

双曲曲面に関する
Geodesic flow と Horocycle flow

中村泰之

指導教員：糸健太郎准教授

2014年3月26日

序文

この論文は双曲曲面に関する flow について, Françoise Dal'Bo 著の Geodesic and Horocyclic Trajectories[1] の 1, 2, 3, 5, 7 章の要約に基づいたサーベイ論文である. 内容は, 上半平面 \mathbb{H} 上の測地線やホロサイクルに沿った軌道である geodesic flow と horocycle flow をフックス群の極限集合と関連づけ, フックス群の中でもモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ に注目したときの商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の軌道と無理数の連分数展開との関連をまとめたものとなっている. この論文では特に断らない限り, 定理番号の横に [1] の引用元の番号を ([章番号, 定理番号]) の形で記載している. 双曲幾何については [2], [4] を, 無理数の近似については [3], [5] を理解の手助けとして用いた. 新しい図や例を載せたり, 無理数の有理数近似とモジュラー群の商空間上の軌道の関連が理解しやすい構成になるよう努めた. 以下に各章の概略を載せる.

第 1 章は双曲幾何の性質とフックス群について後の章で必要となる知識についてまとめてある. フックス群の等長変換や極限集合の特徴付けは geodesic flow や horocycle flow の性質を考える際に有用である. ここではフックス群の例としてモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ をあげている. モジュラー群は $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ が面積有限だがコンパクトでないようなフックス群である. 特にフックス群の極限集合に関し, parabolic な点が有理数に, conical な点が無理数に対応している.

第 2 章は geodesic flow についてまとめてある. geodesic flow とは, 上半平面上の測地線に沿った軌道を商空間に落としたものである. 正確にはフックス群 Γ に対して $S = \mathbb{H}/\Gamma$ の単位接バンドル T^1S 上の flow になっている. 2 章のメインは, geodesic flow に関する non wandering 集合とフックス群の極限集合を対応づけることである. non wandering な点とは, フックス群 Γ に関する単位接バンドル T^1S 上の点の近傍が geodesic flow によって限りなく近くまで戻ってくるような性質を持つ点である. 定理 2.2 で, フックス群に関する極限集合と non wandering 集合が対応することがわかる. さらに, 命題 2.6 で conical な極限集合の点が発散的でない軌道に対応し, 命題 2.7 より conical な極限集合の点の中でも hyperbolic な等長変換の不動点となるものが周期的な軌道に対応していることがわかる. 特に geodesic flow の中で non wandering だが発散していくような軌道が存在することに注意したい. また, 定理 2.9 より, non wandering 集合内で稠密な geodesic flow が存在することがわかる. 各証明は測地線が, 極限集合の異なる 2 点を指定すると一意に定まることを用いている.

第 3 章は horocycle flow についてまとめてある. horocycle flow は geodesic flow に似た性質を持つので, geodesic flow と対比して考えたい. horocycle flow とは上半平面上でホロサイクルに沿った軌道を商空間に落としたものである. 正確にはフックス群 Γ に対して $S = \mathbb{H}/\Gamma$ の単位接バンドル T^1S 上の flow になっている. 3 章のメインは, 2 章と同様に non wandering 集合とフックス群の極限集合を対応づけることである. geodesic flow と同様に horocycle flow に関する non wandering 集合を考えることができる. 命題 3.6 でフックス群に関する極限集合と non wandering 集合が対応することがわかり, 命題 3.9 で parabolic な極限集合の点と周期的な軌道が対応していることがわかる. また, 命題 3.11 より non wandering 集合内の軌道が, 稠密もしくは周期的のだ

ちらかとなることがわかる。各証明は、ホロサイクルと上半平面上の点を一対一対応づけることで、フックス群のホロサイクルの集合への作用と上半平面に作用する線型変換を対応づけられることを用いている。

第4章は無理数の有理数近似と geodesic flow の関係性についてまとめてある。4章のメインは、無理数の有理数近似とモジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の geodesic flow の軌道の有界性を関連づけることである。

まず、無理数を連分数展開で近似することとモジュラー群の上半平面への作用をファレイ直線を用いて関係づける。連分数展開は、無理数を有理数によってできるだけ正確に近似する際に有用である。

次に、無理数とモジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の軌道の有界性を関係づける。上半平面 \mathbb{H} の無限遠境界 $\mathbb{H}(\infty)$ の点 x をとり、 x に向かう測地線 $[z, x)$ をモジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上に落としたときの軌道を考える。モジュラー群の極限集合に関して、有理数が parabolic な点に、無理数が conical な点に対応していた。parabolic な点 ∞ を中心とするホロディスクをモジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上に落とすと尖点となる。この尖点の近傍を何度も出入りするような軌道に注目する。命題 4.3 より、parabolic な点に向かう軌道は尖点方向に無限に進んでいくことがわかる。conical な点に向かう軌道は、2章で non wandering かつ発散的でないということがわかっている。このとき conical な点 x の中でも、 x に向かいながら尖点部分を何度も出たり入ったりするような軌道に注目したい。この軌道と交わるホロサイクルを用いて尖点における軌道の”高さ” $h(x)$ を定義する。この軌道の高さ $h(x)$ とは、すなわち「conical な点 x に向かう軌道が尖点のどれくらいの深さまでならば無限回出入りできるのか」ということを、軌道と交わるホロサイクルを用いて見ている。尖点における軌道の高さが有界のとき、 x を幾何的不良近似と呼ぶ。 x が幾何的不良近似であることと、 x に向かう軌道 $\pi([z, x))$ が $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ で有界であることが同値となっている。

以上の特徴を用いて、無理数 x の連分数展開と x の幾何的不良近似性を関連づけたい。まず無理数を有理数を用いて近似する際の”近似の良さ”を考えたい。関数 $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ - \{0\}$ で、任意の無理数 x に関し、 x に収束する有理数列 $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$ を考えた時、

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \Psi(|q_n|) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty$$

を満たすものを考える。このとき、ベストとなる Ψ を調べていく。この Ψ に関して、定理 4.9 より

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty$$

が成り立つ。

次に、各 x に関してこのような近似の良さを議論したい。そのために

$$\nu(x) := \inf \{ \rho > 0 \mid \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \text{ で } \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{\rho}{q_n^2} \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty \text{ を満たすものが存在する} \}$$

を導入する. $\nu(x) > 0$ が成り立つとき, x を不良近似と呼ぶ.

