

2次多項式の formal mating に対する canonical obstruction について

Shota Kohara

For the formal mating f of two quadratic polynomials, the precise conditions for the existence of the Thurston obstruction for f is given by the theorem of Tan. When f satisfies these conditions, by the theorem of Thurston, there is no rational map which is Thurston equivalent to f . On the other hand, by using a special Thurston obstruction which is pinched under iteration of the Thurston pullback map, called canonical obstruction, we obtain some rational maps as some kind of limits of slow mating.

In this paper, for the formal mating f with Thurston obstruction, by a recursive calculation method of Jung, we perform numerical verification of how the postcritical set of f degenerates. By using the results, we estimate the canonical obstruction for f and check the consistency with the theorem of Jung, and we calculate limit rational maps. The organization of this thesis is as follows. In Section 1, we give some definitions about Thurston map. Then, we define the Thurston obstruction, which prevents a Thurston map from being Thurston equivalent to some rational map, and give a statement of the theorem of Thurston. In Section 2, after explaining polynomial dynamics, we define two types of matings, which are the methods to obtain dynamics by pasting two polynomial dynamics. In Section 3, we define the canonical obstruction. In Section 4, we present the theorem of Tan on the mating of two quadratic polynomials, and the theorem of Jung on the canonical obstruction of matings. In Section 5, we introduce Jung's recursive calculation method. In Section 6, we apply Jung's method for numerical calculation of some quadratic formal matings with Thurston obstruction. Then, we estimate the canonical obstruction and derive rational maps that come from the pinching procedure. The program of Mathematica used in Section 6 is written in Section 7.

2次多項式の formal mating に対する canonical obstruction について

小原 翔太

目次

1	Thurston's theory	4
2	Mating	7
3	Canonical obstruction	12
4	Quadratic mating	14
5	Jung's method	17
6	Application	21
7	Appendix	29

Introduction

球面上の分岐被覆 f で分岐点の軌道 P_f が有限なものを Thurston map という. 2 つの Thurston map の間には位相共役という標準的な同値関係も考えられるが, Thurston はそれよりも少し弱い同値関係として Thurston equivalence を定義した. ここで, どのような f が有理写像に Thurston equivalent かという問題が考えられるが, これに対し Thurston の定理 ([4]) では, Thurston map f がどんな有理写像にも Thurston equivalent ではないことと, f が Thurston obstruction と呼ばれる球面上の特別な単純閉曲線族をもつことが同値であることが示された.

以上の Thurston の理論を複素力学系理論に適用することを考える. 2 つの多項式 P, Q を上手く選ぶと, その 2 つをある意味で貼り合わせて球面上の写像を構成する mating という手法を用いることで, P, Q の性質を受け継いだ特別な Thurston map を構成することができる. 特に, 2 つの 2 次多項式 $P(z) = z^2 + p, Q(z) = z^2 + q$ ($p, q \in \mathbb{C}$) の formal mating $P \boxplus Q$ が Thurston obstruction をもつためのパラメータ p, q の条件は, Tan の定理 ([11]) により与えられている. よってこの条件をみたすように p, q を取ると, Thurston の定理より $P \boxplus Q$ は有理写像と Thurston equivalent ではない. しかし, Teichmüller 空間上の Thurston pullback map の反復合成により退化する性質をもつ, canonical obstruction と呼ばれる特別な Thurston obstruction を利用すれば, P, Q の slow mating に関するある種の極限として複数の有理写像が得られる.

そこで本論文では, 2 次多項式の formal mating で Thurston obstruction をもつものに対し, Jung の再帰計算手法 ([12]) を利用して postcritical set がどのように退化していくかを数値的に確かめ, それにより canonical obstruction を推定する. そしてその推定と Jung の定理 ([12]) との整合性を確認し, canonical obstruction を利用して得られる有理写像を計算する.

以下, 本論文の構成に関して概説する. 第 1 章では, Thurston map に関連する諸定義をし, Thurston map が有理写像に Thurston equivalent とならない原因である, Thurston obstruction を定義し, Thurston の定理の主張を述べる. 第 2 章では, 一般の多項式力学系の性質について述べ, 2 つの多項式力学系をある意味で貼り付けることで新たな力学系を得る手法である, mating の定義をする. 第 3 章では, 第 1 章で定義した Thurston obstruction の中でも, Teichmüller 空間上で定義される Thurston pullback map σ の反復合成によって退化していく特別な性質をもつ, canonical obstruction を定義する. 第 4 章では, 2 次多項式の formal mating が Thurston obstruction をもつための条件を示した

Tan の定理, さらに特別な条件をみたす formal mating に対する canonical obstruction について特徴付けをした Jung の定理の主張を述べる. 第 5 章では, σ の反復合成による postcritical set の推移を計算することができる, Jung の再帰計算手法について説明する. さらに, canonical obstruction を利用した有理写像の導出についても説明する. 第 6 章では, 第 5 章で説明した手法を具体例に対して適用し, canonical obstruction や有理写像を計算する. 第 7 章には, 第 6 章で用いた Mathematica のプログラムをまとめた.

Acknowledgement

本論文の執筆にあたり, 指導教官として熱心にご指導くださった川平先生に深く御礼申し上げます. また, 副査を担当していただいた志賀先生, 藤川先生にも御礼申し上げます.

1 Thurston's theory

本章では, branched covering に関する Thurston の理論について概説する. 特に, Thurston の定理の主張および Thurston obstruction の定義をすることが目的である.

以下, S^2 で位相的な 2 次元球面を表すこととする.

Definition 1 (Thurston map).

$f : S^2 \rightarrow S^2$ が **branched map** であるとは, 任意の $a \in S^2$ に対し, 以下の 3 条件をみたす S^2 の局所座標 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ および $n \in \mathbb{N}$ が存在することをいう.

- (i) $a \in U, f(a) \in V$
- (ii) $\varphi(a) = \psi(f(a)) = 0$
- (iii) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^n$ on $\varphi(U)$

上の n を, f の a における局所次数といい, $\deg(f, a)$ で表す. 集合

$$\text{Crit}_f := \{a \in S^2 \mid \deg(f, a) > 1\}$$

の元を f の **critical point** といい,

$$P_f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\text{Crit}_f)$$

を f の **postcritical set** という. $\#P_f < \infty$ をみたすとき, f は **postcritically finite** であるといい, postcritically finite な branched map を **Thurston map** という.

Definition 2 (Thurston equivalent).

Thurston map f, g が **Thurston equivalent** であるとは, 以下の 3 条件をみたす向きを保つ同相写像 $\varphi, \varphi' : S^2 \rightarrow S^2$ が存在することをいう.

- (i) $\varphi|_{P_f} = \varphi'|_{P_f}$
- (ii) $g = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$
- (iii) φ, φ' は P_f を留めてイソトピック

Definition 3 (周期点).

写像 f の n 回反復合成を f^n で表すこととする. a が f の周期点であるとは, $f^m(a) = a$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在することをいい, この等式をみたす m のうち最小のものを a の周期という.

Remark 1.

特に, branched map f の critical point が全て f の周期点であるとき, f は Thurston map である.

Definition 4 (hyperbolic orbifold).

Thurston map f に対し, $\nu_f : S^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を以下のように定める. まず $a \notin P_f$ に対し, $\nu_f(a) := 1$ とする. また, Crit_f に属する f の周期点 b および $n \in \mathbb{N}$ が存在して $a = f^n(b)$ と書けるとき, $\nu_f(a) := \infty$ とする. これら以外の a に対しては,

$$\nu_f(a) := \text{lcm}_{b \in \text{Crit}_f, f^k(b)=a} \deg(f^k, b)$$

とおく. $\mathcal{O}_f := (S^2, \nu_f)$ を f の **orbifold** といい, このオイラー標数 χ を

$$\chi(\mathcal{O}_f) := 2 - \sum_{a \in S^2} \left(1 - \frac{1}{\nu_f(a)} \right)$$

で定義する. $\chi(\mathcal{O}_f) < 0$ なる \mathcal{O}_f を, **hyperbolic orbifold** という.

Thurston map が hyperbolic orbifold をもつことは, Thurston の定理を含む様々な定理の仮定となっている. よって, 簡単な判定条件をここで示しておく.

Proposition 1.

$\#P_f \geq 5$ ならば f は hyperbolic orbifold をもつ.

Proof. $a \notin P_f$ に対して $\nu_f(a) = 1$ であることから, $1 - 1/\nu_f(a)$ は $a \in P_f$ のときのみ正の値となる. そして, $a \in P_f$ のとき $\nu_f(a) \geq 2$ または $\nu_f(a) = \infty$ であることから,

$$\chi(\mathcal{O}_f) \leq 2 - \sum_{a \in P_f} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{\#P_f}{2}$$

となるので, $\#P_f \geq 5$ ならば $\chi(\mathcal{O}_f) < 0$ が従う. □

続いて Thurston obstruction を定義するため, いくつかの用語を準備する. S^2 において, P_f を除外点と考えるときは $S^2 \setminus P_f$ とかき, marked point と考えるときは (S^2, P_f) とかくこととする.

Definition 5 (essential curve).

$S^2 \setminus P_f$ 上の単純閉曲線 γ が **essential** であるとは, $S^2 \setminus \gamma$ のいずれの連結成分にも P_f の元が 2 点以上含まれることをいう.

Definition 6 (f -stable multicurve).

$S^2 \setminus P_f$ 上の単純閉曲線の族 Γ が (S^2, P_f) 上の **multicurve** であるとは, 任意の相異なる $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対し, γ, γ' は互いにホモトピックではなく, かつ $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$ であることをいう. さらに, (S^2, P_f) 上の multicurve Γ が **f -stable multicurve** であるとは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し, $f^{-1}(\gamma)$ の任意の essential な連結成分が, Γ のある元に P_f を留めてホモトピックであることをいう.

Remark 2 ([4]).

$\#P_f \geq 3$ のとき, (S^2, P_f) 上の multicurve Γ の元は高々 $(\#P_f - 3)$ 個. よって特に, f が Thurston map のとき, $\#\Gamma < \infty$.

Definition 7 (Thurston eigenvalue).

f を Thurston map とし, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ を f -stable multicurve とする. 以下の式で定まる $n \times n$ 行列 $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を, f の **Thurston matrix** という.

$$a_{ij} := \sum \frac{1}{\deg(f|_{\eta} : \eta \rightarrow \gamma_j)}$$

ただし, 上式の和は γ_i に P_f を留めてホモトピックな $f^{-1}(\gamma_j)$ の連結成分 η にわたり, $\deg(f|_{\eta})$ は γ_j の各点の $f|_{\eta}$ による逆像の個数を表している. これは非負実正方行列だから, Perron-Frobenius の定理 ([4] Corollary C1.2) より最大固有値 λ_{Γ} が存在する. この λ_{Γ} を Γ の **Thurston eigenvalue** という.

Definition 8 (Thurston obstruction).

$\lambda_{\Gamma} \geq 1$ をみたく f -stable multicurve Γ を, f の **Thurston obstruction** という.

以上の定義の下で, Thurston map と有理写像の関係について以下の定理が成り立つ.

Theorem 1 (Thurston, [4] Theorem 10.1.14).

hyperbolic orbifold をもつ Thurston map f に対し, f がある有理写像 g に Thurston equivalent であることと, f が Thurston obstruction をもたないことは同値である. さらに, g は存在すればメビウス変換による共役を除いて一意である.

この定理によれば, Thurston obstruction をもつ Thurston map と有理写像との間には, 関連性がないように思える. しかし第3章で定義する canonical obstruction を用いると, Thurston map のある種の変形として有理写像が得られることを第5章で説明する.

