  の translation structure  $\nu = u^*\mu$  の developing map は, 全てのセル間の座標変換が  $z \mapsto z \pm 1$  or  $z \pm i$  であることからその像を  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(1, i)$  とする. よって次が成り立つ.

**補題 4.2.1.** origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  が定める曲面の普遍被覆面  $u : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{X}$  に対し, 自然な flat structure を入れて作った developing map  $\mathbf{dev} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  の像は  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(1, i)$  である. とくに,  $\mathbb{H}$  の任意の affine map は  $\mathbf{dev}$  の下で  $z \mapsto Az + b$  ( $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), b \in \Lambda(1, i)$ ) の形であり,  $\Gamma(X^*)$  は  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  の部分群である.

Veech 群は  $\Gamma(X^*) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid A = D(f) \text{ for some } \hat{f} \in \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}) \text{ that descends via } u\}$  とかけることが分かる. さらに自由群の同型写像群としての特徴付けをする.

$\mathrm{Aut}^+(F_2)$  を向きを保つ  $F_2$  の自己同型写像がなす群とする (とくに  $\sigma \in \mathrm{Aut}^+(F_2)$  は例えば  $x \mapsto 1, y \mapsto i$  により局所的に複素平面に落とせば向きを保つ). このうち  $F_2$  の共役で表示される  $\sigma(\cdot) = w^{-1}(\cdot)w$  ( $w \in F_2$ ) の形の写像を  $F_2$  の内部自己同型写像といい, 内部自己同型写像全体がなす  $\mathrm{Aut}^+(F_2)$  の部分群を  $\mathrm{Inn}(F_2)$  でかく. 内部自己同型を同一視した商群

$\text{Out}^+(F_2) := \text{Aut}^+(F_2)/\text{Inn}(F_2)$  を  $F_2$  の外部自己同型写像の群という.

translation surfaces の被覆の列 ( $\mathbb{H} \xrightarrow{u} X^* \xrightarrow{p} E^*$ ) について考える ( $\mathbb{H}$  の基点を固定しておく). 被覆変換写像は下で自明な affine map であるから  $\text{Gal}(\mathbb{H}/S) = \{f \in \text{Aff}^+(\mathbb{H}) \mid f \text{ descends to } \text{id}_S\} (S = E^*, X^*)$  とかけるが, 補題 2.1.12 により  $\text{Gal}(\mathbb{H}/E^*)$  は  $\pi_1(E^*) \cong F_2$ ,  $\text{Gal}(\mathbb{H}/X^*)$  は  $\pi_1(X^*) \cong H$  にそれぞれ同型である. ここで  $\text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) \cong F_2$  は適当な座標近傍に対して  $\text{aff}(x) : z \mapsto z + 1$ ,  $\text{aff}(y) : z \mapsto z + i$  なるものとして対応する.

$f \in \text{Aff}^+(\mathbb{H})$  の  $\text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) \cong F_2$  への作用  $f_* : \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) \ni g \mapsto f^{-1} \circ g \circ f$  を定義する. ここで  $D(f^{-1} \circ g \circ f) = D(f^{-1})D(g)D(f) = D(f)^{-1} \cdot I \cdot D(f) = I$  により  $f_*$  は  $\text{Gal}(\mathbb{H}/E^*)$  の自己同型写像を与える. これが定義する準同型  $*$  :  $\text{Aff}^+(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Aut}^+(F_2) : f \mapsto f_*$  に対して次が成り立つ.

**補題 4.2.2.** 次の (a)(b) が可換な図式があつて, 完全系列をなす.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) & \hookrightarrow & \text{Aff}^+(\mathbb{H}) & \xrightarrow{D} & \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow * \cong & & \uparrow \cong \\ 1 & \longrightarrow & \text{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \text{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \text{Out}^+(F_2) \longrightarrow 1 \end{array}$$

(a)                      (b)

また, この図式で  $\text{Aff}^+(X^*) < \text{Aff}^+(\mathbb{H})$  に対応する  $\text{Aut}^+(F_2)$  の部分群は,  $F_2$  の部分群  $H \cong \pi_1(X^*)$  を用いて  $*(\text{Aff}^+(X^*)) = \{\sigma \in \text{Aut}^+(F_2) \mid \sigma(H) = H\} =: \text{Aff}^+(H)$  とかける.

**証明.**  $F_2$  は自由群であるから自明な内部自己同型を与えるのは自明な元に限られる. とくに  $\text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) \cong \text{Inn}(F_2)$  であり, また (a) の可換性は  $*$  の定義によりしたがう.

$N_x, N_y$  をそれぞれ  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  により定義される準同型  $F_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  とし,  $\hat{\beta}$  を  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  から行列  $\begin{pmatrix} N_x(\sigma(x)) & N_x(\sigma(y)) \\ N_y(\sigma(x)) & N_y(\sigma(y)) \end{pmatrix}$  を与える写像とする.  $\sigma, \tau \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対し  $N_x(\sigma \circ \tau(x)) = N_x(\sigma(x^{N_x(\tau(x))} y^{N_y(\tau(x))})) = N_x(\sigma(x))N_x(\tau(x)) + N_x(\sigma(y))N_y(\tau(x))$  などにより  $\hat{\beta}$  は準同型であり, また  $f \in \text{Aff}^+(\mathbb{H})$  に対して  $D(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  とかくと

$\text{aff}(f_*(x)) = f \circ (z \mapsto z + 1) \circ f^{-1} = (z \mapsto a + ci)$ ,  $\text{aff}(f_*(y)) = f \circ (z \mapsto z + i) \circ f^{-1} = (z \mapsto b + di)$  より  $\hat{\beta}(f_*) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  であつて  $\hat{\beta} \circ * = D$  が成り立つ. とくに  $\text{Inn}(F_2) \cong \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) = \text{Ker } D$  は  $\text{Ker } \hat{\beta}$  に一致し,  $\beta : \text{Out}^+(F_2) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : [\sigma] \mapsto \hat{\beta}(\sigma)$  が定義できて同型を与える.

以上により可換な完全系列を与える次の図式を得る. とくに  $*$  は同型写像である.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) & \hookrightarrow & \text{Aff}^+(\mathbb{H}) & \xrightarrow{D} & \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow * & \nearrow \hat{\beta} & \uparrow \cong \beta \\ \text{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \text{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \text{Out}^+(F_2) \end{array}$$

後半について,  $f \in \text{Aff}^+(\mathbb{H})$  が被覆  $u : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  を通して降りるためには被覆変換群  $H = \text{Gal}(\mathbb{H}/X^*) \cong \pi_1(X^*)$  の自己同型写像  $\Phi : H \rightarrow H$  が存在し任意の  $\lambda \in H$  に対し  $f \circ \lambda = \Phi(\lambda) \circ f$  をみたすことが必要十分である. ここで  $H$  上  $\Phi_f := f_* \in \text{Aut}^+(F_2)$  とおくと,  $\lambda \in H$  に対し  $f \circ \lambda = (f \circ \lambda \circ f^{-1}) \circ f = \Phi_f(\lambda) \circ f$  をみたす.  $\text{Gal}(\mathbb{H}/X^*)$  の作用は自由であるから上のような  $\Phi$  はあればこの  $\Phi_f$  でなくてはならない. とくに  $f \in \text{Aff}^+(H)$  なる条件は  $\Phi_f = f_*|_H$  の像が  $H$  であることで特徴づけられる.  $\square$



系 4.2.3.  $\Gamma(X^*)$  は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の有限指数部分群である.

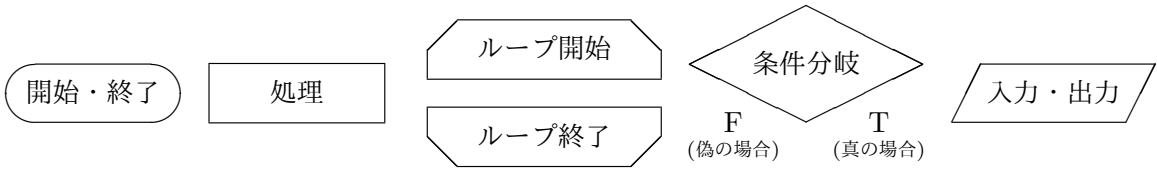
証明. 任意の  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対して  $\sigma(H) \cong H$  の  $F_2$  の部分群としての指数は一致しており  $[F_2 : \sigma(H)] = [F_2 : H] = d$  が成り立つ.  $F_2$  の指数  $d$  の部分群は命題 4.1.1 より  $d$  枚の正方形セルの origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  に対応していて, これは高々有限個しかない. とくにある  $N \in \mathbb{N}$  があって, 任意の相異なる  $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対して適当な  $\sigma_j$  が  $H, \sigma_j(H)$  を同一の origami とする. このとき  $H, \sigma_j(H)$  は  $F_2$  の共役で一致するから  $\sigma_j$  とある内部自己同型の合成が  $\text{Aff}^+(\mathbb{H})$  に属し, とくに  $[\text{Out}^+(F_2) = \text{Aut}^+(F_2)/\text{Inn}(F_2) : \text{Aff}^+(H)/\text{Inn}(F_2)] \leq N$  が成り立つ. 補題 4.2.2 より結果がしたがう.  $\square$

この結果から一般に origami に対して Teichmüller curve が存在し, それは  $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の有限被覆面として得られるものであることが分かる. さらにこの被覆は  $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \hat{\mathbb{C}}^*$  の特異点  $0, 1, \infty \in \hat{\mathbb{C}}^*$  を除いて非分岐であり, 頂点を埋めて Belyi pair を定める.

### 4.3 アルゴリズム

以下では行列  $A$  の符号の同一視による同値類を  $\bar{A}$  で表すものとする.

origami の Veech 群を計算するためのアルゴリズムについて説明する. ここでは簡単のためアルゴリズムはフローチャートの記法に従って書くが, まずその際の表記を示しておく. 次のような箱の中に工程の説明を書き入れ, 矢印で繋いでその流れを表現するものとする.



前節の補題 4.2.2 によって origami の affine group の  $\text{Aut}^+(F_2)$ -部分群としての特徴づけがなされたが, さらにこれを Veech 群が計算しやすい形に組み換える.

補題 4.2.1 から Veech 群を調べる際には  $SL_2(\mathbb{Z})$  の元のみについて判定すればよい. 生成元  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  ではその  $\hat{\beta}$  による引戻し  $\gamma_T, \gamma_S \in \text{Aut}^+(F_2)$  を  $\gamma_T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, \gamma_S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x^{-1} \end{pmatrix}$  として一つ取ることができる. 一般に  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  は生成元の積としての表示  $A = A(T, S)$  をもつから, その  $\hat{\beta}$  の引き戻しの一つが  $\gamma_A = A(\gamma_T, \gamma_S)$  として得られる. 補題 4.2.2 の図式よりこれに  $\text{Inn}(F_2)$  を作用させた軌道が引戻しの全体をなすが, ここで  $z, w \in F_2$  が  $zw^{-1} \in H$  をみたすならば  $z^*(H) = w^*(H)$  である. とくに補題 4.2.2 の特徴づけを判定するためには  $\text{Inn}(F_2)$  の作用は高々  $H$  の同値類で見れば十分であり, 次が成り立つ.

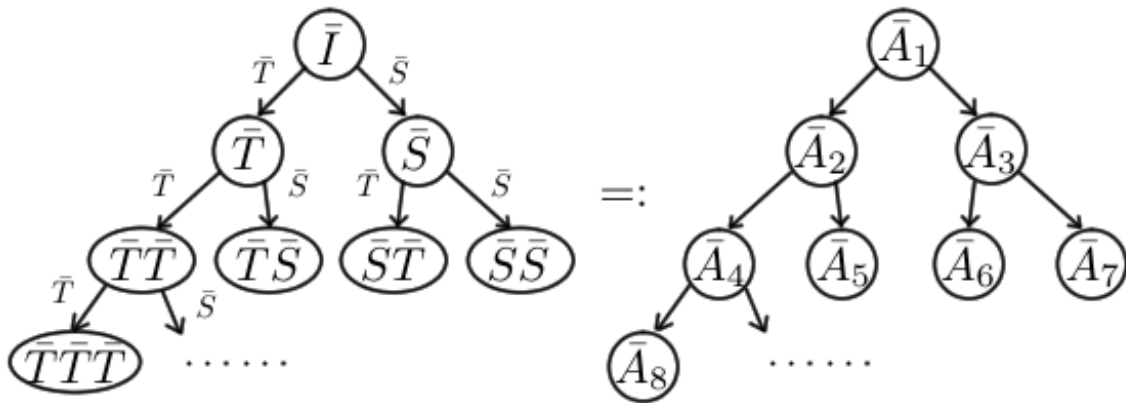
系 4.3.1. origami  $\mathcal{O} = (p : X \rightarrow E), F_2 > H \cong \pi_1(X^*)$  に対し, 次の集合を固定する.

$\mathbf{Gen}^H := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} := \{\text{generator of } H\}, \mathbf{Rep}^H := \{c_1, \dots, c_d\} := \{\text{representative of } F_2/H\}$   
 このとき  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  が  $\Gamma(X^*)$  に属するためには, ある  $c \in \mathbf{Rep}^H$  があって任意の  $\lambda \in \mathbf{Gen}^H$  に対し  $c^* \gamma_A(\lambda) \in H$  をみたすことが必要かつ十分である.

注意 4.3.2.  $SS = STSTST = -I$  が成り立っている.

任意の  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  は生成元  $T, S$  によるワード表示を持つが, 実際の計算では  $J := -I, U := T^{-1}$  を用いた  $J, T, U, S$  のワード表示を用いるのが便利である. それぞれ  $\hat{\beta}$  の引戻しの一つは  $\gamma_J: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{-1} \\ y^{-1} \end{pmatrix}, \gamma_T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, \gamma_U: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^{-1}y \end{pmatrix}, \gamma_S: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x^{-1} \end{pmatrix}$  としてとることができて, また  $SS = STSTST = J, JJ = TU = I$  が成り立つ.

計算アルゴリズムを構成する. 系 4.3.1 に基づき  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  の各元に対してこれが Veech 群  $\Gamma(X^*)$  に属するか判定することができる. ここではまず  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の元に対して次の図のような順序付け  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$  をし, 文字数が少ないものから順に判定することで Teichmüller curve の Fuchs 群  $\bar{\Gamma}(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の計算をする.



命題 4.3.3 (Reidemister-Schreier method[13], Schmithüsen[17]).

origami  $\mathcal{O} = (p: X \rightarrow E), F_2 > H \cong \pi_1(X^*)$  に対し, 系 4.3.1 の  $\mathbf{Gen}^H, \mathbf{Rep}^H$  を固定する. 次の手順で  $\mathbf{Gen}, \mathbf{Rep} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  を構成する.

- (1)  $\mathbf{Gen}, \mathbf{Rep} = \emptyset$  とおく.
- (2)  $\mathbf{Rep}$  に  $\bar{I} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  を加える.
- (3) この工程を行っていない最初の  $\bar{A} \in \mathbf{Rep}$  に対し,  $D \in \mathbf{Rep}$  であって  $\Gamma(X^*)$  を法として  $\pm AT$  の一方と一致するものがあるか判定する. そのような  $D$  が存在すれば  $\bar{A}\bar{T}\bar{D}^{-1}$  を  $\mathbf{Gen}$  に加え, 存在しなければ  $\bar{A}\bar{T}$  を  $\mathbf{Rep}$  に加える.
- (4) この工程を行っていない最初の  $\bar{A} \in \mathbf{Rep}$  に対し,  $D \in \mathbf{Rep}$  であって  $\Gamma(X^*)$  を法として  $\pm AS$  の一方と一致するものがあるか判定する. そのような  $D$  が存在すれば  $\bar{A}\bar{S}\bar{D}^{-1}$  を  $\mathbf{Gen}$  に加え, 存在しなければ  $\bar{A}\bar{S}$  を  $\mathbf{Rep}$  に加える.
- (5) (3)(4) を続く  $\bar{A} \in \mathbf{Rep}$  に対して行い, すべての  $\mathbf{Rep}$  の元をわたるまでこれを繰り返す.

ここで (5) の繰り返しは有限回の工程で終了する. また最終的に  $\mathbf{Rep}$  は  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\bar{\Gamma}(X^*)$  のディスジョイントで完全な代表元のリストを与え,  $\mathbf{Gen}$  が生成する群は  $\bar{\Gamma}(X^*)$  に一致する.

証明. 工程 (3)(4) で  $\mathbf{Rep}$  に追加される元は既存の  $\mathbf{Rep}$  の元すべてと  $\Gamma(X^*)$  を法として一致しないから,  $\mathbf{Rep}$  の元は互いに代表元としてディスジョイントである. とくに系 4.2.3 より  $\mathbf{Rep}$  に加えられる元は origami ごとに有限であり, 手順の有限終了性がしたがう.