補題 4.7 より尖点における軌道の高さ $h(x)$ と $\nu(x)$ について

$$\nu(x) = \frac{1}{2h(x)}$$

が成り立つことから, 幾何的不良近似であることと不良近似であることは同値であることがわかる. 定理 4.11 で無理数 x の連分数展開 $[n_0; n_1, n_2, \dots]$ の係数 $(n_i)_{i \geq 0}$ が上に有界であることと, x が不良近似であること, つまりモジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の軌道が有界であることが同値であることが示される.

最後に, この修士論文を作成するにあたって, お忙しい中丁寧にご指導を下さった糸健太郎先生に心から感謝致します. また, 同じ少人数クラスで学習し, 助言を頂いた手銭さん, 中沢さん, 李娜さん, 同じ M2 として協力し合った早川さん, 常深さん, 上松さん, 大久保さん, 石川さん, 理 6 の方々, そして学生生活を支えてくれた家族に感謝致します.

目次

1	双曲幾何	5
1.1	双曲平面	5
1.2	等長変換	7
1.3	フックス群	8
1.4	極限集合	9
1.5	幾何的有限性	10
2	geodesic flow	12
2.1	geodesic flow	13
2.2	geodesic flow に関する non wandering 集合	16
2.3	周期的な geodesic flow	21
2.4	幾何的有限性	23
3	horocycle flow	25
3.1	horocycle flow	25
3.2	線型変換	26
3.3	horocycle flow に関する non wandering 集合	30
3.4	周期的な horocycle flow	35
3.5	幾何的有限性	37
3.6	geodesic flow と horocycle flow の関係	38
4	無理数の近似と geodesic flow	40
4.1	連分数展開	40
4.2	尖点近傍の軌道	44
4.3	ディオファントス近似	49

1 双曲幾何

1章では双曲幾何とフックス群に関して、後の章で必要となる基本的な事柄を説明する。上半平面に作用する群 $PSL(2, \mathbb{R})$ の離散的な部分群をフックス群という。フックス群の上半平面への作用を紹介することが、1つのメインとなっている。特にモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ の場合は極限集合と上半平面の無限遠境界が一致し、さらに conical な極限集合の点が無理数に、parabolic な極限集合の点が有理数に対応していることを見る。

1.1 双曲平面

この節ではこの論文で扱う双曲幾何に関する基本的な事柄をまとめた。 \mathbb{R}^* を \mathbb{R} から原点をのぞいた集合、 \mathbb{C} を複素平面、 \mathbb{D} を単位円板、 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ を上半平面とする。この上半平面に双曲計量

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

を備えたものを双曲平面と呼ぶ。

\mathbb{H} の長さや面積、測地線について述べる。 \mathbb{H} 上の2点 z, z' を結ぶ区分的 C^1 級曲線 c を次のように与える。

$$c: [a, b] \ni t \mapsto x(t) + iy(t)$$

曲線 c の双曲的長さを、

$$\text{length}(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

領域 $B \subset \mathbb{H}$ の双曲的面積を

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B \frac{dx dy}{y^2}$$

と定義する。

命題 1.1. ([I, Proposition 1.4.])

$z, z' \in \mathbb{H}$ を端点とする区分的 C^1 曲線の集合を S とする。このとき区分的 C^1 級曲線 C で

$$\text{length}(C) = \inf_{c \in S} \text{length}(c)$$

を満たすものがただ1つ存在する。このとき、

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ の時、曲線 C は z, z' を端点とする線分となる。
- それ以外の時、曲線 C は z, z' を通り中心が実軸上にあるような半円の、 z, z' を端点とする円弧となる。

この命題より、実軸に直交するような半直線と実軸上に中心を持つ半円を、 \mathbb{H} の測地線と定義する。このとき、以下で定義される関数 $d: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は双曲平面上の距離関数となる。

$$d(z, z') = \text{length}(C)$$

次に上半平面に作用する群を考える。実メビウス変換

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1)$$

のなす群を、以下では常に $PSL(2, \mathbb{R})$ とする。

$PSL(2, \mathbb{R})$ は \mathbb{H} から \mathbb{H} への等角かつ向きを保つ変換全体のなす群である。 $PSL(2, \mathbb{R})$ は円を保存 (直線は ∞ を中心とする円と考える) するので、 $PSL(2, \mathbb{R})$ の元は測地線を測地線に写す。

\mathbb{H} の向きを保つ等長変換全体のなす群を $Isom(\mathbb{H})$ とすると、 $Isom(\mathbb{H})$ は $PSL(2, \mathbb{R})$ と同一視できる。

\mathbb{H} に d から定まる位相を考える。 \mathbb{H} はコンパクトではない。次の集合を考えることで \mathbb{H} のコンパクト化を考える。 \mathbb{H} の無限遠境界を

$$\mathbb{H}(\infty) := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と定義する。 \mathbb{H} に無限遠境界 $\mathbb{H}(\infty)$ を加えることで、コンパクトとすることができる。 $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ の部分集合を A とする。部分集合 A に対し、内部を A° 、閉包を \bar{A} と表す。このとき、部分集合 A に対し、 A の無限遠境界を

$$A(\infty) := \bar{A} \cap \mathbb{H}(\infty)$$

と定義する。測地線の無限遠境界は測地線の2つの端点である。 ∞ を端点として持つ測地線は、実軸に直交する測地線のみである。測地線に関し、 $z, z' \in \mathbb{H}$ を端点とする双曲的線分を $[z, z']_h$ と表す。また異なる2点 $x^-, x^+ \in \mathbb{H}(\infty)$ を端点とする x^- から x^+ への向きの測地線を (x^-, x^+) と表す。また、 z から x^+ への向きの測地線を $[z, x^+)$ と表す。 \mathbb{H} の測地線は \mathbb{H} を2つの連結な成分に分ける。この各成分を半平面と呼ぶ。3つの閉半平面の交わりで、面積が有限かつ0でない領域を双曲的三角形と呼ぶ。