2 Mating

本章では, 多項式力学系特有の性質について概説する. 2つの多項式力学系を貼り合わせる手法として, 2種類の mating を定義することが目標である.

$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とおく. 本論文を通して, 集合として $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ と同一視することとし, 単に位相多様体としての構造のみを考慮する場合は S^2 を, リーマン面としての構造まで考慮する場合は $\hat{\mathbb{C}}$ と書くこととする.

$f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を次数 $d (\geq 2)$ のモニックな多項式とする.

Remark 3 ([9] Theorem 2.1).

f は branched map の定義をみたま.

Definition 9 (filled Julia set, Julia set).

$$K = K_f := \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ は有界} \}$$

を f の **filled Julia set** という.

$$J = J_f := \partial K_f$$

を f の **Julia set** という.

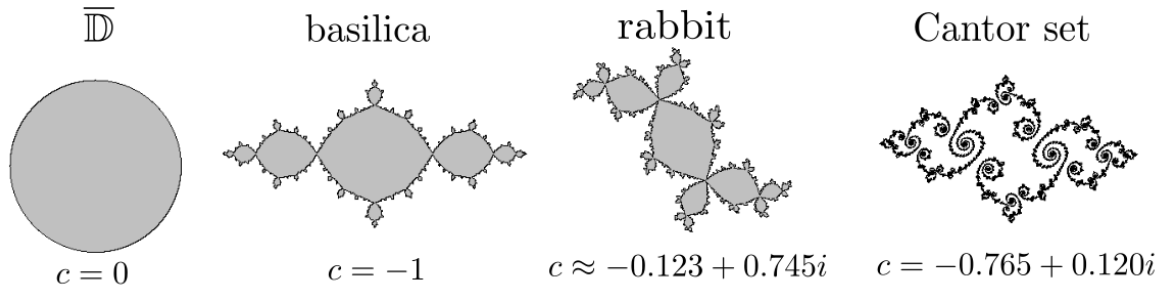


図1 $f_c(z) = z^2 + c$ の filled Julia set

Remark 4 ([5] Lemma 4.3).

$f^{-1}(K_f) = K_f = f(K_f)$, $f^{-1}(J_f) = J_f = f(J_f)$ である.

Theorem 2 ([5] Theorem 9.5).

K が連結であることと, ある等角写像 $\phi: \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ で, 任意の $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ に対して以下をみたすものが存在することは同値である.

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^d \quad (1)$$

さらに, ϕ は存在すれば 1 の $(d-1)$ 乗根による回転を除いて一意である. (この ϕ を **Böttcher map** という.)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus K & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus K \\ \phi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} & \xrightarrow{w \mapsto w^d} & \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{array}$$

Outline of the proof. 十分大きい r に対し, $\phi_n(z) := (f^n(z))^{1/d^n}$ は $\{|z| > r\}$ 上 well-defined な正則写像であり, $n \rightarrow \infty$ としたとき $\{|z| > r\}$ 上広義一様収束することが示せる. 収束先を

$$\phi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(z)$$

とおくと,

$$\phi(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(f^{n+1}(z))^{1/d^{n+1}}\}^d = \phi(z)^d$$

となっているので, ϕ は等式 (1) をみたす正則写像である. さらに, K が連結であることと $\text{Crit}_f \setminus \{\infty\} \subset K$ が同値であることを用いると, ϕ は $\mathbb{C} \setminus K$ 上まで正則に拡張され, $\phi: \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ が等角写像であることが示せる. \square

Remark 5.

特に $d = 2$ のとき, Böttcher map は存在すれば一意に定まる.

Definition 10 (external ray).

K が連結のとき, 各 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し,

$$R_t = R_t(K) := \{\phi^{-1}(re^{2\pi it}) \mid 1 < r < \infty\} (\subset \mathbb{C} \setminus K)$$

を角度 t の **external ray** という.

Definition 11 (landing point).

K が連結かつ局所連結のとき, Carathéodory の定理 ([5] Theorem 17.14) により ϕ^{-1} は $\partial\mathbb{D}$ 上に全射連続に拡張される. このとき各 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し,

$$\gamma(t) = \gamma_f(t) := \phi^{-1}(e^{2\pi it}) (\in J)$$

を R_t の **landing point** という.

Proposition 2.

K が連結かつ局所連結のとき, 各 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して $f(R_t) = R_{d \cdot t}$, $f(\gamma_t) = \gamma_{d \cdot t}$ が成立する.

Proof. $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を固定する. 等式 1 より, 任意の $1 < r < \infty$ に対して

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(re^{2\pi it}) = re^{2\pi idt}$$

であるから, 両辺を ϕ^{-1} で写すと,

$$f \circ \phi^{-1}(re^{2\pi it}) = \phi^{-1}(re^{2\pi idt})$$

が従う. よって $f(R_t) = R_{d \cdot t}$ が成り立つ. f の連続性より, $f(\gamma_t) = \gamma_{d \cdot t}$ も成り立つ. \square

Remark 6 ([3] Theorem 9.1.6, [5] Theorem 18.3, 19.6, 19.7).

f が postcritically finite のとき, K_f は連結かつ局所連結になる.

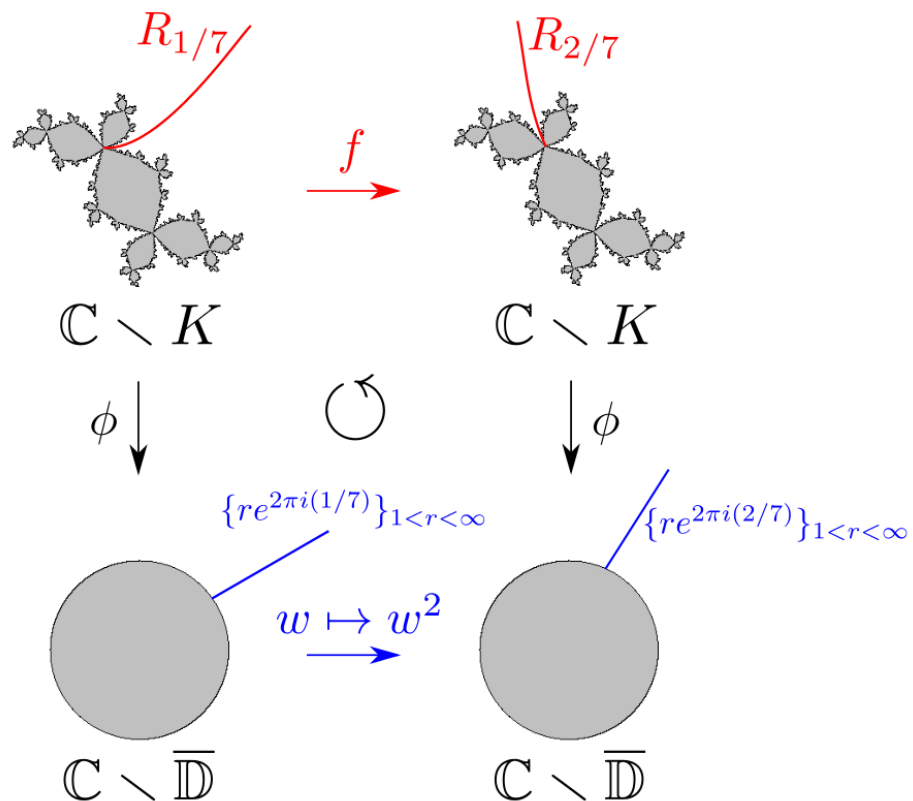


図2 rabbit の external ray

$i = 1, 2$ に対し, $f_i : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を次数 $d (\geq 2)$ のモノックな多項式とし, K_{f_i} を単に K_i と表すこととする. K_i が連結のとき, f_i に対する Böttcher map ϕ_i を

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\phi_i(z)}{z} = 1$$

をみたすように選ぶ.

Definition 12 (formal mating).

2つの同相写像 $\varphi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, $\varphi_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ を

$$\varphi_0(z) := \frac{z}{\sqrt{|z|^2 + 1}} \quad , \quad \varphi_\infty(z) := \frac{1}{\varphi_0(z)}$$

で定める. 各 f_i がモノックであることから, $f_1 \uplus f_2 : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f_1 \uplus f_2 = \begin{cases} \varphi_0 \circ f_1 \circ \varphi_0^{-1} & \text{on } \mathbb{D} \\ \varphi_\infty \circ f_2 \circ \varphi_\infty^{-1} & \text{on } \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}} \\ z \mapsto z^d & \text{on } \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

と定義すると, これは branched map になる. この $f_1 \uplus f_2$ を f_1, f_2 の **formal mating** という.

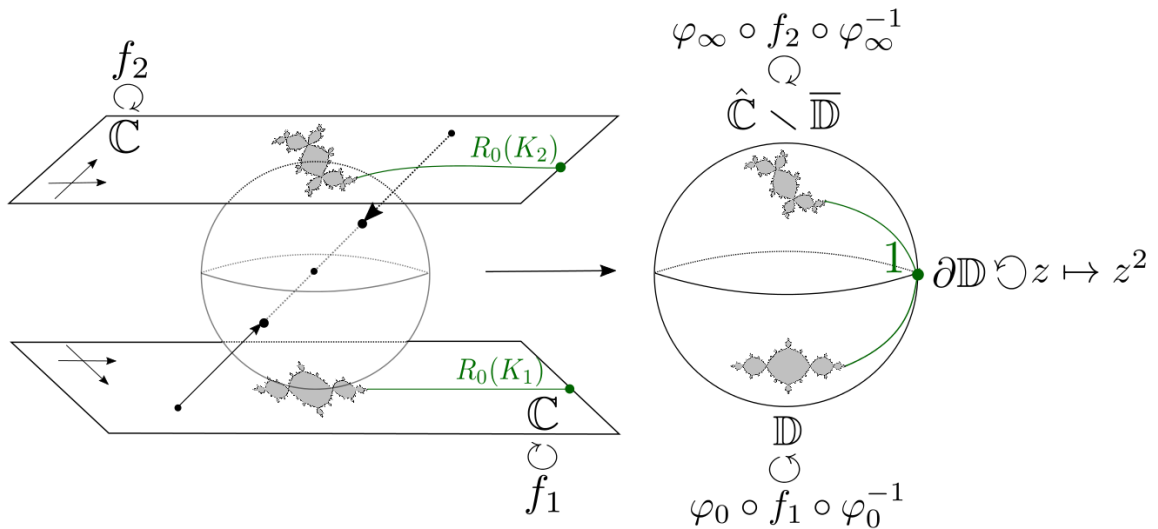


図 3 basilica と rabbit の formal mating ($d = 2$)

Remark 7 ([6]).

各 K_i が連結のとき, 任意の $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し, $\varphi_0(\phi_1^{-1}(re^{2\pi it}))$, $\varphi_\infty(\phi_2^{-1}(re^{2\pi it}))$ の $r \rightarrow \infty$ としたときの極限点は, ともに $e^{2\pi it}$ である. よって, さらに各 K_i が局所連結のとき, $\overline{\varphi_0(R_t(K_1)) \cup \varphi_\infty(R_{-t}(K_2))}$ は $\varphi_0(\gamma_{f_1}(t))$, $\varphi_\infty(\gamma_{f_2}(-t))$ を端点にもつ $\hat{\mathbb{C}}$ 上の単純曲線となる.

Definition 13 (slow mating).