$\mathbf{Rep}$  が代表元すべてを網羅することを帰納法で示す. まず工程 (2) より 1 番目の元  $\bar{A}_1 = [I]$  は  $\mathbf{Rep}$  の元で表現可能である.  $n > 2$  に対して  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n-1}$  がすべて  $\mathbf{Rep}$  の元で表現可能

であると仮定したとき  $\bar{A}_n$  が表現可能であることを示す.  $\bar{A}_n = \bar{A}_n(\bar{T}, \bar{S})$  とワード表示したものに對して左から  $j$  個目までの文字からなるものを  $\bar{A}_{k_j}$  (また  $k_0 := 1$ ) とかき,  $\bar{A}_{k_j} \notin \mathbf{Rep}$  であるような最小の  $j$  を  $j_0 (\leq 1)$  とかく. ここで工程 (3)(4) の  $\bar{A} = \bar{A}_{j_0-1}$  のとき,  $\bar{A}_{j_0}$  はある  $D = \bar{A}_k \in \mathbf{Rep}$  ( $k < j_0$ ) と  $\Gamma(X^*)$  を法として一致すると判定されている. とくに  $\bar{\Gamma}(X^*)$  を法として  $\bar{A}_n = \bar{A}_{j_0}(\bar{A}_{j_0}^{-1}\bar{A}_n) = \bar{A}_k(\bar{A}_{j_0}^{-1}\bar{A}_n)$  であるが, これは  $n$  番目より前の元であるから帰納法の仮定により  $\mathbf{Rep}$  の元で表現可能である.

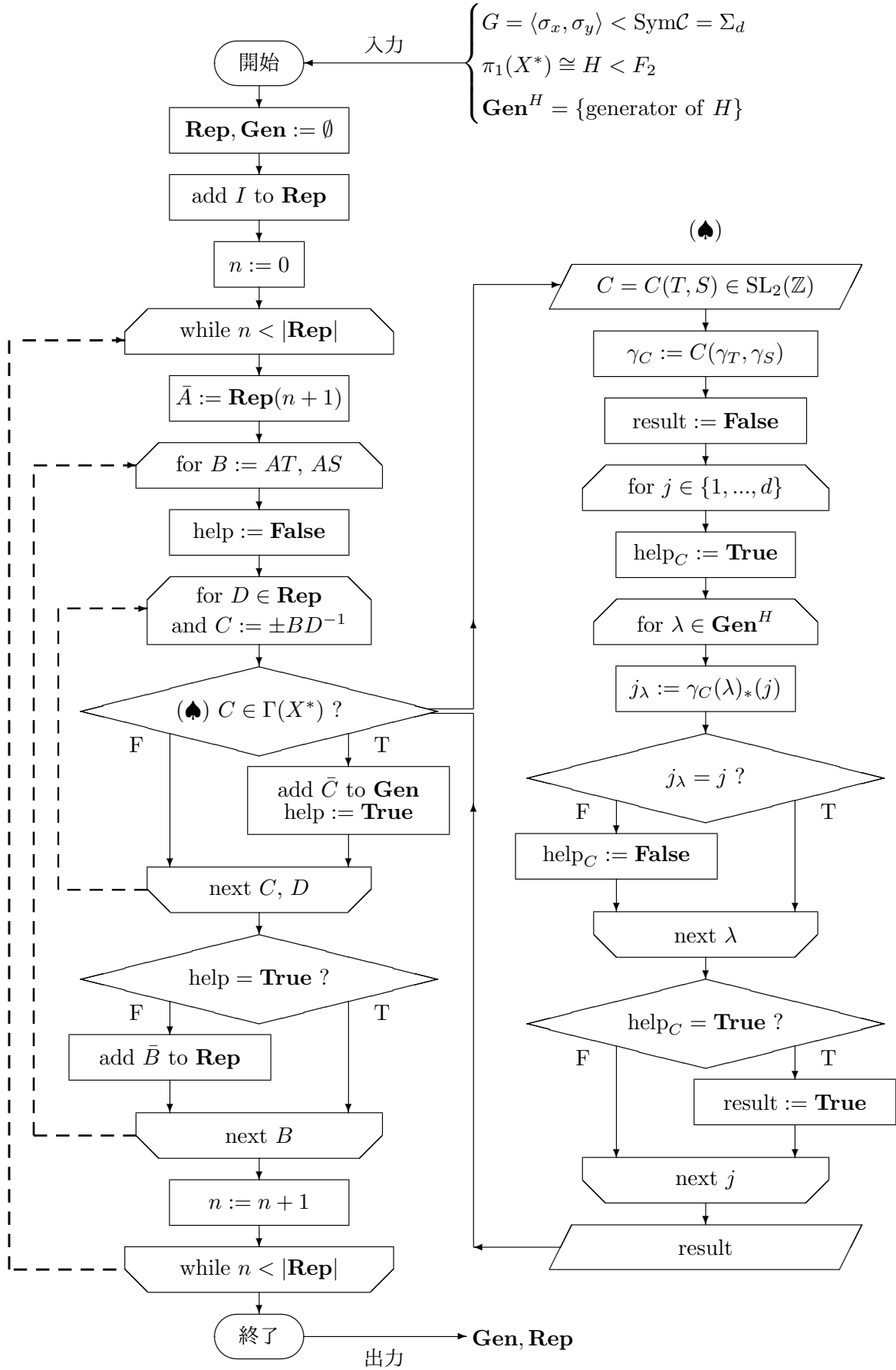
最後に  $\mathbf{Gen}$  が生成する  $\bar{\Gamma}(X^*)$  の部分群  $G$  が  $\bar{\Gamma}(X^*)$  に一致することを帰納法で示す. まず  $\bar{A}_2 = \bar{T}$  が  $\bar{\Gamma}(X^*)$  に属するならば, 最初の (3) の工程で  $\mathbf{Gen}$  に加わるから  $\bar{A}_2 \in G$  である.  $n > 2$  に対して  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n-1}$  のうち  $\bar{\Gamma}(X^*)$  に属するものは  $G$  に属すると仮定する. このとき  $\bar{A}_n$  に対して先程と同じ  $\bar{A}_{k_j}$  および  $j_0$  をとる.  $j_0$  番目以前の元  $\bar{D} \in \mathbf{Rep}$  があって  $\bar{A}_{k_{j_0}}\bar{D}^{-1}$  は工程 (3)(4) で  $\mathbf{Gen}$  に加えられるから  $G$  に属する. とくに  $\bar{A}_n \in \bar{\Gamma}(X^*)$  とするとき,  $\bar{A}_n$  の最初の  $j_0$  文字を  $\bar{D}$  に置き換えた  $\bar{D}\bar{A}_{k_{j_0}}^{-1}\bar{A}_n$  は  $j_0$  番目以前の元であってかつ  $\bar{\Gamma}(X^*)$  に属する. 帰納法の仮定よりこれは  $G$  に属し,  $\bar{A}_{k_{j_0}}\bar{D}^{-1} \in G$  と合わせて  $\bar{A}_n \in G$  がしたがう.  $\square$

#### 注意 4.3.4.

- (a) 命題 4.3.3 の工程 (3)(4) における判定は系 4.3.1 に基づいて行う.
- (b)  $\bar{\Gamma}(X^*)$  の生成系  $\mathbf{Gen}$  が得られれば  $\Gamma(X^*)$  を特定するのは容易である. 実際各  $\bar{A} \in \mathbf{Gen}$  に対して  $\pm A$  の一方は  $\Gamma(X^*)$  に属するから, これを系 4.3.1 に基づき判定すればよい. なおはじめに  $-I \in \Gamma(X^*)$  か判定し, もしこれが成り立つのであれば残りの判定は必要ない.
- (c) 一般に群  $G$  とその有限指数部分群  $G'$  について, 任意の  $G$  の元に対してこれが  $G'$  に属するか判定できるとする. このとき  $G$  のすべての元に対する順序付けをすれば, 命題 4.3.3 における工程, 証明はそのまま包含  $G > G'$  の代表系, 生成系を求める工程に適用することができる.

命題 4.3.3 により次頁のアルゴリズム 4.3.5 を得る. 以降のアルゴリズムでは  $\mathbf{Rep}$  の  $n$  番目の元を  $\mathbf{Rep}(n)$ , また  $u \in F_2$  のモノドロミーを  $u_* := m(u) \in \Sigma_d$  と表記するものとする.

アルゴリズム 4.3.5 (付録 B).



アルゴリズム 4.3.5 の入力は  $G = \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle < \text{Sym}\mathcal{C} = \Sigma_d$  のほかに  $\pi_1(X^*) \cong H < F_2$ ,  $\mathbf{Gen}^H$  を必要とするが, このいずれか一つがあれば命題 4.1.3 にあるように他の二つは定めることができる. ここで  $G = \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle < \text{Sym}\mathcal{C} = \Sigma_d$  から他を得るアルゴリズムを構成する.

**命題 4.3.6.**  $G = \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle < \text{Sym}\mathcal{C} = \Sigma_d$  に対し, 次の手順で  $\mathbf{Gen}^H, \mathbf{Rep}^H \subset F_2$  を構成する.

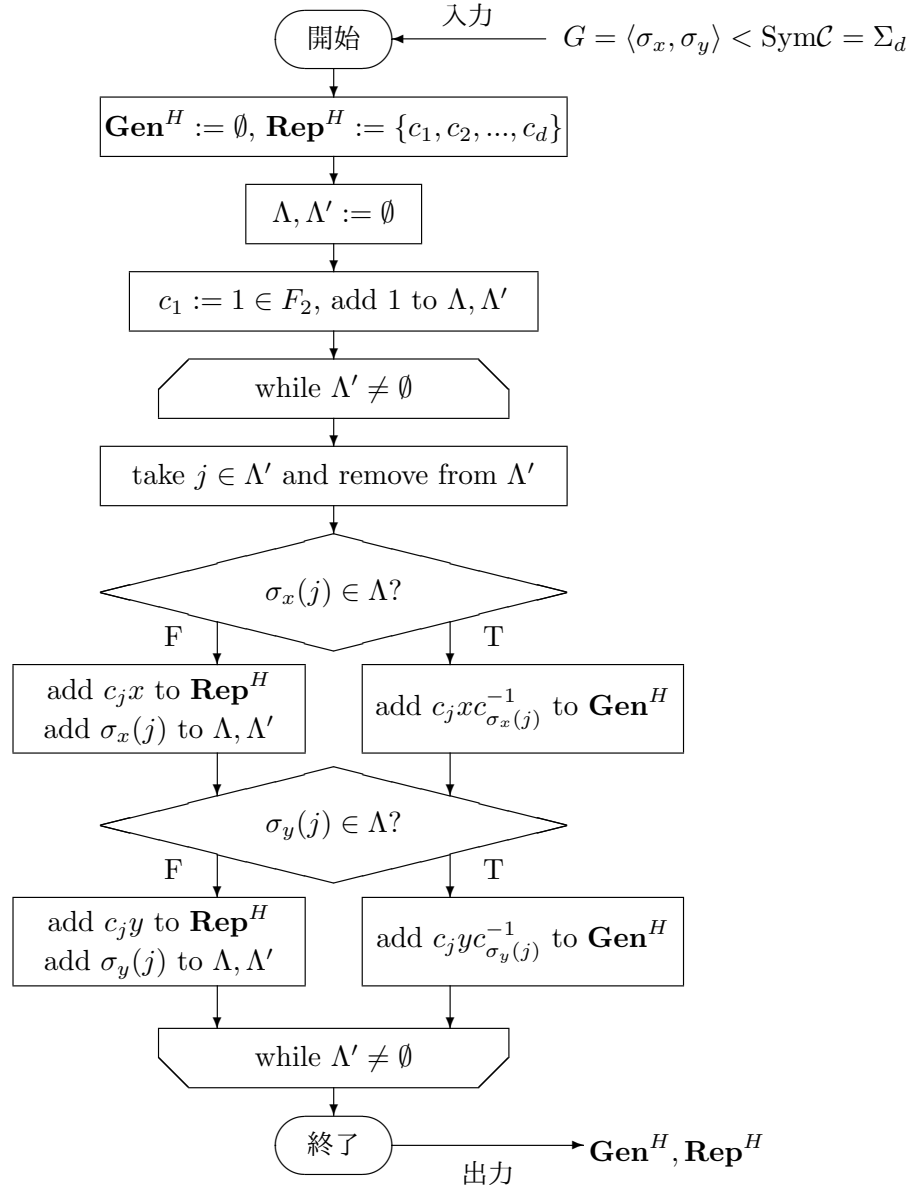
- (1)  $\Lambda = \emptyset$ ,  $\mathbf{Gen}^H = \emptyset$ ,  $\mathbf{Rep}^H = \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$  とおく.
- (2)  $c_1 = 1 \in F_2$  とおき,  $\Lambda$  に  $1 \in \{1, 2, \dots, d\}$  を加える.
- (3) この工程を行っていない最小の  $j \in \Lambda$  に対し,  $\sigma_x(j) \in \Lambda$  か確認する. そうであれば  $c_j x c_{\sigma_x(j)}^{-1}$  を  $\mathbf{Gen}^H$  に加え, そうでなければ  $c_{\sigma_x(j)} = c_j x$  とおき,  $\sigma_x(j)$  を  $\Lambda$  に加える.
- (4) この工程を行っていない最小の  $j \in \Lambda$  に対し,  $\sigma_y(j) \in \Lambda$  か確認する. そうであれば  $c_j y c_{\sigma_y(j)}^{-1}$  を  $\mathbf{Gen}^H$  に加え, そうでなければ  $c_{\sigma_y(j)} = c_j y$  とおき,  $\sigma_y(j)$  を  $\Lambda$  に加える.
- (5) (3)(4) を続く  $j \in \Lambda$  に対して行い,  $\Lambda = \{1, 2, \dots, d\}$  となるまでこれを繰り返す.

ここで (4) の繰り返しは有限回の工程で終了する. また最終的に  $\mathbf{Rep}^H$  は  $F_2/H$  のディスジョイントで完全な代表元のリストを与え,  $\mathbf{Gen}^H$  が生成する群は  $H$  に一致する.

**証明.** 有限性については明らか. 工程 (3)(4) で  $\Lambda$  はその時点の  $\mathbf{Rep}^H$  で  $c_j$  が定義されている添字の集合に一致している. モノドロミーの定義より  $\sigma_x(j) = j' \Leftrightarrow [c_j]x = [c_{j'}]$  on  $F_2/H$  であり,  $\sigma_x(j) \in \Lambda$  は  $c_{\sigma_x(j)} \in \mathbf{Rep}^H$  と同値である ( $y$  についても同様). なお, origami においては貼り合わせ則の定義 (4.1.1) より一つのセルから  $x, y$  方向に進むパスですべてのセルに至ることができるから, 基本群に同型な  $H$  を同一視する際は  $x, y \in F_2$  からなるワードですべての  $F_2$  の元を表現できる. よって命題 4.3.3 の証明において  $T, S$  を  $x, y$  におきかえた考察によりしたがう.  $\square$

**注意 4.3.7.** 各  $w \in F_2$  に対し, モノドロミーの像  $m(w)(1) \in \{1, 2, \dots, d\}$  は番号 1 のセルからパス  $w$  で辿った先のセルの番号にあたる. ここで対応  $[w] \in F_2 \mapsto m(w)(1)$  は well-defined であって,  $F_2/H$  とセルの集合  $\mathcal{C}$  との間の一対一対応を与える. 命題 4.3.6 における  $\mathbf{Rep}^H$  の構成は番号  $j$  のセルに対して  $c_j \in \mathbf{Rep}^H$  が対応するようにしている.

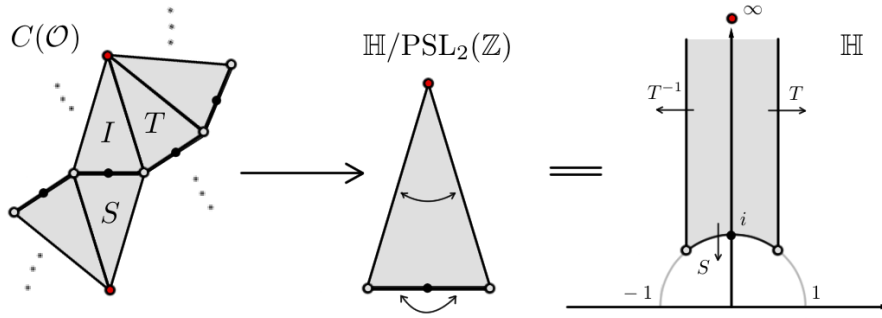
アルゴリズム 4.3.8 (付録 C).



#### 4.4 Teichmüller curve の概形, ガロア作用との関連性

origami  $\mathcal{O} = (p : X \rightarrow E)$  に対し, その Teichmüller curve  $C(\mathcal{O}) = \mathbb{H}/\bar{\Gamma}(X^*)$  のことを **origami curve** という.

