Teichmüller空間上のエネルギー関数のWeil-Petersson計量に関する凸性の研究

Akira Yoshizato

Adviser : Shin Nayatani

目 次

序文

本修士論文では, 種数 $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間を微分幾何学的に解釈し, Teichmüller 空間上の Weil-Petersson 計量に関する測地線に沿ったエネルギー関数の凸性（エネルギー関数の測地的凸性）について学んだことをまとめたものである．本論文では山田澄生氏の論文 [17],[18] にしたがって学習し, 測地的凸性を含めた主要な三つの定理（L^2 分解定理, 水平リフトの二階微分の表示, エネルギー関数の測地的凸性）の証明の細部を補うことを目標とした．このテーマを研究をする中で新規性のある発見をすることはできなかったが, Weil-Petersson 計量から定まる Levi-Civita 接続に関する主張の不備を発見し, 証明を含めて修正することができた [命題 3.1]．文献 [17],[18] 以外に, A.J. Tromba 氏のテキスト [15] を主要な参考文献とした．

本論文は第一章から第四章までとし, 第五章を補足とした．補足では, リーマン面の一意化定理と閉曲面上のリーマン計量について今吉洋一・谷口雅彦氏のテキスト [6] にしたがって概説した．ここでは, リーマン面の一意化定理の応用として得られる「種数 2 以上の閉曲面上のリーマン計量は定曲率 -1 のリーマン計量（双曲計量）に等角である」という主張の説明をメインとして述べた．

有向曲面の Teichmüller 空間とは, 有向曲面に付加できる「複素構造」全体を曲面上の順向な可微分同相群の恒等写像を含む連結成分の群作用によって割った空間である．ここでいう順向性は曲面の向きと同調することであり, 連結成分は可微分同相群を位相群としてみたときの連結成分をさす．Teichmüller 空間はリーマン面の分類問題に端を発する．リーマン面の分類問題とは曲面上の複素構造を双正則写像を用いた同値関係によって分類し, 本質的に異なる複素構造はどのくらいあるかを調べる問題である．双正則写像とは, リーマン面の間の正則な全単射であって逆写像も正則写像であるものをいう．しかし実際は, 可微分同相写像を用いた分類で十分である．なぜなら $(M, \mathcal{C})$ を曲面と曲面に付随する複素構造の組, F を M から M への可微分同相写像としたとき, F 自身が $(M, F^*\mathcal{C})$ から $(M, \mathcal{C})$ への双正則写像になってしまうからである．

閉曲面とはコンパクトで境界のない有向曲面のことであり, その種数とは粗く表現すると穴の数のことである．閉曲面の Teichmüller 空間は種数によって大別することができる．種数 0 の閉曲面は球面であり, 球面の Teichmüller 空間は射影空間の複素構造の同値類のみからなる．また種数 1 の閉曲面はトーラスであり, トーラスの Teichmüller 空間は上半平面と同一視されることが以前より知られていた．問

題は種数 $p \geq 2$ の場合である．この場合は理論名であるところの O. Teichmüller の結果によって「種数 $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間は $\mathbb{R}^{6p-6}$ に同相になる」ことがわかる．これはリーマン面上の正則二次微分の理論から得られた結果で, その後, L.V. Ahlfors や L. Bers らによって擬等角写像の理論を用いた Teichmüller 空間論が確立した．ここで注目すべき点はどちらの理論も複素解析的なものであって, あくまで Teichmüller 空間を「複素構造」の変形空間として解釈するという点である．

微分幾何学的な解釈（立場）とは, Teichmüller 空間を「リーマン計量」を割った空間として捉えることである．この解釈は複素構造とリーマン計量（共形構造）が対応することから保障される．この立場から捉えることで, テンソルの理論を用いた解析方法が可能になる点で微分幾何学的という意味が窺える．ただし, 複素構造とリーマン計量の対応は二次元曲面が持つ特殊性であって, 三次元以上の場合は適用できないということに注意しなければならない．一方で、リーマン面の分類における主要な結果である一意化定理によって, 有向曲面上の任意のリーマン計量の等角同値類に定曲率リーマン計量が存在することがわかる．ここでいうリーマン計量の等角同値類とは, 曲面上のある可微分同相写像があってその引き戻し計量が元の計量と正値関数倍の違いしかないもの全体を表す．特に, 種数 $p \geq 2$ の閉曲面上の任意のリーマン計量は負の定曲率計量, すなわち, 双曲計量に等角である．これは閉曲面のコンパクト性が効いている．したがって種数 $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間は, さらに「双曲計量」を割った空間として捉えることができる．

この立場では, リーマン計量全体の空間に多様体構造を与え, さらにその接空間を対称 $(0,2)$ テンソル場全体の空間と同一視することができる．調べたいのは Teichmüller 空間の接空間であるが, まず双曲計量全体の空間の接空間を調べることが自然な発想である．結論からいえば, Teichmüller 空間の接空間は TT 性と呼ばれる条件を満たす対称 $(0,2)$ テンソル場（TT テンソル）全体の空間と同一視できる．ここでいう「TT」とは「Tracefree and Transverse」の略で これは接空間の基点のリーマン計量に関するトレースと余微分作用素が消滅するという条件である．ここでいう余微分作用素は双曲計量全体の空間の接空間を特徴付ける際に現れる作用素である．

さらに, リーマン計量全体の空間上に L^2 計量というリーマン計量が定まる．この L^2 計量は基点のリーマン計量を指定するごとに, その計量に関する関数値を Σ 上で積分することによって定まるリーマン計量である．もちろん, この L^2 計量は双曲計量全体の空間上のリーマン計量にもなる．また有限次元の場合と同様に, 双

曲計量の空間から Teichmüller 空間への射影が自然に定まり, その射影がリーマン沈めこみになるようなリーマン計量が考えられる．実はこれが Weil-Petersson 計量（WP 計量）であって, 詳しくは TT テンソルと L^2 計量を用いて定義される．そして, Weil-Petersson 計量に関する測地線（WP 測地線）は WP 計量の定め方から, L^2 計量に関する測地線（L^2 測地線）であって接ベクトルが TT テンソルであるもの, つまり, 「水平リフト」として特徴付けることができる．

さて, Teichmüller 空間上のあるエネルギー関数を考える．まず, Teichmüller 空間にエネルギー関数を定義するために, 双曲計量全体の空間にエネルギー関数を定義する．ここで双曲計量と調和写像が対応する調和写像論の結果が適用できる．調和写像は調和関数や測地線の一般化であり, 曲面間の C^1 級写像全体の空間上の Dirichlet 汎関数の臨界点を与えるものとして定義される．さらに双曲計量がある意味で滑らかに変化するとき, 対応する調和写像も滑らかに変化するという結果がある．双曲計量のエネルギー関数を調和写像のエネルギー関数として定めることで, この結果によって双曲計量の変化に対してそのエネルギー関数が滑らかに変化することが保障される．次に考えなければならないのは, 双曲計量のエネルギー関数が Teichmüller 空間上の関数として定義できるかということである．言い換えると, 同じ同値類に属する二つの双曲計量をとったとき, それぞれのエネルギー関数は一致するかということである．この問題の解決にも調和写像の一意性が重要な働きをする．

以上の準備の下で, Teichmüller 空間上に定義されたエネルギー関数が WP 測地線に沿ったとき, それは凸関数になるかどうかが興味の対象である．これは実質, WP 測地線の水平リフトのエネルギー関数を考えることに他ならない．よって水平リフトの二階微分の表示が必要になり, さらに遡ると, リーマン計量全体の空間の接空間に対する L^2 分解定理が重要な主張になる．したがって, 本論文は L^2 分解定理と水平リフトの二階微分の表示, エネルギー関数の測地的凸性の三つの定理とその証明に焦点をあてる．

本修士論文の構成は以下の通りである：

第一章では, まず可微分同相群 $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ を曲面の向きを保つ可微分同相写像全体とし, その位相を説明した. さらにその連結成分を準備し, 種数が $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_p$ とモジュライ空間 $\mathfrak{M}_p$ を定義した. 最後にリーマン計量全体 $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線を定め, 基点 G での接空間 $T_G\mathcal{M}$ が対称 $(0,2)$ テンソル場全体の空間であることを述べた.

第二章では, $T_G\mathcal{M}$ 上の L^2 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\cdot)}$ を定め, L^2 計量の滑らか性と正定値性を示した. 次に, Ricci テンソルの無限小変形に関する定理から Lichnerowicz 作用素 $\mathcal{L}_G$ を導出し, 式に現れる余微分作用素 δ_G について説明した. 各作用素の L^2 計量に関する共役作用素を定めた後, 定曲率 -1 のリーマン計量全体 $\mathcal{M}_{-1}$ が $\mathcal{M}$ の部分多様体になることを示し, 基点 G での接空間 $T_G\mathcal{M}_{-1}$ を $\mathcal{L}_G$ を用いて特徴付けた. 次に, $T_G\mathcal{M}$ の元に対して TT 性を定め, TT テンソルが実は Teichmüller 空間の接ベクトルと同一視できることを記述した. そして, TT テンソルと L^2 計量を用いて Weil-Petersson 計量 g_{wp} を定義した. 最後に TT テンソルを抽出するための $T_G\mathcal{M}$ の L^2 分解定理を述べ, 証明の細部を補った.

第三章では, まず L^2 計量と WP 計量からそれぞれ定まる Levi-Civita 接続 D, ∇^{wp} の関係性を記述し, 接続の明示的な表示に関する主張で原論文 [17] の不備を修正する形の証明を与えた. 次に, WP 測地線を定め, WP 測地線を $\mathcal{M}_{-1}$ 上の接ベクトルが TT テンソルであるような曲線（水平リフト）に対応できることを説明した. 最後に, 水平リフトの二階微分を明示的に表す定理と証明を記述した.

第四章では, まず曲面上の Dirichlet 汎関数から調和写像の定義をし, 調和写像の局所座標を用いた条件式（調和写像の方程式）を導出した. さらに等温座標から定まる複素座標によって調和写像の方程式（調和写像の方程式の複素化）を述べ, 直接計算による証明を行った. 次に, 調和写像の存在性と一意性に関する一般論を引用し, 双曲計量と調和写像が対応付けられることを記述した. さらに双曲計量の滑らかな変化に対して, 滑らかな調和写像の族が得られることも説明した. 次に, 双曲計量に対するエネルギー関数（Wolf 型 Dirichlet エネルギー）を調和写像のエネルギー関数として定義した. この関数が可微分同相群の作用に関して不変であることを示し, Teichmüller 空間上のエネルギー関数になることを説明した. 最後に, 上で定めたエネルギー関数が WP 測地線に沿って凸関数であることを細部を補いながら証明した.

本論文では特に断らない限り, リーマン多様体や曲面, ベクトル場, テンソル場

は C^∞ 級であるとする.

謝辞

本修士論文の執筆にあたり, 公私ともに多大なる御指導をいただいた納谷信先生, 文献の内容について多くの解説とアドバイスをくださった学習院大学の山田澄生先生に厚く御礼を申し上げます. また松井さんをはじめとする同研究室の方々, 修士論文の校正にあたり有用な意見をくれた小松さんをはじめとする友人の方々に心より感謝いたします.

1 Teichmüller 空間と計量空間の接空間

二次元有向曲面は等温座標の存在性から複素構造が定まり, 複素構造とリーマン計量が一対一に対応する. よって Teichmüller 空間はリーマン計量全体の空間を順向な可微分同相群の恒等写像を含む連結成分によって割った空間とみることができる. 特に種数 $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間を考えると, 曲面上のリーマン計量は定曲率 -1 のリーマン計量（双曲計量）に等角であるため, Teichmüller 空間は双曲計量全体を割った空間として捉えることができる.

この章では, 可微分同相群とその連結成分について説明し, 種数 $p \geq 2$ の閉曲面の Teichmüller 空間を定義する. 次にリーマン計量全体の空間上に滑らかな曲線を定め, その接空間を記述する.

以後, Σ を種数 $p \geq 2$ の閉曲面 (境界のないコンパクト有向曲面), $\mathcal{M}$ を Σ 上のリーマン計量全体, $\mathcal{M}_{-1}$ を Σ 上の定曲率 -1 のリーマン計量（双曲計量）全体とする.

1.1 可微分同相群

本節は, Teichmüller 空間の定義に必要な可微分同相群とその連結部分群のひとつを述べる.

可微分同相写像 $f : \Sigma \to \Sigma$ が**順向**であるとは, 各 $p_0 \in \Sigma$ のまわりの局所座標 (U, φ) と $f(p_0)$ のまわりの局所座標 (V, ψ) に対して $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ のヤコビアン $Jf := J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ が正であるときをいう. ここで順向な可微分同相写像全体を $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ と表すと, 写像の合成に関して群をなす.

さらに次の位相に関して $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ は位相群をなす. まず, Σ の部分集合 K, U に対して $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の部分集合 $[K, U]$ を

$$[K, U] := \{f \in \mathrm{Diff}(\Sigma)\,;\, f(K) \subset U\}$$

によって定める. そして $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{[K, U] \subset \mathrm{Diff}(\Sigma)\,;\, K \text{ はコンパクト}, U \text{ は開集合}\}$$

によって定める. この位相をコンパクト開位相という. ここで位相群 $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の id_Σ を含む連結成分を $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ とおくと, 次のことが成立する.

補題 1.1. $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ は $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の正規部分群である.

証明. ここでは正規部分群であることを示す. $g \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ を任意にとると, ある $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ 上の曲線 g_t があって $g_0 = id_\Sigma, g_1 = g$ を満たすものが存在する. $h \in \mathrm{Diff}(\Sigma)$ を任意にとると, $h \circ g_t \circ h^{-1}$ もまた $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の曲線であって

$$h \circ g_0 \circ h^{-1} = id_\Sigma, \quad h \circ g_1 \circ h^{-1} = h \circ g \circ h^{-1}$$

を満たす. よって $h \circ g \circ h^{-1} \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ である. □

注意 1. $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ は id_Σ にホモトピックな $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の元からなることが知られている [3].

1.2 Teichmüller 空間, モジュライ空間

本節では種数 $p \geq 2$ の閉曲面 Σ の Teichmüller 空間を定義する.

$G_1, G_2 \in \mathcal{M}_{-1}$ に対して $\phi \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ が存在して

$$G_2 = \phi^* G_1$$

を満たすとき, G_1 と G_2 は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 同値であるという. この関係は $\mathcal{M}_{-1}$ 上の同値関係になるので商空間

$$\mathcal{T}_p := \mathcal{M}_{-1}/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$$

が得られる. この $\mathcal{T}_p$ を種数 p の **Teichmüller 空間**という. また $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ の代わりに $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ で割った商空間

$$\mathfrak{M}_p := \mathcal{M}_{-1}/\mathrm{Diff}(\Sigma)$$

も定義できて, この $\mathfrak{M}_p$ を種数 p のモジュライ空間という.

注意 2. 上で定めた Teichmüller 空間は滑らかな多様体であることが知られている [15, Corollary2.4.6].

1.3 $\mathcal{M}$の接空間

本節では, $\mathcal{M}$ 上の曲線に滑らか性を定め, 接ベクトルを定義する. さらにその局所表示を記述し, $\mathcal{M}$ の接空間が対称 $(0,2)$ テンソル場全体の空間であることを説明する.

$G \in \mathcal{M}$ と $\mathbb{R}$ の 0 を含む開区間 I をとる. $\mathcal{M}$ 上の曲線 $\gamma : I \to \mathcal{M}$ が**滑らか**であるとは, 任意の開集合 $U \subset \Sigma$ と任意の U 上のベクトル場 X, Y に対して

$$\gamma(X,Y) : I \times U \to \mathbb{R}, \quad (\gamma(X,Y))(t,q) := (\gamma_t)_q(X_q, Y_q)$$

が C^∞ 級関数であるときをいう.

注意 3. $\mathcal{M}$ 上の曲線の滑らか性は, 時間変数 t に関してだけの滑らか性ではない. 時間変数と空間変数の両方に関して滑らかであることが重要である.

次に, $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線から $\mathcal{M}$ の接ベクトルを定める. G を通る $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線 γ_t に対して

$$\dot{\gamma}_0 := \lim_{t \to 0} \frac{\gamma_t - \gamma_0}{t}$$

と定めると, $\dot{\gamma}_0$ は G での $\mathcal{M}$ の接ベクトルである. 各 γ_t は特に対称 $(0,2)$ テンソル場で, 対称 $(0,2)$ テンソル場全体の空間は線形空間であるため, 上の定義は意味を持つ.

$\dot{\gamma}_0$ の局所座標による表示を求める. $p_0 \in \Sigma$ を任意にとり, p_0 のまわりの局所座標を $(U, (x^1, x^2))$ とする. このとき, γ_t が滑らかであるから $I \times U$ 上で定義された滑らかな関数 $(\alpha.)_{ij}(\cdot), (1 \leq i, j \leq 2)$ があって

$$\gamma_t(q) = \sum_{i,j=1}^{2} (\alpha_t)_{ij}(q) dx^i dx^j, \quad q \in U$$

とかける. よって $\dot{\gamma}_0$ の U 上での局所表示は

$$\dot{\gamma}_0(q) = \sum_{i,j=1}^{2} (\dot{\alpha}_0)_{ij}(q) dx^i dx^j, \quad q \in U$$

となる. 注意すべきこととして, 接ベクトル $\dot{\gamma}_0$ はテンソルの型と対称性を保つが正定値性は保たない. なぜなら関数 $(\alpha_t)_{ij}$ の t 微分が正値性を失うからである.

したがって $\mathcal{M}$ の G での接空間は対称 $(0,2)$ テンソル場の全体とみることができる．すなわち

$$T_G\mathcal{M} = \{\Sigma上の対称\,(0,2)\,テンソル場全体\}$$

である．また接空間 $T_G\mathcal{M}$ の元を計量 G の**無限小変形**という．

注意 4. 本論文では, $\mathcal{M}$ が多様体であるかどうかを議論しない．それゆえにここで定義した接空間は形式的なものである．しかし実際では, $\mathcal{M}$ には対称 $(0,2)$ テンソル場全体の空間の開部分多様体として Fréchet 多様体構造が入り, 接空間が定義できることが知られている [15]．ここでいう Fréchet 多様体構造とは, 多様体のモデル空間を Fréchet 空間（局所凸線形位相空間）とする多様体構造である．

2 Weil-Petersson計量と L^2 分解定理

この章では, 最初に $\mathcal{M}$ 上の L^2 計量を定め, $\mathcal{M}_{-1}$ の接ベクトルを特徴付ける作用素を導入し, L^2 計量に関する共役作用素もあわせて述べる. 次に $\mathcal{M}_{-1}$ から $\mathcal{T}_p$ への射影を用いて, $\mathcal{T}_p$ の接ベクトルをTTテンソルと呼ばれる $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の元と同一視できることを述べる. その後, Weil-Petersson計量をTTテンソルの L^2 計量として定義する. 最後に対称 $(0,2)$ テンソル場からTTテンソルを得るために, $T_G\mathcal{M}$ の L^2 計量に関する分解定理を述べる.

2.1 L^2 計量

本節では, $\mathcal{M}$ 上に L^2 計量を定める.

$G \in \mathcal{M}$ をひとつ固定し, $p_0 \in \Sigma$ と p_0 のまわりの局所座標 $(U, (x^1, x^2))$ をとる. このとき, $h_1, h_2 \in T_G\mathcal{M}$ に対して U 上の関数を

$$< h_1, h_2 >_G := \sum_{i,j,k,l=1}^{2} G^{ij}(h_1)_{ik} G^{kl}(h_2)_{jl} = \mathrm{Tr}[G^{-1}h_1G^{-1}h_2] \tag{2.1}$$

によって定める. ただし, G^{ij} は行列 (G_{ij}) の逆行列の (i,j) 成分を表す. この演算は最右辺にあるように行列 $[(G^{ij})((h_1)_{ik})(G^{kl})((h_2)_{jl})]$ のトレースを表している. この演算について次の補題を述べる.

補題 2.1. 式 (2.1) で定めた演算 $< h_1, h_2 >_G$ は p_0 のまわりの局所座標のとり方によらずに決まる.

