ユークリッド n 単体と対応するグラム行列の性質

筆者：加藤　明彦

2019 年 4 月 4 日

目次

1 序文 3

2 ユークリッド n 単体とグラム行列の性質 5

2.1 基本事項 5

2.2 ユークリッド n 単体と対応する行列 13

2.3 行列からユークリッド n 単体を構成する 22

3 行列が様々な n 単体のグラム行列となる必要十分条件 29

3.1 行列がユークリッド n 単体のグラム行列となる必要十分条件 29

3.2 行列が球面的 n 単体のグラム行列となる必要十分条件 35

3.3 行列が双曲的 n 単体のグラム行列となる必要十分条件 37

4 あとがき 41

1　序文

初めに，私がユークリッド n 単体の研究を行うに至った経緯を述べる．修士課程 1 年次，糸健太郎准教授の少人数クラスで輪読した B.Iversen [1] に，ユークリッド n 単体の研究が載っていた．そこでは，ユークリッド空間の単体を考えるために，次元を 1 つ上げて正定値でない内積を入れた空間で研究をしていた．何故そのように研究をしたのか疑問を持ったことがきっかけである．正定値でない内積の入った空間を考えることの利点や，得られる結果がユークリッド空間とどう関係しているか解明したいと思い研究を始めた．

では，本修士論文の説明に移る．本修士論文は，2017 年度，2018 年度の糸健太郎准教授の少人数クラスにおける学習をまとめたものと一部オリジナルな結果をまとめたサーベイ論文である．本修士論文の目的は，ユークリッド n 単体とそれに対応するグラム行列の性質を調べることである．ユークリッド n 単体とは，n 次元ユークリッド空間内の $n+1$ 点を頂点とする有界領域で，1 つのアファイン超平面に含まれていないもののことをいう．ユークリッド n 単体を 1 つ定めると，それに対応してグラム行列と呼ばれる行列が定義されるが，これにより，ユークリッド n 単体の性質という図形的な問題を，グラム行列の性質という行列の問題として置き換えることができるようになる．例えば命題 2.38 は，相似なユークリッド n 単体のグラム行列は等しいということを示しているが，これは，相似な 3 角形の対応する角度がそれぞれ等しいということの一般化とみることができる．行列が，内角に鈍角を含まないユークリッド n 単体のグラム行列となる必要十分条件は [1] から学ぶことができたが，一方，行列が，内角に鈍角を含むユークリッド n 単体のグラム行列となる十分条件は分からなかった．そこで私は，行列がユークリッド n 単体のグラム行列となる必要十分条件を考察し，結果としては，$n=2$ の時における必要十分条件となる行列の成分の関係式を見つけることができた．また，参考文献 [2] をもとに別のアプローチによるユークリッド n 単体とそれに対応するグラム行列の必要十分条件を学習し，ユークリッド n 単体と関連している球面的 n 単体や双曲的 n 単体とそのグラム行列の性質についてもまとめた．

本修士論文の構成を述べておく．2 章で参考文献 [1] を中心に学んだことをまとめた．2.1 節で双曲幾何を学ぶ上で最低限必要となる定義などを簡単に説明し，本修士論文に必要な写像や変換，集合の説明を行う．2.2 節でユークリッド n 単体の定義をし，それに対応するグラム行列と呼ばれる行列の定義や性質を述べ，行列がユークリッド n 単体を構成できる十分条件を見ていく．2.3 節でユークリッド n 単体と対応する行列の必要条件を調べた結果をまとめる．この節の内容は自分で考えたものであるが，特に，命題 2.45 がオ

リジナルの結果である．3 章で参考文献 [2] を中心に学んだことをまとめた．3.1 節でユークリッド n 単体の異なる定義とそのグラム行列の異なる定義や性質などをまとめ，ユークリッド n 単体とそれに対応するグラム行列の必要十分条件を 2 章と異なる方法で見ていく．3.2 節，および，3.3 節でユークリッド n 単体と関係の深い球面的 n 単体，双曲的 n 単体についてまとめる．4 章ではあとがきとして，参考文献 [1]，[2] を比較したことをまとめた．

本修士論文を執筆するにあたり，学部生の時からお世話になりました，糸健太郎先生に深く感謝申し上げます．私が研究で行き詰っている時に，別の視点からの考察をご教授していただいたり，参考資料を紹介していただいたりと，本修士論文を執筆できたのは糸先生のおかげです．本当にありがとうございました．また，予備審査を行ってくださった先生方に深く感謝申し上げます．この修士論文をより良くできたのは，予備審査で多くのアドバイスを頂けたためです．本当にありがとうございました．さらに，少人数セミナーで 2 年間ともに研究をしてきた，同じ修士課程の杉山周平氏に深く感謝いたします．最後に，私の成長を手助けしてくださった，同じ数理科学研究科の皆様，特に，修士課程 1, 2 年の時に同じ院生室となった皆様に感謝いたします．

2　ユークリッド n 単体とグラム行列の性質

この章においては，参考文献 [1] で学んだことを中心に，2.1 節では双曲幾何の基本事項と本修士論文に必要な準備を簡単に行い，2.2 節ではユークリッド n 単体と呼ばれる図形の定義やそれに対応するグラム行列の定義，特に行列がユークリッド n 単体のグラム行列となる十分条件を紹介し，2.3 節では行列がユークリッド n 単体のグラム行列となる必要十分条件を調べた結果をまとめた.

2.1　基本事項

この節では，双曲幾何を学ぶ上で最低限必要となる定義などを簡単に説明し，本修士論文に必要な写像や変換，集合の説明を行う.

定義 2.1. F を実ベクトル空間とする．この時，次の (1), (2) を満たす $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F \to \mathbb{R}$ を F 上の**内積**という.

(1) $x, y \in F$ に関して $\langle x, y \rangle$ は双線形.
(2) 任意の $x, y \in F$ に対し $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Remark 2.2. 一般的な内積の定義では，正定値性を仮定するが，本修士論文では仮定しない.

定義 2.3. F を実ベクトル空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を F 上の双線形形式とした時，$(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を**内積空間**という.

定義 2.4. $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする．次を満たす F の線形変換 η を F の**直交変換**という：

$$\langle \eta(x), \eta(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad ({}^{\forall} x, y \in F).$$

また直交変換全体がなす群を $O(F)$ と表す.

定義 2.5. $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする．$\langle x, x \rangle = 0$ を満たす $x \in F$ を**光的 (isotropic)** と呼ぶ.

命題 2.6 ([1] Proposition 3.1)**.** $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を n 次元内積空間とする．この時，F には次

を満たす基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が存在する：

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ -1, 0, 1 & (i = j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

この基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を F の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する**正規直交基底**という．

証明．次元 n に関する帰納法により証明する．

$n = 1$ の時，任意の $x \in F$ に対し $\langle x, x \rangle = 0$ ならば F の正規直交基底として $\{x\}$ が取れる．ある $x \in F$ に対し $\langle x, x \rangle \neq 0$ ならば，$\langle x, x \rangle = \epsilon a^2$ $(\epsilon \in \{-1, 1\}, a > 0)$ とでき，F の正規直交基底として $\{\frac{1}{a}x\}$ が取れる．よって，$n = 1$ の時は成り立つ．

$n = k$ で成り立つと仮定し $n = k + 1$ の時に成り立つことを示す．任意の $x \in F$ に対し $\langle x, x \rangle = 0$ とすると，F の基底 $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= \frac{1}{2}\{\langle x_i + x_j, x_i + x_j \rangle - \langle x_i, x_i \rangle - \langle x_j, x_j \rangle\} \\ &= 0 \quad (i, j = 1, \dots, k + 1) \end{aligned}$$

であるので，F の基底 $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ は正規直交基底である．

ある $x \in F$ に対し $\langle x, x \rangle \neq 0$ ならば，$\langle x, x \rangle = \epsilon a^2$ $(\epsilon \in \{-1, 1\}, a > 0)$ とできる．この時，$x_{k+1} := \frac{1}{a}x$ とおくと，$\dim\{(\mathbb{R}x_{k+1})^{\perp}\} = k$ なので帰納法の仮定から，$(\mathbb{R}x_{k+1})^{\perp}$ は正規直交基底 $\{x_1, \dots, x_k\}$ を持つ．ここで，$\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ が F の正規直交基底であることを示す．$F = \mathbb{R}x_{k+1} \oplus (\mathbb{R}x_{k+1})^{\perp}$ なので $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ は F の基底である．また，x_{k+1} の定義と $\{x_1, \dots, x_k\}$ が $(\mathbb{R}x_{k+1})^{\perp}$ の正規直交基底であることから，

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, k + 1), \\ \langle x_i, x_i \rangle &= -1, 0, 1 \quad (i = 1, \dots, k), \\ \langle x_{k+1}, x_{k+1} \rangle &= \epsilon. \end{aligned}$$

したがって $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ は F の正規直交基底である．

以上から，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，n 次元内積空間 $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は正規直交基底を持つ． □

定義 2.7. $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする．任意の $x \in F$ に対し $\langle x, x \rangle \geq 0$ が成り立つ時，$(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は**正値**であるという．さらに，任意の $x \neq 0$ に対し $\langle x, x \rangle > 0$ が成り立つ時，$(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は**正定値**であるという．

Remark 2.8. 正定値ならば正値であるが，逆は正値が光的の存在を認めているため一般的には成り立たない．

命題 2.9 ([1] Cauchi-Schwarz ineqality 5.1)**.** $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を正値内積空間とする．この時，任意の $x, y \in F$ に対し，$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ が成り立つ．

証明. $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ であることと，$\det\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} \geq 0$ であることは同値であるので，$\det\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} \geq 0$ であることを示す．

x, y が 1 次従属であるとすると，$x = ay$ なる $a \in \mathbb{R}$ がとれる．この時，

$$\det\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a^2\langle y,y\rangle & a\langle y,y\rangle \\ a\langle y,y\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} = 0.$$

x, y が 1 次独立であるとすると，$\mathrm{Span}\{x, y\}$ の正規直交基底 $\{p, q\}$ がとれる．また，$\begin{cases} p = ax + by \\ q = cx + dy \end{cases}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ と表した時，$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\det A \neq 0$ をみたす．この時，

$$\begin{pmatrix}\langle p,p\rangle & \langle p,q\rangle \\ \langle q,p\rangle & \langle q,q\rangle\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix}A^{\mathrm{T}}$$

であることから，

$$\mathrm{sign}\ \det\begin{pmatrix}\langle p,p\rangle & \langle p,q\rangle \\ \langle q,p\rangle & \langle q,q\rangle\end{pmatrix} = \mathrm{sign}\ \det\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix}$$

であり，また，$(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ が正値，$\{p, q\}$ が正規直交基底であることから，

$$\det\begin{pmatrix}\langle p,p\rangle & \langle p,q\rangle \\ \langle q,p\rangle & \langle q,q\rangle\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\langle p,p\rangle & 0 \\ 0 & \langle q,q\rangle\end{pmatrix} = \langle p,p\rangle\langle q,q\rangle \geq 0$$

である．したがって，$\det\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} \geq 0$ が示された． □

定義 2.10. $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を正値内積空間とする．F の**直交補空間** $F^\perp$ を次で定める：

$$F^\perp := \{x \in F \mid \langle x, y\rangle = 0\ ({}^\forall y \in F)\}.$$

系 2.11 ([1] Corollary 5.2)**.** $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を正値内積空間とする．この時，$x \in F$ に対し，x が光的であることの必要十分条件は，$x \in F^\perp$ である．

証明. $x \in F$ が光的であるとすると，任意の $y \in F$ に対し命題 2.9 より，

$$0 \leq \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0$$

であるので，$\langle x,y\rangle=0$．ゆえに，任意の $y\in F$ に対し $\langle x,y\rangle=0$ を満たすので，$x\in F^{\perp}$ である．逆に，$x\in F^{\perp}$ とすると，$F^{\perp}\subset F$ より $x\in F$ であるので $\langle x,x\rangle=0$．よって，x は光的である． □

定義 2.12. $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を正値内積空間とする．$\dim F^{\perp}=1$ である時，$(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を**放物的 (parabolic)** 内積空間という．