次に \mathbb{H} 上の、実軸に平行な直線と、実軸に接する円の族に注目する。実軸と平行な直線に無限遠点 ∞ を足して、拡張された平行線を考える。この拡張された平行線は無限遠点を中心とする円とみることができる。実軸上の点 x で接する円、もしくは実軸に平行な直線をホロサイクルと呼び、内部まで含めたものをホロディスクと呼ぶ。このとき、無限遠境界上の点 x 、もしくは無限遠点 ∞ をホロサイクルの中心と呼ぶ。

次に、同一の中心を持つホロサイクルの距離に注目する。このとき次の定理が成り立つ。(図1)

定理 1.2. ([I, Theorem 1.18.])

$x \in \mathbb{H}(\infty)$ を端点とする測地線の弧長パラメータを $(r(t))_{t \geq 0}$ とする。 $z, z' \in \mathbb{H}$ から $r(t)$ までの距離による関数を

$$f(t) = d(z, r(t)) - d(z', r(t))$$

とする. この関数 $f(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ のとき極限値を持つ. 特に, この極限値は測地線の始点 $r(0)$ によらない.

この関数の極限値をブーゼマンコサイクルと呼び $B_x(z, z')$ と表す. $B_x(z, z')$ は x を中心とするホロサイクル上で一定である.

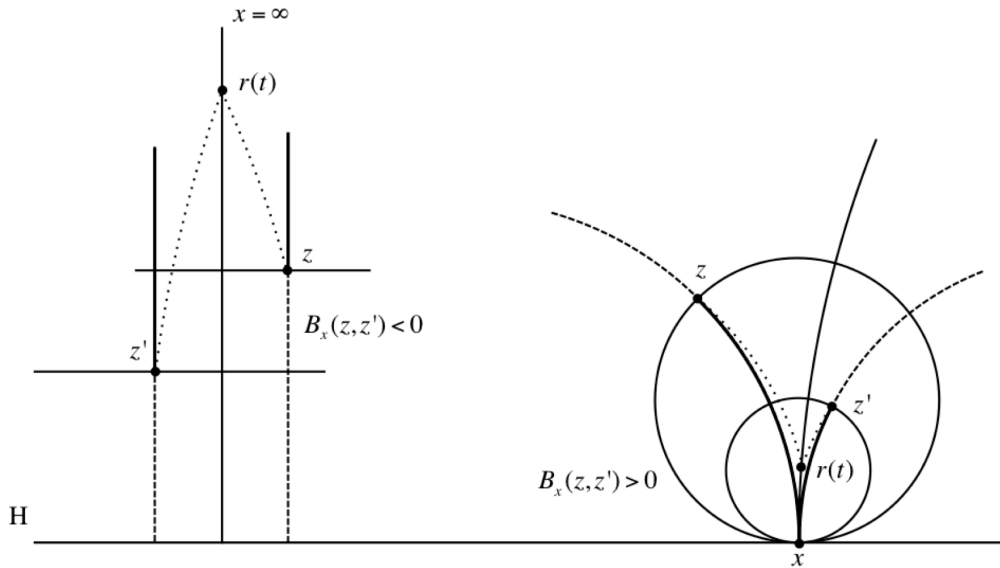


図 1

ブーゼマンコサイクルを用いてホロサイクルを具体的に定義する. 任意の $t > 0$ に対して, x を中心とするホロサイクルを,

$$H_t := \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) = t\}$$

と定義し, x を中心とするホロディスクを,

$$H_t^+ := \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) \geq t\}$$

と定義する.

1.2 等長変換

この節では $PSL(2, \mathbb{R})$ の元がどのように \mathbb{H} に作用するかを考えていく. そこで次のような $PSL(2, \mathbb{R})$ の部分群を導入する.

$$K = \left\{ r(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \{h(z) = az \mid a > 0\}$$

$$N = \{t(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}$$

K は $PSL(2, \mathbb{R})$ の i に関する固定化群, A は $0, \infty$ を不動点とする群, N は ∞ のみを不動点とする群である.

向きを保つ等長変換の幾何的な分類を考える.

$\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ と表すことにする. $\bar{\mathbb{H}}$ 上の $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ の不動点に注目して考える.

$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$) と書く. $g \neq Id$ と仮定する. $c \neq 0$ のとき, g の $\bar{\mathbb{H}}$ 上の不動点 z は

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}$$

となる. $c = 0$ のとき, g は A か N に属する.

このときのルート部分について, g のトレースを

$$|\text{tr}(g)| := |a + d|$$

と定義する. このトレースによる等長変換の分類を考える.

命題 1.3. ([I, Property 2.5.])

$g \in PSL(2, \mathbb{R}) - \{Id\}$ をとる.

- $|\text{tr}(g)| > 2$ の時, g は $\bar{\mathbb{H}}$, 特に $\mathbb{H}(\infty)$ にちょうど2つ不動点をもつ. また, g は A の元と共役.
- $|\text{tr}(g)| < 2$ の時, g は $\bar{\mathbb{H}}$, 特に \mathbb{H} にただ1つ不動点を持つ. また, g は K の元と共役.
- $|\text{tr}(g)| = 2$ の時, g は $\bar{\mathbb{H}}$, 特に $\mathbb{H}(\infty)$ にただ1つ不動点を持つ. また, g は N の元と共役.