各 K_i は連結であるとする. 任意の $R > 1$ を固定する. 各 i に対し, 単純閉曲線 $\{\phi_i^{-1}(Re^{2\pi it}) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ に囲まれた, K_i を含む方の領域を $U_i(R)$ とおく. また, 任意の $R' \in (R, R^2)$ を固定し, $U_i := U_i(R')$ とおく. $z \in U_1$, $w \in U_2$ が同値であることを

$$\frac{\phi_1(z)}{R} \frac{\phi_2(w)}{R} = 1 \quad (\text{すなわち, } |\phi_1(z)| \cdot |\phi_2(w)| = R^d \text{ かつ } \arg \phi_1(z) = -\arg \phi_2(w))$$

が成り立つことにより定め, この同値関係 \sim に関する商空間

$$\mathcal{S}_R := U_1 \sqcup U_2 / \sim (\cong S^2)$$

を考える. 各 i に対し, 射影を $q_{i,R} : U_i \rightarrow \mathcal{S}_R$ とおくと, $\{(q_{i,R}^{-1} : q_{i,R}(U_i) \rightarrow \mathbb{C})\}_{i=1,2}$ により複素構造を入れることで \mathcal{S}_R はリーマン面となる (一意化定理より, \mathcal{S}_R は $\hat{\mathbb{C}}$ と等角同型である). ここで, 等式 (1) より $f_i(U_i(R)) = U_i(R^d)$ であるから, 以下のようにして正則写像 $\widetilde{F}_R : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_{R^d}$ が定まる.

$$\widetilde{F}_R = \begin{cases} q_{1,R^d} \circ f_1 \circ q_{1,R}^{-1} & \text{on } q_{1,R}(U_1) \\ q_{2,R^d} \circ f_2 \circ q_{2,R}^{-1} & \text{on } q_{2,R}(U_2) \end{cases}$$

よって, 2つの等角写像 $h : \mathcal{S}_R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $\tilde{h} : \mathcal{S}_{R^d} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を用いて $F_R := \tilde{h} \circ \widetilde{F}_R \circ h^{-1}$ とおけば, $F_R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は有理写像になる (メビウス変換による共役を除いて一意に定まっている). $\{F_R\}_{R>1}$ を f_1, f_2 の **slow mating** という.

形式的には, $R = \infty$ の場合の slow mating が formal mating に対応しており, R を 1 に近づけていく過程が slow mating であると考えられる. 実際第 5 章では, formal mating と slow mating をある意味で結びつけるような同相写像を構成することで, slow mating の $R \rightarrow 1$ としたときのある種の極限として formal mating と関連した有理写像が得られることを説明する.

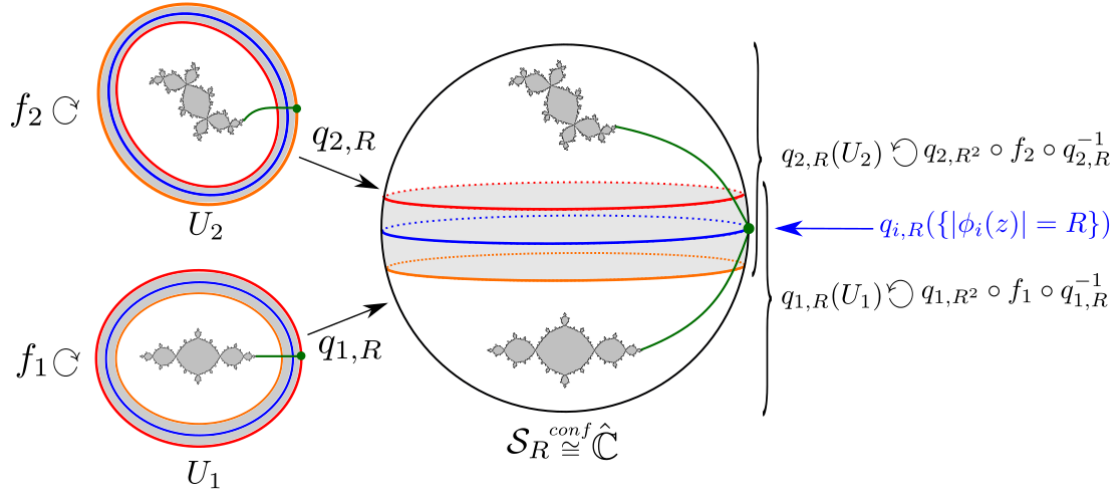


図4 basica と rabbit の slow mating ($d = 2$)

3 Canonical obstruction

本章では、第1章で定義した Thurston obstruction のうち、Thurston pullback map の反復合成により縮んでいく特別な性質をもつ、canonical obstruction を定義する。

f を Thurston map とする。

Definition 14 (Teichmüller 空間).

2つの向きを保つ同相写像 $\psi, \psi' : (S^2, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ に対して以下の2条件をみたすメビウス変換 $m : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が存在するとき、 ψ と ψ' は同値であるという。

- (i) $m \circ \psi|_{P_f} = \psi'|_{P_f}$
- (ii) $m \circ \psi$ は ψ' に P_f を留めてイソトピック

この同値関係に関する ψ の同値類を $[\psi]$ で表すこととし、

$$\mathcal{T}_f := \{[\psi] \mid \psi : (S^2, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ は向きを保つ同相写像}\}$$

を、 f の **Teichmüller 空間** という。

Definition 15 (Thurston pullback map).

向きを保つ同相写像 $\psi : (S^2, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を固定する。 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素構造を $\{(\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C})\}$ と表す。 ψ は同相写像だから、 (S^2, P_f) の複素構造を $\mu := \{(\varphi_i \circ \psi : \psi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{C})\}$

で定める. これを用いて, (S^2, P_f) の別の複素構造 μ' を以下のように定める. まず $a \in S^2 \setminus \text{Crit}_f$ に対し, $f(a)$ を含む μ の元 $\varphi_j \circ \psi : \psi^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{C}$ を, $f^{-1}(\psi^{-1}(U_j))$ の a を含む連結成分 V_j に対して $f|_{V_j}$ が単射になるように十分小さく取る. そして, a の局所座標を $\varphi_j \circ \psi \circ f : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ と定める. 次に $b \in \text{Crit}_f$ に対しては, f が branched map であることから, 以下の 3 条件をみたす 2 つの局所座標 $\xi_b : V_b \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_k \circ \psi : \psi^{-1}(U_k) \rightarrow \mathbb{C}$ が取れる.

- (i) $b \in V_b, f(b) \in \psi^{-1}(U_k)$
- (ii) $\xi_b(b) = (\varphi_k \circ \psi)(f(b)) = 0$
- (iii) $(\varphi_k \circ \psi) \circ f \circ \xi_b^{-1}(z) = z^{\deg(f,b)}$ on $\xi_b(V_b)$

このことから, b の局所座標を $\xi_b : V_b \rightarrow \mathbb{C}$ と定める. 以上で定義した μ' を入れた S^2 を $S^2_{\mu'}$ で表すこととする. このとき, 一意化定理より等角写像 $\psi' : (S^2_{\mu'}, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が存在する. $\sigma_f : \mathcal{T}_f \rightarrow \mathcal{T}_f ; [\psi] \rightarrow [\psi']$ を **Thurston pullback map** という. (ψ' は以下の可換図式をみたすように定まっている.)

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{\psi'} & (\hat{\mathbb{C}}, \psi'(P_f)) \\ f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{ある有理写像} \\ (S^2, P_f) & \xrightarrow{\psi} & (\hat{\mathbb{C}}, \psi(P_f)) \end{array}$$

一般に, 3 点以上含む有限集合 Z に対し, $S^2 \setminus Z$ に双曲計量を入れる. すなわち, 普遍被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S^2 \setminus Z$ による \mathbb{D} 上の双曲計量 $\rho_{\mathbb{D}} = 2|dz|/(1 - |z|^2)$ の押し出しを $S^2 \setminus Z$ の計量と定める.

以下, $\#P_f \geq 3$ を仮定する.

Theorem 3 ([4] Proposition 3.3.8).

$S^2 \setminus P_f$ 上の essential curve γ に対し, γ にホモトピックな $S^2 \setminus P_f$ 上の双曲計量に関する単純閉測地線がただ 1 つ存在する.

Definition 16 (canonical obstruction).

$\tau = [\psi] \in \mathcal{T}_f$, $S^2 \setminus P_f$ 上の essential curve γ に対し, Theorem 3 より, $\psi(\gamma)$ にホモトピックな $\hat{\mathbb{C}} \setminus \psi(P_f)$ 上の双曲計量に関する単純閉測地線がただ 1 つ存在する. この曲線の双曲計量に関する長さを $l_{\tau}(\gamma)$ とおく. また, $\tau_i := \sigma_f^i(\tau)$ ($i \in \mathbb{N}$) と定める. このとき, 任意の $\tau \in \mathcal{T}_f$ に対して $l_{\tau_i}(\gamma) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ となるような $S^2 \setminus P_f$ 上の essential curve γ となる最大の multicurve Γ_c を, f の **canonical obstruction** という.

Remark 8.

P_f を留めたイソトピーによる変形で互いに移り合わない Γ_c の 2 つの元 γ, γ' が共通部分を持つと仮定する. このとき collaring theorem ([3] Theorem 3.8.3) より, γ の双曲計量に関する長さが 0 に近づくと, γ' の双曲計量に関する長さは発散するので, $\gamma' \in \Gamma_c$ に矛盾. 以上より, Γ_c は P_f を留めたイソトピーによる変形を除いて一意に定まる.

以下, f は hyperbolic orbifold をもつとする.

Theorem 4 ([7] Theorem 1.1).

- (1) $\Gamma_c = \emptyset$ ならば, f はある有理写像に Thurston equivalent である.
- (2) $\Gamma_c \neq \emptyset$ ならば, Γ_c は f の Thurston obstruction である.

Theorem 5 ([7] Theorem 1.2).

任意の $\tau \in \mathcal{T}_f$ に対し, 正の定数 E_τ が一様にとれて,

$$\gamma \notin \Gamma_c \text{ ならば } l_{\tau_i}(\gamma) \geq E_\tau$$

が任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して成立する.

よって特に, τ_i の代表元を ψ_i としたとき, i を大きくしていくごとに $\psi_i(P_f)$ の元が密集していくことが分かれば, $\psi_i(\gamma)$ がそれらの元を囲むような $\gamma \in \Gamma_c$ が存在すると考えられる. そのため第 5 章では, 各 i に対して $\psi_i(P_f)$ の元の座標を計算することができる, Jung の手法について述べる.

また, Theorem 4 (1) の対偶および Theorem 1 より, 以下が成立する.

Theorem 6.

f が obstruction をもつならば, f は空でない canonical obstruction をもつ.

4 Quadratic mating

本章では, 2 次多項式 $f_c(z) := z^2 + c (c \in \mathbb{C})$ に焦点を絞って, formal mating が Thurston obstruction をもつ条件を示した Tan の定理, Hubbard tree を用いた formal mating の canonical obstruction の特徴付けを示した Jung の定理を述べる.

K_{f_c} を単に K_c と表すこととする.

Definition 17 (Mandelbrot 集合).

$\mathbb{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ は連結}\}$ を **Mandelbrot 集合** という. \mathbb{M} の連結成分の中で 0 を含

むものを W_0 とおく.