放物的内積空間 $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対し，$x\in F$ を光的とすると，$\dim F^{\perp}=1$ であることから，$F^{\perp}=\mathbb{R}x$ である．また，任意の $\psi\in O(F)$ に対し，$\langle\psi(x),\psi(x)\rangle=\langle x,x\rangle=0$ であることから，$\psi(x)\in F^{\perp}$ である．ゆえに，$\psi(x)=ax$ を満たす $a\in\mathbb{R}$ が一意に存在する．ここで，$a\neq 0$ である．実際 $a=0$ とすると，$\psi(F^{\perp})=\{0\}$ となるので不適．

定義 2.13. 上記の記号を用いて，$\mu:O(F)\to\mathbb{R}^{\times}$ を $\mu(\psi):=a$ とすることにより定める．

Remark 2.14. 簡単な計算から，$\mu(\psi\psi')=\mu(\psi)\mu(\psi')$，即ち，$\mu$ が準同型であることが分かる．また，$O(F)$ は $\mu(\psi)>0$ と $\mu(\psi)<0$ の部分に分解できるので，

$$O_{\infty}(F):=\{\psi\in O(F)\mid \mu(\psi)>0\}$$

と定める．

以降，$n+1$ 次元放物的内積空間 $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対し，$\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ を $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の正規直交基底とする．ただし，

$$\begin{aligned}\langle e_i,e_i\rangle &=1 \quad (i=1,\ldots,n),\\ \langle e_{n+1},e_{n+1}\rangle &=0,\\ \langle e_i,e_j\rangle &=0 \quad (i\neq j)\end{aligned}$$

とする．また，$E:=\mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ とすると，これは F のユークリッドな部分空間である．さらに，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ とは異なる双線形形式

$$\cdot:F\times F\to\mathbb{R}$$

を $e_i\cdot e_j:=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,n+1)$ で定める．即ち，$\cdot:F\times F\to\mathbb{R}$ は F の基底 $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ に関するユークリッド内積を定めている．

Remark 2.15. $u,v\in E$ に対し，$\langle u,v\rangle=u\cdot v$ である．

定義 2.16. $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とする．F 上の **evaluation map** $\mathrm{ev}: F \times E \to \mathbb{R}$ を次で定める．$x = x_E + ae_{n+1}$ $(x_E \in E, a \in \mathbb{R}), u \in E$ に対し

$$\mathrm{ev}(x,u) := \langle x_E, u\rangle + a \,(= x \cdot (u + e_{n+1}))\,.$$

補題 2.17 (ev の性質)**.** $x, y \in F, u, v \in E, a, b \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ev}(ax+by,u) = a\ \mathrm{ev}(x,u) + b\ \mathrm{ev}(y,u),\\
&\mathrm{ev}(x,au+bv) = a\ \mathrm{ev}(x,u) + b\ \mathrm{ev}(x,v) + (1-a-b)\mathrm{ev}(x,0).
\end{aligned}$$

証明． $x, y \in F, u, v \in E, a, b \in \mathbb{R}$ とする．この時，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(ax+by,u) &= (ax+by)\cdot(u+e_{n+1})\\
&= a\{x\cdot(u+e_{n+1})\} + b\{y\cdot(u+e_{n+1})\}\\
&= a\ \mathrm{ev}(x,u) + b\ \mathrm{ev}(y,u)
\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(x,au+by) &= x\cdot(au+bv+e_{n+1})\\
&= x\cdot e_{n+1} + a(x\cdot u) + b(x\cdot v)\\
&= \mathrm{ev}(x,0) + a(x\cdot u + e_{n+1} - e_{n+1}) + b(x\cdot v + e_{n+1} - e_{n+1})\\
&= \mathrm{ev}(x,0) + a\{\mathrm{ev}(x,u) - \mathrm{ev}(x,0)\} + b\{\mathrm{ev}(x,v) - \mathrm{ev}(x,0)\}\\
&= a\ \mathrm{ev}(x,u) + b\ \mathrm{ev}(x,v) + (1-a-b)\mathrm{ev}(x,0)
\end{aligned}$$

である． □

定義 2.18. $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とする．E 内のアファイン超平面 H と H によって分けられる E の半開空間の片方を P とした時，(H, P) を**向き付きアファイン超平面** という．

定義 2.19. $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とする．任意の $x \in F \setminus F^{\perp}$ は，

$$H_x := \{u \in E \mid \mathrm{ev}(x,u) = 0\}, \quad P_x := \{u \in E \mid \mathrm{ev}(x,u) > 0\}$$

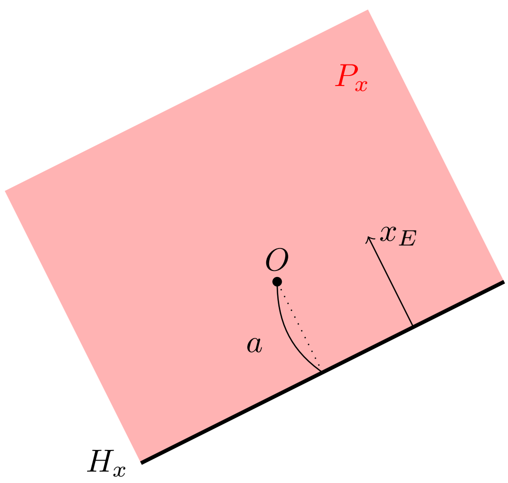
により，向き付きアファイン超平面 (H_x, P_x) を定めることができる．特に，$\langle x, x\rangle = 1$ の時，x を (H_x, P_x) の **normal vector** という．

Remark 2.20. $\lambda > 0$ に対し $\begin{cases}\mathrm{ev}(\lambda x,u) = 0\\ \mathrm{ev}(\lambda x,u) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{ev}(x,u) = 0\\ \mathrm{ev}(x,u) > 0\end{cases}$ であるので，$(H_{\lambda x}, P_{\lambda x}) = (H_x, P_x)$ である．よって，特に $\langle x, x\rangle = 1$ を仮定してもよい．即ち，$\{(H,P) : \text{向き付きアファイン超平面}\} \leftrightarrow \{x \in F \mid \langle x,x\rangle = 1\}$ は 1 対 1 に対応する．

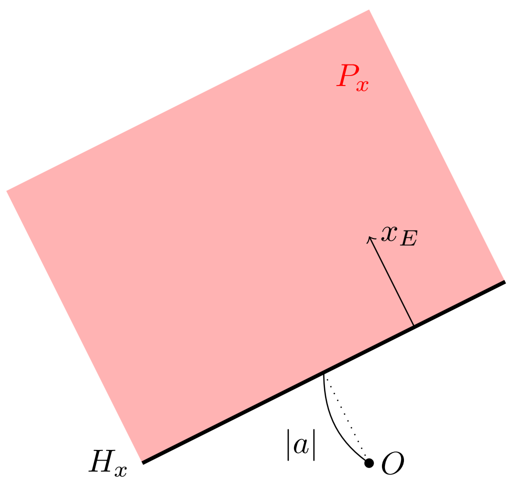
Remark 2.21. (H_x, P_x) の normal vector $x = x_E + ae_{n+1}$ ($x_E \in E, a \in \mathbb{R}$) と $u \in E$ に関し，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ev}(x, u) = 0 &\Leftrightarrow \langle x_E, u\rangle + a = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle x_E, u + ax_E\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow u + ax_E \in x_E^{\perp} := \{y \in E \mid \langle x, y\rangle = 0\} \\
&\Leftrightarrow u \in -ax_E + x_E^{\perp}
\end{aligned}
$$

であるので，x_E は H_x の P_x 向きの単位法ベクトル，a は原点と H_x の向き込みの距離を表している．(下図は $n = 2$ の時の例)



$a > 0$



$a < 0$

定義 2.22. V を内積空間とする．写像 $\sigma : V \to V$ が $\lambda > 0, \psi \in O(V), v \in V$ を用いて次の形で表される時，σ を V 上の**相似変換 (similarity)** という：

$$\Psi(u) = \lambda\psi(u) + v \quad (u \in V)$$

また，V 上の相似変換全体を $\mathrm{Siml}(V)$ と表す．

Remark 2.23. 特に，ユークリッド空間 E の相似変換は，拡大縮小 $u \mapsto \lambda u$ ($\lambda > 0$)，回転と鏡映 $u \mapsto \psi(u)$ ($\psi \in O(E)$)，平行移動 $u \mapsto u + v$ ($v \in E$) の合成で表される．

E 内の向き付きアファイン超平面を E の相似変換により変換した時の normal vector の変化を調べる．

(H_x, P_x) を向き付きアファイン超平面，$x = u + ae_{n+1}$ をその normal vector，$\sigma \in \mathrm{Siml}(E)$ とする．

$\sigma(u) = \lambda u$ ($\lambda > 0$) の時，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ は (H_x, P_x) を原点中心の拡大または縮小の λ 倍したものと考えられるので，単位法ベクトルは変わらず，原点からの距離が λ 倍される．ゆえに，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ の normal vector は $u + \lambda ae_{n+1}$ となる．

$\sigma(u) = \phi(u)$ ($\phi \in O(E)$) の時，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ は (H_x, P_x) を ϕ で変換したものと考えられるので，単位法ベクトルが $\phi(u)$ となり，原点からの距離は変わらない．ゆえに，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ の normal vector は $\phi(u) + ae_{n+1}$ となる．

$\sigma(u) = u + v$ ($v \in E$) の時，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ は (H_x, P_x) を v 平行移動したものと考えられるので，単位法ベクトルは変わらず，原点方向に $\langle u, v\rangle$ だけ移動する．ゆえに，$(\sigma(H_x), \sigma(P_x))$ の normal vector は $u + (a - \langle u, v\rangle)e_{n+1}$ となる．

したがって，任意の E 上の相似変換

$$\sigma(u) = \lambda\phi(u) + v \quad (u \in E)$$

に対し，F 上の変換 $\tilde{\sigma}$ を

$$\tilde{\sigma}(u + ae_{n+1}) := \phi(u) + (\lambda a - \langle\phi(u), v\rangle)e_{n+1} \quad (u \in E, a \in \mathbb{R})$$

と定める．この時，$\tilde{\sigma} \in O_\infty(F)$ である．実際，任意の $x = x_E + ae_{n+1}, y = y_E + be_{n+1} \in F$ に対し，$\langle\tilde{\sigma}(x), \tilde{\sigma}(y)\rangle = \phi(x_E) \cdot \phi(y_E) = x_E \cdot y_E = \langle x, y\rangle$ であり，$\tilde{\sigma}(e_{n+1}) = \phi(0) + (\lambda - \langle\phi(0), v\rangle)e_{n+1} = \lambda e_{n+1}$ より，$\mu(\tilde{\sigma}) = \lambda > 0$ である．また，

$$(H_{\tilde{\sigma}(x)}, P_{\tilde{\sigma}(x)}) = (\sigma(H_x), \sigma(P_x)) \tag{2.1}$$

が自然に成り立つ．式 (2.1) が成り立つことを，より一般的に表したのが次の命題である．

命題 2.24 ([1] Proposition 5.8)**.** $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とする．この時，任意の $\sigma \in \mathrm{Siml}(E)$ に対し，次を満たす $\tilde{\sigma} \in O_\infty(F)$ が唯一存在する：

$$\mathrm{ev}(\tilde{\sigma}(x), \sigma(u)) = \mu(\tilde{\sigma})\mathrm{ev}(x, u) \quad (x \in F, u \in E) \tag{2.2}$$

さらに，写像 $\mathrm{Siml}(E) \to O_\infty(F), \sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ は群同型である．

Remark 2.25. 実際，式 (2.2) を満たすならば，

$$\begin{aligned} u \in H_{\tilde{\sigma}(x)} &\Leftrightarrow \mathrm{ev}(\tilde{\sigma}(x), u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{ev}(x, \sigma^{-1}(u)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(u) \in H_x \\ &\Leftrightarrow u \in \sigma(H_x) \end{aligned}$$

が成り立つので，$H_{\tilde{\sigma}(x)} = \sigma(H_x)$ が分かる．同様にして $P_{\tilde{\sigma}(x)} = \sigma(P_x)$ も分かる．