証明. $(V, (y^1, y^2))$ を p_0 のまわりの別の局所座標とする. このとき $\{x^i\}$ から $\{y^k\}$ への座標変換の行列を P と表すと, $U \cap V$ 上で

$$(G^{ij}) = {}^t(P^{-1})(G^{kl})P^{-1}, \quad ((h_m)_{ij}) = P((h_m)_{ij})^tP \quad (m = 1, 2)$$

が成立する. 行列のトレースを計算すると

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}\left[(G^{ij})((h_1)_{ij})(G^{ij})((h_2)_{ij})\right] \\
= \ & \mathrm{Tr}\left[{}^t(P^{-1})(G^{kl})P^{-1}P((h_1)_{kl})^tP \, {}^t(P^{-1})(G^{kl})P^{-1}P((h_2)_{kl})^tP\right] \\
= \ & \mathrm{Tr}\left[{}^t(P^{-1})(G^{kl})((h_1)_{kl})(G^{kl})((h_2)_{kl})^tP\right] \\
= \ & \mathrm{Tr}\left[(G^{kl})((h_1)_{kl})(G^{kl})((h_2)_{kl})\right]
\end{aligned}$$

が成立する. 最後の等式は行列のトレースの性質を用いた. □

上の演算の定義から, 任意の $h \in T_G\mathcal{M}$ に対して, 各点の局所座標に関して

$$< h, G >_G = \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} h_{ij}$$

が成立する. 特に右辺を $\mathrm{tr}_G h$ と表し, さらに Σ 上で

$$\mathrm{tr}_G h = 0$$

を満たすとき, h は G に関して **Trace free** または G**-Trace free** という.

次に, $\mathcal{M}$ 上の L^2 計量を定義する. $G \in \mathcal{M}$ と $h_1, h_2 \in T_G\mathcal{M}$ に対して,

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{L^2(G)} := \int_\Sigma < h_1, h_2 >_G \ d\mu_G$$

によって定まる演算 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\cdot)}$ を L^2 計量という. ただし, $d\mu_G$ は G から定まる面積測度とする. このとき, 被積分関数は各テンソルの滑らか性から Σ 上滑らかになる. また Σ のコンパクト性により, 積分値は有限値でこの定義は意味をもつ. さらに次の命題が成立する.

命題 2.2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\cdot)}$ は $\mathcal{M}$ 上のリーマン計量である.

証明. まず, G に関する滑らか性を前章で定めた $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線を用いて示す. 任意の $G \in \mathcal{M}$ をとり, G を通る $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線 G_t をとる. このとき, 任意の $h, h' \in T_{G_t}\mathcal{M}$ に対して

$$\langle h, h' \rangle_{L^2(G_t)} = \int_\Sigma G_t^{ij} h_{ik} G_t^{kl} h'_{jl} \sqrt{\det((G_t)_{ij})}\, dx^1 dx^2$$

とかけて, G_t の滑らか性から被積分関数は t に関して滑らかである. したがって対応 $\left[t \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G_t)}\right]$ は滑らかであるので, L^2 計量は G に関して滑らかである.

次に線形性と対称性であるが, これは共に行列のトレースの線形性と対称性から従う. よって以下では, 正定値性を示す. $G \in \mathcal{M}$ を任意にとる. Σ の局所座標として G の等温座標を各点のまわりでとる. つまり, ある Σ 上の正値関数 λ があって

$$G_{ij} = \lambda \delta_{ij}$$

とかける. このとき,

$$\langle h, h \rangle_{L^2(G)} = \int_\Sigma < h, h >_G \ d\mu_G = \int_\Sigma \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} h_{ij}^2 \right) d\mu_G \geq 0$$

が成立する. 等号成立はすべての i, j に対して $h_{ij} = 0$ が成立するとき, つまり, テンソル場として $h \equiv 0$ が成立するときである. よって L^2 計量は正定値である. □

2.2 Lichnerowicz 作用素

本節では, $\mathcal{M}_{-1}$ の接ベクトルを特徴付ける Lichnerowicz 作用素を導出する. また Lichnerowicz 作用素の定義に現れる余微分作用素の説明も与える.

$G \in \mathcal{M}$ をとり, G_t を $G_0 = G$ を満たす $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線とする. $\{\partial_i\}_{i=1,2}$ を $T\Sigma$ の局所基底とする. つまり, Σ 上のベクトル場であって各点 p_0 で $T_{p_0}\Sigma$ の基底になるものとする. このとき各 G_t はリーマン計量であるから, G_t から定まる Levi-Civita 接続 ∇^t が一意的に存在する. さらに ∇^t から定まるテンソルを次のように定義する：

Christoffel 記号 $\Gamma_{ij}^k(t)$

$$\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(t)\partial_k := \nabla^t_{\partial_i}\partial_j$$

曲率テンソル $\mathcal{R}_t$

$$\mathcal{R}_t(\partial_i, \partial_j)\partial_k := \nabla^t_{\partial_i}\nabla^t_{\partial_j}\partial_k - \nabla^t_{\partial_j}\nabla^t_{\partial_i}\partial_k - \nabla^t_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k, \quad [\cdot,\cdot]; Lie\, bracket$$

Ricci 曲率テンソル R_t

$$R_t(\partial_i, \partial_j) := \sum_{k,l=1}^{2} (G_t)^{kl}\, G_t(\mathcal{R}_t(\partial_i, \partial_k)\partial_l, \partial_j) = \sum_{k,l=1}^{2} (G_t)^{kl}(\mathcal{R}_t)_{ikjl}$$

断面曲率 κ_t

$$\kappa_t := \frac{G_t(\mathcal{R}_t(\partial_1, \partial_2)\partial_2, \partial_1)}{G_t(\partial_1, \partial_1)\, G_t(\partial_2, \partial_2) - G_t(\partial_1, \partial_2)^2}.$$

G_t の t に関する滑らか性から, $\mathcal{R}_t, R_t, \kappa_t$ のいずれも t に関して滑らかになる. なお, $G_0 = G$ の Levi-Civita 接続, Christoffel 記号, 曲率テンソル, Ricci 曲率テンソル, 断面曲率を $\nabla, \Gamma_{ij}^k, \mathcal{R}, R, \kappa$ とかくことにする.

Σ は二次元曲面であるから, Σ の各点で κ は Gauss 曲率に一致し,

$$(R_t)_{ikjl} = \kappa_t[(G_t)_{ij}(G_t)_{kl} - (G_t)_{ik}(G_t)_{jl})]$$

が成立する (cf. [7, Lemma 3.3.3]). したがって Ricci 曲率テンソルは

$$(R_t)_{ij} = \kappa_t \sum_{k,l=1}^{2} (G_t)^{kl}[(G_t)_{ij}(G_t)_{kl} - (G_t)_{ik}(G_t)_{jl})] = \kappa_t(G_t)_{ij}$$

を満たす．さらに G_t に関してトレースをとると

$$2\,\kappa_t = \sum_{i,j=1}^{2} (G_t)^{ij} (R_t)_{ij} \tag{2.2}$$

が成立する．ここで Ricci 曲率テンソルの無限小変形のトレースが

$$\sum_{i,j=1}^{2} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (R_t)_{ij} (G_0)^{ij} = -\Delta_G(\mathrm{tr}_G h) + \delta_G \delta_G h \tag{2.3}$$

となることが知られている [1, Theorem1.174]. 以下, この式中の記号を説明する：

Σ 上の C^2 級関数 f に対して,

$$\Delta_G f := \mathrm{div}_G(\mathrm{grad}_G f) = \mathrm{tr}_G(\mathrm{Hess}_G f)$$

によって定まる作用素 Δ_G を G に関する **Laplace 作用素**という．この作用素は負の作用素といわれ, それは関数 f と $\Delta_G f$ との L^2 内積が負になることをさす．つまり, 発散 div_G の性質から

$$\langle f, \Delta_G f \rangle_{L^2(G)} = \int_\Sigma f\, \Delta_G f \, d\mu_G = \int_\Sigma -G(\mathrm{grad}_G f, \mathrm{grad}_G f)\, d\mu_G \leq 0$$

が得られることに由来する．

k を正の整数とし, $X_1, \cdots, X_k$ は Σ 上のベクトル場とする．Σ 上の $(0, k+1)$ テンソル場 α に対して, $(0,k)$ テンソル場 $\delta_G \alpha$ を

$$\delta_G \alpha(X_1, \cdots, X_k) := -\sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} (\nabla_{\partial_i} \alpha)(\partial_j, X_1, \cdots, X_k)$$

によって定める．このとき, テンソル場に対する作用素 δ_G を G に関する**余微分作用素**という．この記号は [1, Definition1.56(c)] に倣ったものである．特に, $k = 0$ のときは

$$\delta_G \alpha = -\sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} (\nabla_{\partial_i} \alpha)(\partial_j)$$

によって定まる関数である．

以上の準備の下で, Lichnerowicz 作用素を導出する．$h := \dot{G}_0 \in T_G \mathcal{M}$ とおく．式 (2.3) と二つの等式

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (G_t)^{ij} = \sum_{a,b=1}^{2} G^{ia} h_{ab} G^{jb}, \quad R_{ij} = \kappa\, G_{ij}$$

を用いて, 式 (2.2) の両辺を t 微分すると,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} 2\,\kappa_t &= \sum_{i,j=1}^{2}\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(R_t)_{ij}(G_0)^{ij} + (R_0)_{ij}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(G_t)^{ij}\right] \\
&= -\Delta_G(\mathrm{tr}_G h) + \delta_G\delta_G h - \kappa \sum_{i,j,a,b=1}^{2} G_{ij}G^{ia}h_{ab}G^{jb} \\
&= -\Delta_G(\mathrm{tr}_G h) + \delta_G\delta_G h - \kappa\,\mathrm{tr}_G h \\
&= (-\Delta_G - \kappa)\,\mathrm{tr}_G h + \delta_G\delta_G h
\end{aligned}
$$

を得る. ここで右辺を

$$
\mathcal{L}_G h := (-\Delta_G - \kappa)\,\mathrm{tr}_G h + \delta_G\delta_G h \tag{2.4}
$$

によって定める. これを G に関する **Lichnerowicz 作用素**といい, $\mathcal{L}_G$ は $T_G\mathcal{M}$ から $C^\infty(\Sigma)$ への線形作用素になる.

G の無限小変形 h が G の**定曲率変形**であるとは, Σ 上で

$$
\mathcal{L}_G h = 0
$$

を満たすことである. これは G を通る $\mathcal{M}$ 上の曲線 G_t から定まる断面曲率（Gauss 曲率）κ_t の t 微分が 0 になることである. すなわち, G_t は $G_0 = G$ の十分近くでは G の曲率を保っていることを意味する. また式 (2.3) と比較すると

$$
\sum_{i,j=1}^{2}(\dot{R}_0)_{ij}(G_0)^{ij} = \kappa\,\mathrm{tr}_G h
$$

が成立する.

注意 5. ここでは便宜上 $\{\partial_i\}_{i=1,2}$ を用いたが, 実際は各点で局所座標をとって考えればよい.

2.3 L^2 共役作用素

本節では, まず計量のベクトル場による変形である Lie 微分を定義し, 余微分作用素と L^2 共役の関係になることを示す. また無限小変形に対する Divergence free（Transverce）性を定め, 先の Lie 微分を用いて説明する. 最後に, Lichnerowicz 作用素の L^2 共役を明示的に述べる.

$G \in \mathcal{M}$ をひとつ固定し, X を Σ 上のベクトル場とする. この X に対して Diff(Σ) の 1 助変数変換群 $\{\phi_t\}$ が存在する. このとき, $L_X G$ を

$$L_X G := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t^* G \tag{2.5}$$

によって定めると, 対称 $(0,2)$ テンソル場になる. これを G の X による **Lie 微分**といい, 任意のベクトル場 $Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ に対して

$$L_X G(Y,Z) = XG(Y,Z) - G(L_X Y, Z) - G(Y, L_X Z)$$

が成立する [7, p.52]. ここで, 対称 $(0,2)$ テンソル場 h が任意の Σ 上のベクトル場 X に対して

$$\langle L_X G, h\rangle_{L^2(G)} = 0$$

を満たすとき, h は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 作用に L^2 直交するという. これを満たす h は G の $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ による軌道空間に直交するという意味で, h は**横断的 (Transverce)** であるという. この横断性が Divergence free と対応することは後に説明する.

補題 2.3. *$G \in \mathcal{M}$ とし, X を Σ 上のベクトル場, h を対称 $(0,2)$ テンソル場とする. このとき, ある Σ 上のベクトル場 Z が存在し, 任意の $p_0 \in \Sigma$ に対して*

$$2\,(\mathrm{div}_G Z)(p_0) =< h, L_X G >_{G(p_0)} -2\,(\delta_G h(X))(p_0) \tag{2.6}$$

が成立する.

証明. 以下の計算では $p_0 \in \Sigma$ を省略する. G の Lie 微分を $T\Sigma$ の局所基底 $\{\partial_i\}_{i=1,2}$ によって表示すると

$$\begin{aligned}
(L_X G)_{ij} &= XG_{ij} - G(L_X \partial_i, \partial_j) - G(\partial_i, L_X \partial_j) \\
&= XG_{ij} - G([X,\partial_i], \partial_j) - G(\partial_i, [X, \partial_j]) \\
&= G(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + G(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X)
\end{aligned}$$

とかける.

主張の右辺の各項を計算する．第一項は

$$\begin{aligned}
< h, L_X G >_G &= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} G^{ij} G^{kl} (L_X G)_{ik} h_{jl} \\
&= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{2} G^{ij} G^{kl} \, G(\nabla_{\partial_i} X, \partial_k) \, h_{jl} \\
&= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{2} G^{ij} G^{kl} \left\{ \sum_{a,b=1}^{2} X^a \Gamma^b_{ia} G_{bk} + \sum_{a=1}^{2} (\partial_i X^a) G_{ak} \right\} h_{jl} \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} \left\{ X^k \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik} h_{jl} + (\partial_i X^k) h_{jk} \right\}
\end{aligned}$$

である．第二項は

$$\begin{aligned}
\delta_G h(X) &= -\sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} (\nabla_{\partial_i} h)(\partial_j, X) \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} \left\{ \partial_i (X^k h_{jk}) - X^k h(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) - h(\partial_j, \nabla_{\partial_i} X) \right\} \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} X^k \left(\partial_i h_{jk} - \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ij} h_{lk} - \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ik} h_{jl} \right)
\end{aligned}$$

である．よって右辺は

$$\begin{aligned}
&< h, L_X G >_{G(x)} - 2\delta_G h(X) \\
= \; & 2 \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} (\partial_i X^k) h_{jk} + 2 \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} X^k \left(\partial_i h_{jk} - \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ij} h_{lk} \right)
\end{aligned}$$

となる．

次に，主張のベクトル場 Z を具体的に構成する．まず，h と X から定まるベクトル場を構成する．Σ 上の $(0,1)$ テンソル場 α を

$$\alpha(\cdot) := h(X, \cdot)$$

によって定める．G に関する共役を考えることで，ベクトル場 $\alpha^\sharp$ で任意の Σ 上のベクトル場 Y に対して

$$\alpha(Y) = G(\alpha^\sharp, Y)$$

を満たすものが唯一存在する．ここで $\alpha^\sharp$ の局所表示を求めると

$$\alpha^\sharp = \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{jk} h_{ij} X^i \partial_k$$

となる．

次に $\mathrm{div}\alpha^\sharp$ を計算すると, ∇ と $\sharp$ の可換性に注意すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\alpha^\sharp &:= \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} G\left(\nabla_{\partial_i}(\alpha^\sharp), \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} G\left((\nabla_{\partial_i}\alpha)^\sharp, \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij}\, (\nabla_{\partial_i}\alpha)(\partial_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} \{\partial_i(h(X, \partial_j)) - h(X, \nabla_{\partial_i}\partial_j)\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} \left[\sum_{k=1}^{2} \left\{(\partial_i X^k) h_{kj} + X^k(\partial_i h_{kj})\right\} - \sum_{k,l=1}^{2} X^k \Gamma_{ij}^l h_{kl}\right] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} (\partial_i X^k) h_{kj} + \sum_{i,j,k=1}^{2} G^{ij} X^k \left(\partial_i h_{kj} - \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l h_{kl}\right)
\end{aligned}$$

を得る．h の対称性を用いて, 右辺の局所表示と比較すると,

$$2\ \mathrm{div}\alpha^\sharp = < h, L_X G >_{G(x)} -2\ \delta_G h(X)$$

が成り立つ．Z として $\alpha^\sharp$ をとればよい． □

系 2.4. 任意の Σ 上のベクトル場 X に対して

$$\langle h, L_X G\rangle_{L^2(G)} = 2\,\langle \delta_G h, X\rangle_{L^2(G)} \tag{2.7}$$

が成立する．ただし, 右辺は

$$\langle \delta_G h, X\rangle_{L^2(G)} = \int_\Sigma \delta_G h(X)\, d\mu_G$$

であり, $(0,1)$ テンソル場とベクトル場に対する G での L^2 計量である．

証明. 補題 2.3 の両辺を Σ で積分すると, 左辺は Gauss の発散定理によって消滅する．よって主張が成り立つ． □

注意 6. 前節では $(0,2)$ テンソル場に対する L^2 計量のみを定義したが, $(0,1)$ テンソル場やベクトル場に対する L^2 計量も自然に定義できる. すなわち, Σ 上の $(0,1)$ テンソル場 α, β, Σ 上のベクトル場 X, Y に対して各点 $G \in \mathcal{M}$ での L^2 計量はそれぞれ

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(G)} := \int_\Sigma \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} \alpha_i \beta_j \, d\mu_G, \quad \langle X, Y \rangle_{L^2(G)} := \int_\Sigma G(X, Y) \, d\mu_G$$

によって定まる. ただし, $\alpha_i := \alpha(\partial_i), \beta_j := \beta(\partial_j)$ である. ここで G に関する共役記号 $\sharp$ を用いると,

$$\sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} \alpha_i \beta_j = \alpha(\beta^\sharp) = \beta(\alpha^\sharp) = G(\alpha^\sharp, \beta^\sharp)$$

が成立し, 上の二つの L^2 計量は対応しあう. また, $(0,1)$ テンソル場とベクトル場の G での L^2 計量は

$$\langle \delta_G h, X \rangle_{L^2(G)} := \int_\Sigma G\left((\delta_G h)^\sharp, X\right) \, d\mu_G = \int_\Sigma \delta_G h(X) \, d\mu_G$$

と定義できるため, 上の主張内のただし書きは自然な等式である. ちなみに Σ 上の関数 f, g に対する G での L^2 計量は

$$\langle f, g \rangle_{L^2(G)} := \int_\Sigma f g \, d\mu_G$$

と定義できる.

ここで対称 $(0,2)$ テンソル場 h が

$$\delta_G h(X) = 0$$

を満たすとき, h は G に関して **Divergence free** または G-**Divergence free** という. この概念は系 2.4 によって先に定義した横断性と同値になることがすぐにわかる. すなわち,

$$\delta_G h(X) = 0 \Leftrightarrow \langle h, L_X G \rangle_{L^2(G)} = 0$$

である. よってこの意味で, Divergence free は Transverce とも表現される.

系 2.4 から任意の $(0,2)$ テンソル場 h に対して

$$\langle h, \delta_G^* X \rangle_{L^2(G)} = \langle \delta_G h, X \rangle_{L^2(G)} = \frac{1}{2} \langle h, L_G X \rangle_{L^2(G)}$$

であるから, 余微分作用素の L^2 共役は

$$\delta_G^* X = \frac{1}{2} L_X G \tag{2.8}$$

とかける. また次の補題から, $(0,1)$ テンソル場や関数に対する余微分作用素の L^2 共役も明示的にかける.

補題 2.5. Σ 上の $(0,1)$ テンソル場 α と Σ 上の関数 f に対して

$$\delta_G^* \alpha = \frac{1}{2} L_{\alpha^\sharp} G, \quad \delta_G^* f = df$$

が成立する.