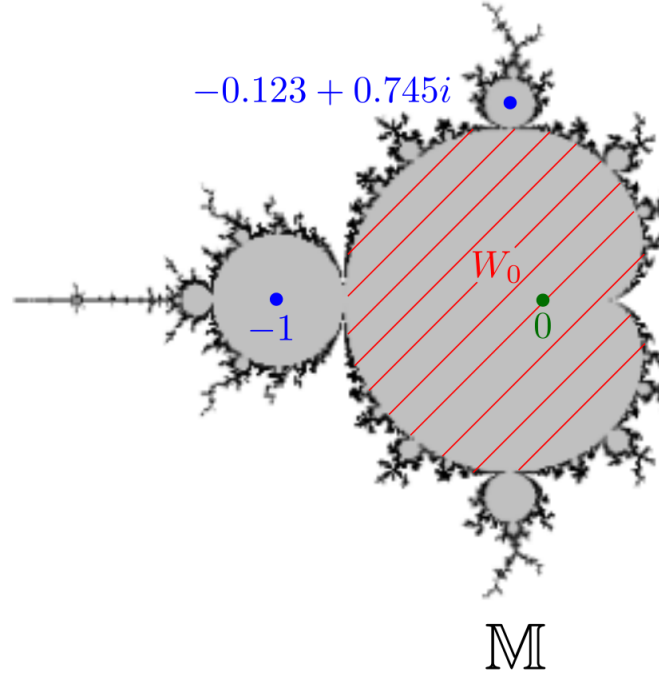


図 5 Mandelbrot 集合

これを用いることで, 2 次多項式の formal mating が Thurston obstruction をもつかどうかを判定する根拠となる, Tan の定理を主張できる.

Theorem 7 (Tan, [11] Theorem 1.1).

f_{c_1}, f_{c_2} がともに postcritically finite で, かつ \bar{c}_1, c_2 が $\mathbb{M} \setminus \overline{W_0}$ の同じ連結成分に含まれるならば, $f_{c_1} \natural f_{c_2}$ はどんな有理写像にも Thurston equivalent ではない.

以下, 0 が f_c の周期 n の周期点である場合を考えることとする. Remark 6 より, K_c は連結かつ局所連結である.

Theorem 8 ([4] Proposition 10.4.3).

$\overset{\circ}{K}_c$ の連結成分の中で, 0 を含むものを V_0 とおく. このとき, 以下の 2 つが成立する.

(i) \mathbb{D} 上正則かつ $\eta_{V_0}^{-1} \circ f_c^n \circ \eta_{V_0}(z) = z^2$ ($z \in \bar{\mathbb{D}}$) (特に $\eta_{V_0}(0) = 0$) をみたす同相写像

$\eta_{V_0} : \mathbb{D} \rightarrow \overline{V_0}$ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{z \mapsto z^2} & \mathbb{D} \\ \eta_{V_0} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \eta_{V_0} \\ \overline{V_0} & \xrightarrow{f_c^n} & \overline{V_0} \end{array}$$

(ii) $\overset{\circ}{K}_c$ の連結成分 V に対し, $f_c^m : V \rightarrow V_0$ が等角写像となる最小の $m \in \mathbb{N}$ が取れる.

Carathéodory の定理より, 各等角写像 $(f_c^m|_V)^{-1} \circ \eta_{V_0} : \mathbb{D} \rightarrow V$ は $\partial\mathbb{D}$ 上まで同相に拡張できる. 拡張後の同相写像を $\eta_V : \mathbb{D} \rightarrow \overline{V}$ で表す.

Definition 18 (internal ray).

$\overset{\circ}{K}_c$ の連結成分 V に対し, $\{\eta_V(re^{2\pi it})\}_{0 \leq r \leq 1}$ を V の角度 t の **internal ray** という.

Definition 19 (regulated path).

区間 $[0, 1]$ を K_c に埋め込んだもので, $\overset{\circ}{K}_c$ の各連結成分との共通部分が高々 2 つの internal ray しかないものを, K_c 上の **regulated path** という.

Definition 20 (Hubbard tree).

$P_{f_c} = \{f_c^k(0)\}_{1 \leq k \leq n}$ のうち, 2 点を端点にもつ K_c 上の regulated path 全ての和集合 T_c を, f_c の **Hubbard tree** という. また, $(T_c \cap \overset{\circ}{K}_c) \setminus P_{f_c}$ の各連結成分を, それぞれ Hubbard tree の **edge** と呼ぶこととする.

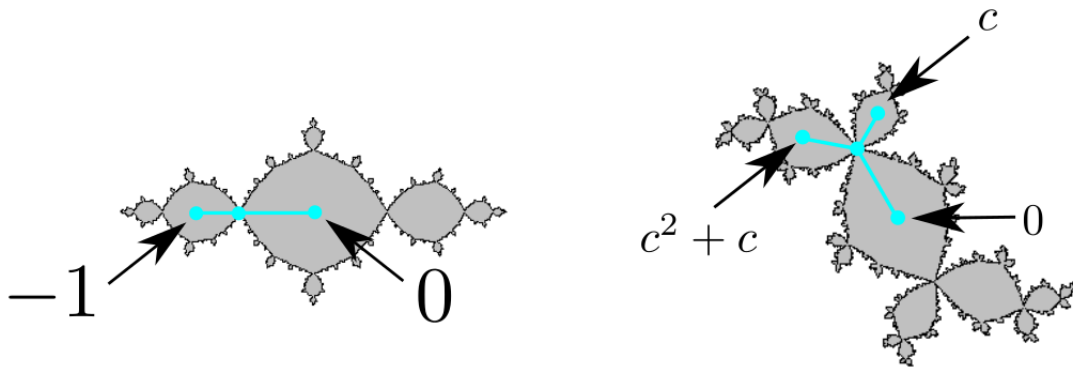


図 6 左:basilica 右:rabbit の Hubbard tree.

$c_1 \neq 0$ を以下の 2 つをみたすように取る.

- (i) f_{c_1} は postcritically finite である.
- (ii) $c_2 := \bar{c}_1$ とおくと, $f_{c_1} \uplus f_{c_2}$ は hyperbolic orbifold をもつ.

このとき Theorem 1, 6, 7 より, $f_{c_1} \uplus f_{c_2}$ は canonical obstruction Γ をもつ. また, $c_2 = \bar{c}_1$ であることに対応して, T_{c_1} の edge E を実軸に関して反転させたとき, T_{c_2} のある edge に一致することがわかる. これを \tilde{E} と表すこととする. 以上の仮定の下で, 次の Jung の定理が成り立つ.

Theorem 9 (Jung, [12] Proposition 3.8).

任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し, T_{c_1} の edge E で γ が $\varphi_0(E)$ および $\varphi_\infty(\tilde{E})$ と交わるものがただ 1 つ存在する.

Jung の定理は, 第 6 章で行う canonical obstruction の推定を裏付ける役割を果たす.

5 Jung's method

本章では, formal mating の postcritical set が Thurston pullback map の反復合成によりどのように移動していくか計算できる, Jung の手法について説明する. その後, canonical obstruction を利用することで, slow mating のある種の極限として有理写像を導出する方法についても述べる.

$p, q \in \mathbb{C}$ を, $P(z) := z^2 + p$, $Q(z) := z^2 + q$ が共に postcritically finite となるように取る. $f := P \uplus Q$ とおく. 各 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $p_i := P^i(0)$, $q_i := Q^i(0)$ とおき, $N_p := \#\{P^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $N_q := \#\{Q^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ と定める.

Remark 9.

定義より, 0 が P の周期 N_p の周期点であることと, $p_{N_p} = 0$ であることは同値である. 同様に, 0 が Q の周期 N_q の周期点であることと, $q_{N_q} = 0$ であることは同値である.

$R \geq 5$ を固定し, $0 \leq t \leq 1$ に対して $R_t = R^{2^{1-t}}$ と定める. このとき, 各 t に対し $R_t = R_{t+1}^2$, および $R_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ となっていることから, P, Q の slow mating $\{F_{R_t}\}_{0 \leq t < \infty}$ を単に $\{F_t\}_{0 \leq t < \infty}$ と表す. Thurston pullback map σ_f の反復合成による f の postcritical set の挙動を見るため, 向きを保つ同相写像の族 $\{\psi_t : (S^2, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{0 \leq t < \infty}$ で以下の可

換図式をみたすものを構成したい。

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\psi_{t+1}} & \hat{\mathbb{C}} \\ f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_t \\ S^2 & \xrightarrow{\psi_t} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

各 $t \geq 0$ に対して $\sigma_f([\psi_t]) = [\psi_{t+1}]$ と定まっていくことから, $\sigma_f([\psi_0]) = [\psi_1]$ をみたす $\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ を構成すれば十分である。まず,

$$F_0(z) = \frac{1 + (q/R^2)}{1 + (p/R^2)} \frac{z^2 + (p/R^2)}{1 + (q/R^2)z^2}$$

と正規化する。そして $|z| \leq 4$ に対して,

$$\begin{aligned} \psi_t(\varphi_0(z)) &:= \frac{1 + (q/R^2)(1-t)}{1 + (p/R^2)(1-t)} \frac{z/R_t}{1 + (q/R^4)(1-t)(z-p)} \\ \psi_t(\varphi_\infty(z)) &:= \frac{1 + (q/R^2)(1-t)}{1 + (p/R^2)(1-t)} \frac{1 + (p/R^4)(1-t)(z-q)}{z/R_t} \end{aligned}$$

と定めると, $R_0 = R^2$ に注意すれば, $|z| \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned} F_0 \circ \psi_1 \circ \varphi_0(z) &= F_0\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{1 + (q/R^2)}{1 + (p/R^2)} \frac{(z^2 + p)/R^2}{1 + (q/R^4)\{(z^2 + p) - p\}} = \psi_0 \circ \varphi_0 \circ P(z) \\ F_0 \circ \psi_1 \circ \varphi_\infty(z) &= F_0\left(\frac{R}{z}\right) = \frac{1 + (q/R^2)}{1 + (p/R^2)} \frac{1 + (p/R^4)\{(z^2 + q) - q\}}{(z^2 + q)/R^2} = \psi_0 \circ \varphi_0 \circ Q(z) \end{aligned}$$

となっているので, $\varphi_0(\{|z| \leq 4\})$ および $\varphi_\infty(\{|z| \leq 4\})$ 上では $F_0 \circ \psi_1 = \psi_0 \circ f$ がみたされている。

ここで Remark 6 より $p, q \in \mathbb{M}$ であることと, $\mathbb{M} \subset \{|z| \leq 2\}$ (Hubbard 2 Proposition and Definition 10.5.4) より, $|p|, |q| \leq 2$ である。これと $R \geq 5$ より, $|z| \leq 4$ のとき $|\psi_t(\varphi_0(z))| < 1$, $|\psi_t(\varphi_\infty(z))| > 1$ となっているから, $\varphi_0(\{|z| \leq 4\})$, $\varphi_\infty(\{|z| \leq 4\})$ 以外のところを $\psi_t : (S^2, P_f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が向きを保つ同相写像になるように補完する。そのとき, $|z| \leq 4$ で $\psi_t(\varphi_0(z)) \approx z/R_t$, $\psi_t(\varphi_\infty(z)) \approx R_t/z$ であることに注意すれば, ψ_t は実軸を実軸の近くに写し, $|z| = 1$ の近くで恒等写像に近くなるように取れるから。さらに $F_0 \circ \psi_1 = \psi_0 \circ f$ もみたすように ψ_0, ψ_1 を拡張することで, $\sigma_f([\psi_0]) = [\psi_1]$ を得る。