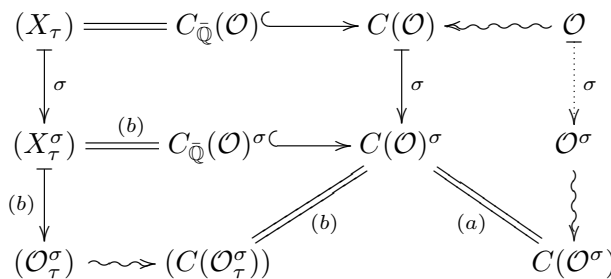
系 4.2.3 から一般に origami curve は  $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \hat{\mathbb{C}}^*$  の被覆面として得られる Belyi 曲面であるが, アルゴリズム 4.3.5 で求めた **Rep**, **Gen** がその被覆の様子を表している.  $C(\mathcal{O})$  は  $\mathbb{H}$  上の  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の作用の基本領域  $F$  のコピーを貼り合わせた曲面であるが, **Rep** は各コピーとそれらがどう隣り合うかの状況に, **Gen** は自明なもの以外で各辺がどの辺と貼り合うかの状況に対応する. とくに Teichmüller curve  $C(\mathcal{O})$  の三角形分割がここから得られ, その種数を計算することができる. また  $F$  の下辺 (三境界のうち  $\infty$  を端点に持たないもの) に対応する  $C(\mathcal{O})$  のグラフは dessin である.



最後に Belyi 曲面へのガロア作用との関連を説明する Möller[15] の結果について紹介する.  
 origami  $\mathcal{O} = (p : X \rightarrow E)$  は origami curve  $C(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}(X)$  の中に複素構造として Belyi 面を与えるものを含むが, このようなものを集めて得られる  $C(\mathcal{O})$  の部分集合を  $C_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O})$  とおく. これに対し次が成り立つ.

**定理 4.4.1** (Möller[15]). origami  $\mathcal{O} = (p : X \rightarrow E)$ ,  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し, 次が成り立つ.

- (a) ある origami  $\mathcal{O}^\sigma$  が存在して,  $C(\mathcal{O})^\sigma$  はその origami curve  $C(\mathcal{O}^\sigma)$  である.
- (b) 各  $X_\tau \in C_{\mathbb{Q}}$  に対し,  $X_\tau^\sigma$  はある origami  $\mathcal{O}_\tau^\sigma = (p_\tau^\sigma : X_\tau \rightarrow E)$  を与えるが, その origami curve  $C(\mathcal{O}_\tau^\sigma)$  は  $X_\tau$  によらず一意である. とくに,  $(X_\tau^\sigma)$  は Belyi 面を与える点全体からなる  $C(\mathcal{O})^\sigma$  の部分集合  $C_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O})^\sigma$  をなす.



この結果は origami の線形変形が与える Belyi 曲面の族と origami curve について, それぞれへのガロア作用がパラメトライズにより Teichmüller curve を取る操作と可換であることを意味している. とくにパラメータによらない組み合わせ構造としての origami に対してガロア作用が誘導され, さらに Möller[15] によりこれが dessin が持つ情報 (命題 2.3.9) に類似するものを不変量として持つこと等を示されている.

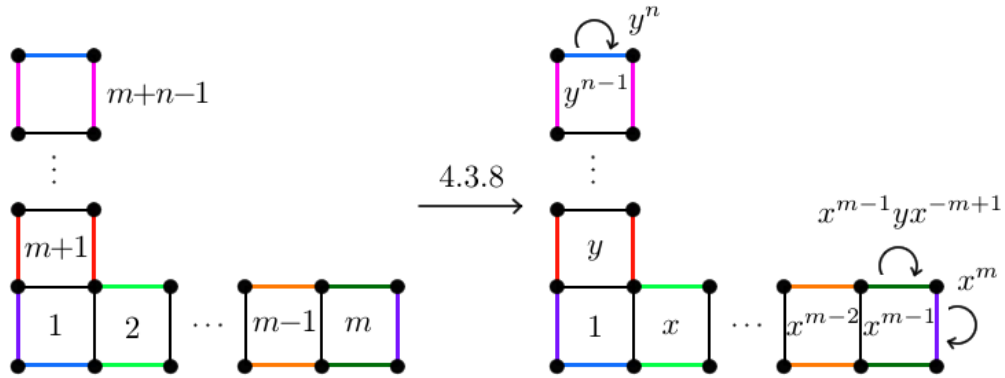
また一方でこの結果は Belyi 曲面の構造にあたる各点へのガロア作用が origami curve のパラメトライズによってモジュライ空間に写して見たとき, これが再び origami curve へのガロア作用 (に含まれる形) として現れることを意味すると考えられる.

### 4.5 例

以下の例では  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の同値類を表す  $\bar{\cdot}$  を略記する. すなわち  $\bar{I}, \bar{T}, \bar{S}$  の代わりに単に  $I, T, S$  などとかくものとする. また, origami の図では頂点を区別しないで表記するものとする.

例 1. L-sequence  $L(n, m)$

$$G = \langle x, y \rangle, x = (1 \ 2 \ \dots \ m), y = (1 \ m+1 \ m+2 \ \dots \ m+n-1)$$



(a)  $\bar{\Gamma}(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の指数, 種数,  $\mathrm{cusp}(\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  の逆像) の数 (Schmithüsen[17])

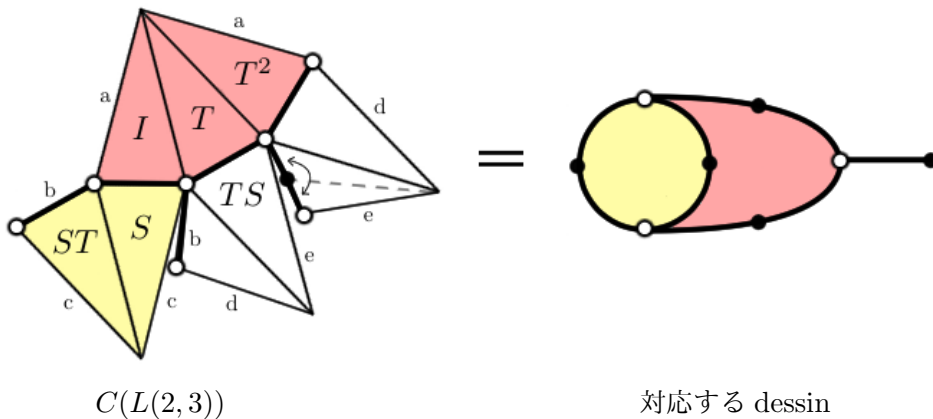
$L(n, m)$	指数	種数	cusps の数
$L(2, 2)$	3	0	2
$L(2, 3)$	9	0	3
$L(2, 4)$	18	0	5
$L(2, 5)$	36	0	8

$L(n, m)$	指数	種数	cusps の数
$L(2, 6)$	54	0	10
$L(2, 7)$	108	1	17
$L(3, 3)$	9	0	3
$L(4, 4)$	54	0	10

(b)  $L(2, 3)$

$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, y\}, \mathbf{Gen}^H = \{xyz, yxw, yy, xxx, xxyz\}$$

$$\mathbf{Rep} = \{I, T, S, TT, TS, ST, TTS, TST, TTST\}, \mathbf{Gen} = \{SS, TTT, TSSU, STTJS, STSJUSU, TTSSUU, TSTTJSUU, TSTSJUS, TTSTTJSU, TTSTSJUSUU\}$$



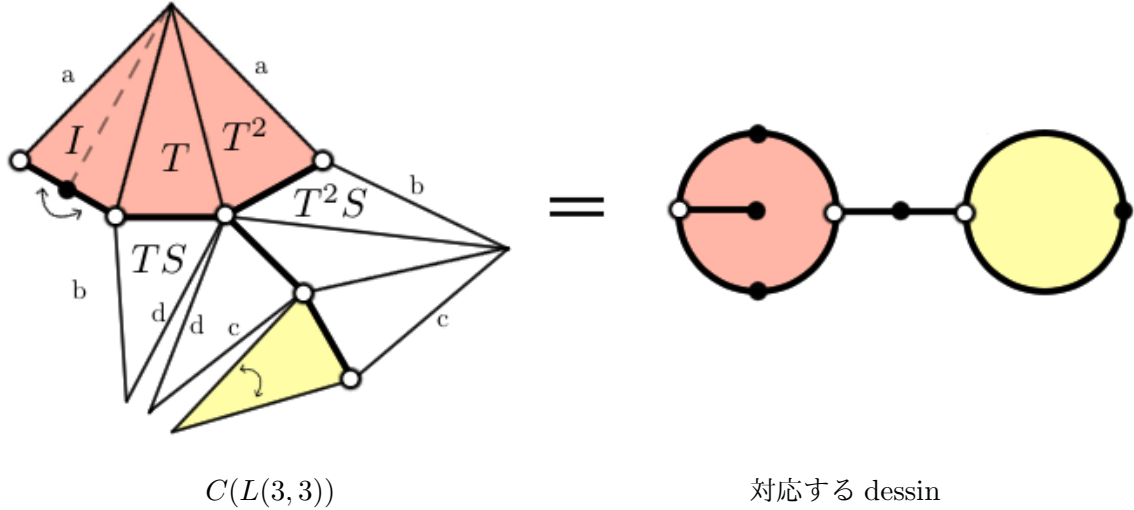


(c)  $L(3, 3)$

$\text{Rep}^H = \{1, x, xx, y, yy\}$ ,  $\text{Gen}^H = \{xyz, yxw, xxx, xxyz, yyxww, yyy\}$

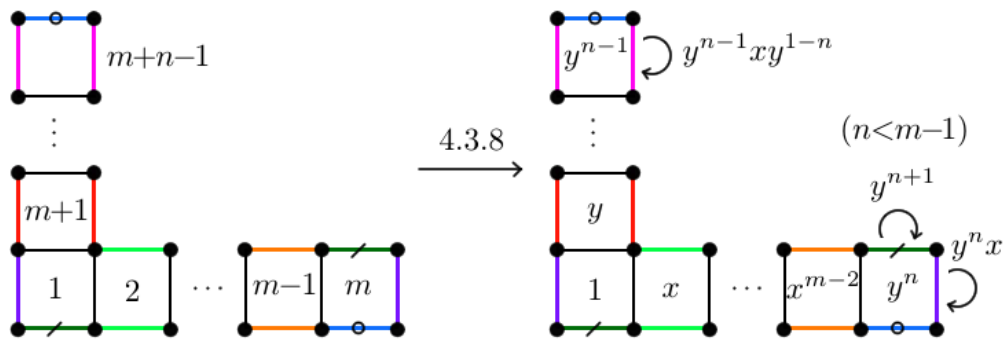
$\text{Rep} = \{I, T, TT, TS, TTS, TTST, TTSTT, TTSTS, TTSTTS\}$

$\text{Gen} = \{S, TTT, TSTJSUU, TSSU, TTSSUU, TTSTTTSUSUU, TTSTSTJSU, TTSTSSJUSUU, TTSTTSTSUSUU, TTSTTSSJUUSUU\}$



例 2. L-ring sequence  $Lr(n, m)$

$G = \langle x, y \rangle$ ,  $x = (1\ 2\ \dots\ m)$ ,  $y = (1\ m+1\ m+2\ \dots\ m+n-1, m)$



(a)  $\bar{\Gamma}(X^*) < \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の指数, 種数, cusp の数

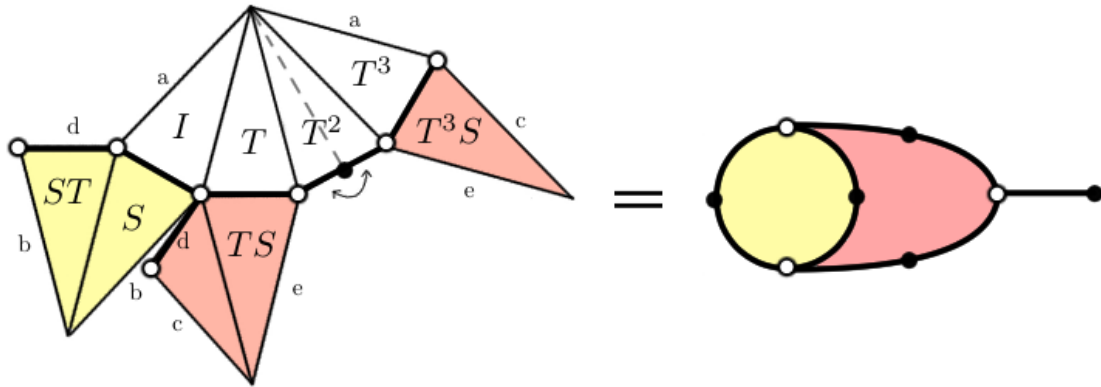
$Lr(n, m)$	指数	種数	cusp の数
$Lr(1, 3)$	3	0	2
$Lr(1, 4)$	9	0	3
$Lr(1, 5)$	18	0	5
$Lr(2, 2)$	3	0	2

$Lr(m, n)$	指数	種数	cusp の数
$Lr(2, 3)$	4	0	3
$Lr(2, 4)$	24	0	6
$Lr(2, 5)$	24	0	6
$Lr(3, 3)$	24	0	6

(b)  $Lr(1, 4)$

$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, y\}, \mathbf{Gen}^H = \{xyz, yx, yy, xxxw, xxyzz\}$$

$$\mathbf{Rep} = \{I, T, S, TT, TS, ST, TTT, TST, TTTS\}, \mathbf{Gen} = \{SS, TTSUU, TSSU, STTJS, STSJUSU, TTTT, TSTTJSUUU, TSTSJUS, TTTSTJSU, TTTSSUUU\}$$



$C(Lr(1, 4))$

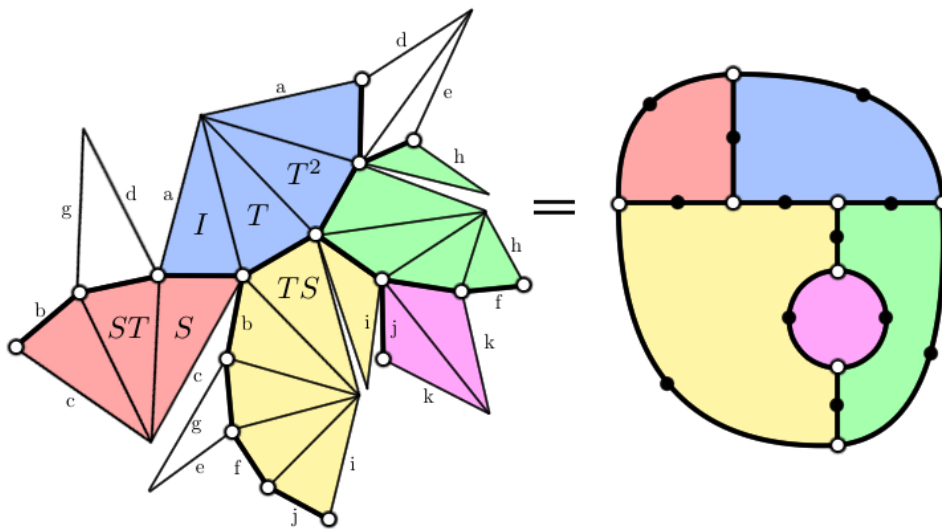
対応する dessin

(c)  $Lr(2, 4)$

$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, yy, y\}, \mathbf{Gen}^H = \{xyz, yxw, xxxww, xxyzz, yyx, yyy\}$$

$$\mathbf{Rep} = \{I, T, S, T^2, TS, ST, T^3, T^2S, TST, ST^2, STS, T^3S, T^2ST, TST^2, T^3ST, T^2ST^2, T^2STS, TST^3, TST^2S, T^3STS, T^2ST^3, T^2ST^2S, TST^4, T^2ST^2ST\}$$

$$\mathbf{Gen} = \{S^2, TS^2U, T^4, T^2S^2U^2, TSTSJU^2S, ST^3JS, ST^2SJUSU, STSTJSU^3, STS^2JUS, T^3S^2U^3, T^3ST^2SU^2SU, T^2STSTJSU, T^2STS^2JUSU^2, TST^3SJU^3SU^2, TST^2STSUS, TST^2S^2JU^2SU, T^3STSTJSU^2, T^3STS^2JUSU^3, T^2ST^4SUSU^3, T^2ST^3SJU^3SU, T^2ST^2S^2JU^2SU^2, TST^5SUSU^2, TST^4SUSU^2SU^2, T^2ST^2ST^2SU^2SU^2, T^2ST^2STSJU^4SU\}$$



$C(Lr(2, 4))$

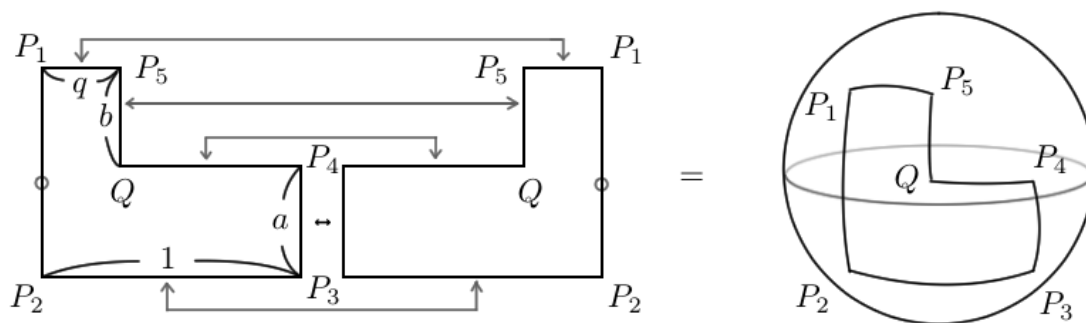
対応する dessin

## 5 origami の拡張

### 5.1 動機づけ

Markovic[14] は ‘L-shaped pillowcase’ という flat surface を考えるアプローチで Teichmüller 理論において未解決であった問題 3.4.5 の否定的解決をした.