証明. 注意 6 での定義にしたがってそれぞれ計算する. Σ 上の任意の対称 $(0,2)$ テンソル場 h に対して,

$$\begin{aligned}
\langle h, \delta_G^* \alpha \rangle_{L^2(G)} &= \langle \delta_G h, \alpha \rangle_{L^2(G)} \\
&= \int_\Sigma \delta_G h(\alpha^\sharp)\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma \frac{1}{2} < h, L_{\alpha^\sharp} G >_G - \mathrm{div}_G((h(\alpha^\sharp, \cdot))^\sharp)\, d\mu_G \\
&= \langle h, \frac{1}{2} L_{\alpha^\sharp} G \rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

が成立する.

次に, 任意の Σ 上の $(0,1)$ テンソル場 β をに対して,

$$\begin{aligned}
\langle \beta, \delta_G^* f \rangle_{L^2(G)} &= \langle \delta_G \beta, f \rangle_{L^2(G)} \\
&= \int_\Sigma f\, \delta_G \beta\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma -f \sum_{i,j=1}^2 G^{ij} (\nabla_{\partial_i} \beta)(\partial_j)\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma -f \sum_{i,j=1}^2 G^{ij} G((\nabla_{\partial_i} \beta)^\sharp, \partial_j)\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma -f \sum_{i,j=1}^2 G^{ij} G(\nabla_{\partial_i} \beta^\sharp, \partial_j)\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma -f\, \mathrm{div}_G \beta^\sharp\, d\mu_G \\
&= \int_\Sigma G(\mathrm{grad}_G f, \beta^\sharp)\, d\mu_G = \langle \beta, df \rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

が成立する. □

最後に Lichnerowicz 作用素の L^2 共役を求める．実は今までの準備の下で, すぐに計算によって求めることができる．この作用素は後の L^2 分解定理で述べるように, $T_G\mathcal{M}$ の元を $T_G\mathcal{M}_{-1}$ に対する直交成分, つまり, $(T_G\mathcal{M}_{-1})^\perp$ の元に移す重要な作用素である．

補題 2.6. Σ 上の C^2 級関数 f に対して,

$$\mathcal{L}_G^* f = \{(-\Delta_G - \kappa)f\}G + \mathrm{Hess}_G f$$

が成立する．ただし, $\mathrm{Hess}_G f$ は Σ 上のベクトル場 X, Y に対して

$$\mathrm{Hess}_G f(X,Y) := G(\nabla_X(\mathrm{grad}_G f), Y)$$

によって定まるものとする．

証明. Laplace 作用素 Δ_G は L^2 共役に関して自己共役作用素であるから

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{L}_G h\rangle_{L^2(G)} &= \langle f, (-\Delta_G - \kappa) Tr_G h\rangle_{L^2(G)} + \langle f, \delta_G\delta_G h\rangle_{L^2(G)} \\
&= \langle (-\Delta_G - \kappa) f, Tr_G h\rangle_{L^2(G)} + \langle f, \delta_G\delta_G h\rangle_{L^2(G)} \\
&= \langle (-\Delta_G - \kappa) f\, G, h\rangle_{L^2(G)} + \langle f, \delta_G\delta_G h\rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

が成立する．問題は第二項であるが, 実際は等式

$$\mathrm{Hess}_G f = \frac{1}{2} L_{[(df)^\sharp]} G$$

を示せばよい．なぜなら, これが示されると

$$\begin{aligned}
\langle f, \delta_G\delta_G h\rangle_{L^2(G)} &= \langle \delta_G^*\delta_G^* f, h\rangle_{L^2(G)} \\
&= \langle \delta_G^*(-df), h\rangle_{L^2(G)} \\
&= \left\langle \frac{1}{2} L_{[(df)^\sharp]} G, h \right\rangle_{L^2(G)} \\
&= \langle \mathrm{Hess}_G f, h\rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

が成立するからである．

以下, $\mathrm{Hess}_G f = \frac{1}{2} L_{[(df)^\sharp]} G$ を示す．$(df)^\sharp = \mathrm{grad}_G f$ であるから, 任意の Σ 上のベクトル場 X, Y に対して

$$\begin{aligned}
L_{[(df)^\sharp]} G(X,Y) &= G(\nabla_X(\mathrm{grad}_G f), Y) + G(X, \nabla_Y(\mathrm{grad}_G f)) \\
&= \mathrm{Hess}_G f(X,Y) + \mathrm{Hess}_G f(Y,X) \\
&= 2\,\mathrm{Hess}_G f(X,Y)
\end{aligned}$$

が成立する. X, Y は任意だったので,

$$\mathrm{Hess}_G f = \frac{1}{2} L_{[(df)^\sharp]} G$$

を得る. $\square$

2.4 部分多様体としての $\mathcal{M}_{-1}$

本節では, $\mathcal{M}_{-1}$ が $\mathcal{M}$ の部分多様体であることを証明する. 具体的には各計量の断面曲率を $\mathcal{M}$ 上の関数とみたときの正則値を用いて, 部分多様体になることを示す. 最後に $\mathcal{M}_{-1}$ の接空間について関連する命題を述べ, $\mathcal{M}_{-1}$ の接ベクトルであるTT テンソルを定義する.

リーマン計量 G の断面曲率 κ_G を用いて, $\mathcal{M}$ から $C^\infty(\Sigma)$ への写像 K を

$$K(G) := \kappa_G$$

によって定める. 計量 G が滑らかに変化するとき, K も滑らかに変化する (2.2 節). すなわち, K の微分が定義できる.

補題 2.7. K を上で定めた写像とし, $G_0 \in \mathcal{M}$ とする. このとき, G_0 の任意の無限小変形 h に対して

$$D_{G_0} K(h) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{G_0} h$$

が成立する.

証明. 写像の微分の定義に基づいて計算する. 任意の $h \in T_{G_0}\mathcal{M}$ に対して, G_0 を通 h の積分曲線 G_t をとると

$$\begin{aligned} D_{G_0} K(h) &:= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} K(G_t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \kappa_t \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{2} (G_t)^{ij} (R_t)_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{G_0} h \end{aligned}$$

を得る. $\square$

この写像 K の性質で重要なことは次のことである.

補題 2.8. f_{-1} を Σ 上で -1 をとる定値関数とする．このとき，$K^{-1}(f_{-1})$ の任意の点 G に対して K の微分 D_GK は全射になる．

証明. $G \in K^{-1}(f_{-1})$ を任意に固定する．上の補題から $\mathcal{L}_G$ の全射性を示せばよい．まず，L^2 共役作用素 $\mathcal{L}_G^*$ の単射性を示す．$f \in \mathrm{Ker}\mathcal{L}_G^*$ を任意にとると，

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \mathcal{L}_G^* f, fG\rangle_{L^2(G)} \\
&= \int_\Sigma f\,\mathrm{tr}_G(\mathcal{L}_G^* f)\,d\mu_G \\
&= \int_\Sigma f\,[(-\Delta_G+1)f]\,\mathrm{tr}_G G + f\,\mathrm{tr}_G(\mathrm{Hess}_G f)\,d\mu_G \\
&= \int_\Sigma 2f\,(-\Delta_G+1)f + f\,\Delta_G f\,d\mu_G \\
&= \int_\Sigma -f\Delta_G f + 2f^2\,d\mu_G \\
&= \int_\Sigma G(\mathrm{grad}_G f, \mathrm{grad}_G f) + 2f^2\,d\mu_G
\end{aligned}
$$

を得る．よって被積分関数が非負値であるから，$f \equiv 0$ が成立する．$\mathcal{L}_G^*$ は線形写像であって $\mathrm{Ker}\mathcal{L}_G^* = \{0\}$ となるから，$\mathcal{L}_G^*$ は単射である．

次に $\mathcal{L}_G$ 全射性を示すが，L^2 計量によって

$$C^\infty(\Sigma) = \mathrm{Im}\mathcal{L}_G \oplus_{L^2} (\mathrm{Im}\mathcal{L}_G)^\perp$$

と直和分解できるので，$(\mathrm{Im}\mathcal{L}_G)^\perp = \{0\}$ を示せばよい．$g \in (\mathrm{Im}\mathcal{L}_G)^\perp$ を任意にとると，$\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^* g \in \mathrm{Im}\mathcal{L}_G$ であるから

$$0 = \langle g, \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^* g\rangle_{L^2(G)} = \langle \mathcal{L}_G^* g, \mathcal{L}_G^* g\rangle_{L^2(G)}$$

が成立し，L^2 計量の正定値性から

$$\mathcal{L}_G^* g = 0$$

が成立する．よって $(\mathrm{Im}\mathcal{L}_G)^\perp \subset \mathrm{Ker}\mathcal{L}_G^*$ となる．ここで $\mathcal{L}_G^*$ は単射であったから

$$(\mathrm{Im}\mathcal{L}_G)^\perp = \{0\}$$

となって，$\mathcal{L}_G$ が全射であることがわかる． □

この補題から f_{-1} は K の正則値になり，また K の定義から $\mathcal{M}_{-1} = K^{-1}(f_{-1})$ であるので，$\mathcal{M}_{-1}$ は $\mathcal{M}$ の部分多様体になる．以上から，$\mathcal{M}_{-1}$ に多様体構造が入り，その接空間を考えることができる．

最後に，Divergence free 性を持つ無限小変形についての命題を述べる．

命題 2.9. $G \in \mathcal{M}_{-1}$ とし, G_t を $G_0 = G$ を満たす $\mathcal{M}$ 上の滑らかな曲線とする．さらに G の無限小変形 $h := \dot{G}_0$ が *G-Divergence free* であると仮定する．このとき, h が定曲率変形であることと *G-Trace free* であることは同値である.

証明. h が G に関して Divergence free であることを用いると, 式 (2.4) から

$$\mathcal{L}_G h = (-\Delta_G + 1)\mathrm{tr}_G h$$

が成立する．$\mathrm{tr}_G h = 0$ ならば $\mathcal{L}_G h = 0$ であることはすぐにわかる.

逆に $\mathcal{L}_G h = 0$ を仮定すると, Laplace 作用素が負であることから

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma \{(-\Delta_G + 1)\mathrm{tr}_G h\}\, \mathrm{tr}_G h \, d\mu_G \\ &= \int_\Sigma G(\mathrm{grad}_G(\mathrm{tr}_G h), \mathrm{grad}_G(\mathrm{tr}_G h)) + (\mathrm{tr}_G h)^2 \, d\mu_G \end{aligned}$$

が成立し, $\mathrm{tr}_G h = 0$ がわかる. □

G の無限小変形 h が G に関して Trace free かつ Divergence free であるとき, h を G に関して **TT テンソル**であるという．これは Lichnerowicz 作用素の定義もしくは上の命題から, すぐに G の定曲率変形であることがわかる．またここで「テンソル」と表現しているのは $\mathcal{M}_{-1}$ 上のテンソルという意味であり, Σ 上では

$$\mathrm{tr}_G h = 0, \quad \delta_G h = 0$$

を満たす対称 $(0,2)$ テンソル**場**である.

2.5 Weil-Petersson 計量

本節では, $\mathcal{M}_{-1}$ の接空間の垂直成分, 水平成分とよばれる二つの部分空間を述べ, 関連する定理を述べる．この定理から水平成分が TT テンソルの空間として特徴付けられることを述べる．さらに射影を通じて水平成分の元が Teichmüller 空間の接ベクトルと対応することから, Weil-Petersson 計量を L^2 計量を用いて定義する.

Π を $\mathcal{M}_{-1}$ から $\mathcal{T}_p$ への標準的な射影とする．各 $G \in \mathcal{M}_{-1}$ に対して

$$\mathcal{V}_G := \{h \in T_G\mathcal{M}_{-1}\, ;\, d\Pi_G(h) = 0\} = ker(d\Pi_G) \tag{2.9}$$

$$\mathcal{H}_G := \{h \in T_G\mathcal{M}_{-1}\, ;\, v \in \mathcal{V}_G \Rightarrow \langle h, v\rangle_{L^2(G)} = 0\} = (\mathcal{V}_G)^\perp \tag{2.10}$$

を定める. このとき, $\mathcal{V}_G$ を $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の**垂直成分**, $\mathcal{H}_G$ を $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の**水平成分**という. このとき定め方から

$$T_G\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{H}_G \oplus_{L^2} \mathcal{V}_G$$

である. 次に, 垂直成分についての定理を述べる.

定理 2.10 (垂直成分の表示, [15])**.** *$T_G\mathcal{M}_{-1}$ の垂直成分はベクトル場による G の Lie 微分全体の空間に一致する. すなわち,*

$$\mathcal{V}_G = \{L_X G\,;\, X \text{ は } \Sigma \text{ 上のベクトル場}\}$$

が成立する.

注意 7. この定理の証明のスケッチを述べる. まず, $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ が $\mathcal{M}_{-1}$ に自由に作用することから, G の $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 作用における軌道空間は $\mathcal{M}_{-1}$ の部分多様体になる. よって軌道空間の G での接空間を考えると $d\Pi_G$ の kernel に等しい. さらにこの接空間が G のベクトル場による Lie 微分全体の空間に一致することから, 垂直成分は G のベクトル場による Lie 微分全体の空間で表せることがわかる. 詳しくは [15, pp.38-45] を参照いただきたい.

補題 2.11 (水平成分の表示)**.** *$T_G\mathcal{M}_{-1}$ の水平成分は G に関する TT テンソルからなる. すなわち,*

$$h \in \mathcal{H}_G \Leftrightarrow \mathrm{tr}_G h = 0\,,\, \delta_G h = 0$$

である.

証明. $h \in \mathcal{H}_G$ を任意にとる. このとき, 任意の $v \in \mathcal{V}_G$ に対して

$$\langle h, v\rangle_{L^2(G)} = 0$$

を満たす. 定理 2.10 より, Σ 上のベクトル場 X が一意的に存在して

$$\delta_G h(X) = \langle h, L_X G\rangle_{L^2(G)} = 0$$

を満たす. よって h は divergence-free である. さらに h は定曲率変形であるから, 命題 2.9 が適用できて

$$\mathrm{tr}_G h = 0$$

を得る．したがって, h は G に関する TT テンソルである．

逆に h が G に関する TT テンソルであるとすると, 任意の Σ 上のベクトル場 Y に対して

$$0 = \delta_G h(Y) = \langle h, L_Y G\rangle_{L^2(G)}$$

を満たすので, 定理 2.10 より任意の $v \in \mathcal{V}_G$ に対して

$$\langle h, v\rangle_{L^2(G)} = 0$$

を満たす． □

以上の準備の下で, Weil-Petersson 計量を次のように定義することができる．なぜなら Π の G での微分を考えると, $\mathcal{T}_p$ の接ベクトルは射影を通じて水平成分の元が対応するからである (cf. [15, Theorem 5.1.1])．

定義 2.12 (Weil-Petersson 計量, [17])**.** $\sigma \in \mathcal{T}_p$ をとる．$v, w \in T_\sigma \mathcal{T}_p$ に対して

$$(g_{wp})_\sigma(v, w) := \langle h_v, h_w\rangle_{L^2(G)}$$

と定める．ただし, G は σ の代表元で h_v, h_w は v, w に対応する $\mathcal{H}_G$ の元, すなわち, G に関する *TT* テンソルである．

補題 2.13. 上の定義は *well-defined* である．つまり, 任意の二点 $G, G' \in \Pi^{-1}(\tilde{x})$ と任意の $v, w \in T_\sigma \mathcal{T}_p$ に対して

$$\langle h_v, h_w\rangle_{L^2(G)} = \langle h'_v, h'_w\rangle_{L^2(G')}$$

を満たす．ただし, $v = d\Pi_G(h_v) = d\Pi_{G'}(h'_v)$, $w = d\Pi_G(h_w) = d\Pi_{G'}(h'_w)$ とする．

証明. G, G' は同じ同値類に含まれるので, ある $\phi \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ があって

$$G' = \phi^* G$$

を満たす．ϕ は水平成分 $\mathcal{H}_G$ から $\mathcal{H}_{G'}$ への写像 Φ を

$$\Phi(h) := \phi^* h, \quad h \in \mathcal{H}_G$$

によって誘導する．この写像 Φ は全単射である．なぜなら ϕ は逆写像 ϕ^{-1} を持つので, Φ の逆写像が

$$\Phi^{-1}(h') := (\phi^{-1})^* h' = (\phi^*)^{-1} h', \quad h' \in \mathcal{H}_{G'}$$

によって定まるからである.

次に, $\phi^* h$ が G' に関する TT テンソルになることを示す. $h \in \mathcal{H}_G$ を任意にとると, h は G に関する TT テンソルである. 局所座標による行列表示を用いると,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left[(\phi^* G)^{-1}(\phi^* h)\right] &= \operatorname{Tr}\left[(J\phi)^{-1} G^{-1}\,{}^t\!(J\phi)^{-1}\,{}^t\!(J\phi) h (J\phi)\right] \\ &= \operatorname{Tr}\left[(J\phi)^{-1} G^{-1} h (J\phi)\right] \\ &= \operatorname{Tr}\left[G^{-1} h\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立する. よって, $\phi^* h$ は G'-Trace free である.

一方, 任意の Σ 上のベクトル場 X に対して

$$\begin{aligned}\langle \delta_{\phi^* G} \phi^* h, X \rangle_{L^2(\phi^* G)} &= \langle \phi^* h, \delta^*_{\phi^* G} X \rangle_{L^2(\phi^* G)} \\ &= \langle \phi^* h, \frac{1}{2} L_X(\phi^* G) \rangle_{L^2(\phi^* G)} \\ &= \langle \phi^* h, \frac{1}{2} \phi^*(L_X G) \rangle_{L^2(\phi^* G)} \\ &= \phi^* \langle h, \frac{1}{2} L_{\phi^* X} G \rangle_{L^2(G)} \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立する. X の任意性より, $\delta_{\phi^* G = G'} \phi^* h = 0$ を得る. 第三等式で $L_X(\phi^* G) = \phi^*(L_{\phi_* X} G)$ を用いたが, これは Levi-Civita 接続 ∇ と等長写像 ϕ の関係式

$$\phi_*(\nabla^G_Y Z) = \nabla^{\phi^* G}_{\phi_* Y} \phi_* Z$$

から従う. つまり, 任意の Σ 上のベクトル場 Y, Z に対して

$$\begin{aligned}\{L_X(\phi^* G)\}(Y, Z) &= (\phi^* G)(\nabla^{G'}_Y X, Z) + (\phi^* G)(Y, \nabla^{G'}_Z X) \\ &= G(\phi_*(\nabla^G_Y X), \phi_* Z) + G(\phi_* Y, \phi_*(\nabla^G_Z X)) \\ &= L_{\phi_* X} G(\phi_* Y, \phi_* Z) \\ &= \{\phi^*(L_{\phi_* X} G)\}(Y, Z)\end{aligned}$$

が成立する.

よって仮定の $h_v \in \mathcal{H}_G$ に対する積分曲線 G_t をとると,

$$\begin{aligned}d\Pi_{G'}(\Phi(h_v)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi(\phi^* G_t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi(G_t) \\ &= d\Pi_G(h_v)\end{aligned}$$

が成立する. $v = d\Pi_G(h_v) = d\Pi_{G'}(h'_v)$ を満たすので,

$$d\Pi_{G'}(h'_v - \Phi(h_v)) = d\Pi_{G'}(h'_v) - d\Pi_G(h_v) = 0$$

が成立する. 特に $d\Pi_{G'}$ の $\mathcal{H}_{G'}$ への制限は単射であるから

$$h'_v = \Phi(h_v) = \phi^* h_v$$

が得られる. 同様にして, $h'_w = \Phi(h_w) = \phi^* h_w$ も得られる. したがって

$$\begin{aligned}
\langle h'_v, h'_w \rangle_{L^2(G')} &= \langle \phi^* h_v, \phi^* h_w \rangle_{L^2(\phi^* G)} \\
&= \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[(\phi^* G)^{-1} (\phi^* h_v) (\phi^* G)^{-1} (\phi^* h_w) \right] d\mu_{\phi^* G} \\
&= \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[G^{-1} h_v G^{-1} h_w \right] d\mu_G \\
&= \langle h_v, h_w \rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

が成立する. 第三等式で $d\mu_{\phi^* G} = d\mu_G$ を用いたが, これは行列の det について

$$\det[(\phi^* G)] = \det\left[{}^t(J\phi) G (J\phi) \right] = \det[G]$$

が成立することから従う. □

上で定めた計量 g_{wp} を **Weil-Petersson 計量**といい, これは $\mathcal{T}_p$ 上のリーマン計量になる. さらに Weil-Petersson 計量は定め方から, G に関する TT テンソル h_v, h_w に対して

$$(\Pi^* g_{wp})_G(h_v, h_w) = g_{wp(\tilde{x})}(d\Pi_G(h_v), d\Pi_G(h_w)) = \langle h_v, h_w \rangle_{L^2(G)}$$

を満たす. すなわち, Π はリーマン沈めこみになる.