以上の $\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ を σ_f で移していくことで, 目的の $\{\psi_t\}_{0 \leq t < \infty}$ が得られる。ただし各 $t \geq 1$ に対し, $\sigma_f([\psi_t]) = [\psi_{t+1}]$ の代表元は ψ_1 のように, $\psi_{t+1}(0) = 0$, $\psi_{t+1}(\infty) = \infty$, $F_t(1) = 1$ となるものを選ぶこととする。各 $0 \leq t < \infty$ および $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_i(t) := \psi_t(\varphi_0(p_i)) \quad , \quad y_i(t) := \psi_t(\varphi_\infty(q_i))$$

と定めると、以下の可換図式と $P(p_i) = p_{i+1}$, $Q(q_i) = q_{i+1}$ が成り立つことより、

$$F_t(x_i(t+1)) = x_{i+1}(t) \quad , \quad F_t(y_i(t+1)) = y_{i+1}(t) \quad (2)$$

となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{D} \xrightarrow{\psi_{t+1}} \hat{\mathbb{C}} \\ \downarrow P & \circlearrowleft & \downarrow f \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_t \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{D} \xrightarrow{\psi_t} \hat{\mathbb{C}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\infty} & \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \xrightarrow{\psi_{t+1}} \hat{\mathbb{C}} \\ \downarrow Q & \circlearrowleft & \downarrow f \quad \circlearrowleft \quad \downarrow F_t \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\infty} & \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \xrightarrow{\psi_t} \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

ここで、特に $i = 0$ のときを考えれば、 $F_t : 0 \mapsto x_1(t)$, $1 \mapsto 1$, $\infty \mapsto y_1(t)$ となっている。一方、 P および Q の critical point は 0 のみだから、 $\psi_{t+1} \circ \varphi_0(0) = 0$, $\psi_{t+1} \circ \varphi_\infty(0) = \infty$ は F_t のただ 2 つの critical point である。よって以下の補題を用いれば、

$$F_t(z) = \frac{(1 - x_1(t))y_1(t)z^2 - (1 - y_1(t))x_1(t)}{(1 - x_1(t))z^2 - (1 - y_1(t))}$$

と求めることができる。

Lemma 1.

次数 2 の有理写像 h が $\text{Crit}_h = \{0, \infty\}$ をみたすならば、ある $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ が存在して $h(z) = (az^2 + b)/(cz^2 + d)$ と書ける。

Proof. $h(z) = (a_2z^2 + a_1z + a_0)/(b_2z^2 + b_1z + b_0)$ ($a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $a_2 \neq 0$ または $b_2 \neq 0$) と書ける。 $a_1 = b_1 = 0$ を示せばよい。 $0 \in \text{Crit}_h$ より $h'(0) = 0$ を解くと、 $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$ となる。 $\tilde{h}(z) := 1/h(1/z)$ とおいたとき、 $\infty \in \text{Crit}_h$ より $\tilde{h}'(0) = 0$ を解くと、 $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ となる。

$a_1 \neq 0$ を仮定する。このとき、 $h(z)/a_1 = (a_2z^2 + a_1z + a_0)/(a_1b_2z^2 + a_1b_1z + a_1b_0) = (a_2z^2 + a_1z + a_0)/(a_2b_1z^2 + a_1b_1z + a_0b_1) \equiv 1/b_1$ より、 $\deg h = 0$ となり矛盾。 $b_1 \neq 0$ を仮定したとき、上と同様にして計算すれば $b_1 \cdot h(z) \equiv a_1$ となるので、 $\deg h = 0$ となり矛盾。したがって $a_1 = b_1 = 0$. □

等式 (2) において F_t による逆像を考えることで、以下の関係式を得る。

$$z_i(t+1) = \pm \sqrt{\frac{1 - y_1(t)}{1 - x_1(t)} \frac{z_{i+1}(t) - x_1(t)}{z_{i+1}(t) - y_1(t)}} \quad (z = x \text{ or } y) \quad (3)$$

ただし \pm は、 $z_i(t)$ が $t \in \mathbb{N}$ において連続になるように選んでいくこととする。

ここまでが Jung の手法である。次に, canonical obstruction を利用した有理写像 \mathcal{F}_j の導出方法について述べる。

以下, 0 が P および Q の周期点で, $N_p = N_q = N$ である場合を考える。

Remark 10.

Remark 9 より, $x_N(t) \equiv 0, y_N(t) \equiv \infty$ ($0 \leq t \leq 1$) である。これと, 等式 (2) より

$$F_t(x_N(t+1)) = x_1(t) = F_t(0) \quad , \quad F_t(y_N(t+1)) = y_1(t) = F_t(\infty) \quad (0 \leq t < \infty)$$

であること, および $\text{Crit}_{F_t} = \{0, \infty\}$ から,

$$x_N(t) \equiv 0 \quad , \quad y_N(t) \equiv \infty \quad (0 \leq t < \infty)$$

が成り立つ。

Definition 21 (zoom).

以上の F_t は, 任意の $0 \leq t < \infty$ に対して $x_N(t)$ は 0 , $y_N(t)$ は ∞ , 1 は 1 に固定されるように定められている。この意味で, 以上の正規化を **N -zoom** とよぶ。ここで各 $j = 1, 2, \dots, N$ に対し,

$$\eta_{j,t}(z) := \frac{(z - x_j(t))(1 - y_j(t))}{(z - y_j(t))(1 - x_j(t))} \quad (0 \leq t < \infty)$$

と定め, $\tilde{x}_i(t) := \eta_{j,t}(x_i(t)), \tilde{y}_i(t) := \eta_{j,t}(y_i(t))$ ($i = 1, 2, \dots, N$) とおく。このとき, $F_{j,t} := \eta_{j,t} \circ F_t \circ \eta_{j-1,t-1}^{-1}$ について Remark 10 と同様の議論をすれば, $\tilde{x}_j(t) \equiv 0, \tilde{y}_j(t) \equiv \infty$ ($0 \leq t < \infty$), および $F_{j,t}(1) = 1$ が成り立つ。この正規化を **j -zoom** とよぶ。($F_t = F_{N,t}$ となっている.)

Notation.

f を Thurston map とし, $\tau := [\psi] \in \mathcal{T}_f, \tau_i := \sigma_f^i(\tau)$ とする。 j -zoom を与える各 τ_i の代表元を ψ_i で表すこととする。 f が canonical obstruction $\{\gamma_k\}_{1 \leq k \leq n}$ をもつとき, $(\gamma_k)_j \in \hat{\mathbb{C}}$ を以下のように定義する。まず $\psi_i(\gamma_k)$ にホモトピックな $\hat{\mathbb{C}} \setminus \psi_i(P_f)$ 上の双曲計量に関する単純閉測地線を $(\gamma_k)_{i,j}$ で表すこととすると, canonical obstruction の定義より, $i \rightarrow \infty$ としたとき $(\gamma_k)_{i,j}$ の双曲計量に関する長さは 0 に収束する。よって特に, $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\gamma_k)_{i,j}$ の $0, \infty$ を含まない方の連結成分は, $i \rightarrow \infty$ としたとき $\hat{\mathbb{C}}$ 上の球面計量に関して 1 点に退化する。この点を $(\gamma_k)_j$ と定める。

Theorem 10 ([8] Proposition 6.2).

$F_{j,t}$ が canonical obstruction Γ_j をもつとする。このとき, $F_{j,t}$ は $t \rightarrow \infty$ としたとき, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_k \{(\gamma_k)_j\}$ 上で正則写像 F_j に広義一様収束する。

さらに、リーマンの除去可能特異点定理 ([9] Theorem 1.8) により F_j を $\bigcup_k \{(\gamma_k)_j\}$ 上まで正則に拡張することで、 $F_{j,t}$ の極限として有理写像 \mathcal{F}_j を得ることができる。

6 Application

本章では、第 5 章の手法を 2 つの具体例に適用し、その結果から推定される canonical obstruction と Jung の定理との整合性を確認する。また、それを利用して得られる有理写像 \mathcal{F}_j も導出する。なお、ここで用いた Mathematica による近似計算プログラムは、第 7 章に掲載してある。

(1) basilica \uplus basilica

$P(z) = Q(z) := z^2 - 1$ ($p = q = -1$) の formal mating $f = P \uplus Q$ を考える。 P および Q はただ 1 つの周期的な critical point 0 をもつことからオイラー標数を計算すると、 $\chi(\mathcal{O}_f) = -2 < 0$ となる。よって f は hyperbolic orbifold をもち、これと $p = -1 = \bar{q}$ から、Theorem 1, 6, 7 より f は canonical obstruction をもつ。プログラム 1 を適用すれば、次ページの表 1 のような、1 または -1 に近付いていく数列が得られる。図 7 は、この結果を単位球面上にプロットしたものを表している。

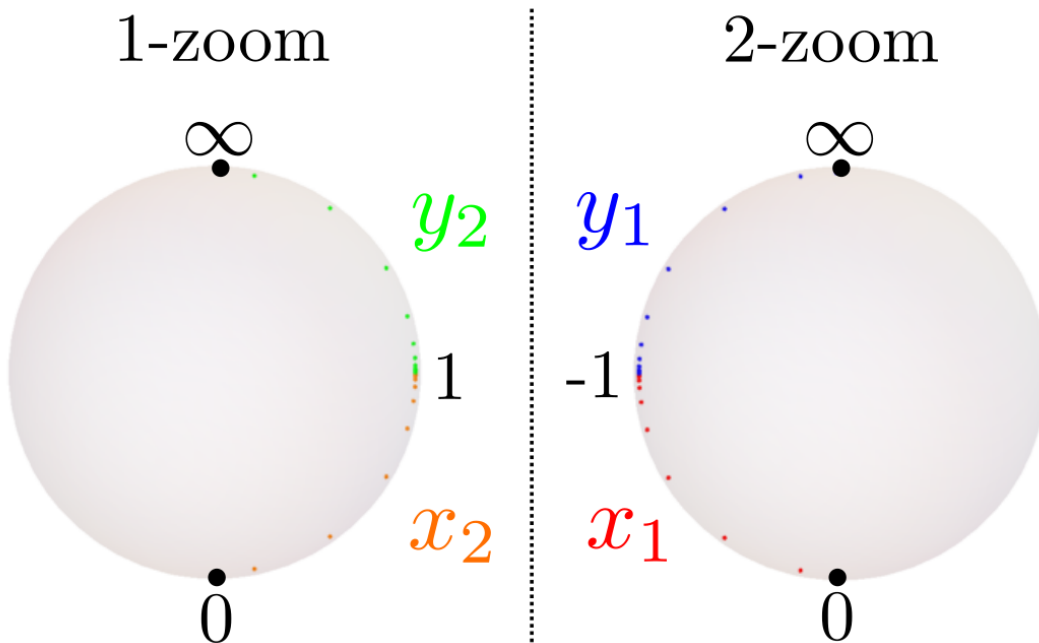


図 7 $t \in \mathbb{N}$ における各 $x_i(t)$, $y_i(t)$ の値.