証明．まず，任意の $x \in F, u \in E$ に対し，$\mathrm{ev}(\tilde{\sigma}(x), \sigma(u)) = \mu(\tilde{\sigma})\mathrm{ev}(x, u)$ が成り立つことを示す．$\sigma \in \mathrm{Siml}(E)$ を $\sigma(u) = \lambda\phi(u) + v$ とおき，$x = x_E + ae_{n+1}$ とおく．この時，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(\tilde{\sigma}(x), \sigma(u)) &= (\phi(x_E) + (\lambda a - \langle\phi(x_E), v\rangle)e_{n+1}) \cdot (\lambda\phi(u) + v + e_{n+1}) \\
&= \lambda\phi(x_E) \cdot \phi(u) + \phi(x_E) \cdot v + \lambda a - \langle\phi(x_E), v\rangle \\
&= \mu(\tilde{\sigma})(x_E \cdot u + a) \\
&= \mu(\tilde{\sigma})(x_E + ae_{n+1}) \cdot (u + e_{n+1}) \\
&= \mu(\tilde{\sigma})\mathrm{ev}(x, u)
\end{aligned}$$

であるので示された．

次に，$\mathrm{Siml}(E) \to O_\infty(F), \sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ が群同型であることを示す．単射性は $\tilde{\sigma}$ の構成の仕方から明らかなので，準同型と全射性を示す．

準同型であることを示す．任意の $\sigma(u) = \lambda\phi(u) + v, \tau(u) = \lambda'\phi'(u) + v' \in \mathrm{Siml}(E)$ に対し，

$$\begin{aligned}
(\tau \circ \sigma)(u) &= \lambda'\phi'(\lambda\phi(u) + v) + v' \\
&= \lambda'\lambda(\phi' \circ \phi)(u) + \lambda'\phi'(v) + v'
\end{aligned}$$

である．この時，$x = x_E + ae_{n+1}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\tau \circ \sigma)}(x) &= \phi' \circ \phi(x_E) + (\lambda'\lambda a - \langle\phi' \circ \phi(x_E), \lambda'\phi'(v) + v'\rangle)e_{n+1} \\
&= \phi' \circ \phi(x_E) + (\lambda'\lambda a - \lambda'\langle\phi' \circ \phi(x_E), \phi'(v)\rangle - \langle\phi' \circ \phi(x_E), v'\rangle)e_{n+1} \\
&= \phi' \circ \phi(x_E) + (\lambda'\lambda a - \lambda'\langle\phi(x_E), v\rangle - \langle\phi' \circ \phi(x_E), v'\rangle)e_{n+1}
\end{aligned}$$

である．一方，

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}(x) &= \tilde{\tau}(\phi(x_E) + (\lambda a - \langle\phi(x_E), v\rangle)e_{n+1}) \\
&= \phi' \circ \phi(x_E) + \{\lambda'(\lambda a - \langle\phi(x_E), v\rangle) - \langle\phi' \circ \phi(x_E), v'\rangle\}e_{n+1} \\
&= \phi' \circ \phi(x_E) + (\lambda'\lambda a - \lambda'\langle\phi(x_E), v\rangle - \langle\phi' \circ \phi(x_E), v'\rangle)e_{n+1}
\end{aligned}$$

である．したがって，$\widetilde{(\tau \circ \sigma)} = \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}$ であるので，準同型が示された．

全射性を示す．任意の $\eta \in O_\infty(F)$ の $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ に関する表現行列を考える．$\eta(e_{n+1}) = \mu(\eta)e_{n+1}$ であるので，η の $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ に関する表現行列は，

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & \vdots \\ & & 0 \\ v_1 & \cdots\ v_n & \mu(\eta) \end{pmatrix} \quad (A \in M(n, \mathbb{R}), v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}, \mu(\eta) > 0)$$

と表される．ここで，$\eta \in O_\infty(F)$ であることから，$A \in O(n)$ が分かる．また，$\sigma'(u) = \lambda'\phi'(u) + v' \in \mathrm{Siml}(E)$ に対し，$\tilde{\sigma'} \in O_\infty(F)$ の $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ に関する表現行列は，$\begin{pmatrix} & 0 \\ A' & \vdots \\ & 0 \\ -(v'_1, \ldots, v'_n)A' & \lambda' \end{pmatrix}$ である．ただし，$A' \in M(n, \mathbb{R})$ は ϕ' の $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関する表現行列，$v'_1, \ldots, v'_n$ は $v' = \sum_{i=1}^{n} v'_i e_i$ とした時の成分である．この時，2 つの表現行列を比較して，$\phi \in O(E)$ を A から定まる E 上の直交変換，$\lambda = \mu(\tilde{\sigma}) > 0$，$v = \sum_{j=1}^{n} \left(-\sum_{i=1}^{n} v_i a_{ji} \right) e_j \in E$ とし，$\tau(u) := \lambda\phi(u) + v$ とおくと，$\tilde{\tau}$ の $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ に関する表現行列は，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ -\left(-\sum_{i=1}^{n} v_i a_{1i} \cdots -\sum_{i=1}^{n} v_i a_{ni} \right) A & \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ (v_1, \ldots, v_n)A^{\mathrm{T}}A & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ v_1, \ldots, v_n & \lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，$\eta = \tilde{\tau}$ である．したがって，全射性が示された．

以上から，$\mathrm{Siml}(E) \to O_\infty(F)$ が群同型であることが示された． □

2.2 ユークリッド n 単体と対応する行列

この節では，ユークリッド n 単体の定義や同値な条件，ユークリッド n 単体に対応するグラム行列と呼ばれる行列の定義や性質を調べ，その後，どのような行列ならばユークリッド n 単体を構成できるかを成分に注目して見ていく．

以降，この節では断りがない限り $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とする．

まず，ユークリッド n 単体の定義から始める．

定義 2.26. $E \cong \mathbb{R}^n$ に対し $v_1, \ldots, v_k$ を E 内の異なる k 点とする．この時，$v_1, \ldots, v_k$

を頂点とする集合 $[v_1, \ldots, v_k]$ を

$$[v_1, \ldots, v_k] := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq a_1, \ldots, a_k \leq 1, \\ a_1 + \cdots + a_k = 1 \end{array} \right\}$$

で定める．

定義 2.27. $D = [v_1, \ldots, v_{n+1}]$ が 1 つのアファイン超平面に含まれていない時，D を **ユークリッド n 単体** という．

1 つのアファイン超平面に含まれていないということを，分かりやすい形で表したのが次の命題である．

命題 2.28. $D = [v_1, \ldots, v_{n+1}]$ とする．この時，D がユークリッド n 単体であることの必要十分条件は，$l_i := v_i - v_{n+1}$ とした時の $\{l_1, \ldots, l_n\}$ が E の基底となることである．

証明. D をユークリッド n 単体とする．背理法により $\{l_1, \ldots, l_n\}$ が E の基底であることを示す．$\{l_1, \ldots, l_n\}$ が E の基底でないとすると，$\dim E = n$ より，$\{l_1, \ldots, l_n\}$ は 1 次従属．ゆえに $\dim\{\mathrm{Span}\{l_1, \ldots, l_n\}\} \leq n-1$ である．$X := \{v_{n+1} + l \mid l \in \mathrm{Span}\{l_1, \ldots, l_n\}\}$ とおくと，$\dim X = \dim\{\mathrm{Span}\{l_1, \ldots, l_n\}\} \leq n-1$ より $X \subset Y$ となるアファイン超平面 Y がとれる．この時，$D \subset X$ であることから $D \subset Y$ となるので矛盾．したがって，$\{l_1, \ldots, l_n\}$ は E の基底である．

逆に，$\{l_1, \ldots, l_n\}$ を E の基底とする．背理法により D がユークリッド n 単体であることを示す．D がユークリッド n 単体でないとすると，$D \subset Y$ なるアファイン超平面 Y が取れる．この時，D を線形に拡張した空間 $X := \{v_{n+1} + l \mid l \in \mathrm{Span}\{l_1, \ldots, l_n\}\}$ は Y に含まれる．ここで次元について考えると，

$$n = \dim\{\mathrm{Span}\{l_1, \ldots, l_n\}\} = \dim X \leq \dim Y = n-1$$

となり矛盾．したがって，D はユークリッド n 単体である． □

序文でも述べたが，ユークリッド n 単体をグラム行列という考察しやすい形にする．$D = [v_1, \ldots, v_{n+1}]$ をユークリッド n 単体とする．$i = 1, \ldots, n+1$ に対し

$H_i :=$ (v_i を除く n 点を含む E 内のアファイン超平面) ,
$P_i :=$ (H_i で分割される E の半開空間で v_i を含む空間)

と定めると，(H_i, P_i) は向き付きアファイン超平面である．各 i に対し，$m_i \in F$ を

(H_i, P_i) の normal vector と定めると，$\mathrm{ev}(m_i, v_j) \begin{cases} = 0 \ (i \neq j) \\ > 0 \ (i = j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n+1)$ が成り立つ．これは，$j \neq i$ に対し $v_j \in H_i$ であり $v_i \in P_i$ であることから容易に分かる．

補題 2.29. 上で定めた $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ は F の基底となる．さらに，$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$ と表した時，$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ である．

証明. $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ が F の基底になることを示す．$\sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i = 0 \ (a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R})$ とする．両辺に $v_j \ (j = 1, \ldots, n+1)$ との ev を考えると，$\mathrm{ev}(m_i, v_j) \begin{cases} = 0 & (i \neq j) \\ > 0 & (i = j) \end{cases}$ であることから，

$$0 = \mathrm{ev}(0, v_j) = \mathrm{ev}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i, v_j\right) = a_j \mathrm{ev}(m_j, v_j)$$

となる．ゆえに $a_j = 0 \ (j = 1, \ldots, n+1)$ となるので，$\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ は F の基底である．

次に，$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$ と表した時，$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ であることを示す．両辺に $v_j \ (j = 1, \ldots, n+1)$ との ev を考えると，

$$1 = \mathrm{ev}(e_{n+1}, v_j) = \mathrm{ev}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i, v_j\right) = \lambda_j \mathrm{ev}(m_j, v_j)$$

となる．したがって $\lambda_j = \dfrac{1}{\mathrm{ev}(m_j, v_j)} \ (j = 1, \ldots, n+1)$ となるので，$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ である． □

定義 2.30. 上で定めた $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ を D の **normal vector** という．また，

$$A_D := (\langle m_i, m_j \rangle)_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$$

を D の**グラム行列 (Gram matrix)** という．

以上で，ユークリッド n 単体から $(n+1) \times (n+1)$ 行列のグラム行列を定めることができた．

Remark 2.31. H_i と H_j の内角を，$P_i \cap P_j$ が存在する角と定めた時，グラム行列の対角以外の成分 $\langle m_i, m_j \rangle \ (i \neq j)$ は，H_i と H_j の外角の cos である．

ここから少し本題からそれるが，以下のガウス写像と呼ばれる写像を定義し，ユークリッド n 単体とそのグラム行列の幾何的なイメージを考えやすくする．

定義 2.32. D をユークリッド n 単体とする．D の境界 ∂D の点 v に対し，向き付きアファイン超平面 (H, P) が D の v での **support** であるとは，$v \in H, D \subset H \cup P$ を満たすことである．$v \in \partial D$ に対し，S^{n-1} の部分集合 S_v を，

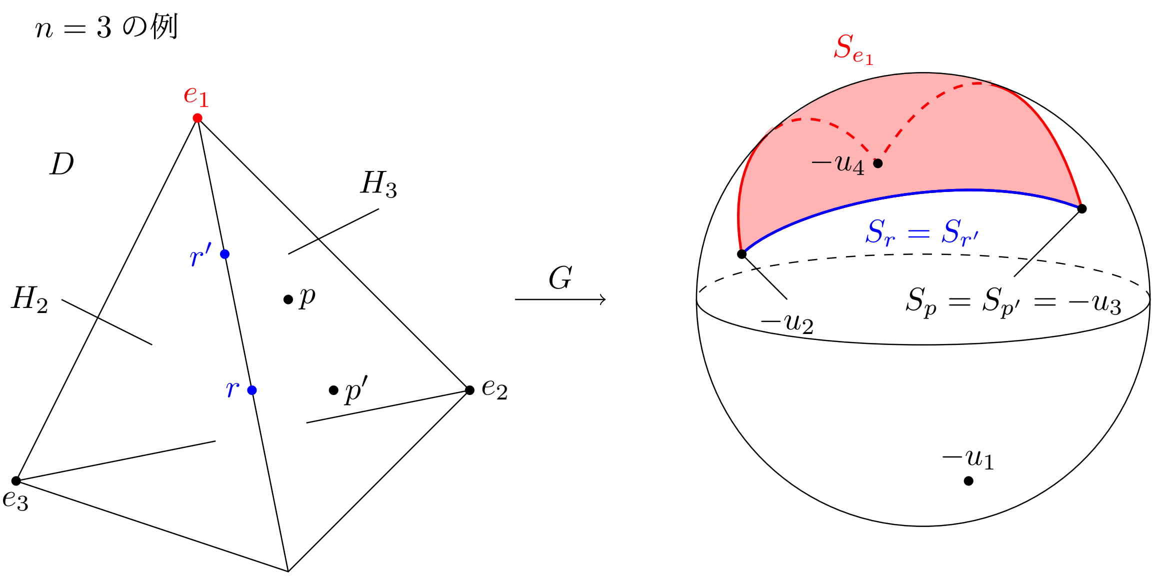
$$S_v := \{-u \in E \mid u + ae_{n+1}\ (^{\exists}a \in \mathbb{R}) \text{ が } v \text{ での support の normal vector}\}$$