2.6 L^2 分解定理

本節では, $\mathcal{M}$ の接空間の L^2 計量に関する分解定理を述べる. この定理から対称 $(0,2)$ テンソル場から TT テンソルが得られることを示す.

定理 2.14 (L^2 分解定理, [17, Theorem 3.3]). *$G \in \mathcal{M}$ とし, $h \in T_G\mathcal{M}$ とする. このとき, G と h に依存する Σ 上のベクトル場 X と滑らかな関数 f が一意的に存在して,*

$$h - L_X G - \mathcal{L}_G^* f \tag{2.11}$$

は G に関する TT テンソルになる.

注意 8. この定理は L^2 計量による直和分解

$$T_G\mathcal{M} = (T_G\mathcal{M})^{TT} \oplus_{L^2} \{L_X G \in T_G\mathcal{M}\,;\, X \in \mathfrak{X}(\Sigma)\} \oplus_{L^2} (T_G\mathcal{M}_{-1})^{\perp}$$

ができることを意味する. ただし

$$(T_G\mathcal{M})^{TT} := \{h \in T_G\mathcal{M}\,;\, \mathrm{tr}_G h = 0, \delta_G h = 0\}$$

である. 前節で定義した $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の水平成分と垂直成分を用いると

$$T_G\mathcal{M} = \mathcal{H}_G \oplus_{L^2} \mathcal{V}_G \oplus_{L^2} (T_G\mathcal{M}_{-1})^{\perp}$$

に他ならない.

定理の証明の前に, ひとつ補題を述べる

補題 2.15. *Lichnerowicz* 作用素 $\mathcal{L}_G$ と余微分作用素 δ_G に対して, 次の二つが成立する：

1. 任意のベクトル場 Z に対して, $\mathcal{L}_G(L_Z G) = 0$.
2. 任意の C^2 級関数 ϕ に対して, $\delta_G(\mathcal{L}_G^* \phi) = 0$.

証明. まず, 1 を示す. $L_Z G$ は特に $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の元であるから,

$$\mathcal{L}_G(L_Z G) = 0$$

を満たす. 次に 2 を示す. 任意の Σ 上の $(0,1)$ テンソル場 α をとると,

$$\begin{aligned}
\langle \delta_G(\mathcal{L}_G^*\phi), \alpha\rangle_{L^2(G)} &= \langle \mathcal{L}_G^*\phi, \delta_G^*\alpha\rangle_{L^2(G)} \\
&= \left\langle \phi, \mathcal{L}_G\left(\frac{1}{2}L_{\alpha^\sharp}G\right)\right\rangle_{L^2(G)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立する. したがって α の任意性から

$$\delta_G(\mathcal{L}_G^*\phi) = 0$$

を得る. □

定理 2.14 の証明. $h \in T_G\mathcal{M}$ を任意にとる. このとき,

$$h^{TT} := h - L_X G - \mathcal{L}_G^* f$$

によって定まる $(0,2)$ テンソルは G に関する TT テンソルになる. ただし, 式中の Σ 上のベクトル場 X と関数 f は

$$\begin{aligned} \delta_G h - 2\delta_G\delta_G^* X &= 0, \quad (2.12) \\ \mathcal{L}_G h - \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^* f &= 0 \quad (2.13) \end{aligned}$$

を満たすものである.

まず, ベクトル場 X と関数 f が h に対してそれぞれ一意的に定まることを示す. $\delta_G\delta_G^*$ と $\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*$ はともに定義から自己共役作用素である. 一意性は $\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*$ と $\delta_G\delta_G^*$ がそれぞれ全単射であることを示せばよいが, 実は自明核を持つことを示せば十分である. なぜなら自明核を持つ自己共役作用素は, Fredholm の択一定理 [12, 系 3.53] が適用できて, $\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*$ と $\delta_G\delta_G^*$ はそれぞれ全射になる.

よって以下では, $\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*$ と $\delta_G\delta_G^*$ が自明核を持つことを示す. $Y \in \mathrm{Ker}(\delta_G\delta_G^*)$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \delta_G\delta_G^* Y, Y\rangle_{L^2(G)} \\ &= \langle \delta_G^* Y, \delta_G^* Y\rangle_{L^2(G)} \\ &= \frac{1}{4}\langle L_Y G, L_Y G\rangle_{L^2(G)} \\ &\Leftrightarrow L_Y G = 0 \end{aligned}$$

となる. G が双曲計量であることから Yano-Bochner の定理 [19, Theorem 3.3] によって, $L_Y G = 0$ となる非自明なベクトル場は存在しないので

$$\mathrm{Ker}(\delta_G\delta_G^*) = \{0\}$$

を得る. 一方, $g \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*)$ をとると,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^* g, g\rangle_{L^2(G)} \\ &= \langle \mathcal{L}_G^* g, \mathcal{L}_G^* g\rangle_{L^2(G)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_G^* g = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで補題 2.8 の証明中で, $\mathcal{L}_G^*$ は単射であることはすでに示されているので

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*) = \{0\}$$

を得る．よって, $\mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*$ と $\delta_G\delta_G^*$ はそれぞれ自明核を持つ自己共役作用素である．

次に, $(T_G\mathcal{M}_{-1})^\perp$ の元について述べる．任意の $h' \in T_G\mathcal{M}_{-1}$ をとると $\mathcal{L}_Gh' = 0$ であるから, 任意の C^2 級関数 ϕ に対して

$$\langle \mathcal{L}_G^*\phi, h'\rangle_{L^2(G)} = \langle \phi, \mathcal{L}_Gh'\rangle_{L^2(G)} = 0$$

が成立する．よって $\mathcal{L}_G^*f \in (T_G\mathcal{M}_{-1})^\perp$ であることがわかる．

次に h^{TT} と各成分との L^2 直交性を示す．それぞれ計算を行うと,

$$\begin{aligned}
& \langle h^{TT}, L_XG\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle h, L_XG\rangle_{L^2(G)} - \langle L_XG, L_XG\rangle_{L^2(G)} - \langle \mathcal{L}_G^*f, L_XG\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & 2\,\langle h, \delta_G^*X\rangle_{L^2(G)} - 4\,\langle \delta_G^*X, \delta_G^*X\rangle_{L^2(G)} - \langle f, \mathcal{L}_G(L_XG)\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & 2\,\langle \delta_Gh - 2\,\delta_G\delta_G^*X, X\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle h^{TT}, \mathcal{L}_G^*f\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle h, \mathcal{L}_G^*f\rangle_{L^2(G)} - \langle L_XG, \mathcal{L}_G^*f\rangle_{L^2(G)} - \langle \mathcal{L}_G^*f, \mathcal{L}_G^*f\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle \mathcal{L}_Gh, f\rangle_{L^2(G)} - \langle \mathcal{L}_G(L_XG), f\rangle_{L^2(G)} - \langle f, \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*f\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle \mathcal{L}_Gh - \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*f, f\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

となる．途中の等式に補題 2.15 とベクトル場 X と関数 f の満たす条件を用いた．

最後に h^{TT} が G に関する TT テンソルになることを示す．G に関して Divergence free であることは直接計算で

$$\begin{aligned}
\delta_Gh^{TT} &= \delta_Gh - \delta_G(L_XG) - \delta_G(\mathcal{L}_G^*f) \\
&= \delta_Gh - 2\,\delta_G(\delta_G^*X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が得られることから従う．途中の等式に補題 2.15 と X の条件を用いた．さらに h^{TT} が G の定曲率変形であることも直接計算で,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Gh^{TT} &= \mathcal{L}_Gh - \mathcal{L}_G(L_XG) - \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*f \\
&= \mathcal{L}_Gh - \mathcal{L}_G\mathcal{L}_G^*f \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立することから従う．途中の等式に補題 2.15 と f の条件を用いた．よって命題 2.9 を適用すると, h^{TT} は G に関して Trace free になる． □

注意 9. 原論文 [17] ではベクトル場 X の条件式は

$$-\delta_G h = \delta_G \delta_G^* X$$

となっているが, 本論文では計算をする中で条件式の誤植を修正した.

この定理によって, $T_G\mathcal{M}$ から $(T_G\mathcal{M}_{-1})^\perp$ への**直交射影** P_G を

$$P_G(h) := \mathcal{L}_G^* f \tag{2.14}$$

によって定めることができる．ただし, f はを条件式 (2.13) 満たす C^2 級関数である．$\mathcal{L}_G$ の線形性と条件式 (2.13) の解の一意性から, 直交射影 P_G も線形写像になることがわかる.

3　Levi-Civita 接続

この章では, L^2 計量から定まる Levi-Civita 接続を定義し, 定値ベクトル場に対する明示的な表示を与える．さらに Weil-Pertersson 計量から定まる Levi-Civita 接続を考え, Teichmüller 空間上の測地線を定義する．この測地線に対応する $\mathcal{M}_{-1}$ 上の曲線である水平リフトの存在を述べ, その二階微分を求める．

3.1　計量空間上の Levi-Civita 接続

H が $h \in T_G\mathcal{M}$ を始点とする定値ベクトル場であるとは,

$$\forall G' \in \mathcal{M}\,;\, H_{G'} = h$$

を満たすことである．実際, H は $\mathcal{M}$ 上のベクトル場になる．なぜなら, $\mathcal{M}$ の各点での接空間は空間として違いがない, つまり, 接ベクトルが計量に依存しない対称 $(0,2)$ テンソル場であるからである．

命題 3.1 (cf. [17, Lemma 3.1])**.** *D を $\mathcal{M}$ 上の L^2 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ から定まる Levi-Civita 接続する．$G \in \mathcal{M}$ とし, $h_1, h_2 \in T_G\mathcal{M}$ をとる．H_1, H_2 を h_1, h_2 を始点とする定値ベクトル場とする．このとき, 接続 D について*

$$\begin{aligned}(D_{H_1}H_2)_G &= -\frac{1}{2}(h_1G^{-1}h_2 + h_2G^{-1}h_1) \\ &+ \frac{1}{4}(< h_1, G >_G h_2 + < h_2, G >_G h_1 - < h_1, h_2 >_G G)\end{aligned} \tag{3.1}$$

が成立する．ただし, $hG^{-1}h'$ は局所座標 (x^1, x^2) によって

$$hG^{-1}h' = \sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k,l=1}^{2} h_{ik}G^{kl}h'_{lj}dx^idx^j$$

と表されるテンソル場とする．

証明. $h_3 \in T_G\mathcal{M}$ を任意にとり, H_3 を h_3 を始点とする定値ベクトル場とする．このとき Lie bracket$[H_i, H_j]$ は常に 0 であるから, Levi-Civita 接続は

$$\langle D_{H_1}H_2, H_3\rangle_{L^2} = \frac{1}{2}\left\{H_1\langle H_2, H_3\rangle_{L^2} + H_2\langle H_3, H_1\rangle_{L^2} - H_3\langle H_1, H_2\rangle_{L^2}\right\} \tag{3.2}$$

とかける. 以下, この右辺を計算する. まず, 式 (3.2) の第一項を計算する. G_t を G を通る h_1 の積分曲線とすると,

$$
\begin{aligned}
& (H_1)_G\langle H_2, H_3\rangle_{L^2(\cdot)} \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(G_t^{-1}h_2G_t^{-1}h_3)\,d\mu_{G_t} \\
= \ & \int_\Sigma \mathrm{Tr}[(-G^{-1}h_1G^{-1})h_2G^{-1}h_3 + G^{-1}h_2(-G^{-1}h_1G^{-1})h_3]\,d\mu_G \\
+ \ & \int_\Sigma \mathrm{Tr}(G^{-1}h_2G^{-1}h_3)\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}_G h_1\,d\mu_G \\
= \ & \langle -h_1G^{-1}h_2, h_3\rangle_{L^2(G)} + \langle -h_2G^{-1}h_1, h_3\rangle_{L^2(G)} + \left\langle \frac{1}{2} < h_1, G >_G h_2, h_3\right\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle -h_1G^{-1}h_2 - h_2G^{-1}h_1 + \frac{1}{2} < h_1, G >_G h_2, h_3\rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}
$$

を得る. 式 (3.2) の第二項は第一項の添字の取りかえるだけでよい. 第三項は行列のトレースの可換性と L^2 計量の線形性を用いて

$$
\begin{aligned}
& (H_3)_G\langle H_1, H_2\rangle_{L^2(\cdot)} \\
= \ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(G_t^{-1}h_1G_t^{-1}h_2)\,d\mu_{G_t} \\
= \ & \int_\Sigma \mathrm{Tr}[(-G^{-1}h_3G^{-1})h_1G^{-1}h_2 + G^{-1}h_1(-G^{-1}h_3G^{-1})h_2]\,d\mu_G \\
+ \ & \int_\Sigma \mathrm{Tr}(G^{-1}h_1G^{-1}h_2)\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}_G h_3\,d\mu_G \\
= \ & \langle -h_1G^{-1}h_2 - h_2G^{-1}h_1, h_3\rangle_{L^2(G)} + \left\langle \frac{1}{2} < h_1, h_2 >_G G, h_3\right\rangle_{L^2(G)} \\
= \ & \langle -h_1G^{-1}h_2 - h_2G^{-1}h_1 + \frac{1}{2} < h_1, h_2 >_G G, h_3\rangle_{L^2(G)}
\end{aligned}
$$

を得る. よって式 (3.2) の各項に代入すると, h_3 の任意性から

$$
\begin{aligned}
(D_{H_1}H_2)_G &= -\frac{1}{2}(h_1G^{-1}h_2 + h_2G^{-1}h_1) \\
&+ \frac{1}{4}(< h_1, G >_G h_2 + < h_2, G >_G h_1 - < h_1, h_2 >_G G)
\end{aligned}
$$

であることがわかる. □

注意 10. 原論文 [17] では,

$$
D_{h_1}h_2 = -\frac{1}{2}h_1G^{-1}h_2 - \frac{1}{2}h_2G^{-1}h_1
$$

と記述されている. 原論文の証明では h_1, h_2, h_3 に G-Trace free を仮定し

$$\langle D_{h_1}h_2 + \frac{1}{2}h_1G^{-1}h_2 + \frac{1}{2}h_2G^{-1}h_1, h_3\rangle_{L^2(G)} = 0$$

を得た後に, $[D_{h_1}h_2 + \frac{1}{2}h_1G^{-1}h_2 + \frac{1}{2}h_2G^{-1}h_1]$ に G-Trace free であるとして結論を得た. しかし実際は $[D_{h_1}h_2 + \frac{1}{2}h_1G^{-1}h_2 + \frac{1}{2}h_2G^{-1}h_1]$ は G-Trace free でない. よって本論文では前提条件の G-Trace free 性を仮定せずに計算を行うことで, 主張を修正することができた. なお, この修正は後の水平リフトの二階微分 [定理 3.3] のベクトル場 Z_0 の取り方に影響が出る (定数倍の違いが出る) が, 測地的凸性の証明の中ではこの影響は消滅してしまう [補題 4.11].

この命題から特に, G-Trace free な $h \in T_G\mathcal{M}$ と h を始点とする $\mathcal{M}$ 上の定値ベクトル場 H をとれば

$$(D_HH)_G = -hG^{-1}h - \frac{1}{4} < h, h >_G G$$

が成立する.

補題 3.2. *h を G に関して Trace free な対称 $(0,2)$ テンソル場とし, H を h を始点とする定値ベクトル場とする. このとき, $(D_HH)_G$ は $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の水平成分と L^2 直交する.*

証明. $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の水平成分 h' を任意にとる. 各点で局所座標をとり, 行列

$$A := \left(\sum_{k=1}^{2} G^{ik}h_{kj}\right), \quad B := \left(\sum_{k=1}^{2} G^{ik}h'_{kj}\right)$$

を定めると, ともに Trace free な対称行列になる. このとき, 行列の計算によって,

$$\mathrm{Tr}(A^2B) = 0$$

が成立する. よって L^2 計量の定義から

$$\begin{aligned}\langle (D_HH)_G, h'\rangle_{L^2(G)} &= -\int_\Sigma \mathrm{Tr}(G^{-1}hG^{-1}hG^{-1}h')\, d\mu_G - \left\langle \frac{1}{4} < h, h >_G G, h' \right\rangle_{L^2(G)} \\ &= -\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A^2B)\, d\mu_G = 0\end{aligned}$$

を得る. h' の任意性により, 主張を得る. □

この補題から, $[(D_H H)_G]^{T_G \mathcal{M}_{-1}}$ は垂直成分の元である. つまり, G, h に依存するあるベクトル場 X があって

$$[(D_H H)_G]^{T_G \mathcal{M}_{-1}} = L_X G \tag{3.3}$$

とかける. この等式は後に水平リフトの二階微分の表示を求める際に重要な等式である.

3.2 Teichmüller 空間上の Levi-Civita 接続

本節では, Weil-Petersson 計量から定まる Levi-Civita 接続を部分多様体の一般論から L^2 計量から定まる Levi-Civita 接続との関係を述べる.

まず, $\mathcal{M}_{-1}$ 上の Levi-Civita 接続について述べる. 前章で $\mathcal{M}_{-1}$ は $\mathcal{M}$ の部分多様体であることが示された. 部分多様体の接続については Gauss の公式と呼ばれる定理が知られている. つまり, D' を $\mathcal{M}_{-1}$ 上の Levi-Civita 接続, D を $\mathcal{M}$ 上の Levi-Civita 接続, X, Y を $\mathcal{M}_{-1}$ 上のベクトル場とするとき,

$$D'_X Y = (D_X Y)^{T\mathcal{M}_{-1}}$$

が成立する.

一方, Weil-Petersson 計量は $\mathcal{M}_{-1}$ から $\mathcal{T}_p$ への射影 Π がリーマン沈めこみになるような計量であった. ∇^{wp} を Weil-Petersson 計量 g_{wp} から定まる Levi-Civita 接続, X', Y' を各 X'_G, Y'_G が $T_G\mathcal{M}_{-1}$ の水平成分であるような $\mathcal{M}_{-1}$ 上のベクトル場とすると,

$$\nabla^{wp}_{d\Pi(X')} d\Pi(Y') = d\Pi(D'_{X'} Y')$$

が成立する. Gauss の公式とあわせて,

$$\nabla^{wp}_{d\Pi(X')} d\Pi(Y') = d\Pi((D_X Y)^{T\mathcal{M}_{-1}})$$

とかける.

3.3 Weil-Petersson 測地線と水平リフト

本節では, 曲線に沿う Levi-Civita 接続を定義し, Weil-Petersson 計量から定まる測地線（WP 測地線）が $\mathcal{M}_{-1}$ 上の水平測地線と同一視できることを説明する.

γ_t を $\mathcal{M}$ 上の曲線とし, X を γ_t に沿う $\mathcal{M}$ 上のベクトル場とする．このとき, γ_t に沿う共変微分 $D_{\dot{\gamma}_t}$ を

$$(D_{\dot{\gamma}_t}X)_{\gamma_t} := \frac{d}{dt}X_{\gamma_t} + \Gamma(\gamma_t)(\dot{\gamma}_t, X_{\gamma_t})$$

によって定義する．ただし, 右辺の第二項は D の接ベクトル $\dot{\gamma}_t, X_{\gamma_t}$ での Christoffel 記号である.

注意 11. 上の Christoffel 記号の記法は無限次元多様体におけるものである．詳しくは [10, 定義 1.5.1] を参照いただきたい.

特に $X_{\gamma_t} = \dot{\gamma}_t$ のとき

$$(D_{\dot{\gamma}_t}\dot{\gamma}_t)_{\gamma_t} = \ddot{\gamma}_t + \Gamma(\gamma_t)(\dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t)$$

と表せる．ここで Christoffel 記号 $\Gamma(\gamma_t)(\dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t)$ は γ_t と $\dot{\gamma}_t$ に依存し, $\ddot{\gamma}_t$ の項は現れない．よって $\dot{\gamma}_t$ を始点とする定値ベクトル場 H_t を考えれば,

$$\Gamma(\gamma_t)(\dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t) = (D_{H_t}H_t)_{\gamma_t} = -\dot{\gamma}_t\gamma_t\dot{\gamma}_t - \frac{1}{4}\|\dot{\gamma}_t\|^2_{\gamma_t}\gamma_t$$

とかけることがわかる.