この命題より, 次のような分類を与える.

- $|\text{tr}(g)| > 2$ のとき, g を **hyperbolic** と呼ぶ. このとき g は, 不動点を端点とする測地線を保存する. この測地線を g の軸と呼び, (g^-, g^+) と表す.
- $|\text{tr}(g)| < 2$ のとき, g を **elliptic** と呼ぶ. このとき g は, ただ1つの不動点を通る測地線を, この不動点を通る測地線に写す.
- $|\text{tr}(g)| = 2$ のとき, g を **parabolic** 呼ぶ. このとき g は, 不動点を中心とするホロサイクルを保存する.

1.3 フックス群

この節では, フックス群とその基本領域であるディリクレ領域を説明する.

$PSL(2, \mathbb{R})$ の離散的部分群 Γ をフックス群と呼ぶ. 例として, $PSL(2, \mathbb{Z})$ はフックス群である.

\mathbb{H} の任意のコンパクトな部分集合 K に対し, $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ を満たす Γ の元 γ の個数が高々有限個のとき, $PSL(2, \mathbb{R})$ の部分群 Γ の \mathbb{H} への作用を **properly discontinuous** と呼ぶ. フックス群 Γ の \mathbb{H} への作用は properly discontinuous である.

フックス群 Γ の基本領域を考える. \mathbb{H} の部分集合 F に対し, 次の条件を満たすとき F を Γ の基本領域と呼ぶ.

- F は \mathbb{H} の空でない閉連結部分集合
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F = \mathbb{H}$
- 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し, $F^\circ \cap \gamma F^\circ = \emptyset$

基本領域の例としてディリクレ領域を考える. まず $\Gamma - \{\text{Id}\}$ の不動点とならない点 $z_0 \in \mathbb{H}$ をとる. z_0 を含む半平面を

$$H_{z_0}(\gamma) := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) \leq d(z, \gamma(z_0))\}$$

とし, 全ての半平面 $H_{z_0}(\gamma)$ の共通部分を考える. このとき z_0 を中心とするディリクレ領域を以下で定義する.

$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}} H_{z_0}(\gamma)$$

このディリクレ領域は Γ の基本領域である. ディリクレ領域の面積に関しての性質を考える. ディリクレ領域 $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ が有限面積のとき, Γ は **lattice** と呼ぶ. 特にディリクレ領域がコンパクトなとき, Γ を **uniform** と呼ぶ.

1.4 極限集合

この節ではフックス群 Γ の $\mathbb{H}(\infty)$ への作用を考える. Γ の \mathbb{H} への作用は properly discontinuous なので, 任意の $z \in \mathbb{H}$ の軌道 $\Gamma(z)$ は $\mathbb{H}(\infty)$ 上に収束する. この軌道に対し, 次の性質が考えられる.

補題 1.4. ([I, p,24])

軌道 $\Gamma(z)$ 内の列 $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$ で, $x \in \mathbb{H}(\infty)$ に収束するものが存在する. この x は特に z によらない.

この補題より, $\overline{\Gamma(z)} \cap \mathbb{H}(\infty)$ を Γ の極限集合と定義し, この集合を $L(\Gamma)$ と表す.

$L(\Gamma)$ は $\mathbb{H}(\infty)$ の閉集合 (空集合もあり得る). また, z の取り方によらず Γ 不変である. 極限集合が有限のとき, フックス群を初等的と呼ぶ.

Γ が非初等的の時, $L(\Gamma)$ は $\mathbb{H}(\infty)$ の空でない Γ 不変の最小な閉部分集合となる.

次に $L(\Gamma)$ の元を, 軌道 $\Gamma(z)$ の近づき方による分類を考える. $x \in L(\Gamma)$ に対し, 次のように分類を定義する.

- 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対し, 軌道 $\Gamma(z)$ が x を中心とする全てのホロディスクと交わる時, x を **horocyclic** と呼ぶ.
- $z \in \mathbb{H}$ に対し, ある $\varepsilon > 0$ と $(\gamma_n)_{n \geq 0} \in \Gamma$ が存在して, 列 $(\gamma_n(z))_{n \geq 0}$ が x に収束し, かつ $d(\gamma_n(z), [z, x]) \leq \varepsilon$ を満たすとき, x を **conical** と呼ぶ.
- parabolic な $\gamma \in \Gamma (\gamma \neq id)$ で, $\gamma(x) = x$ を満たすものが存在するとき, x を **parabolic** と呼ぶ.

horocyclic, conical, parabolic な点の集合を, それぞれ $L_h(\Gamma), L_c(\Gamma), L_p(\Gamma)$ とかく.

horocyclic な点に関し次の性質が成り立つ.

命題 1.5. ([I, Proposition 3.10.])

x が horocyclic であることと, 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = +\infty$ が成り立つことは同値.

また, parabolic な点に関し次の定理が成り立つ.

定理 1.6. ([I, Theorem 3.17.])

$x \in L_p(\Gamma)$ をとる. x を中心とするホロディスク $H_t^+(x)$ で任意の $\gamma \in \Gamma$ で $\gamma(x) \neq x$ を満たすものに対して,

$$\gamma(H_t^+(x)) \cap H_t^+(x) = \emptyset$$

を満たすものが存在する.

parabolic な点 x に関し, x の固定化群 Γ_x は parabolic な等長変換で生成される. ここでフックス群 Γ による商空間 \mathbb{H}/Γ を考える. 定理 1.6 をみたく x を中心とするホロディスクを $H_t^+(x)$ とするとき, 次のような自然な射影を考えることができる.

$$q: H_t^+(x)/\Gamma_x \longrightarrow \mathbb{H}/\Gamma$$

このとき, $q(H_t^+(x)/\Gamma_x) \subset \mathbb{H}/\Gamma$ をホロディスク $H_t^+(x)$ に関する尖点と呼ぶ.