**定義 5.1.1.**  $a, b > 0, 0 < q < 1$  とする.

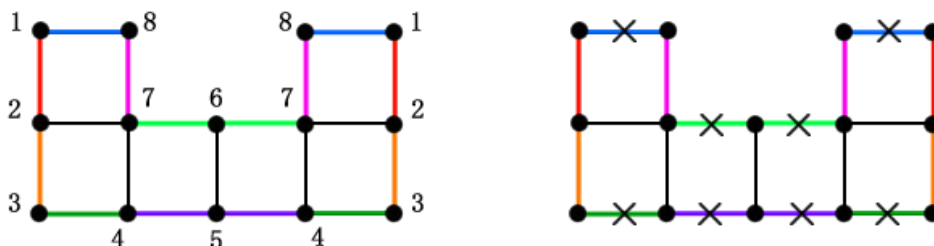


上図のような二つの L 字領域の貼り合わせによる曲面を **L-shaped pillowcase**  $L(a, b, q)$  という.

L-shaped pillowcase  $L(a, b, q)$  は種数 0 のリーマン面であって自然な正則二次微分が定義できる. その零点は上図の  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  であり,  $(0, 5)$  型の flat surface になる.

**定理 5.1.2** (Markovic[14]).  $L(a, b, q)$  の Teichmüller disk  $\Delta \subset \mathcal{T}_{0,5}$  において, Teichmüller 距離と Carathéodory 距離は一致しない.

L-shaped pillowcase  $L(a, b, q)$  は有理数パラメータに対しては origami に類似する単位セルの貼り合わせ曲面と考えられるが, 4.1.1 における origami の定義で (自然なセル分割に対応する正方形の貼り合わせとして) 表現できるものではない. 例えば  $a = b = q = \frac{1}{2}$  では下図左のような 6 枚の単位セルの貼り合わせ曲面と考えることができるが, 曲面の座標変換が符号反転を含むセル境界の貼り合わせ (下図右の×印) においては origami rule の定義 4.1.1(1) に抵触する.



この状況を含めより一般に, L-shaped pillowcase に現れる類の flat structure の符号反転を再現するような単位セルの貼り合わせ則として, origami rule の拡張を準備する. 先程の例における符号反転は特定のセル境界間の貼り合わせが左右, 上下のうち片方のみ, 向かい合う側の代わりに同じ

側の辺での (**origami rule** と逆の) 貼り合わせとなっていることで生じている. このような状況を ‘符号が異なるセル間の貼り合わせ’ で現れていると考えて定義をすることにより, 各辺で座標変換が符号反転を含むか否かが一意に決まる状況を得ることができる. これに基づき origami の拡張の定義をする.

**注意 5.1.3.** セルの辺の貼り合わせが左右, 上下ともに同じ側の辺での貼り合わせとなっているものは座標関数を  $i$  倍し,  $\pi$  回転したセルと取り替えることで向かい合う側の辺での (origami rule に沿った) 貼り合わせとみなすことができる.

## 5.2 定義とその flat structure

単位正方形セルに関する表記は 4.1 節にならうものとする. 単位正方形セルの集合  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_d\}$  に disjoint な分解  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\circ \sqcup \mathcal{C}_\bullet$  を与え, これを 2 色分けされた単位正方形セルの集合とよぶ. また, セルの符号  $\text{sign} : \mathcal{C} \rightarrow \{\pm 1\}$  を

$$\forall C \in \mathcal{C}, \text{sign}(C) := \begin{cases} +1 & \text{if } C \in \mathcal{C}_\circ \\ -1 & \text{if } C \in \mathcal{C}_\bullet \end{cases}$$

により定義する.

**定義 5.2.1.**  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\circ \sqcup \mathcal{C}_\bullet = \{C_1, C_2, \dots, C_d\}$  を 2 色分けされた有限枚の単位正方形セルの集合,  $(\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}$  を座標関数の族とする.  $D = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} (\bar{C} \setminus \mathcal{V}(C))$  上の同値関係  $\sim$  であって次をみたすものを拡張した **origami rule** という.

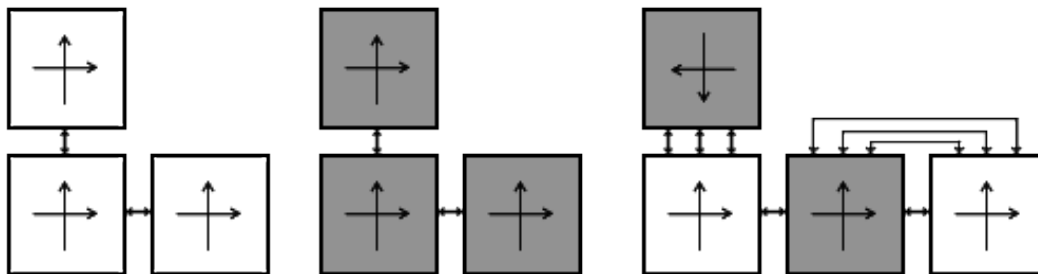
(1) 相異なる  $x, y \in D$  に対し  $x \sim y$  ならば, これらはある  $C_{i_1}, C_{i_2} \in \mathcal{C}$ ,  $j_1, j_2 \in \{\pm 1, \pm i\}$  に対しセルの辺上の点  $x \in \mathcal{E}_{j_1}(C_{i_1})$ ,  $y \in \mathcal{E}_{j_2}(C_{i_2})$  であって次をみたす.

(a)  $\text{sign}(C_{i_1}) \cdot \text{sign}(C_{i_2}) = 1$  のとき

$$j_1 + j_2 = 0, \text{ かつある } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ に対し } x = \varphi_{C_{i_1}}^{-1}(j_1(\frac{1}{2} + it)), y = \varphi_{C_{i_2}}^{-1}(j_2(\frac{1}{2} - it)).$$

(b)  $\text{sign}(C_{i_1}) \cdot \text{sign}(C_{i_2}) = -1$  のとき

$$j_1 + \overline{j_2} = 0, \text{ かつある } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ に対し } x = \varphi_{C_{i_1}}^{-1}(j_1(\frac{1}{2} + it)), y = \varphi_{C_{i_2}}^{-1}(j_2(\frac{1}{2} - it)).$$



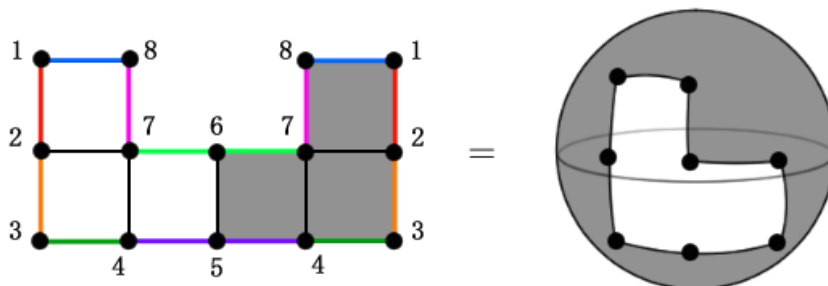
(2) 任意の  $x \in \mathcal{E}_{j_1}(C_{i_1})$  に対し, (1) のように貼り合う  $y \in \mathcal{E}_{j_2}(C_{i_2})$  がただ一つ存在する.

(3) 貼り合わせ曲面  $X^* = D / \sim$  は連結である.

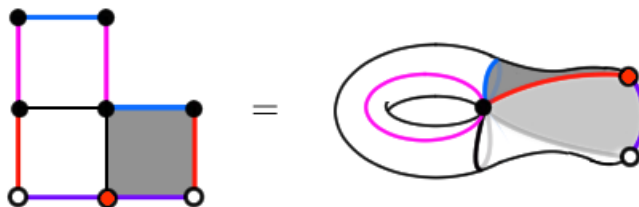
このとき組  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  のことを **extended-origami** という. また,  $X := \overline{X^*}$  とかく.

例.

(a) L-shaped pillowcase  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



(b) 3-punctured torus



**注意 5.2.2.**  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  は定義から自然に正方形 6 枚のセル分解ができるが, どの  $d = 6$  の origami rule をわたっても種数 0 の貼り合わせ曲面は得られない.

また, 定義 4.1.1 の origami は  $\mathcal{C}_\bullet = \emptyset$  として extended-origami の定義に含まれる.

extended-origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  が定める貼り合わせ曲面  $X^*$  にも origami と同様に座標関数が定めるアトラスを定義できる. 各辺  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{j_1}(C_1) \sim \mathcal{E}_{j_2}(C_2)$  の近傍  $U_{\mathcal{E}}$  の座標関数  $\varphi_{U_{\mathcal{E}}}$  を

$$\varphi_{U_{\mathcal{E}}} := \begin{cases} \varphi_{C_1} & \text{on } U_{\mathcal{E}} \cap \bar{C}_1 \\ j_1 - \frac{j_1}{j_2} \varphi_{C_2} & \text{on } U_{\mathcal{E}} \cap \bar{C}_2 \end{cases}$$

としてアトラス  $\mathcal{A} := \{(U, \varphi_U) \mid U \in \mathcal{C} \sqcup \{U_{\mathcal{E}_j(C)} \mid j \in \{\pm 1, \pm i\}, C \in \mathcal{C}\}\}$  が得られるが, ここで貼り合わせ則  $\sim$  の定義によって次が成り立ち, とくに  $\mathcal{A}$  は  $X^*$  の flat structure を定める.

**補題 5.2.3.** 各辺  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{j_1}(C_1) \sim \mathcal{E}_{j_2}(C_2)$  に対し, その近傍と隣接するセルの間の座標変換は

(a) 前後で符号反転をしない.  $\varphi_{C_1} \circ \varphi_{U_{\mathcal{E}}}^{-1}(z) = z, \varphi_{U_{\mathcal{E}}} \circ \varphi_{C_2}^{-1}(z) = z + j_1$

(b) 前後で符号が反転する.  $\varphi_{C_1} \circ \varphi_{U_{\mathcal{E}}}^{-1}(z) = z, \varphi_{U_{\mathcal{E}}} \circ \varphi_{C_2}^{-1}(z) = -z + j_1$

のいずれか一方である. また, 同一視される辺  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{j_2}(C_2) \sim \mathcal{E}_{j_1}(C_1)$  に対し, これらの辺が (a)(b) のどちらかであるかの情報は一致する. とくに, 辺の符号  $\text{sign} : \mathcal{E}(\mathcal{C}) \rightarrow \{\pm 1\}$  が

$$\text{sign}(\mathcal{E}) := \begin{cases} +1 & \text{if } \mathcal{E} \text{ satisfies (a)} \\ -1 & \text{if } \mathcal{E} \text{ satisfies (b)} \end{cases} \quad \text{として well-defined である.}$$

**注意 5.2.4.** origami  $(C, \bullet = \emptyset)$  のように全ての辺が符号一定であるような場合, 貼り合わせ曲面は translation surface であって origami の議論に帰着できる. 以下ではこのような場合を除いて考えるものとする.

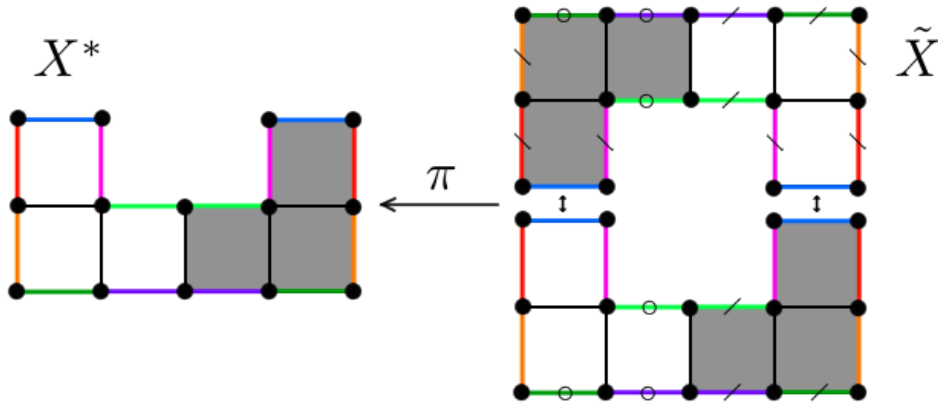
extended-origami  $(C, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  のコピーをもう一つ用意し, 一方は全セルの座標関数を  $i$  倍して全体として ' $\pi$  回転' させる. 符号が負の辺を切り離し, 代わりにもともと貼り合っていた辺のコピーへの貼り合わせを与えることで新たな貼り合わせ曲面  $\tilde{X}$  を得る. このときアトラス  $\mathcal{A}$  とそのコピーを貼り合わせて得られる  $\tilde{X}$  のアトラス  $\tilde{\mathcal{A}}$  は全ての座標変換が符号反転のない平行移動で, translation structure を定める. より強い意味で次が成り立つ.

**命題 5.2.5.**  $(C, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  を extended-origami とする.  $C^+, C^-$  を  $C$  の二つのコピーとし, 各  $x \in C \in \mathcal{C}$  に対応するコピーを  $x^\pm \in C^\pm \in \mathcal{C}^\pm$  とかく.  $\tilde{C} = C^+ \sqcup C^-$  のセルの座標関数を  $\varphi_{C^\pm} := \pm\varphi_C$  (複号同順) とおき,  $\tilde{C}$  の貼り合わせ則  $\sim'$  を次で定義する.

$$x \sim y \text{ なる } x, y \text{ に対し, } \begin{cases} (1) & x, y \text{ の属する辺の符号が正のとき } x^+ \sim' y^+, x^- \sim' y^- \\ (2) & x, y \text{ の属する辺の符号が負のとき } x^+ \sim' y^-, x^- \sim' y^+ \end{cases}$$

このとき  $(\tilde{C}, (\varphi_{C^\pm})_{C^\pm \in \tilde{\mathcal{C}}}, \sim')$  は origami であって貼り合わせ曲面  $\tilde{X} = \bigsqcup_{C^\pm \in \tilde{\mathcal{C}}} (\tilde{C}^\pm \setminus \mathcal{V}(C^\pm)) / \sim$  は  $\pi: x^\pm \in \tilde{X} \mapsto x \in X^*$  で定義される  $X^*$  の二葉の非分岐被覆面になる.

**証明.** 前半は拡張した origami rule の定義と  $\sim'$  の構成からこれがとくに定義 4.1.1(1) をみだし, origami rule となることからしたがう. 後半については  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X^*$  が自然な二対一の写像であって, かつ先ほど構成したアトラス  $\tilde{\mathcal{A}}$  に関していたるところ局所的に高々平行移動と符号反転の合成からなる関数として表現されることからしたがう.  $\square$



### 5.3 Veech 群を調べるアプローチ

一般に extended-origami が定める貼り合わせ曲面は符号が負の辺の周りの状況を見ればトーラスの被覆面とはなっておらず, origami における 4.3.5 のような手順を直接適用することはできない. ここでは命題 5.2.5 の二重被覆面を用いてその上下の関係を調べることによって間接的にオリジナルの貼り合わせ曲面の Veech 群を調べるというアプローチを考える. これにより一般の

extended-origami に対して Veech 群の性質が得られ, またそのある部分群について具体的な形を得るアルゴリズムを構成できることについて説明する.

extended-origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  に対し, 5.2 節で構成した flat structure  $\mu$  を普遍被覆  $u : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  で引き戻して  $\mathbb{H}$  の flat structure  $\nu = u^*\mu$  を得る. 補題 5.2.3 より任意の隣接するセルの間の座標変換は  $z \mapsto \pm z \pm j$  ( $j = \pm 1, \pm i$ ) の形にはり合うことから, 適当な座標近傍を決めてその developing map の像が  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(1, i)$  であるようにできる. よって origami に準ずる性質として次の補題が成り立つ.

**補題 5.3.1.** extended-origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  の普遍被覆面  $u : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{X}$  に対し, 自然な flat structure を入れて作った developing map  $\mathbf{dev} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  の像は  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(1, i)$  である. とくに  $\mathbb{H}$  の任意の affine map は  $\mathbf{dev}$  の下で  $z \mapsto \pm Az + b$  ( $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), b \in \Lambda(1, i)$ ) の形で表示される.