次に, ∇^{wp} から定まる測地線を定義する．$\mathcal{T}_p$ は実 $6p-6$ 次元の多様体であるので, 有限次元の測地線の定義が適用できる．つまり, $\mathcal{T}_p$ 上の曲線 σ_t が **Weil-Petersson 測地線**または **WP 測地線**であるとは, 各 t で

$$\nabla^{wp}_{\dot{\sigma}_t}\dot{\sigma}_t = 0$$

を満たすことである.

ここで $\sigma \in \mathcal{T}_p$ と σ を通る $\mathcal{T}_p$ 上の WP 測地線 $\sigma_t : [-T, T] \to \mathcal{T}_p$ をとり, $G \in \Pi^{-1}(\sigma)$ をひとつ固定する．このとき, G を通る L^2 計量に関する測地線 $G_t : [-T, T] \to \mathcal{T}_p$ で

$$\sigma_t = \Pi_{G_t}(G_t), \quad \int_{-T}^{T}\sqrt{(g_{wp})_{\sigma_t}(\dot{\sigma}_t, \dot{\sigma}_t)}\,dt = \int_{-T}^{T}\sqrt{\langle \dot{G}_t, \dot{G}_t\rangle_{L^2(G_t)}}\,dt$$

を満たすものが一意的に存在する [17, p.24]. この G_t は上の条件から各 t に対して $\dot{G}_t \in \mathcal{H}_{G_t}$ を満たすので, σ_t の**水平リフト**とよばれる.

3.4　水平リフトの二階微分

本節では, 前節で定義した WP 測地線の水平リフトの二階微分を求める.

定理 3.3 (水平リフトの二階微分の表示, [17, Theorem 3.8])**.** $\mathcal{T}_p$ の点 σ と $\Pi^{-1}(\sigma)$ の点 G を任意に固定する. さらに σ_t を σ を通る $\mathcal{T}_p$ 上の *WP* 測地線とし, G_t を G を通る σ_t の水平リフトとする. このとき, Σ 上のベクトル場 Z が存在して

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} G_t = \left(\frac{1}{4}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} + \alpha_0\right) G_0 + L_Z G_0$$

が成立する. ただし $\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} :=< \dot{G}_0, \dot{G}_0 >_{G_0}$ であり, α_0 は

$$\alpha_0 := -\frac{1}{2}(\Delta_{G_0} - 2)^{-1}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} \tag{3.4}$$

によって定まる Σ 上の非負値関数である.

証明. P_{G_t} を式 (2.14) で定まる $T_{G_t}\mathcal{M}$ から $(T_{G_t}\mathcal{M}_{-1})^{\perp}$ への直交射影とし, $\tilde{G}_t$ を G_t を始点とする定値ベクトル場とする. このとき, G_t が $\mathcal{M}_{-1}$ 上の測地線であることから

$$\begin{aligned} D'_{\dot{G}_t}\dot{G}_t = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; (D_{\dot{G}_t}\dot{G}_t)^{T_{G_t}\mathcal{M}_{-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; (D_{\dot{G}_t}\dot{G}_t)_{G_t} = P_{G_t}(D_{\dot{G}_t}\dot{G}_t) \\ &\Leftrightarrow \;\; \ddot{G}_t + \Gamma(G_t)(\dot{G}_t, \dot{G}_t) = P_{G_t}(\ddot{G}_t) + P_{G_t}(\Gamma(G_t)(\dot{G}_t, \dot{G}_t)) \\ &\Leftrightarrow \;\; \ddot{G}_t + (D_{\tilde{G}_t}\tilde{G}_t)_{G_t} = P_{G_t}(\ddot{G}_t) + P_{G_t}((D_{\tilde{G}_t}\tilde{G}_t)_{G_t}) \\ &\Leftrightarrow \;\; \ddot{G}_t = P_{G_t}(\ddot{G}_t) - [(D_{\tilde{G}_t}\tilde{G}_t)_{G_t}]^{T_{G_t}\mathcal{M}_{-1}} \end{aligned}$$

を得る. 以降, $t = 0$ とする. 式 (3.3) より, あるベクトル場 X が存在して

$$[(D_{\tilde{G}_0}\tilde{G}_0)_{G_0}]^{T_{G_0}\mathcal{M}_{-1}} = L_X G_0$$

が成立する.

よって以下では, $P_{G_0}(\ddot{G}_0)$ を求める. P_G の定義と線形性から, t が十分小さいとき

$$\begin{aligned} 0 = P_{G_t}(\dot{G}_t) \;\; &= \;\; P_{G_t}(\dot{G}_0 + t\ddot{G}_0 + o(t)) \\ &= \;\; P_{G_t}(\dot{G}_0) + t\, P_{G_t}(\ddot{G}_0) + o(t) \end{aligned}$$

である．よって $P_{G_t}(\dot{G}_t)$ を $t=0$ で微分すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_{G_t}(\dot{G}_t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_{G_t}(\dot{G}_0) + P_{G_0}(\ddot{G}_0)
\end{aligned}
$$

を得る．

次に，$\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_{G_t}(\dot{G}_0)\right]$ を求める．関数 $f_t(\dot{G}_0)$ を

$$
\mathcal{L}_{G_t}\dot{G}_0 - \mathcal{L}_{G_t}\mathcal{L}^*_{G_t} f_t(\dot{G}_0) = 0
$$

満たすものとする．このとき，$\mathcal{L}_{G_0}\dot{G}_0 = 0, f_0(\dot{G}_0) = 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_{G_t}(\dot{G}_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{L}^*_{G_t} f_t(\dot{G}_0) \\
=\ & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(-\Delta_{G_t}+1) f_t(\dot{G}_0)\, G_t] + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Hess}_{G_t} f_t(\dot{G}_0) \\
=\ & (-\Delta_{G_0}+1)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t(\dot{G}_0)\, G_0 + \mathrm{Hess}_{G_0}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t(\dot{G}_0) \\
=\ & (-\Delta_{G_0}+1)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(-\Delta_{G_t}+1)^{-1}(-\Delta_{G_t}+2)^{-1}\mathcal{L}_{G_t}\dot{G}_0]\, G_0 \\
+\ & \frac{1}{2} L_{[\mathrm{grad}_{G_0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t(\dot{G}_0)]} G_0 \\
=\ & (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathcal{L}_{G_t}\dot{G}_0)\, G_0 + \frac{1}{2} L_Y G_0 \\
=\ & (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left[(-\Delta_{G_0}+1)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_{G_t}\dot{G}_0 + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t}\delta_{G_t}\dot{G}_0\right] G_0 + \frac{1}{2} L_Y G_0 \\
=\ & (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}(-\Delta_{G_0}+1)(-\|\dot{G}_0\|^2_{G_0})\cdot G_0 \\
+\ & (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\delta_{G_t}\delta_{G_t}\dot{G}_0)\, G_0 + \frac{1}{2} L_Y G_0
\end{aligned}
$$

が成立する．第一等式は式 (2.14)，第二等式は補題 2.6 による．また第四等式は式 (2.4) と $\delta_G\dot{G}_0 = 0$，第五等式は $\mathrm{tr}_G\dot{G}_0 = 0$ から従う．ただし，$Y := \mathrm{grad}_{G_0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t(\dot{G}_0)$ である．

最後に，$\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t}\delta_{G_t}\dot{G}_0\right]$ を求める．$\delta_{G_0}\dot{G}_0 = 0$ と $\delta_{G_t}\dot{G}_0$ の t に関する滑らか性から，十分小さい t に対して

$$
\begin{aligned}
\delta_{G_t}\delta_{G_t}\dot{G}_0 &= \delta_{G_t}\left[\delta_{G_0}\dot{G}_0 + t\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t}\dot{G}_0 + o(t)\right] \\
&= t\,\delta_{G_t}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t}\dot{G}_0\right) + o(t)
\end{aligned}
$$

を得る．よって $t=0$ で微分すると，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t}\delta_{G_t}\dot{G}_0 = \delta_{G_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta_{G_t}\dot{G}_0\right)$$

が成立する．ここで補題を述べる．

補題 3.4 (余微分作用素の変形)**.**

$$\delta_{G_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta_{G_t}\dot{G}_0\right) = -\frac{3}{4}\Delta_{G_0}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} \tag{3.5}$$

この補題を用いると，

$$\begin{aligned} P_{G_0}(\ddot{G}_0) &= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_{G_t}(\ddot{G}_0) \\ &= -(-\Delta_{G_0}+2)^{-1}(-\Delta_{G_0}+1)(-\|\dot{G}_0\|^2_{G_0})\, G_0 \\ &- (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left(-\frac{3}{4}\Delta_{G_0}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0}\right) G_0 - \frac{1}{2}L_Y G_0 \\ &= (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left[(-\Delta_{G_0}+1)\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} + \frac{3}{4}\Delta_{G_0}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0}\right] G_0 \\ &- \frac{1}{2}L_Y G_0 \\ &= (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left(-\frac{1}{4}\Delta_{G_0}+1\right)\|\dot{G}_0\|^2_{G_0}\, G_0 - \frac{1}{2}L_Y G_0 \end{aligned}$$

が成立する．以上をまとめて

$$\begin{aligned} \ddot{G}_0 &= P_{G_0}(\ddot{G}_0) - L_X G_0 \\ &= (-\Delta_{G_0}+2)^{-1}\left(-\frac{1}{4}\Delta_{G_0}+1\right)\|\dot{G}_0\|^2_{G_0}\, G_0 \\ &- \frac{1}{2}L_Y G_0 - L_X G_0 \\ &= \left(\frac{1}{4}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} + \alpha_0\right) G_0 + L_Z G_0 \end{aligned}$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned} Z &:= -\frac{1}{2}Y - X, \\ \alpha_0 &:= -\frac{1}{2}(\Delta_{G_0}-2)^{-1}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

である． □

最後に証明中で用いた補題を証明する．

補題の証明. この証明では, テンソルの添字は Einstein 規約に基づくものとする. $\{x^i\}$ を Σ 上の局所座標で G_0 に関して等温座標になるものとする. 以下のテンソル計算では等温座標を用いる. このとき

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad h_{ij,k} := \partial_k[h(\partial_i, \partial_j)], \quad \rho := (G_0)_{11} = (G_0)_{22}$$

とおくと, $G_0 = G$ から定まる Christoffel 記号 Γ^l_{ij} は

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2\rho}\left[(\partial_i\rho)\delta^l_j + (\partial_j\rho)\delta^l_i - (\partial_l\rho)\delta_{ij}\right]$$

とかける. ただし, δ^i_j, δ_{ij} はともにクロネッカーのデルタを表す. ここで $h := \dot{G}_0$ とおくと, h は G_0 に関して TT テンソルであるので

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{G_0} h = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad h_{11} + h_{22} = 0 \\ (\delta_{G_0} h)_j = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{2} h_{ij,i} = \sum_{i=1}^{2}\left[\Gamma^l_{ii} h_{lj} + \Gamma^l_{ij} h_{il}\right] \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

を満たす.

まず, 余微分作用素の定義から

$$\begin{aligned} \delta_{G_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \delta_{G_t} h\right) &= -G_0^{ij}\left(\nabla_{\partial_i}(\delta_{G_t} h)'_{t=0}\right)(\partial_j) \\ &= -\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{2}\left(\nabla_{\partial_j}(\delta_{G_t} h)'_{t=0}\right)(\partial_j) \\ &= -\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{2}\left[\partial_j(\delta_{G_t} h(\partial_j))'_{t=0} - (\delta_{G_t} h(\nabla_{\partial_j}\partial_j))'_{t=0}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{2}\partial_j(\delta_{G_t} h(\partial_j))'_{t=0} \end{aligned}$$

とかける. 最後の等式は

$$\sum_{j=1}^{2}\nabla_{\partial_j}\partial_j = \sum_{j=1}^{2}\Gamma^l_{jj}\partial_l = 0$$

であることを用いた. 詳しくは後の命題 4.9 の証明を参照されたい.

次に $[(\delta_{G_t} h(\partial_k))'_{t=0}]$ を計算する. 添字を j から k に変更したのは計算上の都合に

よるものである．このとき，

$$
\begin{aligned}
& (\delta_{G_t} h(\partial_k))'_{t=0} \\
= \ & \left[-G_t^{ij} (\nabla^t_{\partial_i} h)(\partial_j, \partial_k)\right]'_{t=0} \\
= \ & -(G_t^{ij})'_{t=0} (\nabla_{\partial_i} h)(\partial_j, \partial_k) - G_0^{ij} \left[-(\Gamma^l_{ij}(t))'_{t=0} h_{lk} - (\Gamma^l_{ik}(t))'_{t=0} h_{jk}\right] \\
= \ & G_0^{ia} h_{ab} G_0^{bj} \left[\partial_i h_{jk} - \Gamma^l_{ij} h_{lk} - \Gamma^l_{ik} h_{jl}\right] \\
+ \ & G_0^{ij} \left[(\Gamma^l_{ij}(t))'_{t=0} h_{lk} + (\Gamma^l_{ik}(t))'_{t=0} h_{jk}\right]
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

と式変形できる．一方で

$$
\begin{aligned}
\|h\|^2_{G_0} &= \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij} \\
\partial_k \|h\|^2_{G_0} &= \partial_k \left(\frac{1}{\rho^2}\right) \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij,k} \\
&= -\frac{2}{\rho^3} (\partial_k \rho) \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij} + \frac{2}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij,k} \\
&= -\frac{2}{\rho} (\partial_k \rho) \|h\|^2_{G_0} + \frac{2}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij,k}
\end{aligned}
$$

とかけることを用いて, 式 (3.7) の第一項を計算すると

$$
\begin{aligned}
& G_0^{ia} h_{ab} G_0^{bj} \left[\partial_i h_{jk} - \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{jl}\right] \\
= \; & \frac{1}{\rho^2} \delta^{ia} h_{ab} \delta^{bj} \left[h_{jk,i} - \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{jl}\right] \\
= \; & \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} h_{ij,k} - \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \left[\Gamma_{ij}^l h_{lk} + \Gamma_{ik}^l h_{jl}\right] \\
= \; & \frac{1}{2} \partial_k \|h\|_{G_0}^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_k \rho) \|h\|_{G_0}^2 - \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \left[\Gamma_{ij}^l h_{lk}\right] - \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \left[\Gamma_{ik}^l h_{jl}\right] \\
= \; & \frac{1}{2} \partial_k \|h\|_{G_0}^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_k \rho) \|h\|_{G_0}^2 \\
- \; & \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \frac{1}{2\rho} \left[(\partial_i \rho) h_{jk} + (\partial_j \rho) h_{ik} - \sum_{l=1}^{2} (\partial_l \rho) \delta_{ij} h_{lk}\right] \\
- \; & \frac{1}{\rho^2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \frac{1}{2\rho} \left[(\partial_i \rho) h_{jk} + (\partial_k \rho) h_{ji} - \sum_{l=1}^{2} (\partial_l \rho) \delta_{ik} h_{jl}\right] \\
= \; & \frac{1}{2} \partial_k \|h\|_{G_0}^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_k \rho) \|h\|_{G_0}^2 \\
- \; & \frac{1}{2\rho^3} \left[\sum_{i,j=1}^{2} (\partial_i \rho) h_{ij} h_{jk} + \sum_{i,j=1}^{2} (\partial_j \rho) h_{ij} h_{ik} - \sum_{j,l=1}^{2} (\partial_l \rho) h_{jj} h_{lk}\right] \\
- \; & \frac{1}{2\rho^3} \left[\sum_{i,j=1}^{2} (\partial_i \rho) h_{ij} h_{jk} + \sum_{i,j=1}^{2} (\partial_k \rho) h_{ij} h_{ij} - \sum_{j,l=1}^{2} (\partial_l \rho) h_{jl} h_{kj}\right] \\
= \; & \frac{1}{2} \partial_k \|h\|_{G_0}^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_k \rho) \|h\|_{G_0}^2 \\
- \; & \frac{1}{2\rho} \left[\sum_{i,j=1}^{2} (\partial_i \rho) h_{ij} h_{jk} + \sum_{i,j=1}^{2} (\partial_j \rho) h_{ij} h_{ik}\right] - \frac{1}{2\rho} (\partial_k \rho) \|h\|_{G_0}^2
\end{aligned}
$$

となる. ここで第二等式には

$$
h_{jk,i} = h_{kj,i} = h_{ij,k}
$$

を適用したが, 後の補題 4.9 で示される. さらに第四等式には

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^l h_{lk} &= (\partial_i \rho) h_{jk} + (\partial_j \rho) h_{ik} - \sum_{l=1}^{2} (\partial_l \rho) \delta_{ij} h_{lk}, \\
\Gamma_{ik}^l h_{jl} &= (\partial_i \rho) h_{jk} + (\partial_k \rho) h_{ji} - \sum_{l=1}^{2} (\partial_l \rho) \delta_{ik} h_{jl}
\end{aligned}
$$

を適用した．最後の等式は h の G-Trace free 性と添字のとりかえによって成立する．h の TT 性から

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\rho^3}\left[\sum_{i,j=1}^{2}(\partial_i\rho)h_{ij}h_{jk}+\sum_{i,j=1}^{2}(\partial_j\rho)h_{ij}h_{ik}\right] \\
= \quad & \frac{1}{2\rho^3}\left(\partial_1\rho\, h_{11}h_{1k}+\partial_1\rho\, h_{12}h_{2k}+\partial_2\rho\, h_{21}h_{1k}+\partial_2\rho\, h_{22}h_{2k}\right) \\
+ \quad & \frac{1}{2\rho^3}\left(\partial_1\rho\, h_{11}h_{1k}+\partial_1\rho\, h_{21}h_{2k}+\partial_2\rho\, h_{12}h_{1k}+\partial_2\rho\, h_{22}h_{2k}\right) \\
= \quad & \frac{1}{2\rho^3}\begin{cases} h_{11}\left(\partial_1\rho\, h_{11}-\partial_2\rho\, h_{21}\right)+h_{12}\left(\partial_1\rho\, h_{21}+\partial_2\rho\, h_{11}\right) & (k=1) \\ h_{11}\left(\partial_1\rho\, h_{12}-\partial_2\rho\, h_{22}\right)+h_{12}\left(\partial_1\rho\, h_{22}+\partial_2\rho\, h_{12}\right) & (k=2)\end{cases} \\
= \quad & \frac{1}{2\rho^3}\begin{cases} \partial_1\rho\, h_{11}h_{11}+\partial_1\rho\, h_{12}h_{12} & (k=1) \\ \partial_2\rho\, h_{11}h_{11}+\partial_2\rho\, h_{12}h_{12} & (k=2)\end{cases} \\
= \quad & \frac{1}{2\rho}(\partial_k\rho)\,\|h\|_{G_0}^2
\end{aligned}
$$

が成立する．よって式 (3.7) の第一項は

$$
G_0^{ia}h_{ab}G_0^{bj}\left[\partial_i h_{jk}-\Gamma_{ij}^{l}h_{lk}-\Gamma_{ik}^{l}h_{jl}\right]=\frac{1}{2}\partial_k\|h\|_{G_0}^2 \tag{3.8}
$$

である．

次に, 式 (3.7) の第二項を求める．Christoffel 記号の t 微分は

$$
\begin{aligned}
\left[\Gamma_{ij}^{l}(t)\right]_{t=0}' \quad = \quad & \frac{1}{2}(G_t^{lm})_{t=0}'\left[(G_0)_{mj,i}+(G_0)_{im,j}-(G_0)_{ij,m}\right] \\
+ \quad & \frac{1}{2}(G_0^{lm})\left[(h_0)_{mj,i}+(h_0)_{im,j}-(h_0)_{ij,m}\right] \\
= \quad & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\sum_{m=1}^{2}h_{lm}\left[(\partial_i\rho)\delta_{mj}+(\partial_j\rho)\delta_{im}-(\partial_m\rho)\delta_{ij}\right] \\
+ \quad & \frac{1}{2\rho}\left[h_{ij,l}+h_{il,j}-h_{ij,l}\right] \\
= \quad & -\frac{1}{2\rho^2}\left[(\partial_i\rho)h_{lj}+(\partial_j\rho)h_{li}-\sum_{m=1}^{2}(\partial_m\rho)\delta_{ij}h_{lm}\right]+\frac{1}{2\rho}h_{il,j}
\end{aligned}
$$

とかける．

よって式 (3.7) の第二項は

$$
\begin{aligned}
& G_0^{ij}\left[(\Gamma^l_{ij}(t))'_{t=0}h_{lk}+(\Gamma^l_{ik}(t))'_{t=0}h_{jk}\right] \\
= & \sum_{l=1}^{2}\frac{1}{\rho}\delta^{ij}\left[-\frac{1}{2\rho^2}\left((\partial_i\rho)h_{lj}+(\partial_j\rho)h_{li}-\sum_{m=1}^{2}(\partial_m\rho)\delta_{ij}h_{lm}\right)+\frac{1}{2\rho}h_{il,j}\right]h_{lk} \\
+ & \sum_{l=1}^{2}\frac{1}{\rho}\delta^{ij}\left[-\frac{1}{2\rho^2}\left((\partial_i\rho)h_{lk}+(\partial_k\rho)h_{li}-\sum_{m=1}^{2}(\partial_m\rho)\delta_{ik}h_{lm}\right)+\frac{1}{2\rho}h_{il,k}\right]h_{jl} \\
= & -\sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^3}\left[(\partial_j\rho)h_{lj}+(\partial_j\rho)h_{lj}-\sum_{m=1}^{2}(\partial_m\rho)\delta_{jj}h_{lm}\right]h_{lk}+\sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^2}h_{jl,j}h_{lk} \\
- & \sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^3}\left[(\partial_j\rho)h_{lk}+(\partial_k\rho)h_{lj}-\sum_{m=1}^{2}(\partial_m\rho)\delta_{jk}h_{lm}\right]h_{jl}+\sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^2}h_{jl,k}h_{jl} \\
= & \sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^2}h_{jj,l}h_{lk} \\
- & \frac{1}{2\rho^3}\left[\sum_{j,l=1}^{2}(\partial_j\rho)h_{lk}h_{jl}+\sum_{j,l=1}^{2}(\partial_k\rho)h_{lj}h_{jl}-\sum_{m,l=1}^{2}(\partial_m\rho)h_{lm}h_{kl}\right] \\
+ & \sum_{j,l=1}^{2}\frac{1}{2\rho^2}h_{jl,k}h_{jl} \\
= & -\frac{1}{2\rho}(\partial_k\rho)\|h\|^2_{G_0}+\frac{1}{4}\partial_k\|h\|^2_{G_0}-\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{\rho}(\partial_k\rho)\|h\|^2_{G_0}\right) \\
= & \frac{1}{4}\partial_k\|h\|^2_{G_0}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

となる.