1.5 幾何的有限性

この節ではフックス群 Γ に関して次の集合を考える.

$$\tilde{\Omega}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{任意の } x, y \in L(\Gamma) \text{ に対し } z \in (x, y)\}$$

もし Γ が初等的ならば, $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ は \emptyset , もしくは 1 つの測地線となることが知られている.

この $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ を用いて, ニールセン領域を定義する. Γ が非初等的のとき, $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ の凸包を \mathbb{H} におけるニールセン領域と呼び $N(\Gamma)$ と表す. $N(\Gamma)$ は \emptyset でない最小の Γ -不変な凸部分集合である.

またディリクレ領域 $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ が存在し, $N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$ の面積が有限のとき, Γ を幾何的有限と呼ぶ.

Γ を非初等的とするとき、ディリクレ領域 $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ が存在して、 $N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$ がコンパクトのとき、 Γ を凸コンパクトと呼ぶ。

幾何的有限性は次のように書き換えることが可能である。

定理 1.7. ([I, Theorem 4.8.])

Γ を非初等的とする。以下は同値。

- (i) $N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$ の面積は有限.
- (ii) $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ の辺は数は有限.

Γ が幾何的有限性をもつとき、無限遠境界でのディリクレ領域の様子を調べる。ディリクレ領域の無限遠集合を $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ とするとき、 $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ と $L(\Gamma)$ には次のような関係性がある。

定理 1.8. ([I, Theorem 4.12.])

Γ を非初等的で幾何的有限とする。このとき、以下が成り立つ。

- (i) $L(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ は有限集合.
- (ii) $L(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty) = L_p(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$.
- (iii) $L_p(\Gamma)$ は Γ 軌道の有限ユニオン.

また、ニールセン領域 $N(\gamma)$ とディリクレ領域 $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ に注目すると、 $N(\Gamma)$ と $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ の共通部分に関して次のように分解できる。

命題 1.9. ([I, Proposition 4.16.])

Γ を非初等的で幾何的有限とする。このとき、ある相対コンパクトな集合 $K \subset \mathbb{H}$ で

$$N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma) = K \cup \bigcup_{x \in L_p(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)} H_t^+(x) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$$

を満たすものが存在する。(ここで $H_t^+(x)$ は定理 1.6 を満たすものとする.)

次に極限集合の状況から幾何的有限性の特徴づけを考える。

定理 1.10. ([I, Theorem 4.13.])

Γ に関し以下は同値。

- (i) Γ は幾何的有限性をもつ.
- (ii) $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma)$.
- (iii) $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$.

この定理より、 Γ が幾何的有限かどうかは Γ の $\mathbb{H}(\infty)$ への作用を調べることで決定できることがわかる。また、定理 1.10 から次の系が成り立つ。

系 1.11. ([I, Corollary 4.17.])

Γ に関し, 以下が成り立つ.

- (i) Γ が凸コンパクトであることと, $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$ が成り立つことは同値.
- (ii) Γ が lattice であることと, $\mathbb{H}(\infty) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$ が成り立つことは同値.

フックス群の例としてモジュラー群を考える. モジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ は, メビウス変換

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1)$$

全体によって生成される群である.

このとき, モジュラー群のディリクレ領域は

$$\mathcal{D}_{2i}(PSL(2, \mathbb{Z})) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ かつ } -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$$

と表せる. また, $PSL(2, \mathbb{Z})$ は non-uniform lattice である. モジュラー群に関する極限集合を考えると, 次の性質が成り立つ.

命題 1.12. ([II, Proposition 3.25.])

$$L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

モジュラー群の商空間 $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ による曲面を考えると図 2 のようになる.

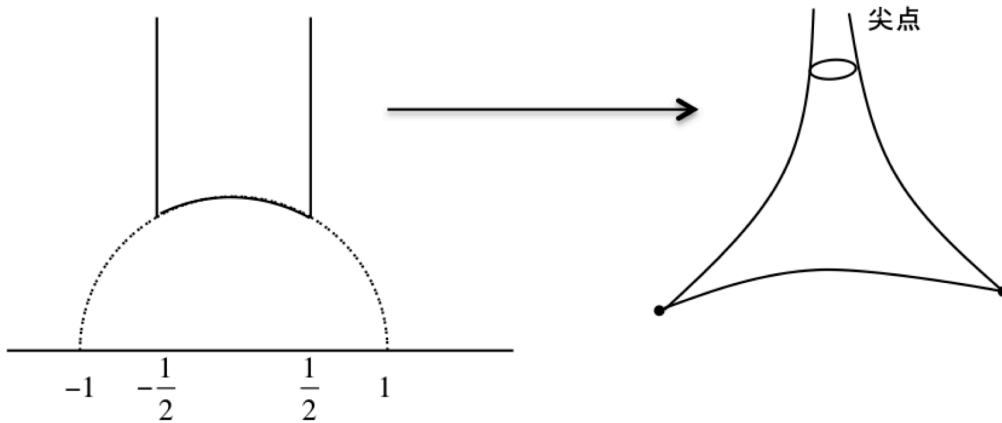


図 2

2 geodesic flow

2章では geodesic flow について述べる. geodesic flow は, 上半平面上の測地線に沿った軌道を商空間に落としたものであり, 正確にはフックス群 Γ に対して $S = \mathbb{H}/\Gamma$ の単位接バンドル T^1S 上の flow になっている. この章では geodesic flow に関する non wandering 集合を定義し,

non wandering 集合とフックス群の極限集合を対応づけることを1つの目的としている. non wandering な点とは, フックス群 Γ に関する単位接バンドル T^1S 上での点の近傍が geodesic flow によって限りなく近くまで戻ってくるような性質を持つ点である. フックス群に関する極限集合と non wandering 集合がどう対応するかを調べるために, geodesic flow に対応する測地線と, 極限集合の異なる2点を端点とする測地線に注目する. 定理 2.2 で, フックス群に関する極限集合と non wandering 集合が対応することを示し, 命題 2.6 で conical な極限集合の点が発散的でない軌道に対応することを示す. また命題 2.7 より conical な極限集合の点の中でも hyperbolic な等長変換の不動点となるものが周期的な軌道に対応していることがわかる. また, 定理 2.9 より, non wandering 集合内で稠密な geodesic flow が存在することを示すことも目的の1つである.