**定義 5.3.2.** extended-origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}, \sim)$  の貼り合わせ曲面  $X^*$  と二重被覆面  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X^*$ , 普遍被覆面  $u : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{X}$  に対して前述の flat structure が入っているとす. これに対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}) &= \{f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \mid f : \text{locally affine}\} && \xrightarrow{D} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{Aff}^+(X^*) &= \{f \in \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}) \mid f(X^*) \cong X^*\} && \longrightarrow \Gamma(X^*) = D(\mathrm{Aff}^+(X^*)) \\ \mathrm{Aff}_\pi^+(X^*) &= \{f \in \mathrm{Aff}^+(X^*) \mid f \text{ can be lifted via } \pi\} && \longrightarrow \Gamma_\pi(X^*) = D(\mathrm{Aff}_\pi^+(X^*)) \\ \mathrm{Aff}^+(\tilde{X}) &= \{f \in \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}) \mid f(\tilde{X}) \cong \tilde{X} (\Leftrightarrow f \text{ descends via } u)\} && \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}) = D(\mathrm{Aff}_\pi^+(\tilde{X})) \\ \mathrm{Aff}_\pi^+(\tilde{X}) &= \{f \in \mathrm{Aff}^+(\tilde{X}) \mid f \text{ descends via } \pi\} && \longrightarrow \Gamma_\pi(\tilde{X}) = D(\mathrm{Aff}_\pi^+(\tilde{X})) \\ \mathrm{Aff}^+(H) &= \{\sigma \in \mathrm{Aut}^+(F_2) \mid \sigma(H) = H\} (F_2 > H \cong \pi_1(\tilde{X})) \end{aligned}$$

と定義する. また, 補題 4.2.2 の同型  $*$  :  $\mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}) \rightarrow \mathrm{Aut}^+(F_2)$  における  $\mathrm{Aff}_\pi^+(\mathbb{H})$  の像を  $\mathrm{Aff}_\pi^+(H) := *(\mathrm{Aff}_\pi^+(\tilde{X})) < \mathrm{Aff}^+(H)$  とする.

**補題 5.3.3.** 上の状況で  $X^*$  の基点を固定し, 属するセルの  $\pi$  の逆像を  $[1], [c_0] \in F_2/H$  とかくものとする. このとき任意の  $f \in \mathrm{Aff}^+(X^*)$  に対し, これが  $\pi$  を通して降りるためには  $[f_*(c_0)] = [c_0]$  かつ  $F_2/H$  上で  $[f_* \circ \gamma_J] = [\gamma_J \circ f_*]$  をみたすことが必要かつ十分である. とくに,  $\mathrm{Aff}_\pi^+(H) = \{\sigma \in \mathrm{Aff}^+(H) \mid [\sigma(c_0)] = [c_0], [\sigma \circ \gamma_J] = [\gamma_J \circ \sigma] \text{ on } F_2/H\}$ .

**証明.**  $f \in \mathrm{Aff}^+(\tilde{X})$  が被覆  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X^*$  を通して降りるためには被覆変換群  $K = \mathrm{Gal}(\tilde{X}/X^*)$  の自己同型写像  $\Phi : K \rightarrow K$  が存在して任意の  $\lambda \in K$  に対し,  $f \circ \lambda = \Phi(\lambda) \circ f$  をみたすこと  $(*)$  が必要十分である. 補題 2.1.12 と二重被覆の構成により, 非自明な  $\lambda \in K$  の  $\mathrm{Aut}^+(F_2)$  における表示は  $\lambda(H) = H$  をみたし,  $F_2/H \rightarrow F_2/H$  に射影されて  $\lambda_*([w]) = [c_0 \cdot \gamma_J(w)]$  の形である. とくに  $(*)$  は任意の  $[w] \in F_2/H$  に対し  $f_*(\lambda_*([w])) = \lambda(f_*([w])) \cdots (*1)$ ,  $f_*(\lambda_*([w])) = f_*([w]) \cdots (*2)$  のいずれかであることで特徴づけられる. ここでつねに  $(*1)$  であることを示す.

$K$  の作用は自由であるから  $(*2)$   $f_*(\lambda_*([w])) = f_*([w]) \Leftrightarrow \lambda_*([w]) = [w]$  となるような  $w$  は存在しない. とくに  $w = 1$  の場合から  $f_*([c_0]) = [c_0] \cdots (**)$  が成り立つ.

$(**), (*1)$  により  $f_*(\lambda_*([w])) = f_*([c_0 \cdot \gamma_J(w)]) = f_*([c_0]) \cdot f_*([\gamma_J(w)]) = [c_0] \cdot [f_* \circ \gamma_J(w)]$  と  $\lambda_*(f_*([w])) = [c_0 \cdot \gamma_J(f_*(w))] = [c_0] \cdot [\gamma_J \circ f_*(w)]$  は一致することから結果がしたがう.  $\square$

ここで, 次の主張の証明を目標とする.

**主張 5.3.4.**  $\Gamma_\pi(\tilde{X})$  は  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の有限指数の部分群である.

**定義 5.3.5.**  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対し,  $\gamma_J$  との交換子を  $\Gamma_\sigma := \sigma^{-1} \circ \gamma_J \circ \sigma \circ \gamma_J$  とおく.

$F_2$  の有限指数の部分群  $H$  に対し, 次のように定義する.

$$\text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H) := \{\sigma \in \text{Aff}^+(H) \mid \sigma \circ \gamma_J = \gamma_J \circ \sigma \text{ on } H\} = \{\sigma \in \text{Aff}^+(H) \mid \Gamma_\sigma(H) = H\}$$

$$\text{Aff}_0^{\text{Sym}}(H) := \{\sigma \in \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H) \mid \sigma \circ \gamma_J = \gamma_J \circ \sigma \text{ mod } H\} = \{\sigma \in \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H) \mid \Gamma_\sigma = \text{id}_{F_2/H}\}$$

$$\text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H) := \{\sigma \in \text{Aff}^+(H) \mid \sigma \circ \gamma_J = \gamma_J \circ \sigma \text{ on } F_2\} = \{\sigma \in \text{Aff}^+(H) \mid \Gamma_\sigma = \text{id}_{F_2}\}$$

$$\text{Stab}([c_0]) := \{\sigma \in \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H) \mid \sigma([c_0]) = [c_0]\}$$

**注意 5.3.6.**

(1)  $\text{Aff}_\pi^+(X^*)$  と  $\text{Aff}_\pi^+(\tilde{X})(\cong \text{Aff}_\pi^+(H))$  の各元は普遍被覆面の同一の affine map にリフトされるから,  $\Gamma_\pi(X^*)$  と  $\bar{\Gamma}_\pi(\tilde{X})$  は  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の部分群として一致する.

(2) 任意の  $\sigma \in \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H)$  の  $\gamma_J$ -交換子  $\Gamma_\sigma$  は  $F_2/H$  の自己同型写像を誘導し, 基点の属するセル  $[1] \in F_2/H$  を固定するセルの並び替え  $(\Gamma_\sigma)_* \in \text{Sym}F_2/H$  と同一視できる.

(3) 定義 5.3.2, 5.3.5 で導入した各群の間には次の関係がある.

$$\begin{aligned} \text{Aut}^+(F_2) &\stackrel{(a)}{>} \text{Aff}^+(H) \stackrel{(b)}{>} \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H) \stackrel{(c)}{>} \text{Aff}_0^{\text{Sym}}(H) > \text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H) \\ & & & \vee_{(d)} & & \vee_{(e)} \\ & & & \text{Stab}([c_0]) \stackrel{(e)}{>} \text{Aff}_\pi^+(H) = \text{Aff}_0^{\text{Sym}}(H) \cap \text{Stab}([c_0]) \end{aligned}$$

ここで系 4.2.3 より (a) は指数有限である. (1) より (c)(d) の指数有限性を示すのは容易であり, とくに (e) は指数有限である. 主張 5.3.4 を示すには (b) の指数有限性を示せばよい.

一般に  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対して交換子  $\Gamma_\sigma = \sigma^{-1} \circ \gamma_J \circ \sigma \circ \gamma_J$  の表現行列  $\hat{\beta}(\Gamma_\sigma)$  は,

$$\hat{\beta}(\Gamma_\sigma) = \hat{\beta}(\sigma^{-1} \circ \gamma_J \circ \sigma \circ \gamma_J) = \hat{\beta}(\sigma^{-1}) \cdot \hat{\beta}(\gamma_J) \cdot \hat{\beta}(\sigma) \cdot \hat{\beta}(\gamma_J) = \hat{\beta}(\sigma)^{-1} \cdot J \cdot \hat{\beta}(\sigma) \cdot J = I$$

であるから補題 4.2.2 より  $\Gamma_\sigma \in \text{Inn}(F_2)$  である. とくにある  $c_\sigma \in F_2$  があって  $\Gamma_\sigma = c_\sigma^*$  とかける.

**補題 5.3.7.**  $\sigma, \tau \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対し, 次が成り立つ.

$$(a) \quad c_{\tau \circ \sigma} = \sigma^{-1}(c_\tau) \cdot c_\sigma$$

$$(b) \quad c_{\sigma^{-1}} = \sigma(c_\sigma^{-1})$$

$$(c) \quad \Gamma_{\tau \circ \sigma^{-1}} = \sigma^{-1} \circ (c_\tau \cdot c_\sigma^{-1})^* \circ \sigma$$

**証明.** (a)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau \circ \sigma} &= (\tau \circ \sigma)^{-1} \circ \gamma_J \circ (\tau \circ \sigma) \circ \gamma_J \\ &= \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \gamma_J \circ \tau \circ \sigma \circ \gamma_J \\ &= \sigma^{-1} \circ (\tau^{-1} \circ \gamma_J \circ \tau \circ \gamma_J) \circ \sigma \circ (\sigma^{-1} \circ \gamma_J \circ \sigma \circ \gamma_J) \\ &= \sigma^{-1} \circ \Gamma_\tau \circ \sigma \circ \Gamma_\sigma \end{aligned}$$

ここで  $w \in F_2$  に対し,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \circ \Gamma_\tau \circ \sigma \circ \Gamma_\sigma(w) &= \sigma^{-1}(c_\tau^{-1} \cdot \sigma(c_\sigma^* w) \cdot c_\tau) \\ &= (\sigma^{-1}(c_\tau))^{-1} \cdot (c_\sigma^* w) \cdot \sigma^{-1}(c_\tau) \\ &= (\sigma^{-1}(c_\tau))^* \circ c_\sigma^*(w) \\ &= (\sigma^{-1}(c_\tau) \cdot c_\sigma)^* w \end{aligned}$$

よって  $c_{\tau \circ \sigma} = \sigma^{-1}(c_\tau) \cdot c_\sigma$  が成り立つ.

(b)  $c_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = \sigma(c_\sigma) \cdot c_{\sigma^{-1}}$  と  $c_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = c_{\text{id}} = 1_{F_2}$  によりしたがう.



$$\begin{aligned}
(c) \quad w \in F_2 \text{ に対し, } \Gamma_{\tau \circ \sigma^{-1}}(w) &= (\sigma^{-1}(c_\tau) \cdot c_{\sigma^{-1}})^* w \\
&= (\sigma^{-1}(c_\tau) \cdot \sigma^{-1}(c_\sigma^{-1}))^* w \\
&= (\sigma^{-1}(c_\tau c_\sigma^{-1}))^* w \\
&= (\sigma^{-1}(c_\tau c_\sigma^{-1}))^{-1} \cdot w \cdot \sigma^{-1}(c_\tau c_\sigma^{-1}) \\
&= \sigma^{-1}((c_\tau c_\sigma^{-1})^{-1} \cdot \sigma(w) \cdot c_\tau c_\sigma^{-1}) \\
&= \sigma^{-1} \circ (c_\tau \cdot c_\sigma^{-1})^* \circ \sigma(w) \quad \square
\end{aligned}$$

**命題 5.3.8.**  $X^*$  をセル枚数  $d$  の extended-origami が定める曲面とする. 二重被覆面  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X^*$  と  $F_2 > H \cong \pi_1(\tilde{X})$  に対し,  $[\text{Aff}^+(H) : \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H)] \leq 2d$  が成り立つ.

**証明.** 商群の包含関係  $(\star) \text{Aff}^+(H)/\text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H) > \text{Aff}_H^{\text{Sym}}(H)/\text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H)$  について考える. ここで対応  $\psi : \text{Aff}^+(H)/\text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H) \rightarrow F_2 : [\sigma] \mapsto c_\sigma$  は well-defined であり, これは補題 5.3.7 より  $\psi([\tau][\sigma]^{-1}) = \sigma(\psi([\tau])\psi([\sigma]^{-1}))$  をみたすから単射写像を定める. 相異なる  $2d+1$  個の元  $[\sigma_0], [\sigma_1], \dots, [\sigma_{2d}] \in \text{Aff}^+(H)/\text{Aff}_{F_2}^{\text{Sym}}(H)$  を取ったとき, その  $\psi$  の像  $c_{\sigma_0}, \dots, c_{\sigma_{2d}}$  は  $F_2$  の相異なる  $2d+1$  個の元であるからこのうち適当な  $c_{\sigma_j}, c_{\sigma_k}$  を選べば  $H$  を法として一致する. このとき補題 5.3.7 より  $\Gamma_{\sigma_k \circ \sigma_j^{-1}} = \sigma_j^{-1} \circ (c_{\sigma_k} \cdot c_{\sigma_j}^{-1})^* \circ \sigma_j$  であり,  $\sigma_j \in \text{Aff}^+(H)$  と  $c_{\sigma_k} \cdot c_{\sigma_j}^{-1} \in H$  により  $\Gamma_{\sigma_k \circ \sigma_j^{-1}}(H) = H$  が成り立つ. とくに  $(\star)$  の指数が高々  $2d$  となるから結果がしたがう.  $\square$

この結果と注意 5.3.6 により次の系を得る.

**系 5.3.9.**  $\text{Aff}_\pi^+(H)$  は  $\text{Aff}^+(H)$  の有限指数部分群であって主張 5.3.4 は成り立つ. とくに  $\Gamma(X^*)$  は  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の有限指数部分群であって, 一般に extended-origami に対してその Teichmüller curve が Belyi 曲面であるものとして存在する.

## 5.4 アルゴリズム

extended-origami に対し, 補題 5.3.3 の特徴づけから  $\Gamma_\pi(X^*) < \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  を具体的に計算するアルゴリズムを考える. まずは origami の場合と同様に, 各行列に対しこれが  $\Gamma_\pi(X^*)$  に属するか判定できるような特徴づけに組み替えたい. 各  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  から引き戻し  $\gamma_A \in \text{Aut}^+(F_2)$  をとってその平行移動  $c^* \gamma_A$  ( $c \in F_2$ ) について判定していく方針は origami の場合と一緒であるが, 平行移動項をどれだけの粗さで調べればよいかという点では状況が異なる (mod  $H$  では十分でない).

$c_1, c_2 \in F_2$  に対し, 任意の  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  で  $c_1^* \sigma \in \text{Aff}_\pi^+(H) \Leftrightarrow c_2^* \sigma \in \text{Aff}_\pi^+(H)$  が成り立つとき  $c_1 \sim_\pi c_2$  であると定義する. このとき  $\sim_\pi$  は  $F_2$  上の同値関係であって,  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  が  $\Gamma_\pi(\tilde{X})$  に属するか判定するためには  $F_2 / \sim_\pi$  の代表元の平行移動についてのみ調べれば十分である.

**補題 5.4.1.**  $K := \{c \in F_2 \mid c^* \in \text{Aff}_\pi^+(H) \text{ i.e. } c^* H = H, c^* \text{ descends via } \pi\}$  は  $F_2$  の有限指数の部分群であって,  $c_1, c_2 \in F_2$  に対し  $c_1 \sim_\pi c_2 \Leftrightarrow c_1 c_2^{-1} \in K$  が成り立つ.

**証明.** 定義より  $\text{Inn}(K) = \text{Aff}_\pi^+(H) \cap \text{Inn}(F_2)$  である. よって  $[F_2 : K] = [\text{Inn}(F_2) : \text{Inn}(K)] = [\text{Inn}(F_2) : \text{Aff}_\pi^+(H) \cap \text{Inn}(F_2)] \leq [\text{Aut}^+(F_2) : \text{Aff}_\pi^+(H)]$  であるが, 系 5.3.9 よりこれは有限.  $(\Leftarrow) c_1, c_2 \in F_2$  が  $c = c_1^{-1} c_2 \in K$  をみたすとす.  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  と  $\pi(w_1) = \pi(w_2)$  なる  $w_1, w_2 \in F_2$  を任意にとり,  $w'_1 = c_1^* \sigma(w_1)$ ,  $w'_2 = c_1^* \sigma(w_2)$  とおく. ここで  $\pi(w'_1) = \pi(w'_2)$  ならば,

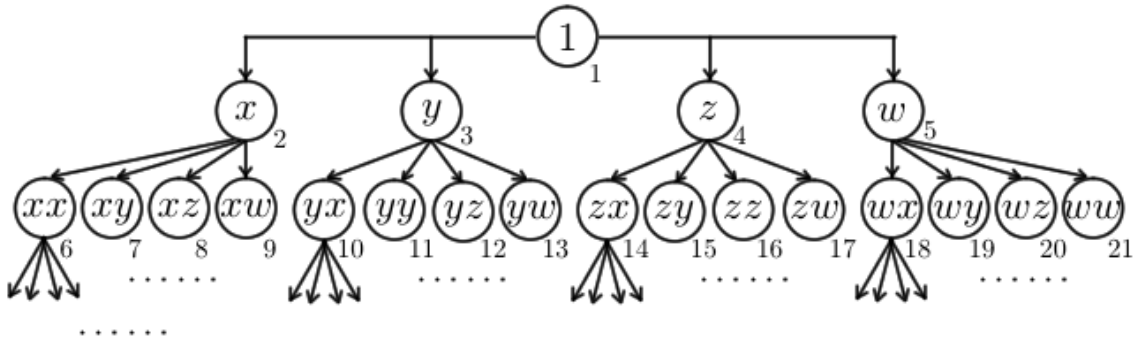
$c \in K$  より  $\pi(c^*w'_1) = \pi(c^*w_1)$  であり,  $\pi(c_2^*\sigma(w_1)) = \pi(c_2^*\sigma(w_2))$  が成り立つ. とくに  $c_1^*\sigma$  と  $c_2^*\sigma$  が  $\pi$  を通して降りることは同値である. よって  $c_1 \sim_\pi c_2 \Leftarrow c_1c_2^{-1} \in K$ .