以上から, 式 (3.7) は式 (3.8) と式 (3.9) をあわせて $\left[\frac{3}{4}\partial_k\|h\|^2_{G_0}\right]$ であるから

$$\delta_{G_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta_{G_t}h\right)=-\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho}\partial_j\partial_j\left(\frac{3}{4}\|h\|^2_{G_0}\right)=-\frac{3}{4}\Delta_{G_0}\|h\|^2_{G_0}$$

が成立する. 最後の等式は等温座標の下で Laplace 作用素が

$$\Delta_{G_0}\|h\|^2_{G_0}=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho}\partial_j\partial_j\|h\|^2_{G_0}$$

とかけることを用いた. 詳しくは後の命題 4.9 の証明を参照されたい.

□

注意 12. ベクトル場 Z について. 原論文 [17] では定値ベクトル場による Levi-Civita 接続の表示が異なるが, 正規座標を用いることによって $[(D_{\tilde{h}}\tilde{h})_G]^{T_G\mathcal{M}_{-1}}$ は G のあ

るベクトル場による Lie 微分で表示できる. このベクトル場と本論文で得られたベクトル場は, 実は定数倍の違いしかない.

注意 13. 補題の証明は原論文 [17] の証明（G の正規座標を用いた証明）とは少し異なり, G の等温座標によるものである. これはテンソルの添字を用いる際に, 各点でのみ意味を持つ正規座標を用いたものとそうでないものを混同しないように配慮した結果である.

4　エネルギー関数の測地的凸性

この章では, 調和写像について概説する. まず調和写像の定義を述べ, ドメインとターゲットの曲面に局所座標を与えて調和写像の方程式を導出する. 次にドメインとターゲットの計量から定まる等温座標を用いて, 調和写像の方程式を複素座標によって表現する. 複素化された方程式からドメインの計量の等角同値類のとり方によらないことを説明する. その後, Teichmüller 空間上のエネルギー関数を調和写像を用いて定め, $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ の作用に関して不変であることを示す. 最後にエネルギー関数の測地的凸性を示す

この章以降では, (M^m, g_{M^m}) を m 次元リーマン多様体, (N^n, g_{N^n}) を n 次元リーマン多様体, (Σ, g) を種数 $p \geq 2$ 以上の計量つき閉曲面とする.

4.1　調和写像

本節では調和写像の定義から調和写像になるための局所座標を用いた方程式を導出する. さらにその局所座標を等温座標としてとり, 複素座標による方程式の表示を与える.

$f : M^m \to N^n$ を C^1 級写像とする. 写像 f の **Dirichlet エネルギー** $E(f)$ とは

$$\begin{aligned} E_{g_{N^n}}(f) &:= \frac{1}{2}\int_{M^m} e(f)\, d\mu_{g_{M^m}} \\ e(f) &:= \mathrm{tr}_{g_{M^m}}(f^* g_{N^n}) \end{aligned}$$

によって定まるものである. このとき $E(\,)$ は M^m から N^n への C^1 級写像全体の空間 $C^1(M^m; N^n)$ 上の汎関数になり, これを $C^1(M^m; N^n)$ 上の **Dirichlet 汎関数**という.

さらに M^m から N^n への C^1 級写像 u が**調和写像**であるとは, u が Dirichlet 汎関数 E の臨界点になることである. つまり, u の任意の変分 c_t $(c_0 = u)$ に対して

$$\delta E_{g_{N^n}}(u) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_{g_{N^n}}(c_t) = 0 \tag{4.1}$$

を満たすことである.

命題 4.1 (調和写像の方程式)**.** u を M^m から N^n への C^1 級写像, $(V, \{y^\alpha\}_{\alpha=1}^n)$ を N^n の任意の局所座標とする. さらに $(U, \{x^i\}_{i=1}^m)$ を M^m の局所座標で $u(U) \subset V$

をみたすものとする．このとき, u が調和写像であることは U 上で

$$\Delta_{g_{M^m}} u^\delta + \sum_{i,j=1}^{M^m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^n} (g_{M^m})^{ij} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \circ u \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad \delta = 1, 2 \tag{4.2}$$

を満たすことと同値である． ただし, $u^\delta = y^\delta \circ u$ とし, $\Gamma^\delta_{\alpha\beta}$ は g_{N^n} から定まる *Christoffel* 記号とする.

証明. 本証明では添字に関して Einstein 規約に基づくとする.

$c_0 = u$ をみたす $C^1(M^m; N^n)$ 上の滑らかな曲線 c_t を任意にとる．さらに u に沿う N^n 上のベクトル場 W を

$$W(u(p_0)) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_t(p_0) = \left.\frac{d(y^\alpha \circ c_t(p_0))}{dt}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{u(p_0)} \qquad (p_0 \in \Sigma) \tag{4.3}$$

によって定めるとする．ここで $c_t^\alpha := y^\alpha \circ c_t$ とおくと

$$e(c_t) \;=\; \frac{\partial c_t^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial c_t^\beta}{\partial x^j} (g_{M^m})^{ij} (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ c_t$$

とかける．$t = 0$ で微分すると

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e(c_t) \\
=\;& 2\,\frac{\partial W^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} (g_{M^m})^{ij} (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} (g_{M^m})^{ij} \frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \circ u \cdot W^\gamma \\
=\;& 2\, grad_{g_{M^m}} u^\beta (W^\alpha)\, (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} (g_{M^m})^{ij} \frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \circ u \cdot W^\gamma
\end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る．この第一項を M^m 上で積分すると

$$\begin{aligned}
& \int_{M^m} grad_{g_{M^m}} u^\beta (W^\alpha)\, (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u \, d\mu_{g_{M^m}} \\
=\;& \int_{M^m} grad_{g_{M^m}} u^\beta (W^\alpha (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u) \, d\mu_{g_{M^m}} \\
-\;& \int_{M^m} W^\alpha\, grad_{g_{M^m}} u^\beta ((g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u) \, d\mu_{g_{M^m}} \\
=\;& \int_{M^m} g_{M^m}(grad_{g_{M^m}} u^\beta, grad_{g_{M^m}} (W^\alpha (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u)) \, d\mu_{g_{M^m}} \\
-\;& \int_{M^m} W^\alpha\, grad_{g_{M^m}} u^\beta ((g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u) \, d\mu_{g_{M^m}} \\
=\;& -\int_{M^m} (\Delta_{g_{M^m}} u^\beta)\, W^\alpha (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u \, d\mu_{g_{M^m}} \\
-\;& \int_{M^m} W^\alpha (g_{M^m})^{ij} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \circ u \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i} \, d\mu_{g_{M^m}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．よって第二項の積分も合わせると

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_{g_{N^n}}(c_t) &= \frac{1}{2}\int_{M^m} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e(c_t)\, d\mu_g \\
&= \int_{M^m} \left[-\Delta_{g_{M^m}} u^\beta (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u - \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}\frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\circ u \right.\\
&+ \left. \frac{1}{2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}\frac{\partial (g_{N^n})_{\gamma\beta}}{\partial y^\alpha}\circ u \right] W^\alpha d\mu_{g_{M^m}}
\end{aligned}$$

を得る．

ここで u が調和写像であるとする．このとき c_t の任意性から，$E(c_t)$ の微分が 0 であることと各 $\alpha = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= -\Delta_{g_{M^m}} u^\beta (g_{N^n})_{\alpha\beta} \circ u - \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}\frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\circ u \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}\frac{\partial (g_{N^n})_{\gamma\beta}}{\partial y^\alpha}\circ u
\end{aligned}$$

を満たすことは同値になる．両辺に $(g_{N^n})^{\alpha\delta} \circ u$ をかけ，α で和をとると，各 $\delta = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= -\Delta_{g_{M^m}} u^\delta \\
&- \frac{1}{2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}(g_{N^n})^{\alpha\delta}\circ u \left[\frac{\partial (g_{N^n})_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\circ u + \frac{\partial (g_{N^n})_{\gamma\alpha}}{\partial y^\beta}\circ u - \frac{\partial (g_{N^n})_{\gamma\beta}}{\partial y^\alpha}\circ u\right] \\
&= -\Delta_{g_{M^m}} u^\delta - \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}(g_{M^m})^{ij}\Gamma^\delta_{\gamma\beta}\circ u
\end{aligned}$$

が成立する．よって，変数を γ を α に取り替えることで主張を得る． □

系 4.2. 調和写像 $u : M^m \to N^n$ について次のことが成立する：

1. $M^m = M^1$ のとき，u は N^n 上の測地線になる．

2. $N^n = N^1$ のとき，u は M^m 上の調和関数になる．

証明． $m = 1$ のとき，x^1 を単に x と表すとする．このとき，正値関数 c があって

$$(g_{M^m})^{ij} = c$$

とかける．調和写像の方程式は各 $\delta = 1, 2$ に対して

$$c\,\frac{\partial^2 u^\delta}{\partial x^2} + \sum_{\alpha\beta=1}^{n} c\,\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\circ u\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial x}\frac{\partial u^\beta}{\partial x} = 0$$

となる. よって両辺に $\frac{1}{c}$ をかけると, 測地線の方程式になる.

$n=1$ のとき, y^1 を単に y と表すとする. このとき, 正値関数 d があって

$$(g_{N^n})_{\alpha\beta} = d$$

とかけて, さらに Christoffel 記号は 0 になる. 調和写像の方程式は

$$\Delta_{g_{M^m}}(y \circ u) = 0$$

となる. これは調和関数の定義に他ならない. □

次に, M^m, N^n がともに二次元有向リーマン多様体の場合について考える. このとき各点のまわりで M^2 の g_{M^2} に関する等温座標 $\{x^j\}_{j=1}^2$ と N^2 の g_{N^2} に関する等温座標 $\{y^\alpha\}_{\alpha=1}^2$ が存在する. さらに局所複素座標 z, w を

$$z := x^1 + ix^2, \quad w := y^1 + iy^2, \quad i = \sqrt{-1} \tag{4.6}$$

によって定めることができる. また複素座標による偏微分を

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial w} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^1} - i\frac{\partial}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^1} + i\frac{\partial}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

によって定める. 上の複素座標を用いると, 次の補題がわかる.

補題 4.3. M^2 から N^2 への C^1 級写像 u に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial(u^1 + iu^2)}{\partial x^j}\right)^2 &= 4u_z u_{\bar{z}} \\
\frac{\partial^2(u^1 + iu^2)}{\partial x^1 \partial x^1} + i\frac{\partial^2(u^1 + iu^2)}{\partial x^2 \partial x^2} &= 4u_{z\bar{z}} \\
\sum_{j,\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\right)^2 &= 2(|u_z|^2 + |u_{\bar{z}}|^2)
\end{aligned}$$

が成立する. ただし,

$$u_z := \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u_{\bar{z}} := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$$

と表すものとする.

証明. 実座標による微分を複素座標で表す. それぞれ計算すると

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_z &= \frac{1}{2}(u^1_{x^1} - u^2_{x^2}) - i\frac{1}{2}(u^1_{x^2} + u^2_{x^1}) \\
u_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(u^1_{x^1} - u^2_{x^2}) + i\frac{1}{2}(u^1_{x^2} + u^2_{x^1}) \\
\overline{u_z} &= \frac{1}{2}(u^1_{x^1} + u^2_{x^2}) - i\frac{1}{2}(u^2_{x^1} - u^1_{x^2}) \\
\bar{u}_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(u^1_{x^1} + u^2_{x^2}) - i\frac{1}{2}(u^2_{x^1} - u^1_{x^2})
\end{aligned}
$$

を得る. よって

$$
\bar{u}_z = \overline{u_{\bar{z}}} = \frac{1}{2}(u^1_{x^1} - u^2_{x^2}) - i\frac{1}{2}(u^1_{x^2} + u^2_{x^1}) \tag{4.7}
$$

$$
\overline{u_z} = \bar{u}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u^1_{x^1} + u^2_{x^2}) - i\frac{1}{2}(u^2_{x^1} - u^1_{x^2}) \tag{4.8}
$$

が成立する. この事実を用いて, 主張の右辺を計算すればよい. □

命題 4.4 (調和写像の方程式の複素化)**.** $\{x^j\}_{j=1}^2$ を M^2 の g_{M^2} に関する等温座標, $\{y^\alpha\}_{\alpha=1}^2$ を N^2 の g_{N^2} に関する等温座標とし,

$$
g_{M^2} = \lambda(\delta_{ij}), \quad g_{N^2} = \rho(\delta_{\alpha\beta})
$$

と表す. さらに z, w を式 (4.6) で定めた複素座標とする. このとき, 調和写像の方程式は

$$
u_{z\bar{z}} + \frac{\rho_w \circ u}{\rho \circ u} u_z u_{\bar{z}} = 0 \tag{4.9}
$$

とかける.

証明. 調和写像の方程式は等温座標を用いると, 各 $\gamma = 1, 2$ に対して

$$
\Delta_{g_{M^2}} u^\gamma + \sum_{j,\alpha,\beta=1}^{2} \frac{1}{\lambda}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} = 0
$$

とかける. 左辺の式を A^γ とおき, 等温座標を用いて各項を表示する.

第一項の Laplace 作用素は

$$
\begin{aligned}
\Delta_{g_{M^2}} u^\gamma &= \mathrm{tr}_{g_{M^2}}(\mathrm{Hess}_{g_{M^2}} u^\gamma) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} (g_{M^2})^{ij} \left(\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial x^j \partial x^j} - \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{jj} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^k} \right)
\end{aligned}
$$

となる．ドメインとターゲットの Christoffel 記号をそれぞれの等温座標によって表示すると

$$
\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \sum_{l=1}^{2} \frac{1}{2}(g_{M^2})^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \\
&= \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial(\lambda\delta_{kj})}{\partial x^i}+\frac{\partial(\lambda\delta_{ik})}{\partial x^j}-\frac{\partial(\lambda\delta_{ij})}{\partial x^k}\right) \qquad (4.10) \\
\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \sum_{\delta=1}^{2} \frac{1}{2}(g_N)^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial y^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial y^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^\delta}\right) \\
&= \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial(\rho\delta_{\gamma\beta})}{\partial y^\alpha}+\frac{\partial(\rho\delta_{\alpha\gamma})}{\partial y^\beta}-\frac{\partial(\rho\delta_{\alpha\beta})}{\partial y^\gamma}\right) \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

とかける．よって式 (4.10) から, 各 $k=1,2$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2}\Gamma^k_{jj} &= \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial(\lambda\delta_{kj})}{\partial x^j}+\frac{\partial(\lambda\delta_{jk})}{\partial x^j}-\frac{\partial(\lambda\delta_{jj})}{\partial x^k}\right) \\
&= \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^k}+\frac{\partial\lambda}{\partial x^k}-2\frac{\partial\lambda}{\partial x^k}\right)=0
\end{aligned}
$$

となるので, 各 $\gamma=1,2$ に対して

$$
\Delta_{g_{M^2}}u^\gamma=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial x^j\partial x^j}
$$

を得る．

式 (4.11), 補題 4.3 を用いて $A^1 + iA^2$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
& A^1 + iA^2 \\
= \; & \Delta_{g_{M^2}} u^1 + i\Delta_{g_{M^2}} u^2 \\
+ \; & \sum_{j,\alpha,\beta=1}^{2} \frac{1}{\lambda}(\Gamma^1_{\alpha\beta} \circ u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} + i \sum_{j,\alpha,\beta=1}^{2} \frac{1}{\lambda}(\Gamma^2_{\alpha\beta} \circ u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} \\
= \; & \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^j \partial x^j} + i\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^j \partial x^j} \\
+ \; & \frac{1}{\lambda}\sum_{\alpha,j=1}^{2}\frac{1}{2\rho\circ u}\left(2\,\frac{\partial\rho}{\partial y^\alpha}\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^1}{\partial x^j} - \frac{\partial\rho}{\partial y^1}\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\right) \\
+ \; & i\,\frac{1}{\lambda}\sum_{\alpha,j=1}^{2}\frac{1}{2\rho\circ u}\left(2\,\frac{\partial\rho}{\partial y^\alpha}\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^2}{\partial x^j} - \frac{\partial\rho}{\partial y^2}\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\right) \\
= \; & \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2(u^1+iu^2)}{\partial x^j\partial x^j} \\
+ \; & \frac{1}{\lambda}\sum_{\alpha,j=1}^{2}\frac{1}{2\rho\circ u}\left(2\,\frac{\partial\rho}{\partial y^\alpha}\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial(u^1+iu^2)}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial y^1} + i\frac{\partial\rho}{\partial y^2}\right)\circ u\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\right) \\
= \; & \frac{1}{\lambda}\,4u_{z\bar{z}} \\
+ \; & \frac{1}{\lambda\,\rho\circ u}\sum_{j=1}^{2}\left((\rho_w+\rho_{\bar{w}})\circ u\frac{\partial u^1}{\partial x^j} + i(\rho_w-\rho_{\bar{w}})\circ u\frac{\partial u^2}{\partial x^j}\right)\frac{\partial(u^1+iu^2)}{\partial x^j} \\
- \; & \frac{1}{2\lambda\,\rho\circ u}\,2\rho_{\bar{w}}\circ u\,2(|u_z|^2+|u_{\bar{z}}|^2) \\
= \; & \frac{4u_{z\bar{z}}}{\lambda} \\
+ \; & \frac{1}{\lambda\,\rho\circ u}\sum_{j=1}^{2}\left(\rho_w\circ u\left(\frac{\partial(u^1+iu^2)}{\partial x^j}\right)^2 + \rho_{\bar{w}}\circ u\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^j}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^j}\right)^2\right]\right) \\
- \; & \frac{2\rho_{\bar{w}}\circ u}{\lambda\,\rho\circ u}(|u_z|^2+|u_{\bar{z}}|^2) \\
= \; & \frac{4u_{z\bar{z}}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\,\rho\circ u}\left(\rho_w\circ u\cdot 4u_z u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{w}}\circ u\cdot 2(|u_z|^2+|u_{\bar{z}}|^2)\right) \\
- \; & \frac{2\rho_{\bar{w}}\circ u}{\lambda\,\rho\circ u}(|u_z|^2+|u_{\bar{z}}|^2) \\
= \; & \frac{4}{\lambda}\left(u_{z\bar{z}} + \frac{\rho_w\circ u}{\rho\circ u}u_z u_{\bar{z}}\right)
\end{aligned}
$$

となる.