表 1 プログラム 1 から生成されるリストの中身

\	1-zoom		2-zoom	
	$x_2(t)$	$y_2(t)$	$x_1(t)$	$y_1(t)$
2	0.01	100	-0.01	-100
3	0.1	10	-0.1	-10
4	0.316228	3.16228	-0.316228	-3.16228
5	0.562341	1.77828	-0.562341	-1.77828
6	0.749894	1.33352	-0.749894	-1.33352
7	0.865964	1.15478	-0.865964	-1.15478
8	0.930572	1.07461	-0.930572	-1.07461
9	0.964662	1.03663	-0.964662	-1.03663
10	0.982172	1.01815	-0.982172	-1.01815
11	0.991046	1.00904	-0.991046	-1.00904
12	0.995513	1.00451	-0.995513	-1.00451
13	0.997754	1.00225	-0.997754	-1.00225
14	0.998876	1.00112	-0.998876	-1.00112
15	0.999438	1.00056	-0.999438	-1.00056
16	0.999719	1.00028	-0.999719	-1.00028
17	0.999859	1.00014	-0.999859	-1.00014
18	0.99993	1.00007	-0.99993	-1.00007
19	0.999965	1.00004	-0.999965	-1.00004
20	0.999982	1.00002	-0.999982	-1.00002
21	0.999991	1.00001	-0.999991	-1.00001
22	0.999996	1.	-0.999996	-1.
23	0.999998	1.	-0.999998	-1.
24	0.999999	1.	-0.999999	-1.
25	0.999999	1.	-0.999999	-1.
26	1.	1.	-1.	-1.

よって、下表のような収束性が推定される.

\backslash	$x_1(t), y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$	$x_2(t), y_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$
1-zoom	$0, \infty$	1
2-zoom	-1	$0, \infty$

したがって、canonical obstruction を構成するには、 $\{\varphi_0(p_1), \varphi_\infty(q_1)\}$ と $\{\varphi_0(p_2), \varphi_\infty(q_2), 1\}$ を分割する essential curve を見つければよいと考えられる. 例えば、 K_P, K_Q それぞれに対し角度 $1/3, 2/3$ の external ray を考え、

$$\Gamma = \{\gamma := \overline{\varphi_0(R_{1/3}(K_P)) \cup \varphi_0(R_{2/3}(K_P)) \cup \varphi_\infty(R_{1/3}(K_Q)) \cup \varphi_\infty(R_{2/3}(K_Q))}\}$$

と定めると、 Γ は f の canonical obstruction になると推定される.

Γ が obstruction であることは以下のように確認できる. まず、 $1/3 \equiv -2/3, 2/3 \equiv -1/3 \pmod{\mathbb{Z}}$ であることから、Remark 7 より γ は単純閉曲線である. そして、図 8 下段より P_f は γ により $\{\varphi_0(0), \varphi_\infty(0)\}$ と $\{\varphi_0(-1), \varphi_\infty(-1)\}$ の 2 点ずつに分かれています. γ は essential である. よって、 Γ は (S^2, P_f) 上の multicurve である. 次に、Proposition 2 より $P(R_t) = R_{2t}$ ($t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) であることから、

$$P^{-1}(R_{1/3}(K_P) \cup R_{2/3}(K_P)) = R_{1/3}(K_P) \cup R_{2/3}(K_P) \cup R_{1/6}(K_P) \cup R_{5/6}(K_P)$$

である. よって、

$$\tilde{\gamma} := \overline{\varphi_0(R_{1/6}(K_P)) \cup \varphi_0(R_{5/6}(K_P)) \cup \varphi_\infty(R_{1/6}(K_Q)) \cup \varphi_\infty(R_{5/6}(K_Q))}$$

とおいたとき、 $f^{-1}(\gamma) = \gamma \cup \tilde{\gamma}$ である. ここで、 $S^2 \setminus \tilde{\gamma}$ の連結成分のうち 1 を含む方には P_f の元が含まれないから、 $\tilde{\gamma}$ は essential ではない. したがって、 Γ は f -stable multicurve である. またこの議論から、Thurston matrix は 1×1 行列 (1) と求まり、 $\lambda_\Gamma = 1 \geq 1$ であることから Γ は f の obstruction であることが分かる. そして、Remark 8 より P_f を留めたイソトピーにより γ を動かしても canonical obstruction は不変なので、例えば図 8 左下のように δ を取れば、 T_p のただ 1 つの edge $E := (-1, \gamma(1/3))$ に対して $\varphi_0(E), \varphi_\infty(\tilde{E})$ は δ と交わっており、上の推定は Theorem 9 と整合的である.

次に以下の Theorem を用いて、1-zoom および 2-zoom から得られる有理写像を求める.

Theorem 11 ([5] Theorem 7.2).

次数 d の定数でない有理写像の critical point は、重複度を込めて $(2d - 2)$ 個存在する.

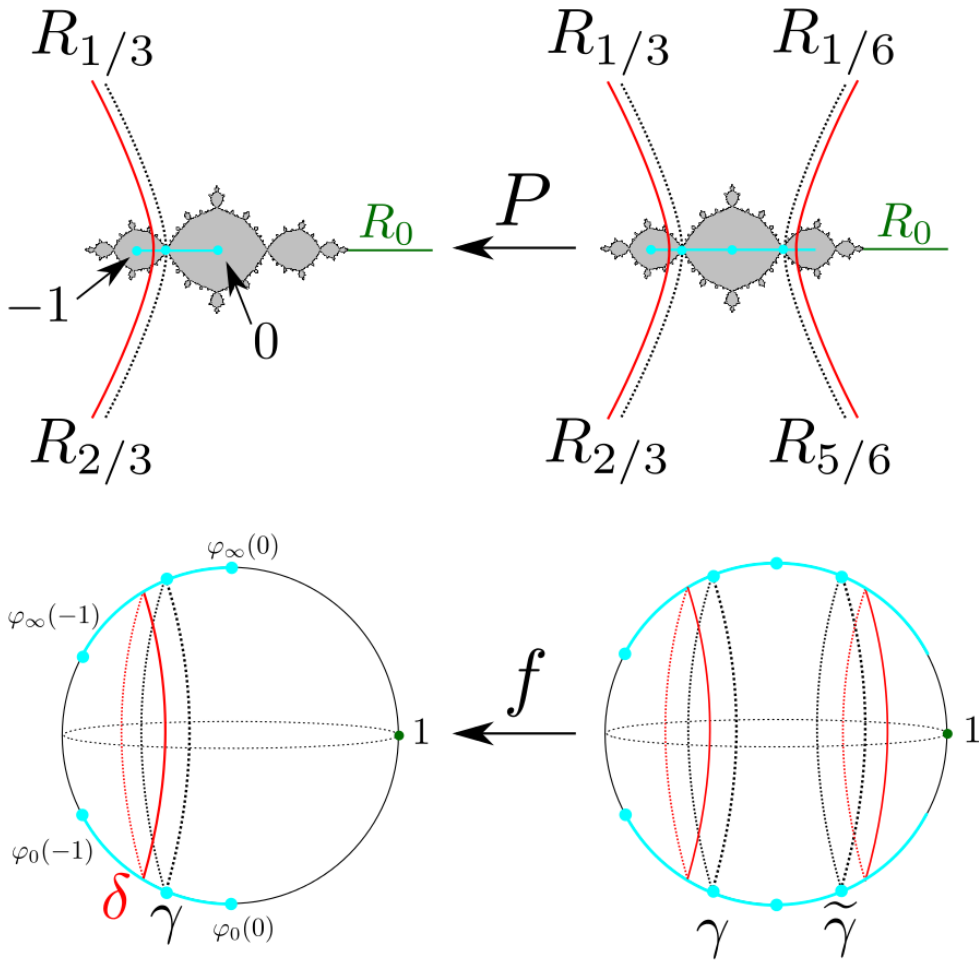


図8 basilica どうしの formal mating の canonical obstruction

最初に 2-zoom の場合の有理写像 \mathcal{F}_2 を求める。 \mathcal{F}_2 の critical point は $0, \infty$ (いずれも simple) だから, Theorem 11 より $\deg \mathcal{F}_2 = 2$ である。 よって Lemma 1 より, $\mathcal{F}_2(z) = (az^2 + b)/(cz^2 + d)$ と書ける。 まず, $f(0) = 0$ だから $\mathcal{F}_2(0) = 0$ より $b = 0$, $f(\infty) = \infty$ だから $\mathcal{F}_2(\infty) = \infty$ より $c = 0$ と求まる。 また, $f(\gamma) = \gamma$ より $\mathcal{F}_2((\gamma)_2) = (\gamma)_1$ だが, プログラムの結果より $(\gamma)_1 = -1, (\gamma)_2 = 1$ なので, $a = d$ と求まる。 よって, $\mathcal{F}_2(z) = z^2$ と求まる。

同様にして 1-zoom の場合の有理写像 \mathcal{F}_1 を求める。 まず \mathcal{F}_1 の critical point は pinching により消失しているため, Theorem 11 より $\deg \mathcal{F}_1 = 1$ である。 そして $\mathcal{F}_1(0) = 0, \mathcal{F}_1((\gamma)_1) = (\gamma)_2, \mathcal{F}_1(\infty) = \infty$ であることから, $\mathcal{F}_1(z) = -z$ と求まる。

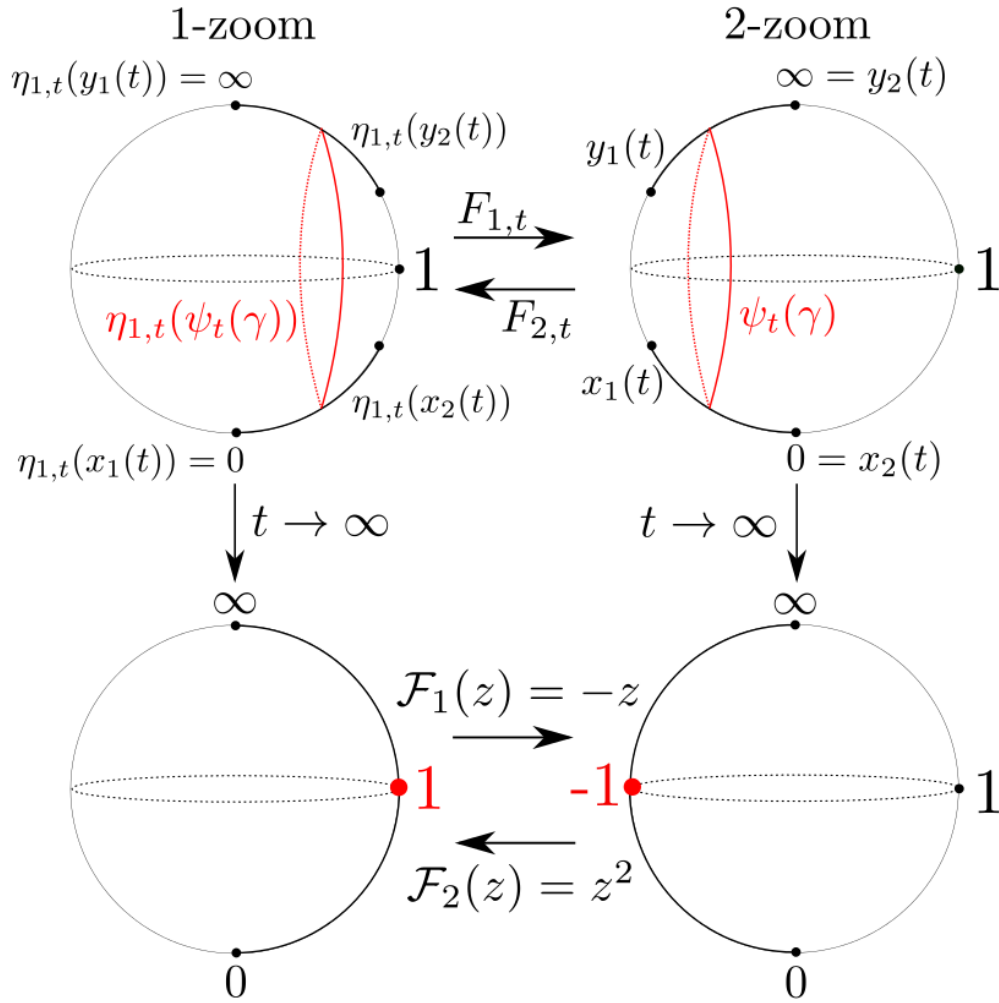


図9 1-zoom, 2-zoom から得られる有理写像

(2)rabbit \uplus anti-rabbit

$P^3(0) = 0$ かつ $\text{Im}(p) > 0$ をみたす唯一の p を取り, $q := \bar{p}$ とおく. K_p, K_q はそれぞれ, rabbit, anti-rabbit と呼ばれている (K_p を実軸に関して反転させると K_q と一致する). 改めて $f = P \uplus Q$ とおく. $\#P_f = 6 \geq 5$ だから, Proposition 1 より f は hyperbolic orbifold をもつ. これと $p = \bar{q}$ から, Theorem 1, 6, 7 より f は canonical obstruction をもつ. プログラム 2 を適用すれば, プログラム 1 と同様に 1 または -1 に値が近付いていく数列が得られる. 図 10 は, この結果を単位球面上にプロットしたものを表している.