2.1 geodesic flow

この節では, geodesic flow について説明する.

まず, 一般の flow について考える. X を位相空間とする. 写像 $g : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ で次の条件を満たすものを, X 上の **flow** と定義する.

- g は連続.
- 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, $g_t : X \rightarrow X$ は同相写像.
- 任意の $x \in X, s, t \in \mathbb{R}$ に対し, $g_t(g_s(x)) = g_{t+s}(x)$ が成り立つ.

次に, 測地線にそった flow として単位接バンドル $T^1\mathbb{H}$ 上での geodesic flow を考えていく. 一般に, 曲面 M の各点 p において接平面を T_pM とし

$$T^1M := \{(z, \vec{u}) \mid z \in M, \vec{u} \in T_zM, \|\vec{u}\| = 1\}$$

を単位接バンドルと呼ぶ. \mathbb{H} の単位接バンドル $T^1\mathbb{H}$ において, 以下で定義される関数 $D : T^1\mathbb{H} \times T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は距離関数となる.

$$D((z, \vec{u}), (z', \vec{u}')) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} d(u(t), u'(t)) dt$$

ここで $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して, $(u(t))_{t \in \mathbb{R}}$ は弧長パラメータ表示された測地線で,

$$u(0) = z, \quad \frac{d}{dt}u(0) = \vec{u}$$

を満たすものとする. $u(\pm\infty) \in \mathbb{H}(\infty)$ を測地線の端点とする. (図 3)

$T^1\mathbb{H}$ 上の geodesic flow を

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} &\longrightarrow T^1\mathbb{H} \\ \tilde{g}_t((z, \vec{u})) &:= \left(u(t), \frac{d}{dt}u(t) \right) \end{aligned}$$

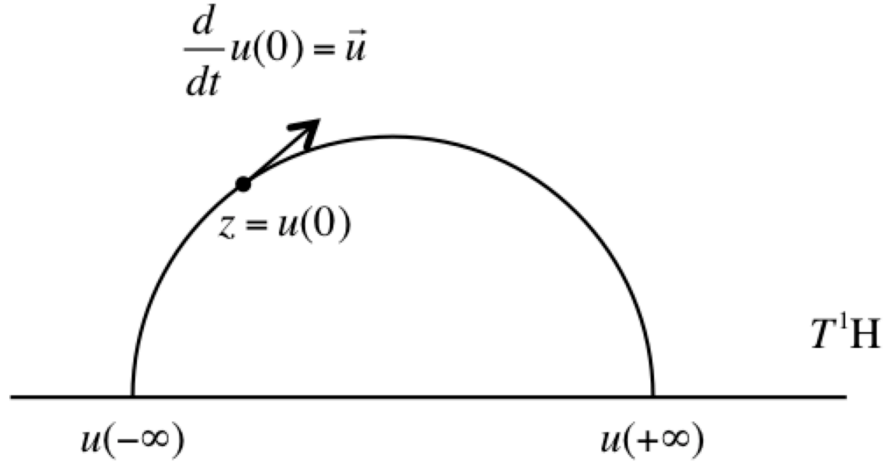


図 3

と定義する. これは, flow の定義を満たしている.

次にフックス群の作用を考える. Γ をフックス群とすると, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し

$$\gamma((z, \vec{u})) = \left(\gamma(u(0)), \frac{d}{dt} \gamma(u(0)) \right)$$

とする. このとき, 任意の実数 t に関して

$$\tilde{g}_t(\gamma((z, \vec{u}))) = \gamma(\tilde{g}_t((z, \vec{u})))$$

が成り立つ.

Γ による商空間 $S := \mathbb{H}/\Gamma$ を考える. 次のような標準的写像を考えることができる.

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H} &\longrightarrow S = \mathbb{H}/\Gamma \\ \pi^1 : T^1\mathbb{H} &\longrightarrow T^1S = T^1\mathbb{H}/\Gamma \end{aligned}$$

T^1S 上での geodesic flow を定義する. $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ とするとき, T^1S 上の geodesic flow を

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times T^1S &\longrightarrow T^1S \\ g_t(\pi^1((z, \vec{u}))) &:= \pi^1(\tilde{g}_t((z, \vec{u}))) \end{aligned}$$

と定義する.

この g は (z, \vec{u}) の取り方に依らない. また, 集合 $\{g_t(\pi^1((z, \vec{u})))\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\pi^1((z, \vec{u}))$ からの軌道と呼ぶ.

注 1. フックス群 Γ が elliptic な元を含むときは $S = \mathbb{H}/\Gamma$ が”ツノ”をもつので, T^1S が S の単位接バンドルとならない場合がある. しかし Γ が elliptic な元を含むかどうかにかかわらず, \tilde{g} は g を引き起こす.

軌道と測地線の端点には次のような関係が成り立つ.

命題 2.1. ([III, Proposition 1.6])

$((z_n, \vec{u}_n))_{n \geq 1} \subset T^1 \mathbb{H}$, $(z, \vec{u}) \in T^1 \mathbb{H}$ をとる. $(w_n, \vec{v}_n) = \pi^1((z_n, \vec{u}_n)) \in T^1 S$, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1 S$ とするとき, 以下は同値.

(i) 実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{s_n}(w_n, \vec{v}_n) = (w, \vec{v})$$

を満たすものが存在する.

(ii) $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty))) = (u(-\infty), u(+\infty))$$

を満たすものが存在する.