で定める．さらに，

$$G(v) := S_v, \quad G(D) := \bigcup_{v \in \partial D} S_v$$

により集合値写像 G を定める．この写像を**ガウス写像** と呼ぶ．

Remark 2.33. 上記の S_v は，v で D に接するアファイン超平面の単位法ベクトル (D の外側向き) を集めたものである．D の normal vector を $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ とすると，support の定義から (H_{m_i}, P_{m_i}) は D の support である．$G(D)$ は，S^{n-1} 上の異なる $n+1$ 点の内の 2 点を結ぶ S^{n-1} 上の測地線で切れ目を入れたものと見ることができる．さらに，この $n+1$ 点を頂点とする集合もまたユークリッド n 単体となり，特に，補題 2.29 から，この集合は原点を含む．また，S^{n-1} 上の異なる 2 点を結ぶ S^{n-1} 上の測地線の長さは，対応する D の 2 つの面の外角に等しい．



Remark 2.34. 上で定義したガウス写像は，n 次元ユークリッド空間の凸体の像は必ず S^{n-1} となる．しかし，ガウス写像は定義域を双曲空間やド・ジッター空間の凸体に拡張することができ，そこでの凸体の像は元の凸体と 1 体 1 に対応している．ゆえに，双曲空間やド・ジッター空間を考える上では重要な役割を持っている．私はこのことを [3] で学んだが，ここではその紹介にとどめておく．

再び本題に戻る．補題 2.29 の逆を表す次の命題を示す．

命題 2.35 ([1] Proposition 5.10)**.** $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間とし，$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ を F の基底で $\langle x_i, x_i\rangle = 1$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ を満たすものとする．この時，$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ が存在するならば，$x_1, \ldots, x_{n+1}$ を normal vector とするユークリッド n 単体が 1 つ定まる．

証明のために，次の補題を準備する．

補題 2.36. F^* を F の双対空間とし，$\Xi := \{\xi \in F^* \mid \xi(e_{n+1}) = 1\}$ とおく．この時，任意の $\xi \in \Xi$ に対し $\xi(x) = \mathrm{ev}(x, u)$ $({}^\forall x \in F)$ を満たす $u \in E$ が唯一存在する，即ち，

$$
{}^\exists\Phi : \Xi \to E \quad s.t. \quad \xi(x) = \mathrm{ev}(x, \Phi(\xi)) \quad ({}^\forall x \in F).
$$

証明. F^* の基底として，$\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ の双対基底 $\{e_1^*, \ldots, e_{n+1}^*\}$ をとる．即ち，$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$ が成り立つ．この時，

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \{\xi \in F^* \mid \xi(e_{n+1}) = 1\} \\
&= \left\{ \xi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i^* \;\middle|\; a_{n+1} = 1 \right\} \\
&= \{\xi = \phi + e_{n+1}^* \mid \phi \in E^*\}
\end{aligned}
$$

となることから，$\Xi \cong E^*$ である．したがって，$\Phi : \Xi \to E$ を，$\xi \in \Xi$ に対し $\Phi(\xi) := \phi^*$ $(\xi = \phi + e_{n+1}^*)$ で定める．ここで，ϕ^* は標準的な写像 $E \to E^*$ による ϕ の像である．

$\xi \in \Xi$ に対し，$\xi(x) = \mathrm{ev}(x, \Phi(\xi))$ $({}^\forall x \in F)$ であることを示す．$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* +$

$e_{n+1}^*, x = \sum_{j=1}^{n+1} b_j e_j$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\xi(x) - \mathrm{ev}(x, \Phi(\xi)) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* + e_{n+1}^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j e_j\right) - \mathrm{ev}\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j e_j, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\right)^*\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + b_{n+1} - \left\langle \sum_{j=1}^{n} b_j e_j, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\rangle - b_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j \langle e_j, e_i\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので，$\xi(x) = \mathrm{ev}(x, \Phi(\xi))$ $({}^\forall x \in F)$ である． □

Remark 2.37. この時，$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi(e_i) e_i$ である．

実際，$\Phi(\xi) \in E$ より $\Phi(\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ とでき，

$$
\xi(e_i) = \mathrm{ev}(e_i, \Phi(\xi)) = e_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + e_{n+1}\right) = a_i
$$

である．

命題 2.35 の証明．$i = 1, \ldots, n+1$ に対し，$\xi_i \in F^*$ を $\xi_i(x_j) = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$ と定める．この時，

$$
\xi_i(e_{n+1}) = \xi\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \xi(x_j) = 1
$$

となるので,$\xi_1, \ldots, \xi_{n+1} \in \Xi$ である．補題 2.36 で定めた Φ を用いた $[\Phi(\xi_1), \ldots, \Phi(\xi_{n+1})]$ がユークリッド n 単体であることを示す．命題 2.28 より $l_i := \Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_{n+1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ とした時の $\{l_1, \ldots, l_n\}$ が E の基底となることを示せばよい．$\dim E = n$ であるので，$\{l_1, \ldots, l_n\}$ が 1 次独立であることを示せば十分．$\sum_{i=1}^{n} a_i l_i = 0$ $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ とする．両辺に x_j $(j = 1, \ldots, n)$ との ev を考えると，$\mathrm{ev}\left(x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right) = \mathrm{ev}(x_j, 0)$ で

ある．この時，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}\left(x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\ \mathrm{ev}(x_j, l_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \mathrm{ev}(x_j, 0) \quad (\text{補題 2.17 から}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{ev}(x_j, \Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_{n+1}))) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \mathrm{ev}(x_j, 0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i\{\mathrm{ev}(x_j, \Phi(\xi_i)) - \mathrm{ev}(x_j, \Phi(\xi_{n+1})) + \mathrm{ev}(x_j, 0)\} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \mathrm{ev}(x_j, 0) \\
&\quad (\text{補題 2.17 から}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i\{\xi_i(x_j) - \xi_{n+1}(x_j)\} + \mathrm{ev}(x_j, 0) \\
&= \frac{a_j}{\lambda_j} + \mathrm{ev}(x_j, 0)
\end{aligned}$$

であるので，$\dfrac{a_j}{\lambda_j} = 0$ である．$\lambda_j > 0$ であるので $a_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ が成り立つ．よって，$\{l_1, \ldots, l_n\}$ は 1 次独立であるので，$[\Phi(\xi_1), \ldots, \Phi(\xi_{n+1})]$ はユークリッド n 単体である． □

以上から，ユークリッド n 単体と次の (1), (2) を満たす F の基底 $x_1, \ldots, x_{n+1}$ が 1 対 1 に対応していることが分かった：

(1) $\langle x_i, x_i \rangle = 1 \quad (i = 1, \ldots, n+1)$.

(2) ${}^{\exists}\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0 \quad s.t. \quad e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$.

次の命題は，同じグラム行列を持つユークリッド n 単体は，図形的な差が相似変換しかない，即ち，任意の 2 つの面の角度や辺の長さの比などの図形を定める本質的な部分が変わらないということを示している．

命題 2.38 ([1] Proposition 5.11)**.** D, D' をユークリッド n 単体とする．この時，D と D' が相似であることの必要十分条件は，D と D' のグラム行列が等しいことである．

証明. D と D' が相似であるとすると，$D' = \sigma(D)$ なる $\sigma \in \mathrm{Siml}(E)$ が取れる．ここで，D の normal vector を $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ とすると，命題 2.24 より D' の normal vector は $\{\tilde{\sigma}(m_1), \ldots, \tilde{\sigma}(m_{n+1})\}$ と表すことができる．この時，

$$\langle \tilde{\sigma}(m_i), \tilde{\sigma}(m_j) \rangle = \langle m_i, m_j \rangle \quad (i, j = 1, \ldots, n+1)$$

なので，D と D' のグラム行列は等しい．

逆に，D と D' のグラム行列が等しいとする．D の normal vector を $\{m_1, \dots, m_{n+1}\}$，D' の normal vector を $\{m'_1, \dots, m'_{n+1}\}$ とすると，グラム行列が等しいことから，$\langle m_i, m_j \rangle = \langle m'_i, m'_j \rangle$ $(i, j = 1, \dots, n+1)$ である．また，補題 2.29 から $\{m_1, \dots, m_{n+1}\}$ と $\{m'_1, \dots, m'_{n+1}\}$ は F の基底なので，$\eta\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i\right) := \sum_{i=1}^{n+1} a_i m'_i$ により η を定めると η は F 上の線形変換となる．さらに，$\langle \eta(m_i), \eta(m_j) \rangle = \langle m'_i, m'_j \rangle = \langle m_i, m_j \rangle$ $(i, j = 1, \dots, n+1)$ となるので，$\eta \in O(F)$ である．ここで，$\eta \in O_\infty(F)$ ならば命題 2.24 より $\eta = \tilde{\sigma}$ なる $\sigma \in \mathrm{Siml}(E)$ が存在するので，$\eta \in O_\infty(F)$ を示す．補題 2.29 より，$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$ なる $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} > 0$ が取れる．両辺 η で変換すると，μ の定義から $\mu(\eta) e_{n+1} = \sum_{n+1}^{n+1} \lambda_i m'_i$ である．さらに両辺 D' の内点 d' との ev を考えると $\mu(\eta) = \mathrm{ev}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m'_i, d'\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathrm{ev}(m'_i, d')$ となる．この時，$\{m'_1, \dots, m'_{n+1}\}$ が D' の normal vextor であり d' が D' の内点であることから，$\mathrm{ev}(m'_i, d') > 0$ $(i = 1, \dots, n+1)$ なので $\mu(\eta) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathrm{ev}(m'_i, d') > 0$ である．したがって，$\eta \in O_\infty(F)$ である．今，D' の normal vector $\{m'_1, \dots, m'_{n+1}\}$ は $\{\eta(m_1), \dots, \eta(m_{n+1})\}$ であり，$\eta = \tilde{\sigma} \in O_\infty(F)$ なので，式 2.1 から $D' = \sigma(D)$ である． □

以下では，行列からユークリッド n 単体を構成することを考える．まず準備として，必要となる行列の条件を定義する．

定義 2.39. 行列 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ が**分解可能** (**decomposable**) であるとは，$L \subsetneq \{1, \dots, n+1\}, L \neq \emptyset$ なる L が存在して，$x_{ij} = 0$ $(i \in L, j \notin L)$ が成り立つことをいう．これは，添え字の置換をすると $\begin{pmatrix} Y & O \\ O & Z \end{pmatrix}$ $(Y, Z$ は正方行列$)$ とできるということである．$X \in M(n+1, \mathbb{R})$ が**分解不可** (**indecomposable**) であるとは，分解可能でないということである．

命題 2.40 ([1] Indecomposable matrices 5.12)**.** $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ が正値，対称，$\det A = 0$，分解不可，$a_{ij} \begin{cases} = 1 & (i = j) \\ \leq 0 & (i \neq j) \end{cases}$ である時，A をグラム行列とするユークリッド n 単体が 1 つ存在する．

Remark 2.41. $X \in M(k, \mathbb{R})$ が $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ $({}^{\forall}x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ を満たすとき，X を正定値という．また，$X \in M(k, \mathbb{R})$ が $x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0$ $({}^{\forall}x \in \mathbb{R}^k)$ を満たすとき，X を正値 (または半正定値) という．X が正定値ならば正値であるが，逆は一般的には成り立たない．