( $\Rightarrow$ ) 背理法.  $c_1 \sim_\pi c_2$  なる  $c_1, c_2 \in F_2$  に対し  $c = c_1^{-1}c_2 \notin K$  であると仮定して矛盾を導く. 仮定よりある  $w_1, w_2 \in F_2$  があって  $\pi(w_1) = \pi(w_2)$  かつ  $\pi(c^*w_1) \neq \pi(c^*w_2)$  をみたす. いま  $\sigma \in \text{Aut}^+(F_2)$  に対して  $c_1^*\sigma$  は  $\pi$  を通して降りるとすると,  $w'_1 = (c_1^*\sigma)^{-1}(w_1), w'_2 = (c_1^*\sigma)^{-1}(w_2)$  に対して  $\pi(w'_1) = \pi(w'_2)$  である. 一方  $\pi(c^*w_1) \neq \pi(c^*w_2)$  であるが, これは  $\pi(c_2^*\sigma(w'_1)) \neq \pi(c_2^*\sigma(w'_2))$  を意味する. とくに  $c_2^*\sigma$  は  $\pi$  を通して降りることができないが, これは矛盾.  $\square$

補題 5.3.3 により新たな  $K < F_2$  の特徴づけとして次を得る.

**補題 5.4.2.**  $c \in F_2$  に対し,  $\Gamma_c := (\gamma_J(c)c^{-1})^*$  とおく. (注:  $\Gamma_c$  は  $c^*$  の  $\gamma_J$ -交換子である.) これを用いて  $K = \{c \in F_2 \mid c^*H = H, [c^*c_0] = [c_0], \Gamma_c(H) = H, \Gamma_c = \text{id}_{F_2/H}\}$  とかける.

$K$  の計算アルゴリズムの構成をする.  $z = x^{-1}, w = y^{-1}$  と表記し,  $F_2$  のすべての元の順序付けを次の図のように行うものとする. このとき補題 5.4.1, 5.4.2, 注意 4.3.4 により続く命題が成り立つ.



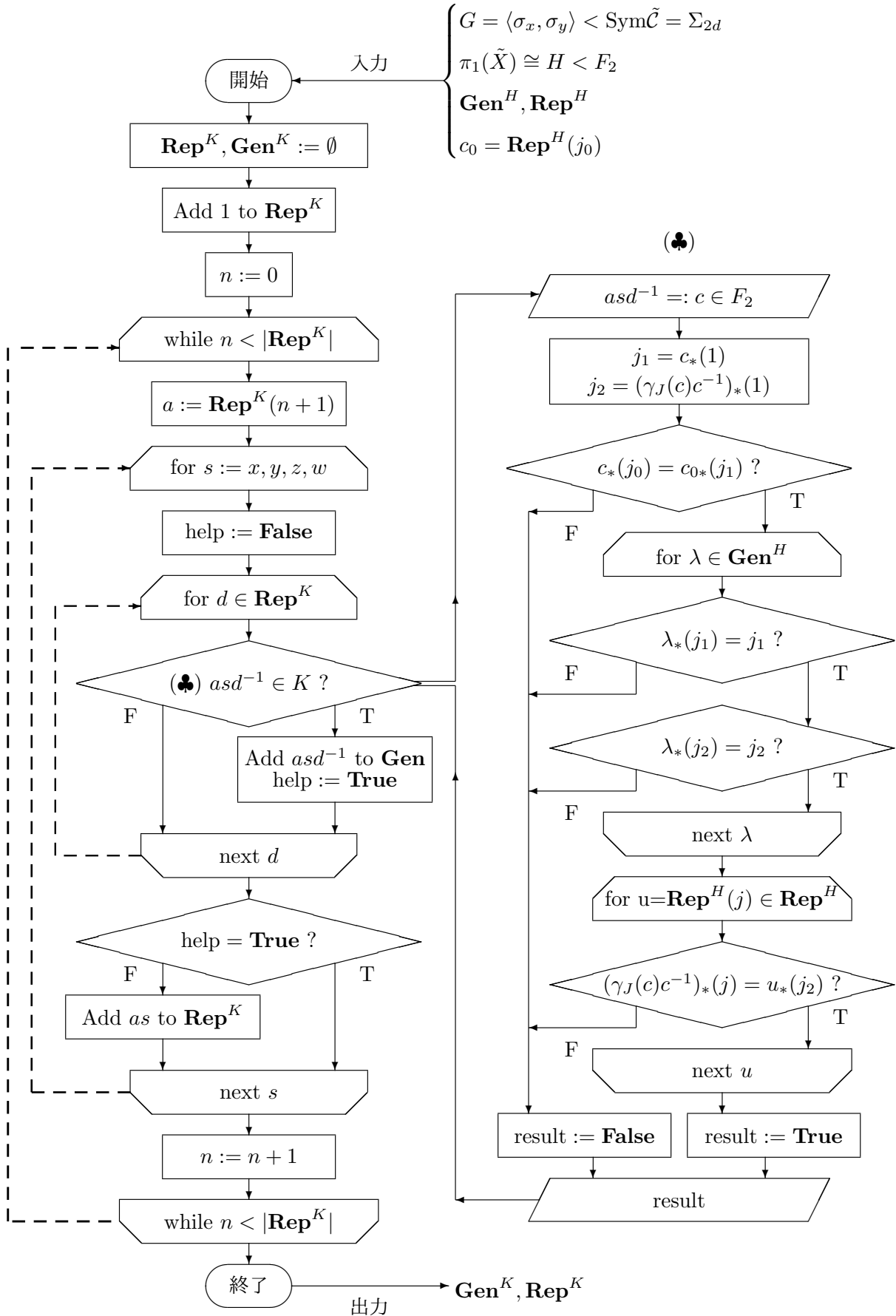
**命題 5.4.3.** extended-origami が導く二重被覆  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X^*$  と  $F_2 > H \cong \pi_1(\tilde{X})$  に対し, 次の手順で  $\text{Gen}^K, \text{Rep}^K \subset F_2$  を構成する.

- (1)  $\text{Gen}^K, \text{Rep}^K = \emptyset$  とおく.
- (2)  $\text{Rep}^K$  に  $1 \in F_2$  を加える.
- (3)  $s = x \in F_2$  とする. この工程を行っていない最初の  $a \in \text{Rep}^K$  に対し,  $d \in \text{Rep}^{K_0}$  であって  $asd^{-1} \in K$  であるようなものがあるか判定する. そのような  $d$  が存在すれば  $asd^{-1}$  を  $\text{Gen}^K$  に加え, 存在しなければ  $as$  を  $\text{Rep}^K$  に加える.
- (4)  $s = y, z, w \in F_2$  と置き換えて (3) の工程を繰り返す.
- (5) (3)(4) を続く  $a \in \text{Rep}^K$  に対して行い, すべての  $\text{Rep}^K$  の元をわたるまで繰り返す.

ここで (5) の繰り返しは有限回の工程で終了する. また最終的に  $\text{Rep}^K$  は  $F_2/K$  のディスジョイントで完全な代表元のリストを与え,  $\text{Gen}^K$  が生成する群は  $K$  に一致する.

命題 5.4.3 から次頁のアルゴリズム 5.4.4 を得る. ここでは  $\text{Rep}^K$  の  $n$  番目の元を  $\text{Rep}^K(n)$ ,  $u \in F_2$  のモノドロミーを  $u_* := m(u) \in \Sigma_d$  と表記するものとする. また, 入力は次のようにする. セル枚数  $d$  の extended-origami  $(\mathcal{C}, (\varphi_C)_{C \in \tilde{\mathcal{C}}}, \sim)$  に対し, 命題 5.2.5 で構成した二重被覆  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X^*$  を与える origami  $(\tilde{\mathcal{C}}, (\varphi_{C^\pm})_{C^\pm \in \tilde{\mathcal{C}}}, \sim')$  をとる.  $X^*$  の基点を固定し, その  $\pi$  の逆像が属するセルを  $[1], [c_0] \in F_2/H, [c_0]$  のセル番号を  $j_0$  とする.

アルゴリズム 5.4.4 (付録 D).



$K < F_2$  が得られれば系 4.3.3 にあたる判定をすることができる. 各  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  が  $\Gamma_\pi(\tilde{X})$  に属するか判定するためには  $\hat{\beta}$  の引き戻し  $\gamma_A \in \mathrm{Aut}^+(F_2)$  を作った上で平行移動項の範囲を  $\mathbf{Rep}^K$  に, 判定条件は補題 5.3.3 に基づくものに置き換えて考えればよい.

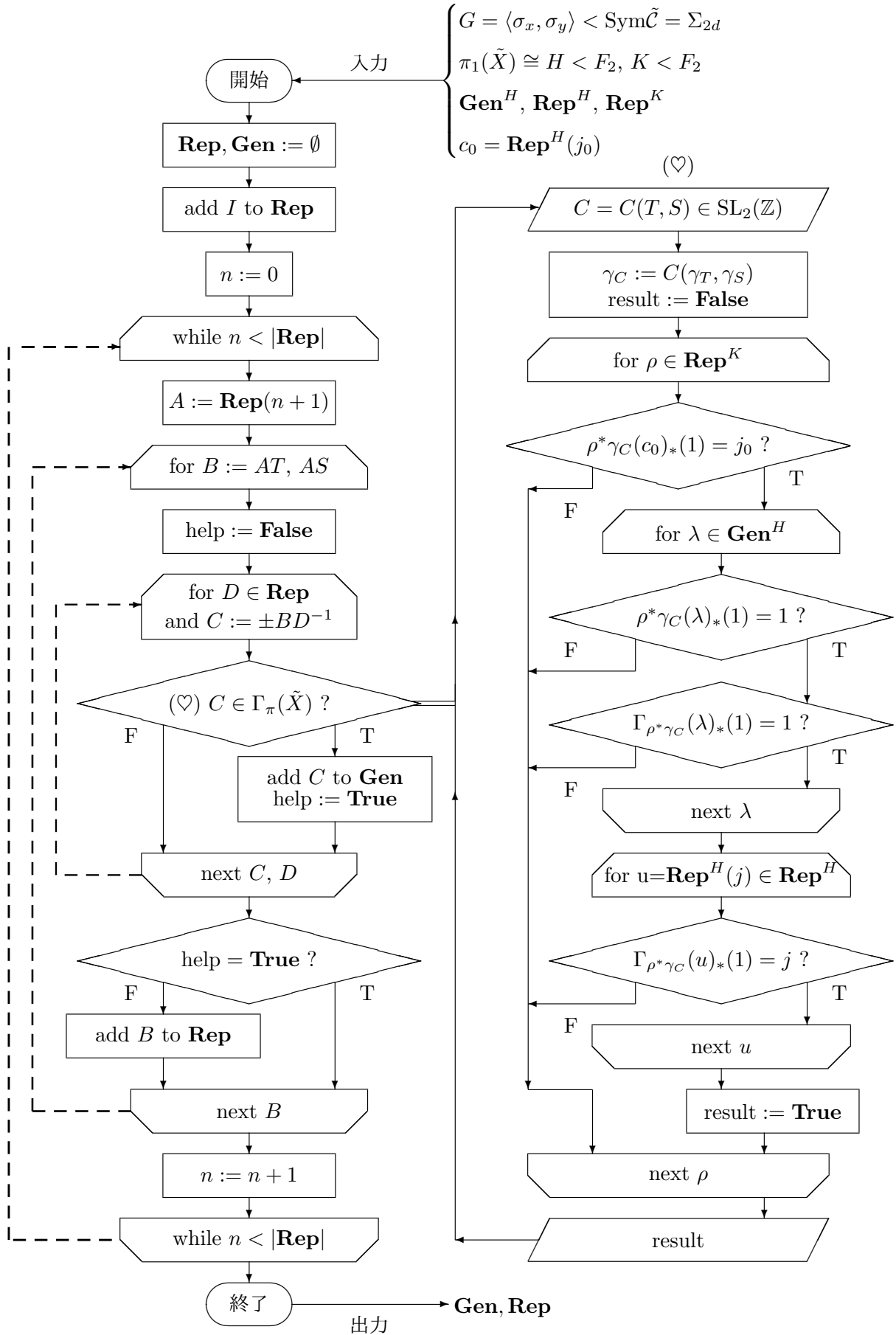
系 5.4.5. extended-origami の導く二重被覆  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X^*$ ,  $F_2 > H \cong \pi_1(\tilde{X})$ ,  $F_2 > K$  および  $[c_0] \in F_2/H$  に対し, 集合  $\mathbf{Gen}^H$ ,  $\mathbf{Rep}^H$ ,  $\mathbf{Rep}^K$  を固定する.

このとき  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  が  $\Gamma_\pi(\tilde{X})$  に属するためには, ある  $c \in \mathbf{Rep}^K$  があって任意の  $\lambda \in \mathbf{Gen}^H$ ,  $u \in \mathbf{Rep}^H$  に対し  $\sigma = c^* \gamma_A$  とその  $\gamma_J$ -交換子  $\Gamma_\sigma$  が次をみたすことが必要かつ十分である.

$$[\sigma(c_0)] = [c_0], \quad \sigma(\lambda) \in H, \quad \Gamma_\sigma(\lambda) \in H, \quad [\Gamma_\sigma(u)] = [u]$$

以上をもって  $\Gamma_\pi(X^*)$  を計算するアルゴリズムを構成する. アルゴリズム 4.3.5 の判定機構 (♠) を系 5.4.5 に基づくものに置き換えることにより, 次頁のアルゴリズム 5.4.6 を得る.

アルゴリズム 5.4.6 (付録 E).

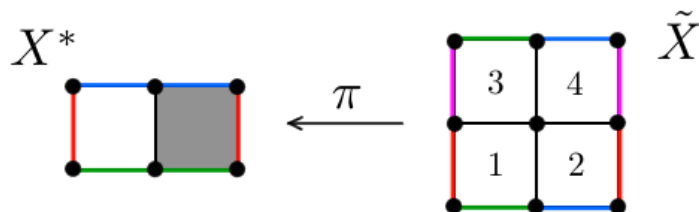


## 5.5 例

以下の例における表記は 4.5 節にならうものとする. また,  $\Gamma_\pi(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  が与える Teichmüller curve の被覆面を  $C_\pi(\cdot) := \mathbb{H}/\Gamma_\pi(X^*)$  とかくものとする

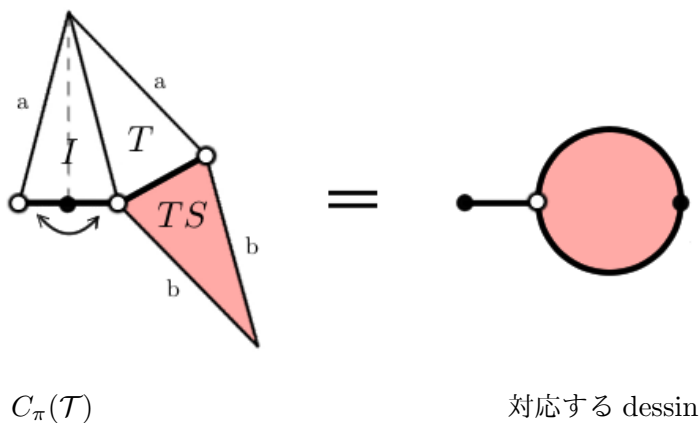
例 1. Trivial extended-origami  $\mathcal{T}$  (後述の  $eLr(1, 2)$ )

$$G = \langle x, y \rangle, \quad x = (1\ 2)(3\ 4), \quad y = (1\ 3)(2\ 4)$$



$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, y, xy\}, \quad \mathbf{Gen}^H = \{xx, yxwz, yy, xyxw, xyyz\}$$

$$\mathbf{Rep}^K = \{1\}, \quad \mathbf{Rep} = \{I, T, TS\}, \quad \mathbf{Gen} = \{S, TT, TSTJSU, TSSU\}$$



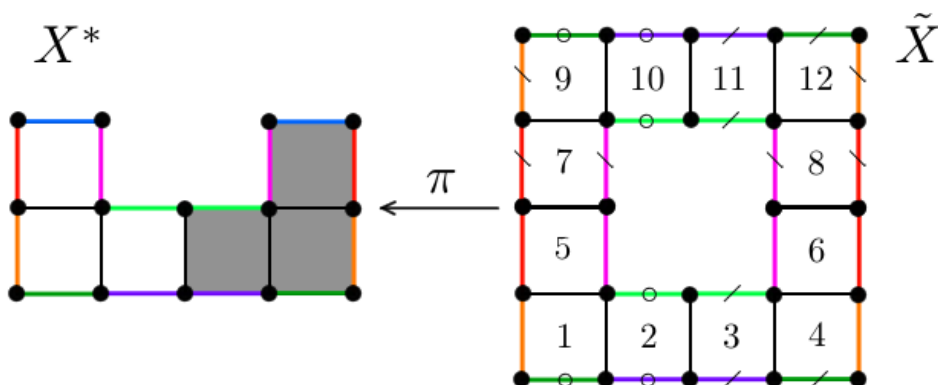
$C_\pi(\mathcal{T})$

対応する dessin

$C_\pi(\mathcal{T})$  は  $(0, 2)$  型で  $\Gamma_\pi(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  は指数 3,  $K < F_2$  は指数 1.