Proof. [III, Proposition 1.6] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. 仮定から, $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\gamma_n \tilde{g}_{s_n}((z_n, \vec{u}_n)), (z, \vec{u})) = 0$$

を満たすものがとれる. geodesic flow による端点の収束を考えることで, $(\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty)))$ が $(u(-\infty), u(+\infty))$ に収束することがわかる.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 向き付きの測地線の列

$$L_n = (\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty)))$$

を考える. この列は測地線 $L = (u(-\infty), u(+\infty))$ に収束する. このとき, L_n 上の点列 $(z'_n)_{n \geq 1}$ で z に収束するものがとれる. 半直線 $[z'_n, \gamma_n(u_n(+\infty)))$ の z'_n で接する単位ベクトル \vec{u}'_n とし, 列 $((z'_n, \vec{u}'_n)) \subset T^1 \mathbb{H}$ をとる.

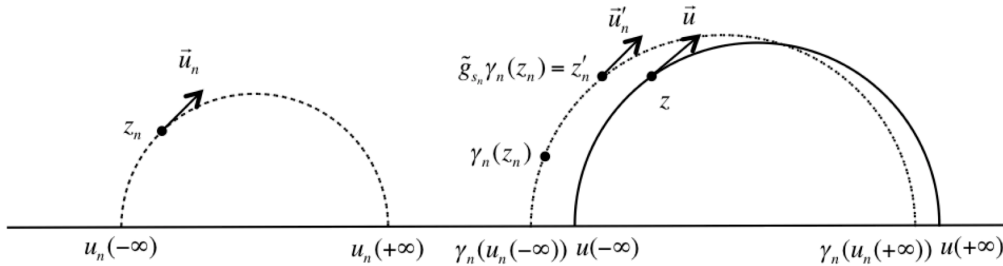


図 4

このとき, 実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$(z'_n, \vec{u}'_n) = \tilde{g}_{s_n}(\gamma_n((z_n, \vec{u}_n)))$$

を満たすものがとれる。今,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n = z \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n(+\infty) = u(+\infty)$$

が成り立つので

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{s_n}(w_n, \vec{v}_n) = (w, \vec{v})$$

が成り立つ。 □

2.2 geodesic flow に関する non wandering 集合

この節では geodesic flow の T^1S 上での振る舞いと極限集合の関連づけを考える。まず T^1S 上での geodesic flow の振る舞いとして、限りなく近くに帰ってくるようなものを考える。点 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ に関し、 (w, \vec{v}) の任意の近傍 V に対して、非有界な実数列 $(t_n)_{n \geq 0}$ で

$$g_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset$$

を満たすものが存在するとき、点 (w, \vec{v}) を **non wandering** と呼ぶ。

特に non wandering な点の集合を $\Omega_g(T^1S)$ と表す。

注 2. この non wandering な点は **recurrent** (回帰的) とは異なることに注意したい。点 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ が recurrent であるとは、 (w, \vec{v}) の任意の近傍 V に対して、非有界な実数列 $(t_n)_{n \geq 0}$ で $g_{t_n}((w, \vec{v})) \cap V \neq \emptyset$ を満たすものが存在するときをいう。実は Γ が幾何的有限のとき、Poincaré の定理より $\Omega_g(T^1S)$ のほとんどすべての点は recurrent であることが知られている。(cf, [4], p,117)

non wandering 集合 $\Omega_g(T^1S)$ とフックス群 Γ の極限集合 $L(\Gamma)$ の関係について、次の定理が成り立つ。

定理 2.2. ([III, Theorem 2.1.])

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき、以下は同値。

- (i) $(w, \vec{v}) \in \Omega_g(T^1S)$
- (ii) $u(\pm\infty) \in L(\Gamma)$

この定理を示すために、次の補題を考える。

補題 2.3. ([III, Lemma 2.2.])

$x, y \in L(\Gamma)$ をとる。このとき、 $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(i) = x \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = y$$

を満たすものが存在する。

Proof. [III, Lemma 2.2.] の証明に基づいて証明を行う。

$x \in L(\Gamma)$ を1つ固定する。

$A := \{x' \in L(\Gamma) \mid (h_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma \text{ で } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(i) = x \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^{-1}(i) = x' \text{ を満たすものが存在する} \}$

とする。 $A = L(\Gamma)$ を示したい。 A に関し、 x を不動点とする等長変換が考えられるので A は空でない。 ここからは A が閉集合であることを示す。 $x'' \in \mathbb{H}$ に収束する点列 $(x'_p)_{p \geq 1} \subset A$ をとる。 任意の p に対し、 $(h_{p,k})_{k \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{p,k}(i) = x \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{p,k}^{-1}(i) = x'_p$$

を満たすものがとれる。 これより、 $(h_{p,k_p})_{p \geq 1}$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{p,k_p}(i) = x \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{p,k_p}^{-1}(i) = x''$$

を満たすものがとれる。 よって $x'' \in A$ が成り立ち、 A が閉集合であることがわかる。 今、 A は空でない Γ 不変な $L(\Gamma)$ の閉集合なので、 極限集合の性質から $A = L(\Gamma)$ が成り立つ。 \square

この補題を用いて、 定理 2.2 の証明をする。

Proof. [III, Theorem 2.1.] の証明に基づいて証明を行う。

(ii) \Rightarrow (i) を示す。 補題 2.3 より、 $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(i) = u(+\infty) \text{ かつ } \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(-\infty)$$

を満たすものをとる。 $t_n = d(z, \gamma_n^{-1}(z))$ とする。 この t_n は $+\infty$ に収束することがわかる。 $(z'_n, \vec{u}'_n) \in T^1\mathbb{H}$ を、 $z'_n = \gamma_n^{-1}(z)$ かつ $[z'_n, z]_h$ の点 z'_n での単位接ベクトル \vec{u}'_n となるようにとる。 このとき、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n(+\infty) = u(+\infty) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n(-\infty) = u(-\infty)$$