証明．命題 2.35 に帰着させるという方法で証明を行う．

V を $n+1$ 次元の実ベクトル空間，$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ を V の基底，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\langle x_i, x_j \rangle := a_{ij}$ で定まる双線形形式とする．即ち，$y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i, z = \sum_{j=1}^{n+1} b_j x_j \in F$ に対し，$\langle y, z \rangle := (a_1 \cdots a_{n+1})A(b_1 \cdots b_{n+1})^{\mathrm{T}}$ と定める．この時，内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が放物的内積空間であることを示す．A が正値であることから，任意の $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \in V$ に対し，$\langle y, y \rangle = (a_1 \cdots a_{n+1})A(a_1 \cdots a_{n+1})^{\mathrm{T}} \geq 0$ であるので，$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は正値内積空間である．ゆえに，系 2.11 より V 内の光的な部分空間は $V^{\perp}$ である．$\dim V^{\perp} = 1$ であることを示せば，$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は放物的内積空間となる．したがって，$\dim V^{\perp} = 1$ であることを示す．

まず，任意の 0 でない $z \in V^{\perp}$ は系 2.11 より，光的な元である．ここで，$z \in V^{\perp}$ を $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i$ とおくと，$b_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ となることを示す．$i \neq j$ において，$a_{ij} \leq 0$ であることから，$a_{ij}b_ib_j \geq a_{ij}|b_i||b_j|$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned}
0 = \langle z, z \rangle &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}b_ib_j \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}b_ib_j \\
&\geq \sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}|b_i||b_j| \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} |b_i|x_i, \sum_{j=1}^{n+1} |b_j|x_j \right\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

であるので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|x_i$ は光的である．ゆえに $z' := \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|x_i$ とおくと，系 2.11 より $z' \in V^{\perp}$ である．ここで，$L := \{i \mid |b_i| > 0\}$ とおいた時，$L = \{1, \ldots, n+1\}$ となることを背理法で示す．$L \neq \{1, \ldots, n+1\}$ と仮定する．$L = \emptyset$ とすると $z = 0$ となるため不

適．$L \neq \emptyset$ である．$j \notin L$ に対し，$z' \in V^{\perp}$ より $0 = \langle z', x_j \rangle = \sum_{i \in L} |b_i| \langle x_i, x_j \rangle$ である．ここで，$i \in L, j \notin L$ より $i \neq j$ なので $\langle x_i, x_j \rangle = a_{ij} \leq 0$ であり，$i \in L$ より $|b_i| > 0$ であるので，$|b_i| \langle x_i, x_j \rangle \leq 0$ となる．$0 = \sum_{i \in L} |b_i| \langle x_i, x_j \rangle$ であることから，$|b_i| \langle x_i, x_j \rangle = 0$ となる．$|b_i| > 0$ なので $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ $(i \in L, j \notin L)$ となるが，これは A が分解不可であることに矛盾．したがって，$L = \{1, \ldots, n+1\}$ である．これより，各 i に対し $|b_i| > 0$ なので，$b_i \neq 0$ である．したがって，任意の 0 でない $z \in V^{\perp}$ は $z = \sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i$ $(b_i \neq 0)$ と表すことができる．

$\dim V^{\perp} = 1$ を背理法により示す．$\dim V^{\perp} \geq 2$ とすると，1 次独立なベクトル $w = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i, w' = \sum_{i=1}^{n+1} c'_i x_i \in V^{\perp}$ が存在する．この時，$c_1 \neq 0, c'_1 \neq 0$ であり，$\frac{1}{c_1} w - \frac{1}{c'_1} w' = \sum_{i=2}^{n+1} (c_i - c'_i) x_i \in V^{\perp}$ である．これは，x_1 の係数が 0 でないことに矛盾する．したがって，$\dim V^{\perp} = 1$ である．

任意の 0 でない光的な $z = \sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i$ に対し，$z' = \sum_{i=1}^{n+1} |b_i| x_i$ も光的であることと，$\dim V^{\perp} = 1$ であることから，$V^{\perp} = \mathbb{R} z'$ となるので，$z \in \mathbb{R} z'$ となる．ゆえに，$b_1, \ldots, b_{n+1}$ は全て同符号であり，$b_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ である．以上から，命題 2.35 に帰着される． $\square$

Remark 2.42. この時定まるユークリッド n 単体は，$a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ であることから，全ての外角が $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ に含まれる．これは，全ての内角が直角または鋭角であるということを表している．

2.3 行列からユークリッド n 単体を構成する

2.2 節までで，ユークリッド n 単体から正方行列を構成することができた．その逆に，一部の正方行列からは全ての内角が直角または鋭角であるユークリッド n 単体を構成することもできた．2.3 節では，一般の正方行列にどのような仮定をおけば，鈍角を含むユークリッド n 単体を定めることができるのかを調べる．この節の内容は自分で考えたものである．特に結果としては，$n = 2$ という低次元においてだが，必要十分条件を見つけられたので，それもまとめてある．

まず，グラム行列が満たすべき条件を調べる．

命題 2.43. $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $n+1$ 次元放物的内積空間，D をユークリッド n 単体，A_D を D のグラム行列とする．この時，A_D は $\det A_D = 0$，正値，分解不可である．

証明. $\det A_D = 0$ となることを背理法で示す．$\det A_D \neq 0$ とする．D がユークリッド n 単体なので，D の normal vector $\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ は命題 2.29 から，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ が存在して，$e_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$ と表すことができる．この時，$e_{n+1} \in F^\perp$ であることから，各 $j = 1, \ldots, n+1$ に対し，$0 = \langle m_j, e_{n+1}\rangle = \left\langle m_j, \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle m_j, m_i\rangle$ が成り立つ．これを連立すると

$$\begin{pmatrix} \langle m_1, m_1\rangle & \cdots & \langle m_1, m_{n+1}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle m_{n+1}, m_1\rangle & \cdots & \langle m_{n+1}, m_{n+1}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = A_D \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが，$\det A_D \neq 0$ より $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})^{\mathrm{T}} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ となり，これは矛盾．ゆえに $\det A_D = 0$ である．

　次に，A_D が正値であることを示す．任意の $(a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，$x := \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i \in F$ とおいた時，

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_{n+1}) A_D \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= (a_1, \ldots, a_{n+1}) \begin{pmatrix} \langle m_1, m_1\rangle & \cdots & \langle m_1, m_{n+1}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle m_{n+1}, m_1\rangle & \cdots & \langle m_{n+1}, m_{n+1}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \langle m_i, m_1\rangle, \ldots, \sum_{i=1}^{n+1} a_i \langle m_i, m_{n+1}\rangle \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_i a_j \langle m_i, m_j\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i, \sum_{j=1}^{n+1} a_j m_j \right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle
\end{aligned}$$

となる．$(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は放物的内積空間なので $\langle x, x\rangle \geq 0$ が成り立つ．したがって，任意の $(a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，$(a_1, \ldots, a_{n+1}) A_D (a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}} \geq 0$ が成り立つので，A_D は正値である．

最後に A_D が分解不可であることを示す．A_D は $\det A_D = 0$ であるので，固有値 0 の固有ベクトルを持つ．この時，A_D の固有値 0 の固有空間が 1 次元であることを示す．A_D の固有値 0 の固有ベクトルを $(a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}}$ ，$(b_1, \ldots, b_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とし，$x := \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i m_i$ ，$y := \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_i m_i \in F$ とおくと，

$$\langle x, x \rangle = (a_1, \ldots, a_{n+1}) A_D \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

となる．即ち，x は光的である．同様に y も光的である．補題 2.11 より $x, y \in F^{\perp}$ であり，$(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が放物的内積空間であることから $\dim F^{\perp} = 1$ なので，$y = cx$ なる $c \in \mathbb{R}^{\times}$ がとれる．ゆえに，$(b_1, \ldots, b_{n+1})^{\mathrm{T}} = c(a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}}$ となるので，A_D の固有値 0 の固有空間は 1 次元である．A_D が分解不可であることを背理法で示す．A_D が分解可能であるとすると，添え字の置換により，$L = \{1, \ldots, s\}$ $(1 \leq s \leq n)$ とした時の $i \in L, j \notin L$ に対し，A_D の (i, j) 成分が 0 とできる．即ち，

$$A_D = \begin{pmatrix} B_D & O \\ 0 & C_D \end{pmatrix} \quad (B_D \in M(s, \mathbb{R}), C_D \in M(n+1-s, \mathbb{R}))$$

とできる．この時, $\det B_D \neq 0$ または $\det C_D \neq 0$ であることを背理法で示す．$\det B_D = \det C_D = 0$ とすると，B_D, C_D の固有値 0 の固有ベクトルが存在する．B_D の固有値 0 の固有ベクトルを $(\beta_1, \ldots, \beta_s)^{\mathrm{T}}$，$C_D$ の固有値 0 の固有ベクトルを $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1-s})^{\mathrm{T}}$ とおくと，$(\beta_1, \ldots, \beta_s, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$，$(0, \ldots, 0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1-s})^{\mathrm{T}}$ は A_D の固有値 0 の固有ベクトルとなるが，これは A_D の固有値 0 の固有空間の次元が 1 であることに矛盾．したがって，$\det B_D \neq 0$ または $\det C_D \neq 0$ である．$\det B_D \neq 0$ とする．D がユークリッド n 単体なので, 補題 2.29 からある $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ が存在し，$e_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$ とできる．両辺に m_j $(j = 1, \ldots, n+1)$ との $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考えると，$0 = \langle m_j, e_{n+1} \rangle = \left\langle m_j, \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle m_j, m_i \rangle$ となる．これを連立すると，

$$A_D \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_D & O \\ O & C_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，特に

$$B_D \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$\det B_D \neq 0$ であるので，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^{\mathrm{T}} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ となるが，これは $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$ に矛盾．$\det C_D \neq 0$ の時も同様に矛盾が生じるので，A_D は分解不可である． □

$n = 2$ の時，ユークリッド 2 単体は 3 角形のことを表している．ユークリッド空間における 3 角形の外角の和が 2π であることから，グラム行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi)$$

となる．ここで，空間 $Q = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi, \alpha + \beta + \gamma = 2\pi\}$ における $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ の取りうる範囲を考える．ラグランジュの未定乗数法を用いて計算する．$R(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) := \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi)$ とおくと，

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\sin\alpha + \lambda, \qquad \frac{\partial R}{\partial \beta} = -\sin\beta + \lambda,$$
$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = -\sin\gamma + \lambda, \qquad \frac{\partial R}{\partial \lambda} = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi$$

であるので，$\dfrac{\partial R}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial R}{\partial \beta} = \dfrac{\partial R}{\partial \gamma} = \dfrac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$ の解は，

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (0, \pi, \pi, 0), (\pi, 0, \pi, 0), (\pi, \pi, 0, 0), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．Q は閉空間であるので，$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ は，上記の点，もしくは，Q の境界上の点で最大値，最小値を持つ．(α, β, γ) が上記の点，または，Q の境界上の点の時の $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ の値を計算すると，

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) = (0, \pi, \pi), (\pi, 0, \pi), (\pi, \pi, 0) \quad &\Rightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1 \ , \\ (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \quad &\Rightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{3}{2} \ , \\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \partial Q \quad &\Rightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1 \end{aligned}$$

となる．したがって，$(\alpha, \beta, \gamma) \in Q$ に対し，

$$-\frac{3}{2} \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq -1$$

が成り立つ．特に，$(\alpha, \beta, \gamma) \in \partial Q$ に対し，$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$ であるので，$(\alpha, \beta, \gamma) \in Q \setminus \partial Q$ に対し，

$$-\frac{3}{2} \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < -1$$

が成り立つ．

以上をまとめたものが次の補題である．

補題 2.44. ユークリッド 2 単体のグラム行列を $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3} \in M(3, \mathbb{R})$ とおく．この時，A は対称，$a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$，$|a_{ij}| < 1$ $(i \neq j)$，$a_{12} + a_{13} + a_{23} \leq -1$，$\det A = 0$ を満たす．

次の命題は，補題 2.44 の逆を表している．

命題 2.45. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3} \in M(3, \mathbb{R})$ が対称，$a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$，$|a_{ij}| < 1$ $(i \neq j)$，$a_{12} + a_{13} + a_{23} < -1$，$\det A = 0$ であるとき，A をグラム行列とするユークリッド 2 単体が存在する．

証明．命題 2.35 に帰着させるという方法で証明を行う．$A \in M(3, \mathbb{R})$ は $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$，$|a_{ij}| < 1$ $(i \neq j)$，対称であるので，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad (-1 < a, b, c < 1)$$