A^1, A^2 ともに 0 であったから,

$$u_{z\bar{z}} + \frac{\rho_w \circ u}{\rho \circ u} u_z u_{\bar{z}} = 0$$

を得る. □

注意 14. 調和写像の方程式は複素座標を用いることでドメインの計量に関する情報, すなわち λ が現れないことがわかる. よってこの命題は, 有向曲面の間の調和写像はドメインの計量の等角同値類に関して不変であることを示している.

4.2 リーマン面上の調和写像

本節では調和写像の存在性と一意性について知られていることを述べる.

調和写像の存在性はドメインとターゲットの多様体がともにコンパクトの場合, ターゲットのリーマン多様体が非正の断面曲率を持つ仮定の下で, Eells-Sampson が示した. 一意性はターゲットの計量が負の断面局率を持ち, 調和写像の像が非退化であるという仮定の下で次の定理によって知られている.

定理 4.5 (調和写像の存在性と一意性, [17, p.31] , [2, 定理2.15,定理2.18])**.** (M^m, g_{M^m}) を m 次元コンパクトリーマン多様体, (N^n, g_{N^n}) を n 次元コンパクトリーマン多様体とする. さらに g_{N^n} は非正値の断面曲率をもつとし, F を M^m から N^n への連続写像とする. このとき, F にホモトピックな調和写像 $U : M^m \to N^n$ が存在する.

特に g_{N^n} が負の断面曲率を持つとき, 調和写像 U の像が点集合または閉測地線でなければ F のホモトピー類の中で調和写像は U のみである.

この定理によってドメインの計量を固定したとき, 負の定曲率計量とホモトピー型を指定した調和写像が一対一に対応する. この以降の章ではドメインとターゲットのリーマン多様体は同一の閉曲面であるとする. その際, 次の定理が知られている.

定理 4.6. ドメイン上の計量 $g \in \mathcal{M}$ とターゲット上の計量 $G \in \mathcal{M}_{-1}$ をそれぞれ固定する. G を通る $\mathcal{M}_{-1}$ 上の滑らかな曲線 $\{G_t\}_{t\in(-a,a)}$ が与えられたとき, 各 t に対して Σ の恒等写像 id_Σ にホモトピックな調和写像 u_t が一意的に存在する [定理 4.5]. さらに, u_t は t に関して滑らかな写像であって [5, 第 3 章], 各 u_t は Σ 上の可微分同相写像である [11, Corollary 4.3].

4.3 Wolf 型 Diriclhet エネルギー

本節では, Teichmüller 空間上のエネルギー関数のひとつを調和写像を用いて定義する．まず, $\mathcal{M}_{-1}$ 上のエネルギー関数を定め, さらに $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 不変であることを示す.

$M^m, N^n = \Sigma$[1] とし，ドメイン上の計量 $g \in \mathcal{M}$ を固定する．前節の定理によってターゲットの双曲計量 $G \in \mathcal{M}_{-1}$ を与えると，恒等写像 id_Σ にホモトピックな非退化調和写像 u_G が一意的に存在する．なお, u_G は可微分同相写像であるので, $u_G \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ である．このとき, $\mathcal{M}_{-1}$ 上のエネルギー関数 E を

$$E(G) := E_G(u_G) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g(u_G^*G)\, d\mu_g \tag{4.12}$$

によって定めることができる．この $\mathcal{M}_{-1}$ 上の関数を **Wolf 型 Dirichlet エネルギー**といい, Michael Wolf に由来する．この関数はターゲットの計量が変動するという意味で汎関数であるが, 実際は調和写像の Dirichlet エネルギーに他ならない．この関数について次のことがわかる.

補題 4.7. 上で定めた $\mathcal{M}_{-1}$ 上の汎関数は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ 作用に関して不変である．つまり, 任意の $\phi \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ に対して

$$E_G(u_G) = E_{\phi^*G}(u_{\phi^*G})$$

が成立する．ただし, u は計量 に対応する id_Σ にホモトピックな調和写像を表す.

証明. まず, $\phi^{-1}\circ u_G$ の Dirichlet エネルギーを求めると,

$$\begin{aligned}
E_{\phi^*G}(\phi^{-1}\circ u_G) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[(\phi^{-1}\circ u_G)^*(\phi^*G)]\, d\mu_g \\
&= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[(u_G^*\circ(\phi^{-1})^*\circ\phi^*)G]\, d\mu_g \\
&= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_G^*G]\, d\mu_g \\
&= E_G(u_G)
\end{aligned}$$

が成立するので,

$$\delta E_{\phi^*G}(\phi^{-1}\circ u_G) = \delta E_G(u_G) = 0$$

[1] M^m は Σ でなくてもよい．ただしホモトピー類に注意しなければならない．[2014.02.06]

を得る．また ϕ, u_G が id_Σ にホモトピックであるから, $\phi^{-1} \circ u_G$ も id_Σ にホモトピックである．よって $\phi^{-1} \circ u$ は id_Σ にホモトピックな調和写像である．

一方で $\phi^{-1} : (\Sigma, G) \to (\Sigma, \phi^* G)$ は等長写像であり, 調和写像の一意性から

$$u_{\phi^* G} = \phi^{-1} \circ u_G$$

である．したがって主張を得る． $\square$

この補題から Teichmüller 空間上のエネルギー関数 ϵ を

$$\epsilon([G]) := E_G(u_G) \tag{4.13}$$

によって定めることができて, ϵ は well-defined になる．つまり, 任意の $\phi \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ に対して

$$\epsilon(\phi^* G) = \epsilon(G)$$

である．

4.4 測地的凸性

本節では, 前節で定めた Teichmüller 空間上のエネルギー関数 ϵ が WP 測地線に沿って真に凸関数であることを示す．これは前章で示された水平リフトの二階微分の表示と調和写像のエネルギー関数に対する第二変分公式が重要な不等式評価を導く．また途中の式変形に用いるいくつかの補題は, 正規座標を用いない形で証明を行う．

定理 4.8 (エネルギー関数 ϵ の WP 測地的凸性, [17, Theorem 3.8])**.** 上で定めた $\mathcal{T}_p$ 上のエネルギー汎関数 ϵ は $\mathcal{T}_p$ 上の任意の *WP* 測地線に沿って真に凸関数である．つまり, 任意の $\sigma \in \mathcal{T}_p$ をとり, σ_t を σ を通る *WP* 測地線とする．このとき,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \epsilon(\sigma_t) > 0$$

が成立する．

証明. $\sigma \in \mathcal{T}_p$ を任意にとる. $G \in \mathcal{M}_{-1}$ を

$$\Pi(G) = \sigma$$

を満たすもので任意に固定し, G_t を G を通る σ_t の水平リフトとする. このとき各 t に対して

$$\Pi(G_t) = \sigma_t, \quad \mathrm{tr}_{G_t}\dot{G}_t = 0, \quad \delta_{G_t}\dot{G}_t = 0$$

を満たす. また $g \in \mathcal{M}$ を任意の固定し, u_t を (Σ, g) から (Σ, G_t) への調和写像で id_Σ にホモトピックなものとする. このとき, ϵ の定義から

$$\epsilon(\sigma_t) = E_{G_t}(u_t)$$

とかける.

G_t は t に関して滑らかであるので, $t=0$ の近傍で Taylor 展開すると

$$G_t = G_0 + t\,\dot{G}_0 + \frac{t^2}{2}\,\ddot{G}_0 + o(t^2)$$

とかける. これを用いて $\epsilon(\sigma_t)$ の二階微分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\epsilon(\sigma_t) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} E_{G_t}(u_t) \\
=\ & \frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g\left(u_t^*G_0 + t\,u_t^*\dot{G}_0 + \frac{t^2}{2}\,u_t^*\ddot{G}_0\right) d\mu_g \\
=\ & \frac{1}{2}\int_\Sigma \left[\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^*G_0) + 2\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{tr}_g(u_t^*\dot{G}_0) + \mathrm{tr}_g(u_0^*\ddot{G}_0)\right] d\mu_g \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

を得る. ここで各 u_t が調和写像であることから u_t 自身をその変分と考えると

$$\delta E_{G_t}(u_t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} E_{G_t}(u_s) = 0$$

が成立する. 特に $t=0$ の近傍では

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} E_{G_t}(u_s) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t}\mathrm{tr}_g\left(u_s^*G_0 + t\,u_s^*\dot{G}_0 + \frac{t^2}{2}\,u_s^*\ddot{G}_0\right) d\mu_g$$

であるから, $t=0$ で微分すると

$$0 = \frac{1}{2}\int_\Sigma \left[\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0}\mathrm{tr}_g(u_s^*G_0) + \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mathrm{tr}_g(u_s^*\dot{G}_0)\right] d\mu_g \qquad (4.15)$$

を得る．よって式 (4.14) は

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \epsilon(\sigma_t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \left[-\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0) + \mathrm{tr}_g(u_0^* \ddot{G}_0)\right] d\mu_g \\
&= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g(u_0^* \ddot{G}_0)\, d\mu_g - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

となる．以後, 式 (4.16) の第二項を不等式評価する．また添字については Einstein 規約に基づくものとする．

まず準備として, 次の三つの補題を示す. $\{x^i\}_{i=1,2}$ を g に関するドメイン上の等温座標, $\{y^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ を G_0 に関するターゲット上の等温座標とする.

補題 4.9. 任意の添字 $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2$ に対して

$$(\dot{G}_0)_{\alpha\beta,\gamma} = (\dot{G}_0)_{\gamma\beta,\alpha}$$

が成立する. ただし,

$$(\dot{G}_0)_{\alpha\beta,\gamma} := \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\left[(\dot{G}_0)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\right]$$

とする.

証明. $\dot{G}_0$ の G_0 に関する TT 性を等温座標を用いて表すと

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{G_0}\dot{G}_0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\dot{G}_0)_{11} + (\dot{G}_0)_{22} = 0 \\
(\delta_{G_0}\dot{G}_0)_\gamma = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha\gamma,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{2}[\Gamma^\delta_{\alpha\alpha}(\dot{G}_0)_{\delta\gamma} + \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}(\dot{G}_0)_{\alpha\delta}] \quad (\gamma = 1, 2)
\end{aligned}$$

となる. $\rho := (G_0)_{11} = (G_0)_{22}$ とおくと, 等温座標による Christoffel 記号の表示式 (4.11) から

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y^1} \tag{4.17}$$

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y^2} \tag{4.18}$$

を得る. よって各 $\gamma = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{G}_0)_{\alpha\gamma,\alpha} &= \Gamma^1_{11}(\dot{G}_0)_{1\gamma} + \Gamma^2_{11}(\dot{G}_0)_{2\gamma} + \Gamma^1_{22}(\dot{G}_0)_{1\gamma} + \Gamma^2_{22}(\dot{G}_0)_{2\gamma} \\
&+ \Gamma^1_{1\gamma}(\dot{G}_0)_{11} + \Gamma^2_{1\gamma}(\dot{G}_0)_{12} + \Gamma^1_{1\gamma}(\dot{G}_0)_{11} + \Gamma^2_{1\gamma}(\dot{G}_0)_{12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立する. 以上から h の TT 性は

$$(\dot{G}_0)_{11} + (\dot{G}_0)_{22} = 0, \quad (\dot{G}_0)_{11,1} + (\dot{G}_0)_{21,2} = 0, \quad (\dot{G}_0)_{12,1} + (\dot{G}_0)_{22,2} = 0$$

とかける. これらと h の対称性を用いると, 任意の添字 $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ に対して

$$(\dot{G}_0)_{\alpha\beta,\gamma} = (\dot{G}_0)_{\gamma\beta,\alpha}$$

が成立する. □

補題 4.10. 等式

$$g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\left[\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\circ u_0(u_0)^\gamma_i(u_0)^\delta_j(\dot{u}_0)^\beta\right]=g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\left[\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\circ u_0(u_0)^\gamma_i(u_0)^\beta_j(\dot{u}_0)^\delta\right]$$

が成立する．ただし，$\dot{G}_0$ は G_t の $t=0$ での微分，$\dot{u}_0$ は u_t の $t=0$ での微分を表し，添字については

$$(u_0)^\gamma_i:=\frac{\partial(y^\gamma\circ u_0)}{\partial x^i},\quad (\dot{u}_0)^\beta:=\left.\frac{d(y^\beta\circ u_t)}{dt}\right|_{t=0}$$

を表すものとする．

証明. $\dot{G}_0$ の G_0 に関する TT 性と Christoffel 記号の関係式 (4.17), (4.18) を用いる．$\gamma=1,2$ を任意に固定し，β,δ,α の順に和をとって計算すると

$$\begin{aligned}
&g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\left[\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\circ u_0(u_0)^\gamma_i(u_0)^\delta_j(\dot{u}_0)^\beta-\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\circ u_0(u_0)^\gamma_i(u_0)^\beta_j(\dot{u}_0)^\delta\right]\\
=\;&g^{ij}\Big[(\dot{G}_0)_{\alpha1}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma2}\circ u_0\,(u_0)^\gamma_i[(u_0)^2_j(\dot{u}_0)^1-(u_0)^1_j(\dot{u}_0)^2]\\
+\;&(\dot{G}_0)_{\alpha2}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma1}\circ u_0\,(u_0)^\gamma_i[(u_0)^1_j(\dot{u}_0)^2-(u_0)^2_j(\dot{u}_0)^1]\Big]\\
=\;&g^{ij}\left[(\dot{G}_0)_{\alpha1}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma2}-(\dot{G}_0)_{\alpha2}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma1}\right](u_0)^\gamma_i(u_0)^2_j(\dot{u}_0)^1\\
+\;&g^{ij}\left[(\dot{G}_0)_{\alpha2}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma1}-(\dot{G}_0)_{\alpha1}\circ u_0\,\Gamma^\alpha_{\gamma2}\right](u_0)^\gamma_i(u_0)^1_j(\dot{u}_0)^2\\
=\;&g^{ij}\left[(\dot{G}_0)_{11}\circ u_0[\Gamma^1_{\gamma2}+\Gamma^2_{\gamma1}]+(\dot{G}_0)_{12}\circ u_0[-\Gamma^1_{\gamma1}+\Gamma^2_{\gamma2}]\right](u_0)^\gamma_i(u_0)^2_j(\dot{u}_0)^1\\
+\;&g^{ij}\left[(\dot{G}_0)_{12}\circ u_0[\Gamma^1_{\gamma1}-\Gamma^2_{\gamma2}]+(\dot{G}_0)_{11}\circ u_0[-\Gamma^1_{\gamma1}+\Gamma^1_{\gamma2}]\right](u_0)^\gamma_i(u_0)^1_j(\dot{u}_0)^2\\
=\;&0
\end{aligned}$$

が成立する． □

補題 4.11. 任意の Σ 上のベクトル場 X に対して

$$\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(L_XG_0)]\,d\mu_g=0$$

が成立する．

証明. $\{\phi_t\}$ を X の $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の 1 助変数群とすると，

$$\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(L_XG_0)]\,d\mu_g=\int_\Sigma\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{tr}_g[u_0^*(\phi_t^*G_0)]\,d\mu_g=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[(\phi_t\circ u_0)^*G_0]\,d\mu_g$$

を得る．

このとき $\phi_t \circ u_0$ は u_0 の変分と考えられて, さらに u_0 は調和写像であったから

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_\Sigma \mathrm{tr}_g[(\phi_t \circ u_0)^* G_0]\, d\mu_g = 0$$

が成立する. □

以上の準備の下で

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* \dot{G}_0)\, d\mu_g \qquad (\text{式}\,(4.15)\,\text{より}) \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta,\gamma} \circ u_0\, (\dot{u}_0)^\gamma\, (u_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \\
+ \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g + \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\, u_0\, (u_0)_i^\alpha (\dot{u}_0)_j^\beta\, d\mu_g \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\gamma\beta,\alpha} \circ u_0\, (\dot{u}_0)^\gamma\, (u_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \\
+ \ & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \qquad (\text{補題 4.9 と } g, \dot{G}_0 \text{の対称性より}) \\
= \ & -\frac{1}{2}\int_\Sigma \Delta_g (u_0)^\beta\, (\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)^\alpha\, d\mu_g \\
+ \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \qquad (\text{式}\,(4.5)\,\text{より}) \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}\Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \circ u_0\, (u_0)_i^\gamma (u_0)_j^\delta\, (\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)^\beta\, d\mu_g \\
+ \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \qquad (u_0\text{の調和性}, \dot{G}_0\text{の対称性より}) \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}\Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \circ u_0\, (u_0)_i^\gamma (u_0)_j^\beta (\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)^\delta\, d\mu_g \\
+ \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\dot{u}_0)_i^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g \qquad (\text{補題 4.10 より}) \\
= \ & \frac{1}{2}\int_\Sigma g^{ij}(\dot{G}_0)_{\alpha\beta} \circ u_0\, (\nabla_{\partial_i}^{u_0^* T\Sigma} \dot{u}_0)^\alpha (u_0)_j^\beta\, d\mu_g
\end{aligned}$$

が得られる. ただし, $\nabla^{u_0^* T\Sigma}$ は G の Levi-Civita 接続 ∇ の u_0 による誘導接続で

$$(\nabla_{\partial_i}^{u_0^* T\Sigma} \dot{u}_0)^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i}(\dot{u}_0)^\alpha + (\dot{u}_0)^\delta\, \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \circ u_0\, (u_0)_i^\gamma$$

とかける.

$\left[-\frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g\right]$ の不等式評価を行う. ここで, $\{x^i\}_{i=1,2}$ をドメインの点 p_0 のまわりの局所座標で $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_{p_0}\}$ が $T_{p_0}\Sigma$ の正規直交基底となるものとし, $\{y^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ をターゲットの点 $u_0(p_0)$ のまわりの局所座標で $\{(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_{u_0(p_0)}\}$ が $T_{u_0(p_0)}\Sigma$ の正規直交基底となるものとして取り直す.

以上の準備の下で, 添字 α に関して Cauchy-Scwarz の不等式

$$A_\alpha B^\alpha \leq \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{2}[(A_\alpha)^2 + (B^\alpha)^2], \quad A_\alpha, B^\alpha \in \mathbb{R}$$

を適用すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g \\
= \;& -\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Sigma (\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\, (\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^\alpha (u_0)_i^\beta \\
= \;& \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Sigma -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\,(u_0)_i^\beta]\cdot\sqrt{2}\,(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^\alpha\, d\mu_g \\
\leq \;& \sum_{i,\alpha=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\{(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\,(u_0)_i^\beta\}^2 + 2\,\{(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^\alpha\}^2\right] d\mu_g \\
= \;& \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{8}\int_\Sigma \left[\{(\dot{G}_0)_{11}\circ u_0\}^2 + \{(\dot{G}_0)_{12}\circ u_0\}^2\right]\left[\{(u_0)_i^1\}^2 + \{(u_0)_i^2\}^2\right] d\mu_g \\
+ \;& \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_\Sigma \left[\{(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^1\}^2 + \{(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^2\}^2\right] d\mu_g \\
= \;& \frac{1}{16}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(\|\dot{G}_0\|_{G_0}^2 G_0)]\, d\mu_g + \frac{1}{2}\int_\Sigma \|\nabla^{u_0^*T\Sigma}\dot{u}_0\|^2\, d\mu_g
\end{aligned}$$

を得る. ただし式中の $\|\cdot\|$ はバンドル $T^*\Sigma\otimes u_0^*T\Sigma$ 上のノルムで, 座標を取り直したことによって

$$\begin{aligned}
\|\nabla^{u_0^*T\Sigma}\dot{u}_0\|^2 &= g^{ij}G_{\alpha\beta}\circ u_0(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^\alpha(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_j}\dot{u}_0)^\beta \\
&= \sum_{i=1}^{2}\{(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^1\}^2 + \{(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}\dot{u}_0)^2\}^2
\end{aligned}$$

が成立する. また等号成立はすべての $1 \leq i, \alpha \leq 2$ に対して

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(\dot{G}_0)_{\alpha\beta}\circ u_0\,(u_0)_i^\beta] = \sqrt{2}\,(\nabla^{u_0^*T\Sigma}_{\partial_i}W_0)^\alpha$$

を満たすときに限る.