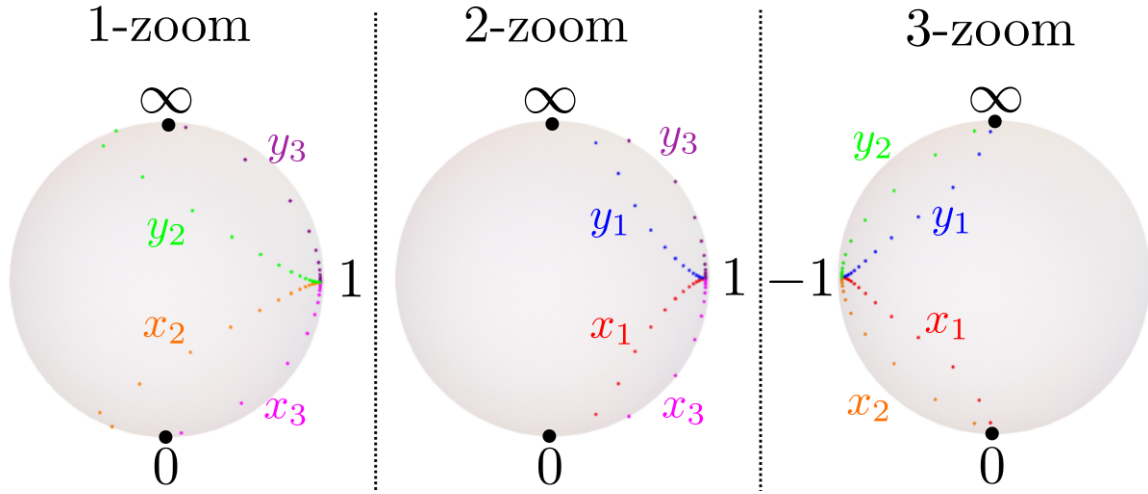


図 10 $t \in \mathbb{N}$ における各 $x_i(t), y_i(t)$ の値.

よって、下表のような収束性が推定される.

\backslash	$x_1(t), y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$	$x_2(t), y_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$	$x_3(t), y_3(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$
1-zoom	$0, \infty$	1	1
2-zoom	1	$0, \infty$	1
3-zoom	-1	-1	$0, \infty$

したがって、canonical obstruction を構成するには、 $\{\varphi_0(p_1), \varphi_\infty(q_1)\}$ と $\{\varphi_0(p_2), \varphi_\infty(q_2)\}$ と $\{\varphi_0(p_3), \varphi_\infty(q_3), 1\}$ を分割する essential curves を見つけばよいと考えられる. しかし、(1) のように直接 external ray を用いる方法では、 $\gamma_f(1/7) = \gamma_f(2/7) = \gamma_f(4/7)$ で曲線どうしが交わってしまうため multicurve の定義に反する. ただし Remark 8 より P_f を留めたイソトピーによる移動は許されているため、external ray から得られる曲線を動かして交わらないようにすれば、目的の essential curves が得られる. よって例えば図 11 のように 3 つの curve $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ を取り、 $\gamma_1 := \overline{\varphi_0(\delta_1) \cup \varphi_\infty(\delta_1^*)}$, $\gamma_2 := \overline{\varphi_0(\delta_2) \cup \varphi_\infty(\delta_2^*)}$, $\gamma_3 := \overline{\varphi_0(\delta_3) \cup \varphi_\infty(\delta_3^*)}$ (閉包と区別するため、ここでは添え字*で複素共役を表すこととする) とおいたとき、 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ は f の canonical obstruction になると推定される.

Γ が obstruction であることは以下のように確認できる. まず、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\arg(\varphi_0(z)) = \arg(\varphi_\infty(z^*))$ となっていることから、各 $i = 1, 2, 3$ に対して $\varphi_0(\delta_i)$ と $\varphi_\infty(\delta_i^*)$ の 2 つの極限点は $\partial\mathbb{D}$ 上で一致するので、各 γ_i は単純閉曲線である. また、

γ_1 は P_f を $\{\varphi_0(p^2 + p), \varphi_\infty(q^2 + q), \varphi_0(0), \varphi_\infty(0)\}$ と $\{\varphi_0(p), \varphi_\infty(q)\}$ に分割するので, essential である. 同様に γ_2, γ_3 も essential である. 互いに P_f を留めてホモトピックではなく共通部分をもたないことも図 11 より従うので, Γ は (S^2, P_f) 上の multicurve である.

次に Γ が f -stable であることを示す. 図 11 では, 各 δ_i とその逆像 $P^{-1}(\delta_i)$ を同じ色にしている. このことに注意すれば, $f^{-1}(\gamma_1)$ は, γ_3 に P_f を留めてホモトピックな essential curve と, essential ではない curve の和集合となる. 同様に $f^{-1}(\gamma_2)$ の essential な連結成分は γ_1 に, $f^{-1}(\gamma_3)$ の essential な連結成分は γ_2 に P_f を留めてホモトピックだから, Γ は f -stable である.

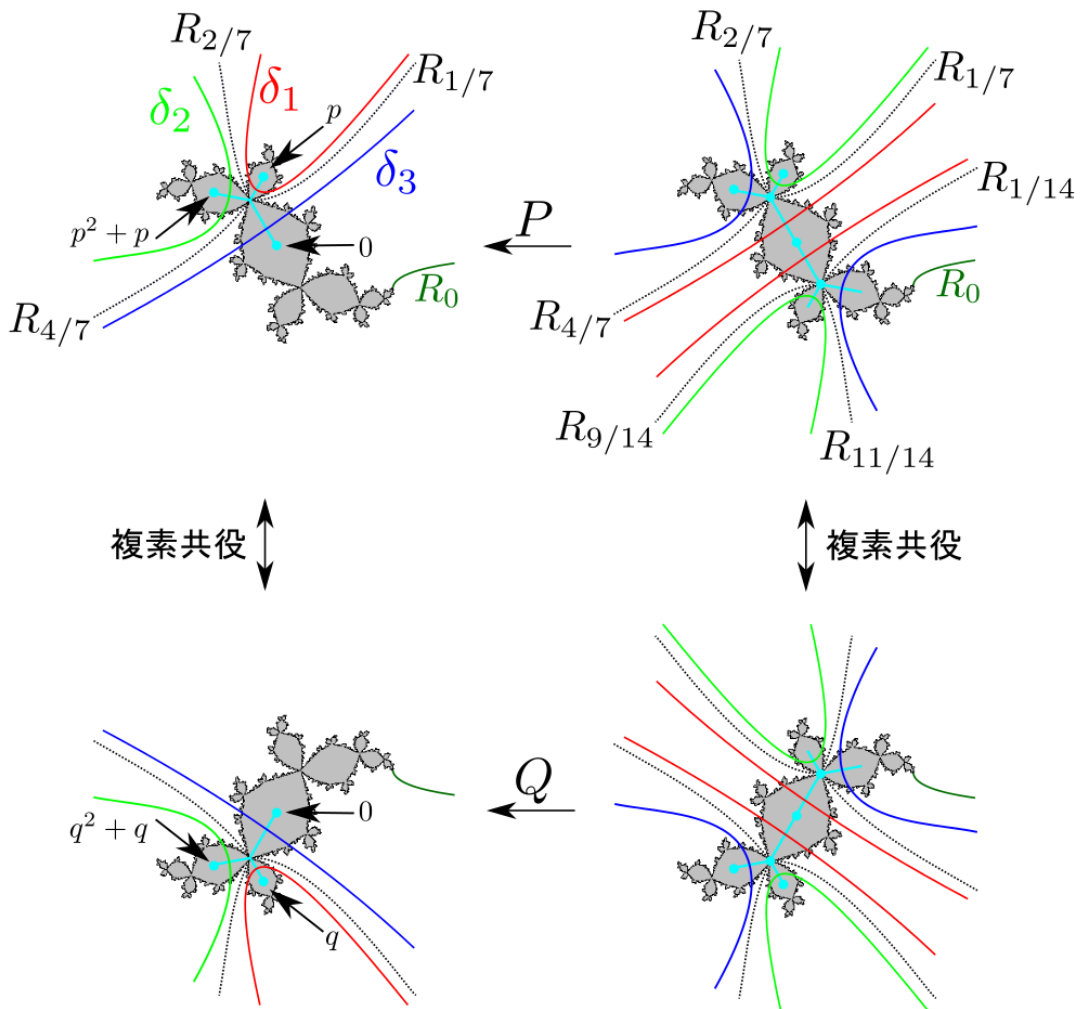


図 11 rabbit, anti-rabbit の external ray を基準とした変形

またこの議論から, Thurston matrix は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と求まり, $\lambda_\Gamma = 1 \geq 1$ であることから Γ は f の obstruction であることが分かる. そして, T_p の 3 つの edge をそれぞれ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ が通過しているため, 上の推定は Theorem 9 と整合的である.

最後に, 1-zoom, 2-zoom, 3-zoom から得られる有理写像を求める. まず次数に関しては, (1) の場合と同様にして $\deg(\mathcal{F}_1) = \deg(\mathcal{F}_2) = 1, \deg(\mathcal{F}_3) = 2$ と求まる. 各 \mathcal{F}_i が $0, \infty$ を固定することも同様に示せる. そして, 再び図 11 の色の対応に注意すれば, $f(\gamma_1)$ は γ_2 に, $f(\gamma_2)$ は γ_3 に, $f(\gamma_3)$ は γ_1 に P_f を留めてホモトピックであることが分かり, $\mathcal{F}_1((\gamma_1)_1) = (\gamma_2)_2, \mathcal{F}_2((\gamma_2)_2) = (\gamma_3)_3, \mathcal{F}_3((\gamma_3)_3) = (\gamma_1)_1$ となる. プログラムの結果より $(\gamma_1)_1 = (\gamma_2)_2 = 1, (\gamma_3)_3 = -1$ だから, $\mathcal{F}_1(z) = z, \mathcal{F}_2(z) = -z, \mathcal{F}_3(z) = z^2$ と求まる.

(3) これら以外の場合

周期 4 および周期 5 の場合についても同様にしてプログラムを構成し適用した結果, その結果から推定される canonical obstruction と Jung の定理との整合性が確認できた. より大きな周期に対しても整合性が得られることが期待される.

また, 本論文では Tan の定理や Jung の定理を用いるために 2 次多項式に焦点を絞ったが, 第 5 章で説明した Jung の手法は 3 次以上の多項式に対しても拡張できる. よって本論文の推定手法の応用として, 一般の formal mating に対する Thurston obstruction の存在を数値的に検証することなどが考えられる.