とおく．

$\mathbb{R}^3$ 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\langle x, y \rangle := x^{\mathrm{T}} A y$ $(x, y \in \mathbb{R}^3)$ で定める．この時，$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が放物的内積空間であることを示す．A が正値であるので，$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は正値内積空間である．したがって，系 2.11 から $x \in \mathbb{R}^3$ が光的であることと，任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対し $\langle x, y \rangle = 0$ であることは同値である．さらに，これは，$Ax = 0$ であることと同値となることを示す．今，$x \in \mathbb{R}^3$ が任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対し $\langle x, y \rangle = 0$ であるとする．$\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積 $\cdot$ を用いると，任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対し，

$$0 = \langle x, y \rangle = x^{\mathrm{T}} A y = (Ax)^{\mathrm{T}} y = (Ax) \cdot y$$

となる．ユークリッド内積は非退化なので $Ax = 0$ である．

逆に $x \in \mathbb{R}^3$ が $Ax = 0$ であるとする．この時，任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対し，

$$\langle x, y \rangle = (Ax)^{\mathrm{T}} y = 0^{\mathrm{T}} y = 0$$

となる．以上から $x \in \mathbb{R}^3$ が，任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対し $\langle x, y \rangle = 0$ であることと，$Ax = 0$ であることは同値である．したがって，$x \in \mathbb{R}^3$ が光的であることと，$Ax = 0$ であることは同値となる．ここで $\det A = 0$ であることから，$Ax = 0$ は自明でない解を持つ．これを計算すると，

$$x = t \begin{pmatrix} ac - b \\ ab - c \\ 1 - a^2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

となるので，$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の光的な部分空間は 1 次元である．したがって，$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は放物的内積空間である．

今，$(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の光的なベクトルは (2.3) の形である．$-1 < a < 1$ であることから $1 - a^2 > 0$ なので， $ac - b, ab - c > 0$ であることを示せば命題 2.35 に帰着できる．したがって，$ac - b, ab - c > 0$ であることを示す．$a + b + c < -1$ より $a + c < -1 - b$ であり，$-1 < b < 1$ であることから，$a + c < -1 - b < 0$ である．二乗することにより $(1 + b)^2 < (a + c)^2$ となる．整理すると

$$0 < a^2 + 2ac + c^2 - 1 - 2b - b^2$$

である．$\det A = 0$ より $1 + 2abc - a^2 - b^2 - c^2 = 0$ となることから

$$\begin{aligned} 0 < a^2 + 2ac + c^2 - 1 - 2b - b^2 &= 1 + 2abc - b^2 + 2ac - 1 - 2b - b^2 \\ &= 2(ac - b)(1 + b) \end{aligned}$$

である．$-1 < b < 1$ より $1 + b > 0$ なので $ac - b > 0$ が分かる．今，b, c は対称なので $ab - c > 0$ であることも分かる．以上から $ac - b, ab - c > 0$ である．

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & x_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1 &= ac - b, & \lambda_2 &= ab - c, & \lambda_3 &= 1 - a^2 \end{aligned}$$

とすれば命題 2.35 に帰着できる． □

Remark 2.46. 今，$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad (-1 < a, b, c < 1)$ が対称であることから，固有値は 3 個全て実数である．また，$\det A = 0$ であるので，固有値の一つは 0 である．こ

の時，

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= (1-\lambda)^3 + 2abc - (a^2+b^2+c^2)(1-\lambda)\\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (a^2+b^2+c^2-3)\lambda\\ &= -\lambda\{\lambda^2 - 3\lambda + 3 - a^2 - b^2 - c^2\}\end{aligned}$$

であるので，$f(\lambda) := \lambda^2 - 3\lambda + 3 - a^2 - b^2 - c^2$ とおくと，方程式 $f(\lambda) = 0$ の解は実数解を 2 個持つ．これは，A の固有値が 3 個全て実数で，そのうち 1 個が 0 であることから従う．さらに，$-1 < a, b, c < 1$ であることから $f(0) = 3 - a^2 - b^2 - c^2 > 0$ であり，$y = f(\lambda)$ の軸が $\lambda = \dfrac{3}{2} > 0$ であるので，方程式 $f(\lambda) = 0$ の解は 2 つとも正であることが分かる．以上から A の固有値は全て 0 以上であるので A は正値である．

また，$-1 < a, b, c < 1$，$a + b + c < -1$ であることから，a, b, c は多くても 1 つしか 0 とならない．しかし，A が分解可能であるためには a, b, c の内少なくとも 2 つは 0 である必要があるので，A は分解不可である．

以上から，命題 2.45 では，正値と分解不可を仮定から除いている．

補題 2.44 と命題 2.45 を合わせて，行列がユークリッド 2 単体のグラム行列となる必要十分条件を得た．

3　行列が様々な n 単体のグラム行列となる必要十分条件

2 章では，参考文献 [1] から，ユークリッド n 単体とそれに対応する行列の必要十分条件について，行列の成分に注目して話を展開してきた．3 章では，2 章で扱ったものと等しいユークリッド n 単体とそれに対応する行列の必要十分条件を 2 章とは異なる方法で見ていく．参考文献 [2] の 6 章，特に 6.8 節からユークリッド n 単体の定義や性質，そのグラム行列の定義や性質をまとめて，関連した事柄として，球面的 n 単体や双曲的 n 単体の定義や性質，そのグラム行列の定義や性質を簡単にだが見ていく．

3.1　行列がユークリッド n 単体のグラム行列となる必要十分条件

この節では，ユークリッド n 単体を別の方法で定義しそのグラム行列の定義を確認し，特に，グラム行列が満たすべき性質を見ていく．この節で定義されるユークリッド n 単体やそれに対応するグラム行列の定義は，2 章と同値な定義である．

まず，ユークリッド n 単体を定義する．この定義は，2 章におけるユークリッド n 単体の定義と同値な定義である．

定義 3.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ が codimension が 1 の面 $D_1, \ldots, D_{n+1}$ を境界に持つ有界領域の時，D を**ユークリッド n 単体 (Euclidean n-simplex)** という．$u_i \in \mathbb{R}^n$ が D_i の単位法ベクトルで D の内側を向いている時，u_i を**内向き単位法ベクトル**という．

以降，簡単のため，

$$
\begin{aligned}
v_i &= (D_i \text{ 上にない } D \text{ の頂点}), \\
H_i &= (D_i \text{ を含むアファイン超平面})
\end{aligned}
$$

とする．

Remark 3.2. ユークリッド n 単体 D を平行移動しても，D の形や内向き単位法ベクトルは変わらないので，D の頂点 v_1 を $\mathbb{R}^n$ の原点だと考えてもよい．この時，v_1 と H_1 の距離を d とすると，ユークリッド n 単体 D は，

$$
D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} u_1 \cdot x \geq -d, & \\ u_i \cdot x \geq 0 & (i = 2, \ldots, n+1) \end{array} \right\} \tag{3.1}
$$

と表すこともできる．

ユークリッド n 単体 D の内向き単位法ベクトルの性質を調べていく．

D の内向き単位法ベクトル $u_1, \ldots, u_{n+1}$ は $n+1$ 個のベクトルなので，方程式

$$a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1} = 0 \tag{3.2}$$

は自明でない解を持つ．$\mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \mathbb{R}^n$ であるので，自明でない解の 1 つを $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ とすると，方程式 (3.2) を満たす係数の解空間は $\{t(c_1, \ldots, c_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ となる．

補題 3.3 ([2] Lemma 6.8.6.)**.** 上の $c_1, \ldots, c_{n+1}$ は全て同じ符号であり，かつ，いずれも 0 でない．

証明. D を (3.1) で定まるように平行移動する．この時，$i = 2, \ldots, n+1$ に対し $v_i = \bigcap_{j \neq i} H_j$ であり，$v_2, \ldots, v_{n+1} \in H_1$ であることから，

$$\begin{aligned} &u_1 \cdot v_i = -d, \\ &u_j \cdot v_i = 0 \quad (j \neq i, j = 2, \ldots, n+1) \end{aligned}$$

である．したがって，

$$0 = 0 \cdot v_i = \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j \right) \cdot v_i = -dc_1 + c_i u_i \cdot v_i \quad (i = 2, \ldots, n+1)$$

である．これより，c_1 または c_i が 0 ならば $(c_1, \ldots, c_{n+1}) = (0, \ldots, 0)$ となるので，$c_1, \ldots, c_{n+1} \neq 0$ である．また，上の式を整理すると，$u_i \cdot v_i > 0, d > 0$ であることから，

$$\frac{c_1}{c_i} = \frac{u_i \cdot v_i}{d} > 0$$

となるので，$c_1, \ldots, c_{n+1}$ は全て同じ符号である． □

以上から，ユークリッド n 単体 D の内向き単位法ベクトルの性質を見つけることができた．

次の補題は，補題 3.3 の逆を表している．

補題 3.4 ([2] Lemma 6.8.7.)**.** $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ は，$\mathrm{Span}\{m_1, \ldots, m_{n+1}\} = \mathbb{R}^n$ と $m_i \cdot m_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ を満たすとする．この時，$m_1, \ldots, m_{n+1}$ がユークリッド n 単体の内向き単位法ベクトルとなることの必要十分条件は，方程式 $a_1 m_1 + \cdots + a_{n+1} m_{n+1} = 0$ の解空間が，ある $c_1, \ldots, c_{n+1} > 0$ が存在して $\{t(c_1, \ldots, c_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と表されることである．

証明のため，次の補題を準備する．

補題 3.5. $x_1, \ldots, x_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とする．この時，次が成り立つ：

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot x_i > 0\} \neq \emptyset$$

証明.

$$C := \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot x_i > 0\},$$
$$L_i := \bigcap_{j \neq i} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot x_j = 0\} \ (i = 1, \ldots, n)$$

とおく．この時，$\dim L_i = 1 \ (i = 1, \ldots, n)$ となることを示す．$x_1, \ldots, x_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることから，x_i を除いた $n-1$ 個の列ベクトルを並べることでできる $n \times (n-1)$ 行列 X_i のランクは $n-1$ である．今，$L_i = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^{\mathrm{T}} X_i = 0\}$ となるので，$\dim L_i = 1$ である．また，$y \cdot x_i \neq 0$ となる $y \in L_i$ が取れることを背理法で示す．任意の $y \in L_i$ に対し $y \cdot x_i = 0$ とすると，$y \cdot x_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ となるが，これは $x_1, \ldots, x_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることから，y は任意の $\mathbb{R}^n$ の元と直交していることを表す．ユークリッド内積は非退化なので，$y = 0$ となる．これは L_i が 1 次元であることに矛盾．したがって，$y \cdot x_i \neq 0$ となる $y \in L_i$ が取れる．v_i を $v_i \cdot x_i > 0$ を満たす L_i の元とする．この時，$v := \sum_{i=1}^{n} v_i$ とおくと，任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$v \cdot x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \cdot x_j = v_j \cdot x_j > 0$$

となるので，$v \in C$ である．したがって，$C \neq \emptyset$ である．特に，集合 C は上で定めた $v_i \in L_i \ (i = 1, \ldots, n)$ を用いて

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

と表すことができる． □

補題 3.4 の証明. $m_1, \ldots, m_{n+1}$ がユークリッド n 単体の内向き単位法ベクトルであるとする．この時，方程式 $a_1 m_1 + \cdots + a_{n+1} m_{n+1} = 0$ の解空間が，ある $c_1, \ldots, c_{n+1} > 0$ が存在して $\{t(c_1, \ldots, c_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と表されることは補題 3.3 から既に示されているので，逆を示す．

$m_1, \ldots, m_{n+1}$ に関し，方程式 $a_1 m_1 + \cdots + a_{n+1} m_{n+1} = 0$ の解空間が，ある $c_1, \ldots, c_{n+1} > 0$ が存在して $\{t(c_1, \ldots, c_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と表されると仮定する．$d > 0$ を任意に 1 つ固定し，

$$C := \bigcap_{i=2}^{n+1} \{x \in \mathbb{R}^n \mid m_i \cdot x \geq 0\}, \qquad D := C \cap \{m_1 \cdot x \geq -d\}$$