例 2. L-shaped pillowcase  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$G = \langle x, y \rangle, \quad x = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12), \quad y = (1\ 5\ 7\ 9)(2\ 10)(3\ 11)(4\ 6\ 8\ 12)$$



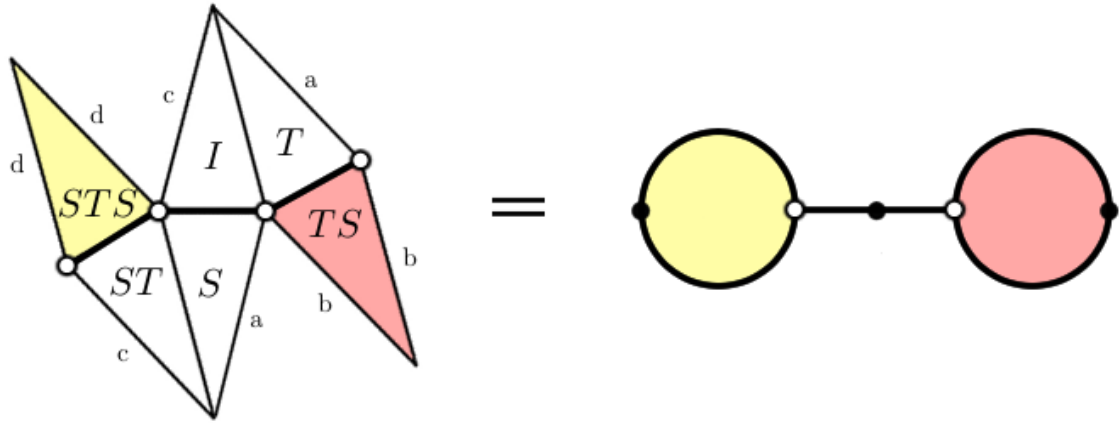
$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, xxx, y, yx, yy, yxy, yyy, xy, xxy, xxyx\}$$

$$\mathbf{Gen}^H = \{xyxwzz, xyyz, yxw, yxwz, xxx, xxxyzw, xxyyz, yxyxw, yxyyzwz, yyyxwz, yyy, xxyxw, xxyyz\}$$

$$\mathbf{Rep}^K = \{1, x, y, z, w, xx, xy, xw, yx, yy, yz, zy, zw, wx, wz, xxy, xyx, xyy, xyz, xwx, xwz, yxx, yxy, yxw, yya, yzy, yzw, zyx, zyy, zyz, wxx, wxy, wxw, xxyx, xxyz, xyxy, xyxw, xyyx, xyyz, xyzy, xyzw, xwxx, xwxy, xwxw, xwzy, xwzw, yxxy, yxw, yxyx, yxwx, yyxw, yzyz, zyxw, zyyx, zyyz, waxy, waw, xxyxx, xyxyx, xyxyy, xyxwz, xyyx, xyxy, xyxw, xyyzy, xyyzw, xyyzyy, xyyzyz, xyyzx, xwxy, xwxyy, xwxyz, xwzyy, xwzww, yxxyx, yxxyy, yxxyz, yxwx, yxwz, yxyxy, yxwx, zyyxx, zyyzy, zyyzw, waxy, waw, wawz, xxyxy, xxyxx, xyxyxy, xyxyxw, xyxyyz, xyxwz, xyxyy, xyxyx, xyxyy, xyxyw, xyxyz, xyxyx, xyxyy, xyxyz, xyxwz, xyzyx, xyzyz, xyzwxy, xwxyx, xwxyyz, xwzyy, yxxyx, xxyxyy, xyxyyz\}$$

$$\mathbf{Rep} = \{I, T, S, TS, ST, STS\}$$

$$\mathbf{Gen} = \{TTJS, SS, TSTJSU, TSSU, STT, STSTSUS, STSSJUS\}$$



$C_\pi(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$

対応する dessin

$C_\pi(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$  は (0, 3) 型で  $\Gamma_\pi(X^*) < \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  は指数 6,  $K < F_2$  は指数 108.

例 3. Extended L-ring sequence  $eLr(n, m)$

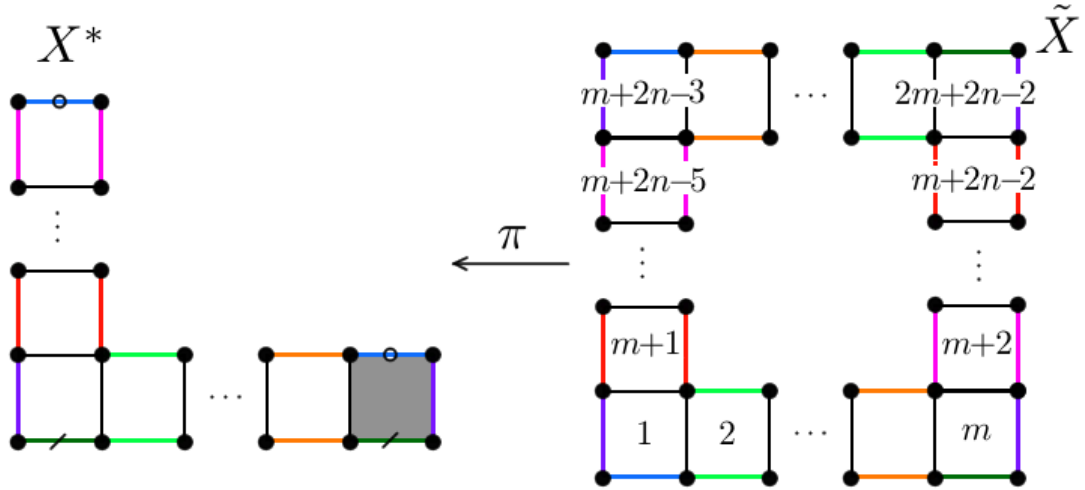
$$G = \langle x, y \rangle, x = (1 \ 2 \ \dots \ m)(m + 2n - 3 \ m + 2n - 2 \ \dots \ 2m + 2n - 2),$$

$$y = (1 \ m + 1 \ m + 3 \ \dots \ m + 2n - 3)(m \ m + 2 \ m + 4 \ \dots \ 2m + 2n - 2)$$

(a) 各  $(n, m)$  での  $K < F_2$  の指数  $N_K$ ,  $\Gamma_\pi(X^*) < \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の指数  $N_{\Gamma_\pi}$ ,  $C_\pi(\cdot)$  の種数, cusp の数

$eLr(n, m)$	$N_K$	$N_{\Gamma_\pi}$	種数	cuspid の数
$eLr(1, 3)$	6	4	0	2
$eLr(1, 4)$	8	12	0	4
$eLr(1, 5)$	20	12	0	4
$eLr(1, 6)$	24	24	0	6

$eLr(n, m)$	$N_K$	$N_{\Gamma_\pi}$	種数	cuspid の数
$eLr(1, 7)$	56	24	0	6
$eLr(1, 8)$	64	48	0	10
$eLr(2, 2)$	6	4	0	2
$eLr(2, 3)$	168	7	0	2



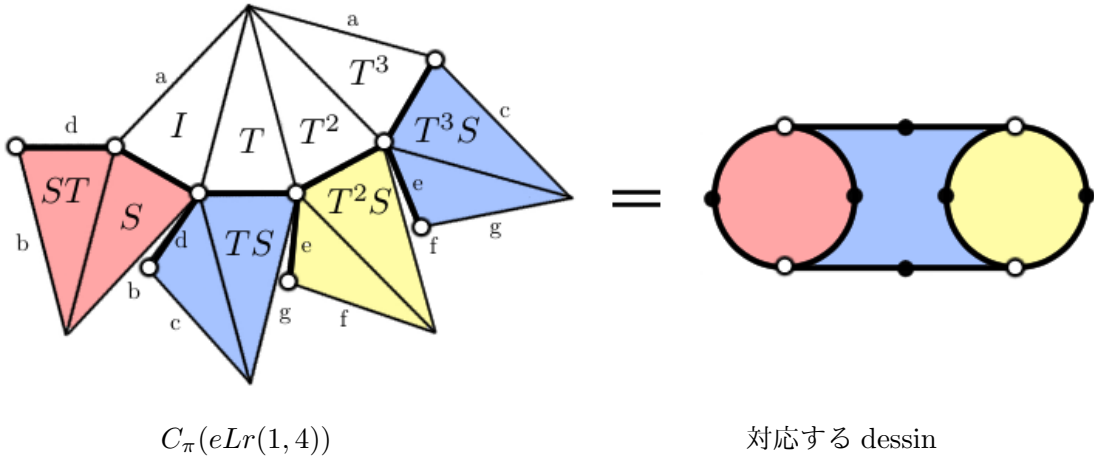
(b)  $eLr(1,4)$

$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, xxx, y, yx, yxx, xxy\}$$

$$\mathbf{Gen}^H = \{xyz, yy, xyzxz, yxyzw, xxx, yxxxwzzz, yxyzzw, xxyxw, xxyyzzz\}$$

$$\mathbf{Rep}^K = \{1, x, z, xx, xy, zy, yx, xyz\}$$

$$\mathbf{Rep} = \{I, T, S, TT, TS, ST, TTT, TTS, TST, TTTS, TTST, TTTST, TTTSTS, TTTSTTS\}, \mathbf{Gen} = \{JSS, JTSSU, STTJS, JSTSJUSU, TTTT, JTTSSUU, JTSTTJSUUU, TSTSJUS, JTTTSSUUU, TTSTTJSUU, JTTSTSJUSUUU, JTTTSTTJSU, TTTSTSJUSUU\}$$



(c)  $eLr(2,3)$

$$\mathbf{Rep}^H = \{1, x, xx, y, xxy, yy, yxx, xxyy\}$$

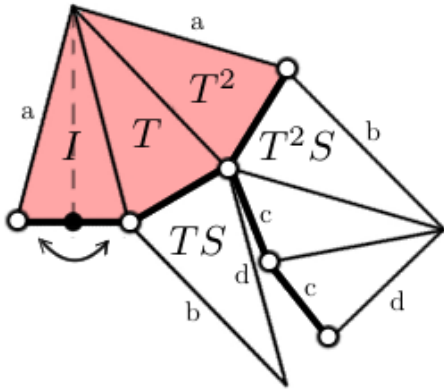
$$\mathbf{Gen}^H = \{xyz, yxw, xxx, yyy, xxyxwzz, yxwxwzz, yxyzw, xxyxw, xxyyzzz\}$$

$$\mathbf{Rep}^K = \{1, x, y, z, w, xy, xw, yx, yz, zy, zw, wx, wz, yx, xyz, xwx, xwz, yxy, yxw, yzy, yzw, zyx, zyz, zwx, zwz, wxy, wxw, wzy, wzx, xyxy, xyxw, xyzy, xyzw, xwxy, xwxw, xwzy, xwzw, yxyx, yxyz, yxwx, yxwz, yzyx, yzwx, yzwx, zyx, zyxw, zzy, zyzw, zwxy, zwxw, zwzy, wxyx, wxyz, wxwz, wzyx, wzyz,$$

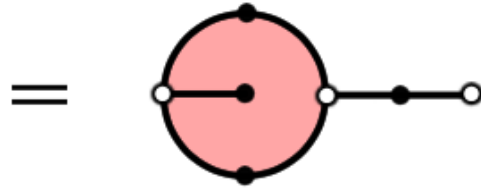


$wzwx, xyxwx, xyxwz, xzyyx, xyzwx, xyzwz, xwxyx, xwxyz, xwzyx, xwzyz, xwzwx,$   
 $yxzyy, yxzyw, yxwxy, yxwzy, yxwzw, yzyxy, yzyxw, yzwxw, yzwyz, zywxw,$   
 $zyxwz, zyzwx, zyzwz, zwxyx, zwxyz, zwzyx, zwzyz, wxyzy, wxyzw, wxwzy,$   
 $wxwzw, wzyxy, wzyxw, wzxxy, wzxwx, xyxwxy, xyxwzy, xyxwzw, xzyyxy, xzyywx,$   
 $xyzwxy, xyzwax, xyzwzy, xwxyzy, xwxyzw, xwzyxy, xwzyxw, xwzwxw,$   
 $yxzyyx, yxzywax, yxzywz, yxwxyx, yxwxyz, yxwzyx, yxwzyz, yxwzwx, yzyxwx,$   
 $yzwxyz, yzwzyx, yzwzyz, zywxxy, zywxzy, zywxzw, zyzwxy, zyzwax, zyzwzy,$   
 $zwxyzw, zwzyxy, wxyzyx, wxyzwx, wxwzyz, wxwzwx, wzyxwz, wzwxxy, xyxwxyx,$   
 $xyxwxyz, xyxwzwx, xzyyxwx, xyzwxyz, xyzwzyx, xyzwzyz, xwxyzyx, xwzyxwz,$   
 $xwzwxxy, yxzyxy, yxzyxw, yxzywzy, yxwxyzy, yxwzwxw, yzyxwxy, yzwzyxy,$   
 $zyxwxyx, zyzwzyx, zyzwzyz, wxyzxy, wxwzwxxy, xyxwxyzy, xyxwzwxw, xzyyxwxy,$   
 $xwxyzxy, yxzyxwx, yxzywzyz, yxwxyzyx, yzyxwxyx, xyxwxyzyx, xzyyxwxyx,$   
 $yxzyxwxy, yxwxyzxy, xyxwxyzxy$

$\mathbf{Rep} = \{I, T, TT, TS, TTS, TTST, TTSTT\}$  ,  $\mathbf{Gen} = \{S, TTT, TSTJSUU, TSSU,$   
 $TTSSUU, TTSTSJUUSUU, TTSTTTJSU, TTSTTSJUSUU\}$



$C_\pi(eLr(2,3))$



対応する dessin

この  $eLr(2,3)$  の例では  $\Gamma_\pi(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の指数は 7 と素数であり、とくに部分群の列  $\Gamma_\pi(X^*) < \Gamma(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  を実現する  $\Gamma(X^*) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の指数は 1 または 7 である。flat structure に関して鉛直方向,  $\frac{\pi}{4}$  方向であるような閉曲線のホモトピー類を比較することにより  $\Gamma(X^*) \neq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  であることが確かめられ、次が成り立つ。

**命題 5.5.1.** extended-origami  $eLr(2,3)$  において  $\Gamma(X^*) = \Gamma_\pi(X^*)$  が成り立つ。とくにその Teichmüller curve  $C(eLr(2,3))$  は  $C_\pi(eLr(2,3))$  に一致する。

## 5.6 今後の課題

本論文は origami より弱い意味でよい flat structure を誘導する対象として extended-origami を導入し、一般にその Teichmüller curve が Belyi 曲面として存在することと Veech 群のある有限指数部分群に対する計算アルゴリズムを得ることができた。トーラスと直接の関係を持たない対象まで origami の議論の応用を立てられたことには意味があると考えているが、今回の手法で一般に求められるのはその部分群であって Veech 群自体ではない。まず一つの課題として extended-origami の Teichmüller curve をより深く調べるため、Veech 群そのものを与える計算アルゴリズムを構成する問題が挙げられる。今回得られた部分群は求める Teichmüller curve の有限被覆面を特徴づけるものであるが、これに対する考察はまだよくできていない。また今回の議論は extended-origami の二重被覆面に多く依存しており、曲面と普遍被覆面の間の直接の関係からあまり情報を取り出せていないように思われる。これらの点を踏まえたオリジナルの曲面に対するアプローチが解決方策になるのではないかと考えている。

今回行った extended-origami に関する計算は、対象となる origami がオリジナルの曲面の二倍のセル枚数をもつことで origami に比べて現実的な時間で計算できる対象に制限があった。例えば extended-origami の導入の動機であった L-shaped pillowcase の計算例は最も簡単なパラメータの一例しか計算できておらず、動機に見合う計算例を上げられたとは言い難い。とくに今回の計算対象となる origami がもつ対称性が Veech 群の性質にどう関わるかといったことの考察はまだできておらず、そのような観点からアルゴリズムの改良をはかることは一つの課題である。