7 Appendix

プログラム 1(basilica \boxplus basilica に適用)

```
k := 2
p := -1//N
q := -1//N
r := 10000
P[z_] := z^2+p
Q[z_] := z^2+q
R[t_] := r^(2^(1-t))
postp[n_] := Nest[P,0,Mod[n,k,1]]
postq[n_] := Nest[Q,0,Mod[n,k,1]]
Np := k
Nq := k
xpull[i_,t_,0] :=
  ((R[0]+(1-t)q)postp[i]R[0]^2)
  /((R[0]+(1-t)p)R[t](R[0]^2 + (1-t)q(postp[i]-p)))
ypull[i_,t_,0] :=
  ((R[0]+(1-t)q)R[t](R[0]^2+(1-t)p(postq[i]-q)))
  /((R[0]+(1-t)p)postq[i]R[0]^2)
xbranch[i_,t_,j_] :=
  Sqrt[((1-ypull[1,t,j-1])(xpull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-xpull[1,t,j-1]))
  /((1-xpull[1,t,j-1])(xpull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-ypull[1,t,j-1]))]
ybranch[i_,t_,j_] :=
  Sqrt[((1-ypull[1,t,j-1])(ypull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-xpull[1,t,j-1]))
  /((1-xpull[1,t,j-1])(ypull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-ypull[1,t,j-1]))]
xbranch[k,t_,j_] := 0
ybranch[k-1,t_,j_] := Sqrt[(1-ypull[1,t,j-1])/(1-xpull[1,t,j-1])]
g1[z_,t_,j_] :=
  ((z-xpull[1,t,j])(1-ypull[1,t,j]))
  /((z-ypull[1,t,j])(1-xpull[1,t,j]))
```

```

g1infty[t_,j_] := (1-ypull[1,t,j])/(1-xpull[1,t,j])
pulltimes := 25
listx12 := {}
listy12 := {}
listx21 := {}
listy21 := {}
For[j = 1, j <= pulltimes, j++,
  For[i = 1, i <= Np, i++,
    If[Abs[xbranch[i,0,j]-xpull[i,1,j-1]] <
      Abs[-xbranch[i,0,j]-xpull[i,1,j-1]],
      xpull[i,0,j]=xbranch[i,0,j],
      xpull[i,0,j]=-xbranch[i,0,j]
    ]
    If[Abs[xpull[i,0,j]-xbranch[i,1,j]] <
      Abs[-xpull[i,0,j]-xbranch[i,1,j]],
      xpull[i,1,j] = xbranch[i,1,j],
      xpull[i,1,j] = -xbranch[i,1,j]
    ]
  ]
  For[i = 1, i <= Nq - 1, i++,
    If[Abs[ybranch[i,0,j]-ypull[i,1,j-1]] <
      Abs[-ybranch[i,0,j]-ypull[i,1,j-1]],
      ypull[i,0,j]=ybranch[i,0,j],
      ypull[i,0,j]=-ybranch[i,0,j]
    ]
    If[Abs[ypull[i,0,j]-ybranch[i,1,j]] <
      Abs[-ypull[i,0,j]-ybranch[i,1,j]],
      ypull[i,1,j] = ybranch[i,1,j],
      ypull[i,1,j] = -ybranch[i,1,j]
    ]
  ]
]
AppendTo[listx12,xpull[1,1,j]]
AppendTo[listy12,ypull[1,1,j]]

```

```

AppendTo[listx21,g1[xpull[2,1,j],1,j]]
AppendTo[listy21,g1[infty[1,j]]
]
proj[{x_,y_}] :=
  {(2x)/(1+x^2+y^2),(2y)/(1+x^2+y^2),(-1+x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)}
gx12 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx12]],PlotStyle -> Red]
gy12 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy12]],PlotStyle -> Blue]
gx21 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx21]],PlotStyle -> Orange]
gy21 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy21]],PlotStyle -> Green]
gsp := Graphics3D[{GrayLevel[0.9,0.1], Sphere[{0,0,0}]},Boxed -> False]
Show[gsp,gx21,gy21,ViewPoint -> Front]
Show[gsp,gx12,gy12,ViewPoint -> Front]

```

プログラム 2(rabbit \oplus anti-rabbit に適用)

```

k := 3
f[z_] := z^2+c
Solve[Nest[f,0,k] == 0 && Im[c] > 0, c]
{{c -> Root[1 + #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, 3]}}
p := Root[1 + #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, 3]/N
q := Conjugate[p]
r := 10000
P[z_] := z^2 + p
Q[z_] := z^2 + q
R[t_] := r^(2^(1 - t))
postp[n_] := Nest[P,0,Mod[n,k,1]]
postq[n_] := Nest[Q,0,Mod[n,k,1]]
postp[k] := 0
postq[k] := 0
Np := k
Nq := k
xpull[i_,t_,0] :=
  ((R[0]+(1-t)q)postp[i]R[0]^2)
  /((R[0]+(1-t)p)R[t](R[0]^2 + (1-t) q (postp[i]-p)))

```



```

ypull[i_,t_,0] :=
  ((R[0]+(1-t)q)R[t] (R[0]^2+(1-t)p(postq[i]-q)))
  /((R[0]+(1-t)p)postq[i]R[0]^2)
xbranch[i_,t_,j_] :=
  Sqrt[((1-ypull[1,t,j-1])(xpull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-xpull[1,t,j-1]))
    /((1-xpull[1,t,j-1])(xpull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-ypull[1,t,j-1]))]
ybranch[i_,t_,j_] :=
  Sqrt[((1-ypull[1,t,j-1])(ypull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-xpull[1,t,j-1]))
    /((1-xpull[1,t,j-1])(ypull[Mod[i,k]+1,t,j-1]-ypull[1,t,j-1]))]
xbranch[k,t_,j_] := 0
ybranch[k-1,t_,j_] := Sqrt[(1-ypull[1,t,j-1])/(1-xpull[1,t,j-1])]
g1[z_,t_,j_] :=
  ((z-xpull[1,t,j])(1-ypull[1,t,j]))
  /((z-ypull[1,t,j])(1-xpull[1,t,j]))
g2[z_,t_,j_] :=
  ((z-xpull[2,t,j])(1-ypull[2,t,j]))
  /((z-ypull[2,t,j])(1-xpull[2,t,j]))
g1infy[t_,j_] := (1-ypull[1,t,j])/(1-xpull[1,t,j])
g2infy[t_,j_] := (1-ypull[2,t,j])/(1-xpull[2,t,j])
pulltimes := 50
listx12 := {}
listy12 := {}
listx13 := {}
listy13 := {}
listx21 := {}
listy21 := {}
listx23 := {}
listy23 := {}
listx31 := {}
listy31 := {}
listx32 := {}
listy32 := {}
For[j = 1, j <= pulltimes, j++,

```

```

For[i = 1, i <= Np, i++,
  If[Abs[xbranch[i,0,j]-xpull[i,1,j-1]]<
    Abs[-xbranch[i,0,j]-xpull[i,1,j-1]],
    xpull[i,0,j]=xbranch[i,0,j],
    xpull[i,0,j]=-xbranch[i,0,j]
  ]
  If[Abs[xpull[i,0,j]-xbranch[i,1,j]]<
    Abs[-xpull[i,0,j]-xbranch[i,1,j]],
    xpull[i,1,j] = xbranch[i,1,j],
    xpull[i,1,j] = -xbranch[i,1,j]
  ]
]
For[i = 1, i <= Nq - 1, i++,
  If[Abs[ybranch[i,0,j]-ypull[i,1,j-1]]<
    Abs[-ybranch[i,0,j]-ypull[i,1,j-1]],
    ypull[i,0,j]=ybranch[i,0,j],
    ypull[i,0,j]=-ybranch[i,0,j]
  ]
  If[Abs[ypull[i,0,j]-ybranch[i,1,j]]<
    Abs[-ypull[i,0,j]-ybranch[i,1,j]],
    ypull[i,1,j] = ybranch[i,1,j],
    ypull[i,1,j] = -ybranch[i,1,j]
  ]
]
AppendTo[listx12,g1[xpull[2,1,j],1,j]]
AppendTo[listy12,g1[ypull[2,1,j],1,j]]
AppendTo[listx13,g1[xpull[3,1,j],1,j]]
AppendTo[listy13,g1[infty[1,j]]
AppendTo[listx21,g2[xpull[1,1,j],1,j]]
AppendTo[listy21,g2[ypull[1,1,j],1,j]]
AppendTo[listx23,g2[xpull[3,1,j],1,j]]
AppendTo[listy23,g2[infty[1,j]]
AppendTo[listx31,xpull[1,1,j]]

```

```

AppendTo[listy31,ypull[1,1,j]]
AppendTo[listx32,xpull[2,1,j]]
AppendTo[listy32,ypull[2,1,j]]
]
proj[{x_,y_}] :=
  {(2x)/(1+x^2+y^2),(2y)/(1+x^2+y^2),(-1+x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)}
gx12 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx12]],PlotStyle -> Orange]
gy12 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy12]],PlotStyle -> Green]
gx13 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx13]],PlotStyle -> Magenta]
gy13 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy13]],PlotStyle -> Purple]
gx21 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx21]],PlotStyle -> Red]
gy21 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy21]],PlotStyle -> Blue]
gx23 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx23]],PlotStyle -> Magenta]
gy23 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy23]],PlotStyle -> Purple]
gx31 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx31]],PlotStyle -> Red]
gy31 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy31]],PlotStyle -> Blue]
gx32 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listx32]],PlotStyle -> Orange]
gy32 := ListPointPlot3D[Map[proj,ReIm[listy32]],PlotStyle -> Green]
gsp := Graphics3D[{GrayLevel[0.9,0.1],Sphere[{0,0,0}]},Boxed -> False]
Show[gsp,gx12,gy12,gx13,gy13,ViewPoint -> Front]
Show[gsp,gx21,gy21,gx23,gy23,ViewPoint -> Front]
Show[gsp,gx31,gy31,gx32,gy32,ViewPoint -> Front]

```

参考文献

- [1] A. Chéritat, Tan Lei and Shishikura's example of non-mateable degree 3 polynomials without a Levy cycle, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* 21, 935-980 (2012).
- [2] A. Douady, J. H. Hubbard, A proof of Thurston's topological characterization of rational functions, *Acta Math.* 171, 263-297 (1993).
- [3] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics I: Teichmüller theory*. Matrix editions 2006.
- [4] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics II: Surface homeomorphisms and Rational Functions*. Matrix editions, 2016.
- [5] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, 3rd edition, 2006.
- [6] J. Milnor, Pasting together Julia sets: a worked out example of mating, *Exp. Math.* 13, 55-92 (2004).
- [7] K. M. Pilgrim, Canonical Thurston obstructions, *Adv. Math.* 158, 154-168 (2001).
- [8] N. Selinger, Thurston's pullback map on the augmented Teichmüller space and applications, *Invent. Math.* 189, 111-142 (2012).
- [9] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Translated by Bruce Gilligan, Springer 81, 1981.
- [10] M. Shishikura, On a theorem of Mary Rees, in *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, Tan L. ed., LMS Lecture Notes 274, Cambridge University Press 2000.
- [11] Tan Lei, Matings of quadratic polynomials, *Ergod. Th. Dyn. Sys.* 12, 589-620 (1992).
- [12] W. Jung, The Thurston Algorithm for quadratic matings, Dedicated to the memory of Tan Lei, arXiv:1706.04177(2017).