とおく．ここで定めた D が，$m_1, \ldots, m_{n+1}$ を内向き単位法ベクトルに持つユークリッド n 単体であることを示す．ここで，$m_2, \ldots, m_{n+1}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることを背理法で示す．$m_2, \ldots, m_{n+1}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底でないとする．次元を考えると $m_2, \ldots, m_{n+1}$ は 1 次従属となるので，自明でない係数 $a_2, \ldots, a_{n+1}$ により，$a_2 m_2 + \cdots + a_{n+1} m_{n+1} = 0$ とできる．これより，$0 m_1 + a_2 m_2 + \ldots a_{n+1} m_{n+1} = 0$ とできるが，これは $m_1, \ldots, m_{n+1}$ の仮定に矛盾．ゆえに，$m_2, \ldots, m_{n+1}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となる．補題 3.5 より，C は確かに 0 以外の元を持つ．ここで，$i = 2, \ldots, n+1$ に対し，

$$L_i := \bigcap_{\substack{j \neq i, \\ 2 \leq j \leq n+1}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot m_j = 0\}, \qquad R_i = C \cap L_i$$

とおき，$v_i \in L_i$ を $v_i \cdot m_1 = -d$ を満たすものとする．今，D がユークリッド n 単体であることと，$i = 2, \ldots, n+1$ に対し $v_i \in R_i$ であることは同値であるが，$v_i \in R_i$ は $v_i \cdot m_i > 0$ とも言い換えられるので，$i = 2, \ldots, n+1$ に対し $v_i \cdot m_i > 0$ であることを示す．$i, j = 2, \ldots, n+1, i \neq j$ に対し $v_i \cdot m_j = 0$ であることから，

$$0 = v_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_j m_j \right) = c_1 v_i \cdot m_1 + c_i v_i \cdot m_i = -d c_1 + c_i v_i \cdot m_i$$

整理すると，$v_i \cdot m_i = \dfrac{d c_1}{c_i} > 0$ となるので，$v_i \in R_i$ である． □

したがって，ユークリッド n 単体を定める必要十分条件が見つかった．

次に，ユークリッド n 単体のグラム行列を定義する．この定義は，2 章のグラム行列の定義と同値な定義である．

定義 3.6. D をユークリッド n 単体とし，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとする．この時，$(u_i \cdot u_j)_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D の**グラム行列** (**Gram matrix**) という．

命題 3.7 (ユークリッド n 単体のグラム行列の性質)**.** D をユークリッド n 単体とし，$A \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D のグラム行列とする．この時，A は対称かつ正値であり，固有値

0 の固有空間は $v = (c_1, \ldots, c_{n+1})^{\mathrm{T}}$ で張られる．ただし，$c_1, \ldots, c_{n+1}$ は，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとした時，方程式 $a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1} = 0$ を満たす非自明な解である．

証明．A が対称であることを示す．$U \in M(n+1, \mathbb{R})$ を $U := (u'_1, \ldots, u'_{n+1})$ と定める．ただし，$u'_i := \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ である．この時，$A = U^{\mathrm{T}} U$ であり，$A^{\mathrm{T}} = (U^{\mathrm{T}} U)^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}} U = A$ となるので，A は対称である．

A が正値であることを示す．任意の $(a_1, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_{n+1}) A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= (a_1, \ldots, a_{n+1}) U^{\mathrm{T}} U \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \left(U \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \right)^{\mathrm{T}} U \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= (a_1 u'_1 + \cdots + a_{n+1} u'_{n+1}) \cdot (a_1 u'_1 + \cdots + a_{n+1} u'_{n+1}) \\
&= (a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1}) \cdot (a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1}) \\
&\geq 0 \quad (\text{ユークリッド内積は正定値内積なので})
\end{aligned}
$$

となる．したがって，A は正値である．

A の固有値 0 の固有空間が $v = (c_1, \ldots, c_{n+1})^{\mathrm{T}}$ で張られることを示す．$c_1, \ldots, c_{n+1}$ を，方程式 $a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1} = 0$ の非自明な解とする．この時，$v := (c_1, \ldots, c_{n+1})^{\mathrm{T}}$ は U の固有値 0 の固有ベクトルとなり，$v^{\mathrm{T}} A v = v^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} U v = 0$ となるので，v は A の固有値 0 の固有ベクトルとなる．逆に，$x \in \mathbb{R}^{n+1}$ を A の固有値 0 の固有ベクトルとすると，任意の $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，

$$
0 = y^{\mathrm{T}} A x = (Uy)^{\mathrm{T}} U x = (Uy) \cdot (Ux)
$$

となる．$\mathrm{Span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \mathbb{R}^n$ であり，y は任意なので，Uy は $\mathbb{R}^n$ の任意の元を表す．ユークリッド内積は非退化であることから，$Ux = 0$ である．したがって，x は U の固有値 0 の固有ベクトルである．以上から，A の固有値 0 の固有空間と U の固有値 0 の固有空間は等しい．U の固有値 0 の固有空間は v で張られるので，A の固有値 0 の固有空間は v で張られる． □

ユークリッド n 単体 D に対し，D の面 D_i と D_j の内角を D の存在する角で定めると，その角度 $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ $(i \neq j)$ は，$\theta_{ij} = \pi - \arccos(u_i \cdot u_j)$ $(i \neq j)$ である．この

時，D は角度 $\{\theta_{ij}\}_{i\neq j,i,j=1}^{n+1}$ を持つという．$\{\theta_{ij}\}_{i\neq j,i,j=1}^{n+1}$ を用いると，D のグラム行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ は，$a_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ -\cos\theta_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$ と表される．

ここまでをまとめると，角度 $\{\theta_{ij}\}$ を持つユークリッド n 単体のグラム行列の性質を見てきた．逆に，どのような行列ならば，ユークリッド n 単体のグラム行列となるだろうか．次の命題は，どのような行列がユークリッド n 単体のグラム行列となるかを示したものである．

命題 3.8 ([2] Proposition 6.8.8)**.** $\theta_{ij}=\theta_{ji}\in(0,\pi)$ $(i,j=1,\dots,n+1,i\neq j)$ とし，$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}\in M(n+1,\mathbb{R})$ を $a_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ -\cos\theta_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$ で定める．この時，A をグラム行列に持つユークリッド n 単体が存在する必要十分条件は次の $(1),(2)$ を満たすことである．

(1) A が正値かつ，A の固有値 0 の固有空間が 1 次元である．

(2) A の固有値 0 の固有空間が，ある $c_1,\dots,c_{n+1}>0$ を用いて $\{t(c_1,\dots,c_{n+1})^{\mathrm{T}}\mid t\in\mathbb{R}\}$ と表される．

証明．ユークリッド n 単体のグラム行列が $(1),(2)$ を満たすことはすでに示したので，逆を示す．

A が $(1),(2)$ を満たすと仮定する．この時，A が対称かつ正値なので A は重複を許して 0 以上の固有値を $n+1$ 個持つ．また，A の固有値 0 の固有空間が 1 次元であるので，A の固有値は n 個が正である．したがって，$U=(u'_1,\dots,u'_{n+1})\in M(n+1,\mathbb{R})$ を用いて $A=U^{\mathrm{T}}U$ と表すことができる．ただし，$i=1,\dots,n+1$ に対し，$u'_i=\begin{pmatrix}u_i\\0\end{pmatrix}$ $(u_i\in\mathbb{R}^n)$ である．この時，A の対角成分が 1 であることから，$u_1,\dots,u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルである．また，U は第 $n+1$ 行が全て 0 であるので $\det U=0$，即ち，U は固有値 0 の固有ベクトルを持つ．A の固有値 0 の固有空間が 1 次元であることから，U の固有値 0 の固有空間は A の固有値 0 の固有空間に一致する．したがって，U の固有値 0 の固有空間は $(c_1,\dots,c_{n+1})^{\mathrm{T}}$ で張られる．さらに，U の固有値 0 の固有空間が 1 次元であることから，U のランクは n である．ゆえに，$\mathrm{Span}\{u_1,\dots,u_{n+1}\}=\mathbb{R}^n$ である．以上をまとめると，$\{u_1,\dots,u_{n+1}\}$ は $\mathbb{R}^n$ を張る単位ベクトルであり，方程式 $a_1u_1+\cdots+a_{n+1}u_{n+1}=0$ の解空間が，ある $c_1,\dots,c_{n+1}>0$ を用いて $\{t(c_1,\dots,c_{n+1})^{\mathrm{T}}\mid t\in\mathbb{R}\}$ と表される．したがって，補題 3.4 に帰着できる．$\square$

3.2　行列が球面的 n 単体のグラム行列となる必要十分条件

この節以降は，ユークリッド n 単体と同様に，球面的 n 単体，双曲的 n 単体の定義をした後，各々のグラム行列の性質をまとめていく．

まず，球面的 n 単体とそのグラム行列を定義する．

定義 3.9. $D \subset S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot x = 1\}$ が**球面的 n 単体** (**spherical n-simplex**) であるとは，D が $n+1$ 個の面 $D_1, \ldots, D_{n+1}$ を境界に持つ有界領域で，各面 D_i が $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分空間と S^n との共通部分に含まれている時をいう．$u_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ が D_i の単位法ベクトルで，D と同じ側にある時，u_i を**内向き単位法ベクトル**という．

ユークリッド n 単体同様，簡単のため，

$$
\begin{aligned}
v_i &= (D_i \text{ 上にない } D \text{ の頂点}), \\
H_i &= (D_i \text{ を含む } \mathbb{R}^{n+1} \text{ の } n \text{ 次元部分空間})
\end{aligned}
$$

とする．

Remark 3.10. ユークリッド n 単体の表し方 (3.2) 同様，球面的 n 単体 D は，その内向き単位法ベクトル $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ を用いて，

$$
D = \{x \in S^n \mid x \cdot u_i \geq 0\} \tag{3.3}
$$

と表すことができる．

補題 3.11 (球面的 n 単体の内向き単位法ベクトルの性質)**.** D を球面的 n 単体とし，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとする．この時，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底である．

証明. $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i$ とおく．この時，v_i は D_i 以外の D の面の交点なので，$v_i \cdot u_i > 0, v_i \cdot u_j = 0$ $(i \neq j)$ である．したがって，

$$
0 = v_i \cdot 0 = v_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j u_j \right) = a_i v_i \cdot u_i
$$

となるので，$a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$．ゆえに，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ は 1 次独立である．次元を考えると，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底である．　$\square$

定義 3.12. D を球面的 n 単体とし，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとする．この時，$(u_i \cdot u_j)_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D の**グラム行列 (Gram matrix)** という．

命題 3.13 (球面的 n 単体のグラム行列の性質)**.** D を球面的 n 単体とし，$A \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D のグラム行列とする．この時，A は対称かつ正定値である．

証明. A が対称であることを示す．D の内向き単位法ベクトルを $u_1, \ldots, u_{n+1}$ とし，$U := (u_1, \ldots, u_{n+1}) \in M(n+1, \mathbb{R})$ とおくと，$A = U^{\mathrm{T}}U$ となる．ゆえに，$A^{\mathrm{T}} = (U^{\mathrm{T}}U)^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}U = A$ なので，A は対称である．

A が正定値であることを示す．一般的に対称行列 X が正定値であることの同値条件は，正則行列 P を用いて $X = P^{\mathrm{T}}P$ と表すことができることである．今，$A = U^{\mathrm{T}}U$ と表すことができ，補題 3.11 から U が正則であることも分かるので，A は正定値である． □

球面的 n 単体 D に対し，D の内角もユークリッド n 単体同様，D_i と D_j の D の存在する角とすると，その角度 $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ $(i \neq j)$ は，$\theta_{ij} = \pi - \arccos(u_i \cdot u_j)$ $(i \neq j)$ である．この時，D は角度 $\{\theta_{ij}\}_{i \neq j, i,j=1}^{n+1}$ を持つという．

命題 3.14 ([2] Lemma 6.8.1)**.** D, D' を球面的 n 単体とする．この時，D と D' のグラム行列が等しいことの必要十分条件は，ある等長変換 σ が存在して $D' = \sigma(D)$ とできることである．

証明. D の内向き単位法ベクトルを $u_1, \ldots, u_{n+1}$，D' の内向き単位法ベクトルを $u'_1, \ldots, u'_{n+1}$ とする．

まず，等長変換 σ を用いて $D' = \sigma(D)$ とできるとすると，$u'_i = \sigma(u_i)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ である．この時，

$$u'_i \cdot u'_j = \sigma(u_i) \cdot \sigma(u_j) = u_i \cdot u_j \quad (i, j = 1, \ldots, n+1)$$