一方で調和写像 u_0 のエネルギー関数の第二変分公式 [7, Corollary 8.7.1] を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} E(u_t) \\
= & \int_\Sigma \|\nabla^{u_0^* T\Sigma} \dot{u}_0\|^2\, d\mu_g - \int_\Sigma \mathrm{tr}_g \left[G_0\left(\mathcal{R}^G(\dot{u}_0, du_0)du_0, \dot{u}_0\right) \circ u_0\right]\, d\mu_g \\
> & \int_\Sigma \|\nabla^{u_0^* T\Sigma} \dot{u}_0\|^2\, d\mu_g
\end{aligned}$$

が成立する. 最後の不等式は G_0 の断面曲率が負であることから従う.

よって二つの不等式評価によって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g \\
\leq\ & \frac{1}{16}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} G_0)]\, d\mu_g + \frac{1}{2}\int_\Sigma \|\nabla^{u_0^* T\Sigma} \dot{u}_0\|^2\, d\mu_g \\
<\ & \frac{1}{16}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} G_0)]\, d\mu_g + \frac{1}{4}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g
\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g < \frac{1}{8}\int_\Sigma Tr_g[u_0^*(\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} G_0)]\, d\mu_g$$

を得る.

以上から, 前章で示した $\ddot{G}_0$ の二階微分の表示 (定理 3.3) を用いると

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \epsilon(\sigma_t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g(u_0^* \ddot{G}_0)\, d\mu_g - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{tr}_g(u_t^* G_0)\, d\mu_g \\
&> \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g\left[u_0^*\left(\frac{1}{4}\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} + \alpha_0\right) G_0\right]\, d\mu_g + \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(L_Z G_0)]\, d\mu_g \\
&- \frac{1}{8}\int_\Sigma \mathrm{tr}_g[u_0^*(\|\dot{G}_0\|^2_{G_0} G_0)]\, d\mu_g \\
&= \frac{1}{2}\int_\Sigma \alpha_0 \cdot \mathrm{tr}_g(u_0^* G_0)\, d\mu_g \qquad (\text{補題 } 4.11 \text{ より}) \\
&= \sum_{i,\alpha=1}^{2} \int_\Sigma \alpha_0 \cdot \left[\frac{\partial(y^\alpha \circ u_0)}{\partial x^i}\right]^2 d\mu_g \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

が成立する. ただし, 最後の不等式は α_0 の非負値性から従う. □

注意 15. 証明中の式 (4.15) とその導出は原論文 [17] とは少し異なるが, 本質的に同じことをしている

5　補足

この章では, 有向曲面上の任意のリーマン計量が定曲率リーマン計量に等角であることを説明する．計量つきの有向曲面は等温座標の存在から複素構造を持つ．これは計量つき有向曲面がリーマン面であることを意味する．一方, 任意のリーマン面はその普遍被覆空間に一意化定理を適用し被覆変換群を作用させることで, 商リーマン面と正則同相になることが知られている．また商リーマン面には定曲率リーマン計量が定義できるので, 以上のことから計量つき有向曲面は定曲率リーマン計量を持つ商リーマン面と等角の関係になる．これを順に説明していく．

5.1　等温座標の存在と複素構造

(M_0, g_0) を計量つき有向曲面とする．M_0 の局所座標 $(U, (x, y))$ が U 上で

$$g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$$

を満たすとき, g_0 の**局所等温座標**という．局所等温座標からなる M_0 の局所座標系を g_0 の**等温座標系**という．この座標に関する g_0 の局所表示は

$$g_0 = k(dx^2 + dy^2), \quad k = g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

となる．さらに $z = x + iy, (i = \sqrt{-1})$ によって U 上に複素座標を定め, U 上の微分形式を

$$dz := dx + idy, \quad d\bar{z} := dx - idy$$

によって定めると, U 上で定義される正値関数 ρ があって

$$g_0 = \rho\, dz d\bar{z} = \rho |dz|^2$$

とかける．また任意の局所座標 $(V, (u, v))$ をとったとき, 上と同様に $w = u + iv, (i = \sqrt{-1})$, $dw, d\bar{w}$ を定める．このとき, g_0 は w を用いて

$$\begin{aligned}
g_0 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\
&= E\left\{\frac{1}{2}(dw + d\bar{w})\right\}^2 + 2F\left\{\frac{1}{4i}(dw + d\bar{w})(dw - d\bar{w})\right\} + G\left\{\frac{1}{2i}(dw - d\bar{w})\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{(E - G - 2Fi)dw^2 + (E - G + 2Fi)d\bar{w}^2 + (2E + 2G)|dw|^2\right\} \\
&= \lambda |dw + \mu d\bar{w}|^2.
\end{aligned}$$

とかける. ただし,

$$\begin{aligned}
E &= g_0\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), F = g_0\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), E = g_0\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \\
\lambda &= \frac{1}{4}(E + G + 2\sqrt{EG - F^2}), \\
\mu &= \frac{E - G + 2Fi}{E + G + 2\sqrt{EG - F^2}}
\end{aligned}$$

である.

M_0 の局所座標系 $\{V_j, (u_j, v_j)\}_j$ と $U_k \cap V_j \neq \Phi$ を満たす等温座標系 $\{U_k, (x_k, y_k)\}_k$ が存在したとする. さらに座標変換 $\phi_{jk} : (u_j, v_j) \mapsto (x_k, y_k)$ は M_0 の向きを保つものとする. このとき, $U_k \cap V_j$ 上に二つの複素座標

$$z_k = x_k + iy_k, \quad w_j = u_j + iv_j, \quad i = \sqrt{-1}$$

が与えられて, g_0 の変形式から

$$\lambda_j |dw_j + \mu_j d\bar{w}_j|^2 = \rho_k |dz_k|^2 \Leftrightarrow \lambda_j = \rho_k \left|\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\right|^2, \mu_j = \frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}_k} \Big/ \frac{\partial w_j}{\partial z_k}$$

を得る. μ_j を **Beltrami 係数**といい, μ_j に関する方程式を **Beltrami 方程式**という. ここで重要なことは, 等温座標系の存在性が Beltrami 方程式の可解性に対応することである. つまり, 各 (V_j, w_j) 上で定義される複素関数 μ_j を与えたとき, Beltrami 方程式を満たす座標 $z_k = x_k + iy_k$ が存在すれば, 向きを保つ座標変換 ϕ_{jk} が存在し, それを通じて局所座標 $(V_j, (u_j, v_j))$ から g_0 の局所等温座標 $(\phi_{jk}(V_j), (x_k, y_k))$ が得られる. 一方で, Beltrami 方程式の可解性はすでに知られている結果がある.

定理 5.1 (Gauss, Korn-Lichtenstein, [6, 4.§2])**.** *任意の滑らかな曲面上で定義された Beltrami 方程式は可解である. すなわち, 滑らかな曲面上で等温座標系は常に存在する.*

注意 16. この定理から等温座標系は有向性によらずに存在するが, 曲面に複素構造を入れるために有向性は必要である [16, 定理 14.4,14.5].

よって有向曲面 M_0 には g_0 の等温座標系が存在する. さらに次の主張によって (M_0, g_0) はリーマン面であることがわかる.

命題 5.2. *M_0 は g_0 の等温座標系から定まる複素構造を持つ.*

証明. M_0 の向きを保つ, g_0 の等温座標系 $\{(U_q, \phi_q = (x_q, y_q))\}_{q \in M_0}$ をとる. 各 $q \in M_0$ で $z_q = x_q + iy_q$ によって複素座標を定めると, $\{(U_q, z_q)\}_{q \in M_0}$ が M の複素構造になることを示す.

$\{U_q\}_{q \in M}$ が M_0 の被覆であること, 各 z_q が U_q から $\mathbb{C}$ への中への同相写像になることは, M_0 が多様体であることから従う. したがって, 座標変換が双正則写像になること, つまり, $U \cap V \neq \phi$ となる二つの複素座標 (U, z) と (V, w) に対して $w \circ z^{-1}$ が双正則写像であることを示す.

$U \cap V$ 上で g_0 の表示を考えると

$$\begin{aligned} \rho|dz|^2 = \hat{\rho}|dw|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \rho|dz|^2 = \hat{\rho}|w_z|^2|dz + w_{\bar{z}}/w_z d\bar{z}|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = \hat{\rho}|w_z|^2, w_{\bar{z}} = 0 \\ &\Rightarrow \quad w \circ z^{-1} \text{は} \, z(U \cap V) \text{上で正則写像} \end{aligned}$$

が成立する. 同様にして, 逆写像 $z \circ w^{-1}$ も $w(U \cap V)$ 上で正則写像であることもわかる. 以上から, $w \circ z^{-1}$ は双正則写像である. □

等温座標系によって定まる複素構造をリーマン計量 g_0 から定まる複素構造といい, そのリーマン面をリーマン計量 g_0 から定まるリーマン面という.

5.2 一意化定理

X, Y を位相空間とする. (Y, π) が X の**被覆空間**であるとは, π は Y から X への連続全射であって, 任意の点 $x \in X$ に対して, x を含む開集合 U と Y の開集合の族 $\{V_k\}_{k \in K}$ で

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in K} V_k, \quad V_i \cap V_j \neq \Phi \, (i \neq j)$$

を満たすものが存在するときをいう. 写像 π のことを**被覆写像**という. さらに Y が単連結, つまり, Y の基本群が単位元のみからなるとき, (Y, π) を X の**普遍被覆空間**という.

X を位相空間, Y を X の被覆空間とする. F が Y の**被覆変換**であるとは, Y 上の同相写像であって

$$\pi = \pi \circ F$$

を満たすものである. Y の被覆変換全体を $Cov(Y)$ で表す. $Cov(Y)$ は写像の合成に関して群構造を持つため, Y の**被覆変換群**とよばれる.

今, リーマン面を任意に与えてその普遍被覆空間を考えると, 普遍被覆空間には元のリーマン面の複素構造が誘導される. この複素構造は被覆写像を正則写像にする複素構造である. よってリーマン面の普遍被覆空間もリーマン面になるので, これを**普遍被覆面**といい, 特に単連結リーマン面である. なぜリーマン面の普遍被覆空間を考えたかというと, 単連結リーマン面については一意化定理と呼ばれる華麗な分類定理があるからである.

定理 5.3 (一意化定理, [6, p.32])**.** 単連結リーマン面はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 複素平面 $\mathbb{C}$, 上半平面 $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im} z > 0\}$ のいずれかに正則同相である.

注意 17. 本論文では, $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^2$ を**基本リーマン面**ということにする. 以下, それぞれに付随する複素構造を述べる. $i = \sqrt{-1}$ とすると, $\hat{\mathbb{C}}$ の複素構造は

$$\Big\{(\hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}, 1/z), (\mathbb{C}, z)\Big\}$$

である. $\mathbb{C}$ の複素構造は $\{(\mathbb{C}, z)\}$ である. また $\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{C}$ 内の開集合であるから, 複素構造は $\mathbb{C}$ の複素構造の制限を考えればよい.

注意 18. 定理中の三つのリーマン面は互いに正則同型ではない. まず, $\hat{\mathbb{C}}$ はコンパクトであるから, $\mathbb{C}, \mathbb{H}^2$ とは同相になりえない. さらに $\mathbb{C}$ から $\mathbb{H}^2$ への双正則写像が存在すれば, Liouville の定理からそれは定数関数になるので矛盾する. したがって三つのリーマン面は互いに正則同相になりえない.

したがってリーマン面を与えるとその普遍被覆面は, $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}^2$ のいずれかに正則同相になることがわかる. さらに次の定理によって普遍被覆面が特定できると, 元のリーマン面がある程度特定できる.

定理 5.4 ([6, 定理 2.12, 2.13, 2.15])**.** *R をリーマン面, S を R の普遍被覆面とする. このとき, S が $\hat{\mathbb{C}}$ に正則同相であるのは R が $\hat{\mathbb{C}}$ に正則同相であるときに限り, S が $\mathbb{C}$ に正則同相であるのは R が $\mathbb{C}, \mathbb{C}\backslash\{0\}, \mathbb{T}^2$ に正則同相であるときに限る. また, S が $\mathbb{H}^2$ に正則同相であるのは R が $\mathbb{C}, \mathbb{C}\backslash\{0\}, \mathbb{T}^2$ に正則同相でないときに限る. ただし, $\mathbb{T}^2$ は二次元のコンパクトトーラスを表す.*

この定理から, 特に種数 $p \geq 2$ のコンパクトリーマン面の普遍被覆面は $\mathbb{H}^2$ に正則同相であることがわかる.

5.3 商リーマン面

R をリーマン面, (S,π) を R の普遍被覆面, $Cov(S)$ を S の被覆変換群とする. 今, S 上に $Cov(S)$ の作用による関係

$$x \sim_{Cov(S)} y :\Leftrightarrow \exists \gamma \in Cov(S)\,;\, y = \gamma(x)$$

を定めると, これは同値関係になり, 商空間 $S/\sim_{Cov(S)}$ を得る. この商空間を $S/Cov(S)$ とかき, S の $Cov(S)$ の作用による商空間という. 位相は S から $S/Cov(S)$ への射影を連続にする位相を入れる. 実は $S/Cov(S)$ はリーマン面になり, 元のリーマン面 R と正則同相になることが知られている [6, 定理 2.7].

次に, 元のリーマン面 R が基本リーマン面の商空間として表示できることを述べる. 今, 基本リーマン面を T とし, $Aut(R')$ をリーマン面 R' 上の双正則写像全体とする. このとき, 次の補題が成立する.

補題 5.5. *S から T への双正則写像は, $Aut(S)$ から $Aut(T)$ への同型写像を誘導する.*

証明. f を S から T への双正則写像とし, $\gamma \in Aut(S)$ を任意にとる. このとき, $f \circ \gamma \circ f^{-1}$ は $Aut(T)$ の元になるので, 対応

$$Aut(S) \ni \gamma \mapsto f \circ \gamma \circ f^{-1} \in Aut(T)$$

を定めると, これは群の同型写像になる. □

さらに上の同型対応を $Cov(S)$ に制限したとき, $Aut(T)$ の部分群

$$\Gamma_f := \{\tau \in Aut(T)\,;\, \gamma \in Cov(S), \tau = f \circ \gamma \circ f^{-1}\}$$

は T の被覆変換群になる. よって T/Γ_f はリーマン面になり, $S/Cov(S)$ と正則同相になる. 以上から, リーマン面 R は普遍被覆空間を経由してリーマン球面もしくは複素平面, 上半平面の被覆変換群による商空間に正則同相になることがわかる.

5.4 種数 $p \geq 2$ の閉曲面上のリーマン計量

(Σ, g) を計量つきの種数 $p \geq 2$ の閉曲面とする. このとき今までの議論によって (Σ, g) はリーマン面になり (5.1 節), その普遍被覆面は上半平面 $\mathbb{H}^2$ に正則同相にな

る (5.2 節). さらに, ある $\mathbb{H}^2$ の被覆変換群 Γ が存在して, リーマン面 (Σ, g) は $\mathbb{H}^2/\Gamma$ と正則同相になる (5.3 節).

最後に g が双曲計量と等角であることを述べる. よく知られた事実として, 上半平面 $\mathbb{H}^2$ には Poincaré 計量

$$g_{\mathbb{H}^2} := \frac{4}{(\mathrm{Im}z)^2} dz d\bar{z}$$

が定まることが知られている. これは Gauss 曲率 -1 の定曲率リーマン計量（双曲計量）である. この計量と被覆変換群についての補題を述べる.

補題 5.6. $g_{\mathbb{H}^2}$ は $Aut(\mathbb{H}^2)$ の作用に関して不変である. つまり, 任意の $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^2)$ に対して

$$\gamma^* g_{\mathbb{H}^2} = g_{\mathbb{H}^2}$$

を満たす.

証明. $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^2)$ を任意にとると, $ad - bc = 1$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

とかける [6, 補題 2.8]. このとき, a, b, c, d の条件式を用いて

$$\begin{aligned}
\gamma'(z) &= \frac{1}{(cz+d)^2}[a(cz+d) - (az+b)c] = \frac{1}{(cz+d)^2} \\
\mathrm{Im}\gamma(z) &= \frac{ac|z|^2 + bc + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}z
\end{aligned}$$

が成立する. したがって

$$\begin{aligned}
\gamma^* g_{\mathbb{H}^2} &= \frac{4}{\mathrm{Im}\gamma(z)} d\gamma d\overline{\gamma} \\
&= \frac{4\,|cz+d|^2}{\mathrm{Im}z} |\gamma'(z)|^2 dz d\bar{z} \\
&= \frac{4}{\mathrm{Im}z} dz d\bar{z} = g_{\mathbb{H}^2}
\end{aligned}$$

が成立する. □

この補題から $\mathbb{H}^2/\Gamma$ 上に Poincaré 計量が定まることがわかる. 一方, リーマン面 (Σ, g) は $\mathbb{H}^2/\Gamma$ に正則同相であったから, 計量に着目すると g は Poincaré 計量 $g_{\mathbb{H}^2}$ に等角であることがわかる. したがって, 種数 $p \geq 2$ の閉曲面上のリーマン計量は双曲計量に等角である.

参考文献

[1] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin Heidelberg 1987.

[2] G.D. Daskalopoulos and R.A. Wentworth, Harmonic Maps and Teichmüller Theory, In Handbook of Teichmüller theory, Volume **1**, EMS Publishing House, Zürich, 2007, 33-119.

[3] C.J. Earle and J. Eells, A fibre bundle description of Teichmüller theory, Journal Differential Geometry **3** (1969), 19-43.

[4] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. (1978) **10** (1): 1-68.

[5] J. Eells and L. Lemaire, Deformations of metrics and associated harmonic maps, Patodi Memorial Volume, Geometry and Analysis Tata Inst. Bombay 1980, 33-45.

[6] 今吉洋一, 谷口雅彦, タイヒミュラー空間論 *(新版 第1版)*, 日本評論社 , 2004.

[7] J. Jost, *Riemann Geometry and Geometric Analysis (Fourth Edition)*, Springer, 2008.

[8] J. Jost, *Harmonic Maps Between Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics **1062**, Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1987.

[9] 加須栄篤, リーマン幾何学, 数学レクチャーノート（基礎編 2）, 培風館 , 2001.

[10] W. Klingenberg, *Riemann Geometry*, Walter de Gruyter. Berlin. New York. 1982.

[11] N. Koiso, Variation of harmonic mapping caused by a deformation of Riemann metric, Hokkaido Math. J. **8** (1979), 199-213.

[12] 宮島静雄, 関数解析, 横浜図書. 2005

[13] 酒井隆, リーマン幾何学 *(第三版)*, 裳華房 , 1999.

[14] I.M. シンガー , J.A. ソープ, トポロジーと幾何学入門, 培風館 , 2006.

[15] A.J. Tromba, *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[16] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 -微分幾何学的アプローチ- *(第 2 版)*, 裳華房 , 2003.

[17] S. Yamada, Local and Global Aspects of Weil-Petersson Geometry, arXiv:1206.2083.

[18] S. Yamada, Weil-Petersson convexity of the energy functional on classical and universal Teichmuller spaces, Journal Differential Geometry **52** (1999), 35-96.

[19] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian geometry*, M.Dekker, 1970.