また今回用いたアプローチは一般には flat surface に対し、その上の正則二次微分を射影して正則 1 次微分を作れるような二重被覆面を構成するものである。extended-origami の場合はこの被覆面が origami になることから具体的な計算アルゴリズムを与える方針での考察を進めたが、Teichmüller curve の存在を示す際の (今回加えた) 指数評価には origami 特有の議論が必ずしも必要であったか不明である。本論文における二重被覆面を用いた flat structure に対する考察は一般化の余地があり、これは今後の課題である。

最後に、本論文で導入した extended-origami はその Teichmüller curve が常に Belyi 曲面であるという点で良い拡張になっているものの、origami がもつガロア作用との関連にまつわる部分は全く未検証である。組合せ論的には extended-origami は同じセルの並びをもつ origami にセルの二色分けの情報を与えて得られる対象と考えられるが、これがガロア作用に結びつく対象である dessin や origami の性質をどこまで再現するものかという点は考えるべき問題である。origami の研究における大きな動機であるガロア作用との関連性にあたるものがどうなっているかは extended-origami を導入する意義に関わる問題であり、最も重要な課題であると考えている。

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, “*Lectures on Quasiconformal Mappings*”, Manuscript prepared with the assistance of Clifford J. Earle, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London (1966).
- [2] J. Ellenberg, D. B. McReynolds, “*Arithmetic Veech sublattices of  $SL(2, \mathbb{Z})$* ”, *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 3, 415–429.
- [3] H. M. Farkas, I. Kra, “*Riemann Surfaces*”, Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1980).
- [4] G. A. Jones, J. Wolfart, “*Dessins d’Enfants on Riemann Surfaces*”, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham (2016).
- [5] G. González-Diez, E. Gironde, “*Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d’Enfants*”, London Mathematical Society Student Texts, 79. Cambridge University Press, Cambridge (2012).
- [6] E. Gutkin, C. Judge, “*Affine Mappings of Translation Surfaces: Geometry and Arithmetic*”, *Duke Math. J.* 103 (2000), no. 2, 191–213..
- [7] G. González-Diez, “*Variations on Belyi’s theorem*”, *Q. J. Math.* 57 (2006), no. 3, 339–354.
- [8] A. Grothendieck, “*Esquisse d’un programme*”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 242 (1997), Geometric Galois actions, 1, 5–48, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [9] F. Herrlich, “*Introduction to Origamis in Teichmüller Space*”, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 18 (2012), Eur. Math. Soc., Zürich.
- [10] F. Herrlich, G. Schmithüsen, “*Dessins d’enfants and origami curves*”, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 13 (2009), Eur. Math. Soc., Zürich.
- [11] F. Herrlich, G. Schmithüsen, “*On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space*”, *Teichmüller theory. Vol. I*, 293–349, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 11 (2007), Eur. Math. Soc., Zürich.
- [12] Y. Iwayoshi, M. Taniguchi, “*An Introduction to Teichmüller Space*”, Springer-Verlag, Tokyo (1992).
- [13] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, “*Combinatorial group theory*”, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89* (1977), Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [14] V. Markovic, “*Carathéodory’s metrics on Teichmüller spaces and  $L$ -shaped pillowcases*”, *Duke Math. J.* 167 (2018), no. 3, 497–535.
- [15] M. Möller, “*Teichmüller curves, Galois actions and  $\widehat{GT}$ -relations*”, *Math. Nachr.* 278 (2005), no. 9, 1061–1077.
- [16] T. Napier, M. Ramachandran, “*An Introduction to Riemann Surfaces*”, *ICornerstones*. Birkhäuser/Springer, New York (2011).
- [17] G. Schmithüsen, “*An algorithm for finding the Veech group of an origami*”, *Experiment. Math.* 13 (2004), no. 4, 459–472.
- [18] Serre, Jean-Pierre, “*Géométrie algébrique et géométrie analytique*”, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1955–1956), 1–42.
- [19] Y. Shinomiya, “*Veech groups of flat structures on Riemann surfaces*”, *Contemp. Math.*, 575 (2012), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [20] 及川 廣太郎, “リーマン面”, 共立講座 現代の数学 (1987).
- [21] 楠 幸男, “関数論”, 朝倉書店 数理解析シリーズ 5 (1973).
- [22] 須川 敏幸, “*TEICHMÜLLER 理論の歴史と展望*”, 日本数学会 「数学」 49 卷 2 号 p.197–199 (1997).

## 付録

以下では本論文の執筆にあたり作成, 使用した計算プログラムのソースコードを示す. プログラミング言語は Python(<https://www.python.org/>) を用いた. A, B, C, D, E に続けて入力例を並べたコードによって 4.5, 5.5 節のような計算結果を得ることができる.

### A. 各種関数

---

```
1 #coding: UTF-8
2 def strreverse(org_str):
3     new_str = ''.join(list(reversed(org_str)))
4     return new_str
5
6 def Inverse(matrix):
7     if (not (matrix=='I' or matrix=='J')):
8         process1=matrix.translate(str.maketrans({'T':'U', 'U':'T', 'S':'a'+
9             S', 'J':'a'}))
10        process2=strreverse(process1)
11        if process2.count('a')%2==1:
12            output='J'+process2.replace('a', '')
13        else:
14            output=process2.replace('a', '')
15    else:
16        output=matrix
17    return output
18
19 def Inverse2(matrix):
20     if (not (matrix=='I' or matrix=='J')):
21         process1=matrix.translate(str.maketrans({'T':'U', 'U':'T', 'S':'J'+
22             S'}))
23        output=strreverse(process1)
24    else:
25        output=matrix
26    return output
27
28 def Pullback(object, matrix):
29     if matrix=='T':
30         output=object.translate(str.maketrans({'x':'x', 'y':'xy', 'z':'z', 'w
31             ':'wz'}))
32     elif matrix=='U':
33         output=object.translate(str.maketrans({'x':'x', 'y':'zy', 'z':'z', 'w
34             ':'wx'}))
35     elif matrix=='S':
36         output=object.translate(str.maketrans({'x':'y', 'y':'z', 'z':'w', 'w
37             ':'x'}))
38     elif matrix=='J':
39         output=object.translate(str.maketrans({'x':'z', 'y':'w', 'z':'x', 'w
40             ':'y'}))
41     else: print('error')
42     return output
43
44 def Back(path):
45     return strreverse(Pullback(path, 'J'))
```

```

41
42 def CalculatePath(path, matrix):
43     lenM=len(matrix)
44     process=[path]
45     for i in range(lenM):
46         j=lenM-1-i
47         process.append(process[i].translate(str.maketrans({'x':Pullback('x
         ',matrix[j]),'y':Pullback('y',matrix[j]),'z':Pullback('z',
         matrix[j]),'w':Pullback('w',matrix[j])})))
48     return process[lenM]
49
50 def getX(xcycles,ycycles,input):
51     cycle=list(filter(lambda s:input in s, xcycles))[0]
52     return cycle[(cycle.index(input)+1)%len(cycle)]
53
54 def getY(xcycles,ycycles,input):
55     cycle=list(filter(lambda s:input in s, ycycles))[0]
56     return cycle[(cycle.index(input)+1)%len(cycle)]
57
58 def getZ(xcycles,ycycles,input):
59     cycle=list(filter(lambda s:input in s, xcycles))[0]
60     return cycle[(cycle.index(input)-1)%len(cycle)]
61
62 def getW(xcycles,ycycles,input):
63     cycle=list(filter(lambda s:input in s, ycycles))[0]
64     return cycle[(cycle.index(input)-1)%len(cycle)]
65
66 def getRoute(xcycles,ycycles,input,route):
67     now=input
68     for k in range(len(route)):
69         if route[k]=='x':now=getX(x,y,now)
70         elif route[k]=='y':now=getY(x,y,now)
71         elif route[k]=='z':now=getZ(x,y,now)
72         elif route[k]=='w':now=getW(x,y,now)
73     return now
74
75 def getNum(x,y,path):
76     return getRoute(x,y,1,path)
77
78 def LoopCheck(matrix, GenH, xcycles, ycycles):
79     d=sum([len(x) for x in xcycles])
80     N=len(GenH)
81     x=xcycles
82     y=ycycles
83     cells=range(1,d+1)
84     result=False
85     for i in cells:
86         help=True
87         for j in range(N):
88             route=CalculatePath(GenH[j],matrix)
89             now=i
90             for k in range(len(route)):
91                 if route[k]=='x':now=getX(x,y,now)
92                 elif route[k]=='y':now=getY(x,y,now)
93                 elif route[k]=='z':now=getZ(x,y,now)
94                 elif route[k]=='w':now=getW(x,y,now)
95             if now!=i:help=False

```

```

96         if help:result=True
97         return result

```

---

## B. アルゴリズム 4.3.5

---

```

1  #coding: UTF-8
2  def MainAlgorithm(GenH,xcycles,ycycles):
3      d=sum([len(x) for x in xcycles])
4      N=len(GenH)
5      x=xcycles
6      y=ycycles
7      H=GenH
8      Gen=[]
9      Rep=['']
10     n=0
11     while n < len(Rep):
12         A=Rep[n]
13         for B in [A+'T', A+'S']:
14             help=False
15             for m in range(len(Rep)):
16                 C=B+Inverse(Rep[m])
17                 if LoopCheck(C,H,x,y):
18                     help=True
19                     Gen.append(C)
20                 C='J'+C
21                 if help:continue
22                 if LoopCheck(C,H,x,y):
23                     help=True
24                     Gen.append(C)
25             if help:print('-----Identify
26                 ',B , 'with' ,Rep[m])
27             else:
28                 Rep.append(B)
29                 print('-----Add',B, '
30                     to representative')
31             print('Rep[' ,n, ']=',Rep[n])
32             n=n+1
33     Rep[0]='I'
34     return (Rep, Gen)

```

---

### 入力例

---

```

1  # case : Lr(2,4)
2  name='Lr(2,4)'
3  xcycles=[[1, 2, 3, 4], [5]]
4  ycycles=[[1, 5, 4], [2], [3]]
5
6  GenH= ['xyz', 'yxw', 'xxxww', 'xxyzz', 'yyx', 'yyy']
7  RepH= ['1', 'x', 'xx', 'yy', 'y']
8
9  result=MainAlgorithm(GenH,xcycles,ycycles)
10 Rep=result[0]
11 Gen=result[1]
12 RepH[0]='1'
13 Rep[0]='I'

```

```

14 print('finished')
15 print('case:',name)
16 print('x=', xcycles)
17 print('y=', ycycles)
18 print('result:')
19 print('RepH=', RepH)
20 print('GenH=', GenH)
21 print('Rep=', Rep)
22 print('Gen=', Gen)
23 print('index=', len(Rep))

```

---

### C. アルゴリズム 4.3.8

---

```

1 def origami(xcycles,ycycles):
2     d=sum([len(x) for x in xcycles])
3     x=xcycles
4     y=ycycles
5     RepH=['']*d
6     GenH=[]
7     check=[1]
8     labeled=[1]
9     while not check==[]:
10        c=check[0]
11        check.remove(c)
12        if getX(x,y,c) in labeled:
13            GenH.append(RepH[c-1]+'x'+Back(RepH[getX(x,y,c)-1]))
14        else:
15            RepH[getX(x,y,c)-1]=RepH[c-1]+'x'
16            labeled.append(getX(x,y,c))
17            check.append(getX(x,y,c))
18        if getY(x,y,c) in labeled:
19            GenH.append(RepH[c-1]+'y'+Back(RepH[getY(x,y,c)-1]))
20        else:
21            RepH[getY(x,y,c)-1]=RepH[c-1]+'y'
22            labeled.append(getY(x,y,c))
23            check.append(getY(x,y,c))
24    return (RepH,GenH)

```

---

### D. アルゴリズム 5.4.4

---

```

1 def getK(GenH, RepH, xcycles, ycycles, c_0):
2     d=len(RepH)
3     N=len(GenH)
4     step=['x','y','z','w']
5     x=xcycles
6     y=ycycles
7     GenK=[]
8     RepK=['']
9     print('RepK[',len(RepK),']= 1')
10    i=0
11    while i<len(RepK):
12        a=RepK[i]
13        for s in step:

```

```

14         exist=False
15         for d in RepK:
16             help=True
17             c=a+s+Back(d)
18             Gamma=CalculatePath(c,'J')+Back(c)
19             for l in GenH:
20                 if not getRoute(x,y,getNum(x,y,c),l)==getNum
                    (x,y,c):help=False #c*H=H?
21                 if not getRoute(x,y,getNum(x,y,Gamma),l)==
                    getNum(x,y,Gamma):help=False #Gamma_c(H)
                    =H?
22                 if not getRoute(x,y,c_0,c)==getRoute(x,y,getNum(x,y,
                    c),RepH[c_0-1]):help=False #[c*c_0]=[c_0]?
23                 for u in RepH:
24                     if not getRoute(x,y,getNum(x,y,u),Gamma)==
                        getRoute(x,y,getNum(x,y,Gamma),u):help=
                        False #Gamma_c=id?
25                     if help:exist=True
26                 if exist:GenK.append(c)
27                 else:
28                     RepK.append(a+s)
29                     #print('RepK[',len(RepK),']=',a+s)
30             i=i+1
31     print(GenK, RepK)
32     return RepK

```

---

## E. アルゴリズム 5.4.6

```

1
2 def MainAlgorithm2(GenH,RepH,RepK,c_0,xcycles,ycycles):
3     d=len(RepH)
4     N=len(GenH)
5     x=xcycles
6     y=ycycles
7     H=GenH
8     R=RepH
9     Gen=[]
10    Rep=['']
11    n=0
12    K=RepK
13    while n < len(Rep):
14        A=Rep[n]
15        for B in [A+'T', A+'S']:
16            help=False
17            for m in range(len(Rep)):
18                C_=B+Inverse(Rep[m])
19                for C in [C_, 'J'+C_]:
20                    descend=False
21                    for b in K:
22                        #b*gamma_c(H)=H?
23                        aff=True
24                        for l in GenH:
25                            route=CalculatePath(l,C)
26                            if not getRoute(x,y,getNum(x,y
                                ,b),route)==getNum(x,y,b):

```



```

27         aff=False
28     if not aff:continue
29     #Gamma(H)=H?
30     symmetric_H=True
31     for l in GenH:
32         route=CalculatePath(1,'J')
33         route=CalculatePath(route,C)
34         route=b+route+Back(b)
35         route=CalculatePath(route,'J')
36         route=Back(b)+route+b
37         route=CalculatePath(route,
38             Inverse2(C))
39         if not getRoute(x,y,1,route)
40             ==1:symmetric_H=False
41     if not(symmetric_H):continue
42     #Gamm=id on F2_H?
43     symmetric_F2=True
44     for j in range(d):
45         route=RepH[j]
46         route=CalculatePath(route,'J')
47         route=CalculatePath(route,C)
48         route=b+route+Back(b)
49         route=CalculatePath(route,'J')
50         route=Back(b)+route+b
51         route=CalculatePath(route,
52             Inverse2(C))
53         if not getRoute(x,y,1,route)==
54             j+1:symmetric_F2=False
55     if not(symmetric_F2):continue
56     #b*gamma_C(c_0)=c_0?
57     route=CalculatePath(RepH[c_0 - 1],C)
58     route=b+route+Back(b)
59     now=1
60     now=getRoute(x,y,now,route)
61     if now==c_0:
62         descend=True
63         print('descend:ok. C=',C,'b=',
64             b)
65         if descend:break
66         #else: next b
67     if descend:
68         help=True
69         Gen.append(C)
70         print('
71             -----Identify
72             ',B , 'with' ,Rep[m])
73         break
74         #else: next C
75     print('B=',B,help)
76     if not(help):
77         Rep.append(B)
78         print('-----Add',B,'
79             to representative')
80
81     n=n+1
82     print('n=',n,'/|Rep|=',len(Rep))
83     Rep[0]='I'
84     return (Rep, Gen)

```

```

1 # case : eLr(2,4)
2
3 name='eLr(2,4)'
4 xcycles= [[1, 2, 3, 4], [5], [6], [7, 8, 9, 10]]
5 ycycles= [[1, 5, 7], [2], [3], [8], [9], [4, 6, 8, 10]]
6
7 RepH=origami(xcycles,ycycles)[0]
8 GenH=origami(xcycles,ycycles)[1]
9 c_0=10
10 RepK=getK(GenH,RepH,xcycles,ycycles,c_0)
11
12 result=MainAlgorithm2(GenH,RepH,RepK,c_0,xcycles,ycycles)
13
14 RepK[0]='1'
15 RepH[0]='1'
16 Rep=result[0]
17 Gen=result[1]
18 Rep[0]='I'
19 print('finished')
20 print('case:',name)
21 print('x=', xcycles)
22 print('y=', ycycles)
23 print('opposite cell:', c_0)
24 print('result:')
25 print('RepH=', RepH)
26 print('GenH=', GenH)
27 print('Rep=', Rep)
28 print('Gen=', Gen)
29 print('RepK=',RepK)
30 print('index=', len(Rep))
31 print('index_K=', len(RepK))

```

---