となるので，D と D' のグラム行列は等しい．

逆に，D と D' のグラム行列が等しいとすると，$u_i \cdot u_j = u'_i \cdot u'_j$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$ である．ここで，$u_1, \ldots, u_{n+1}$，$u'_1, \ldots, u'_{n+1}$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底であることから，線形変換 σ が存在し $u'_i = \sigma(u_i)$ とできる．この時，

$$\sigma(u_i) \cdot \sigma(u_j) = u'_i \cdot u'_j = u_i \cdot u_j \quad (i, j = 1, \ldots, n+1)$$

となるので，σ は等長変換である． □

最後に，どのような行列ならば球面的 n 単体のグラム行列となるかを示す．

命題 3.15 ([2] Proposition 6.8.2)**.** $\theta_{ij} = \theta_{ji} \in (0, \pi)$ $(i, j = 1, \ldots, n+1, i \neq j)$ とし，$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ を $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -\cos\theta_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$ で定める．この時，A をグラム行列に持つ球面的 n 単体が存在すること必要十分条件は，A が正定値であることである．

証明. A が球面的 n 単体のグラム行列ならば A が正定値であることは既に示したので，逆を示す．

A が正定値であるとする．この時，A は正定値対称行列なので，ある正則行列 U を用いて $A = U^{\mathrm{T}}U$ とできる．$u_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ を U の i 番目の列ベクトル, 即ち, $U = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ とおくと，$a_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ であることから，u_i は単位ベクトルである．また，U は正則行列なので $u_1, \ldots, u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底である．この時，補題 3.5 より，$C := \bigcap_{i=1}^{n+1} \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot u_i \geq 0\}$ は 0 以外の元を持つ．よって，$C \cap S^n$ が求める球面的 n 単体となる． □

3.3 行列が双曲的 n 単体のグラム行列となる必要十分条件

次に，双曲的 n 単体とそのグラム行列を定義する．まず，双曲空間 H^n を定義するために必要となる，次の内積を考える．

定義 3.16. $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})^{\mathrm{T}}, y = (y_1, \ldots, y_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し，

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

により $\mathbb{R}^{n+1}$ 上に内積を定める．この時，内積空間 $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\mathbb{R}^{n,1}$ と表す．また，$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$ と定める．

定義 3.17. $\langle x, x \rangle > 0$ を満たす $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ を**空間的** (**spacelike**)，$\langle x, x \rangle = 0$ を満たす $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ を**光的** (**lightlike**)，$\langle x, x \rangle < 0$ を満たす $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ を**時間的** (**timelike**) という．

定義 3.18. $D \subset H^n$ が**双曲的 n 単体** (**hyperbolic n-simplex**) であるとは，D が $n+1$ 個の面 $D_1, \ldots, D_{n+1}$ を境界に持つ有界領域で，各面 D_i が $\mathbb{R}^{n,1}$ の n 次元部分空間と H^n との共通部分に含まれる時をいう．$u_i \in \mathbb{R}^{n,1}$ が D_i の単位法ベクトルで，D と同じ側にある時，u_i を**内向き単位法ベクトル**という．

Remark 3.19. $u_i^{\perp} \cap H^n \neq \emptyset$ であることから，内向き単位法ベクトル u_i は空間的で

ある．

ユークリッド n 単体同様，簡単のため，

$$v_i = (D_i \text{ 上にない } D \text{ の頂点}),$$
$$H_i = (D_i \text{ を含む } \mathbb{R}^{n,1} \text{ の } n \text{ 次元部分空間})$$

とする．

Remark 3.20. ユークリッド n 単体の表し方 (3.2) 同様，双曲的 n 単体 D は，その内向き単位法ベクトル $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ を用いて，

$$D = \{x \in H^n \mid \langle x, u_i \rangle \geq 0\} \tag{3.4}$$

と表すことができる．

補題 3.21. D を双曲的 n 単体とし，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとする．この時，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n,1}$ の基底である．

証明. 証明は補題 3.11 と同様に示されるため省略． □

定義 3.22. D を双曲的 n 単体とし，$u_1, \ldots, u_{n+1}$ を D の内向き単位法ベクトルとする．この時，$(\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j=1}^{n+1} \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D の**グラム行列** (**Gram matrix**) という．

命題 3.23 ([2] Lemma 6.8.3)**.** D, D' を双曲的 n 単体とする．この時，D と D' のグラム行列が等しいことの必要十分条件は，ある等長変換 σ が存在して $D' = \sigma(D)$ とできることである．

証明. 証明は命題 3.14 と同様に示されるため省略． □

命題 3.24 (双曲的 n 単体のグラム行列の性質)**.** D を双曲的 n 単体とし，$A \in M(n+1, \mathbb{R})$ を D のグラム行列とする．この時，A は対称，正の固有値を n 個，負の固有値を 1 個持ち，任意の $i = 1, \ldots, n+1$ に対し，A の第 i 行 i 列を除いた余因子行列は全て正定値である．

証明. A が対称であることを示す．D の内向き単位法ベクトルを $u_1, \ldots, u_{n+1}$ とし，$U := (u_1, \ldots, u_{n+1}) \in M(n+1, \mathbb{R})$ とおく．この時，$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in$

$M(n+1,\mathbb{R})$ を用いると，$A=U^{\mathrm{T}}JU$ となる．ゆえに，$A^{\mathrm{T}}=(U^{\mathrm{T}}JU)^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}JU=A$ なので，A は対称である．

A が正の固有値を n 個，負の固有値を 1 個持つことを示す．一般的に対称行列 X の固有値が n 個が正，1 個が負であることの同値条件は，正則行列 P を用いて $X=P^{\mathrm{T}}JP$ と表すことができることである．今，$A=U^{\mathrm{T}}JU$ と表すことができ，補題 3.21 から U は正則なので，A は正の固有値を n 個，負の固有値を 1 個持つ．

任意の $i=1,\ldots,n+1$ に対し，A の第 i 行 i 列を除いた余因子行列が全て正定値であることを示す．$L_i=\mathbb{R}v_i$ とおくと，$\{u_j\}_{j\neq i}$ は $\langle v_i,u_j\rangle=0$ $(j\neq i)$ であるので，$L_i=\bigcap_{j\neq i}u_j^{\perp}$ である．また，$L_i^{\perp}$ の次元は n であることから，$L_i^{\perp}=\mathrm{Span}\{u_j\}_{j\neq i}$ である．$\{u_j\}_{j\neq i}$ は全て空間的であるので，$L_i^{\perp}\cong\mathbb{R}^n$ と考えることができ，$\{u_j\}_{j\neq i}$ を球面的 $(n-1)$ 単体の内向き単位法ベクトルとみることができる．$A_i:=(\langle u_j,u_k\rangle)_{j,k\neq i}$ とすると，A_i は A の第 i 行 i 列を除いた余因子行列であり，$\{u_j\}_{j\neq i}$ を内向き単位法ベクトルとする球面的 $(n-1)$ 単体のグラム行列と考えることができるので，命題 3.13 から，A_i は正定値である． $\square$

双曲的 n 単体 D に対し，D の内角もユークリッド n 単体同様，D_i と D_j の D の存在する角とすると，その角度 $\theta_{ij}=\theta_{ji}$ $(i\neq j)$ は，$\theta_{ij}=\pi-\arccos\langle u_i,u_j\rangle$ $(i\neq j)$ である．この時，D は角度 $\{\theta_{ij}\}_{i\neq j,i,j=1}^{n+1}$ を持つという．

最後に，どのような行列ならば双曲的 n 単体のグラム行列となるかを示す．

命題 3.25 ([2] Proposition 6.8.2)**.** $\theta_{ij}=\theta_{ji}\in(0,\pi)$ $(i,j=1,\ldots,n+1,i\neq j)$ とし，$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}\in M(n+1,\mathbb{R})$ を $a_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ -\cos\theta_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$ で定める．この時，A をグラム行列に持つ双曲的 n 単体が存在すること必要十分条件は，次の (1), (2) を満たすことである：

(1) A は正の固有値を n 個，負の固有値を 1 個持つ．

(2) 任意の $i=1,\ldots,n+1$ に対し A の第 i 行 i 列を除いた余因子行列が正定値である．

証明. A が双曲的 n 単体のグラム行列ならば A が (1), (2) を満たすことは既に示したので，逆を示す．

A が (1), (2) を満たすとする．この時，A は (1) を満たすことから，ある正則行列 U を用いて $A=U^{\mathrm{T}}JU$ とできる．$u_i\in\mathbb{R}^{n+1}$ を U の i 番目の列ベクトル，即ち，$U=(u_1,\ldots,u_{n+1})$ とおくと，$a_{ii}=1$ $(i=1,\ldots,n+1)$ であることから，u_i は空間的である．また，U は正則行列なので $u_1,\ldots,u_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n,1}$ の基底である．この時，各 i に

対し，集合 $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle u_i, x\rangle \geq 0\}$ は，$C_p := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x\rangle \leq 0, x_{n+1} \geq 0\}$，または，$C_n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x\rangle \leq 0, x_{n+1} \leq 0\}$ と共通部分を持つ．C_n と共通部分を持つを持つ u_i に関しては，$u_i \mapsto -u_i$ と置き換えることで，C_p と共通部分を持つようにする．今，(2) から，A の第 i 行 i 列を除いた余因子行列 A_i は正定値なので，$\mathrm{Span}\{u_j\}_{j\neq i}$ は 0 以外の元が空間的である．したがって，$L_i := \displaystyle\bigcap_{j\neq i} u_j^{\perp} = \mathrm{Span}\{u_j\}_{j\neq i}$ は時間的なベクトルで張られる $\mathbb{R}^{n,1}$ の 1 次元部分空間である．よって，L_i と H^n の共通部分を頂点とする有界領域が求める双曲的 n 単体となる． $\square$

4　あとがき

本修士論文では，参考文献として B. Iversen [1] と M. W. Davis [2] を用いた．いずれも単体の定義を行い，単体を構成するためのグラム行列の条件を研究しているが，書き方が大きく異なる．もう少し時間があれば，この 2 つを統一的に理解することができたと思うが，本修士論文では並列して紹介するにとどまった．そこで，各参考文献の特徴を述べていきたいと思う．

まず，2 章で扱った B. Iversen [1] の特徴を述べていく．1 つの向き付きアファイン超平面を，その単位法ベクトルと原点からの向き込みの距離により表現することで，次元を 1 つ上げた線形代数として扱っている．また，ユークリッド空間の相似変換とそれに対応する 1 次元高い空間での直交変換の関係が，図形的性質を考慮すると自然に表れるということも理解を助けている．さらに，一般的には S^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ 内で，H^n が $\mathbb{R}^{n,1}$ 内で考えられるのと同様にして，n 次元ユークリッド空間 E^n を E^n に光的なベクトルを加えた空間で考えており，S^n, H^n と E^n を同等に扱おうとしていることも読み取れる．しかしながら，どのような意図をもって話を展開しているのかが読み取り辛いため，命題や定理の状況を簡単な図などを用いて確認しながら読む必要があると感じた．これも，B. Iversen [1] のサーベイ論文を書く動機の 1 つである．

次に，3 章で扱った M. W. Davis [2] の特徴を述べていく．球面的 n 単体や双曲的 n 単体と交えてユークリッド n 単体を扱っているため，球面幾何や双曲幾何とユークリッド幾何が密接につながっているということが理解できる．特に，球面的や双曲的な場合に比べて，ユークリッドの場合はその中間に位置する特別な場合であるということも理解できる．また，証明などに使われている定理や命題のほとんどが線形代数の基礎的な部分からであるため，初めて読む人でも読みやすいと感じた．一方で，時々ではあるが，定義されていない言葉がいきなり表れることがあるため，その語句の周辺から意味を読み取る必要がある．

研究を始めるまでは，正定値でない内積が入った空間を考えることは，どのように始まり，どこに応用されるか疑問を持っていた．正定値内積が入った空間を考えることは現実空間を考える上で自然な発想であるが，正定値でない内積が入った空間を考えることは自然な発想ではないと私は思う．しかし，この修士課程で研究を行ってきたことで，正定値でない内積が入った空間を考えることも実は現実空間を考えるのに役立つということが分かった．特に，正値内積が入った空間を研究することが，その空間のユークリッドな部分空間を捉えるのに役立つことが分かり，疑問が解消されたことを嬉しく思う．

参考文献

[1] B. Iversen,*Hyperbolic Geometry*,Cambridge University Press,1992

[2] M. W. Davis,*The Geometry and Topology of Coxeter Groups*,Princeton University Press,2008

[3] C. D. Hodgson,I. Rivin,*A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. math. 111,77-111(1993)