を得る。 また、 t_n の取り方から $u'_n(t_n) = z$ がわかる。 よって

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{g}_{t_n}((z'_n, \vec{u}'_n)) = (z, \vec{u})$$

が成り立つ。

$\gamma_n((z'_n, \vec{u}'_n))$ に注目する。 この要素は z と $[z, \gamma_n(z)]_h$ の z における単位接ベクトルに対応している。 これより、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n((z'_n, \vec{u}'_n)) = (z, \vec{u})$$

がわかる。 (w, \vec{v}) の近傍を V とし、 $(w_n, \vec{v}_n) = \pi^1((z'_n, \vec{u}'_n))$ とする。 十分大きい n に対し

$$(w_n, \vec{v}_n) \in V, g_{t_n}((w_n, \vec{v}_n)) \in V$$

が成り立つ。 よって、 $g_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset$ が成り立つので (w, \vec{v}) は non wandering.

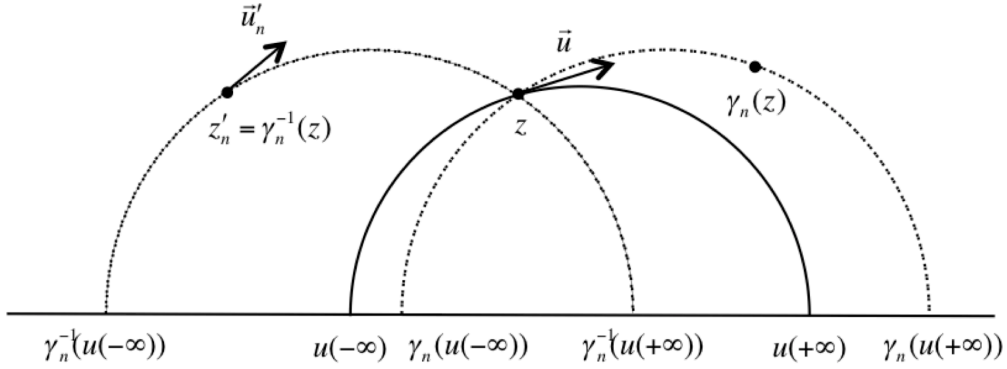


図 5

次に (i) \Rightarrow (ii) を示す. $(V_n)_{n \geq 1}$ を (w, \vec{v}) の近傍で $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = w$ を満たすものとする. (w, \vec{v}) は non wandering なので, $+\infty$ に収束する実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で

$$gt_n(V_n) \cap V_n \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる. これより, $((w_n, \vec{v}_n))_{n \geq 1} = (\pi^1((z_n, \vec{v}_n)))_{n \geq 1} \subset T^1S$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n, \vec{v}_n) = (w, \vec{v}) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} gt_n((w_n, \vec{v}_n)) = (w, \vec{v})$$

を満たすものをとる. $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n, \vec{u}_n) = (z, \vec{u}) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{g}_{t_n}((z_n, \vec{u}_n)) = (z, \vec{u})$$

を満たすものがとれる. $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ より,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t_n) = u(+\infty)$$

を得る. さらに, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(+\infty)$ なので, $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ が成り立つ. $(t_n)_{n \geq 1}$ を $(-t_n)_{n \geq 1}$ に置き換えることで $u(-\infty) \in L(\Gamma)$ も成立する. \square

$\Omega_g(T^1S)$ について, 特に次の性質が成り立つ.

命題 2.4. ([III, Proposition 2.4.])

$\Omega_g(T^1S)$ と $L(\Gamma)$ について以下は同値.

- (i) $\Omega_g(T^1S)$ がコンパクト.
- (ii) $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$.

Proof. [III, Proposition 2.4.] の証明に基づいて証明を行う.

π^1 による引き戻しを考える.

$$\tilde{\Omega}_g(T^1S) := (\pi^1)^{-1} \Omega_g(T^1S)$$

とする。定理 2.2 より、

$$\tilde{\Omega}_g(T^1S) = \{(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H} \mid u(\pm\infty) \in L(\Gamma)\}$$

が成り立つ。 $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$ の \mathbb{H} への射影は、1章5節で考えた集合

$$\tilde{\Omega}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid z \in (x, y) \ (x, y \in L(\Gamma))\}$$

により表せる。

よって命題は、 $\Omega_g(T^1S)$ がコンパクトであることと、コンパクトな K で

$$\tilde{\Omega}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$$

を満たすものがとれることが同値であることを示せば良い。

$L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$ が成り立つと仮定する。このとき、系 1.11 (i) より Γ は凸コンパクトなので、 Γ のニールセン領域 $N(\Gamma)$ への作用はコンパクトな基本領域をもつことがわかる。 $N(\Gamma)$ は $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ の凸包であることから、コンパクトな K で $\tilde{\Omega}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ を満たすものが存在する。

逆にコンパクトな $K \subset \mathbb{H}$ で $\tilde{\Omega}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ を満たすものがとれると仮定する。このとき任意の測地線 $(x, y) \subset \tilde{\Omega}(\Gamma)$ に対し、 $\gamma_n \in \Gamma, k_n \in K$ で、 x に収束する測地線 (x, y) 上の点列 $(\gamma_n(k_n))_{n \geq 1}$ となるものが存在する。ここで、 K はコンパクトなので、 $z \in (x, y)$ を固定するとき $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$ は $[z, x)$ からの距離を有界に保つ。よって x は conical。 \square

次に、 $\Omega_g(T^1S)$ の部分集合と $L(\Gamma)$ の部分集合の関係を詳しく調べていく。

まず、発散的な軌道について考える。点 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ に関し、任意の非有界な実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ に対して、点列 $(g_{t_n}((w, \vec{v})))_{n \geq 1}$ が発散するとき、点 (w, \vec{v}) を発散的と呼ぶ。

この発散的な点には次のような性質が成り立つ。

命題 2.5. ([III, Proposition 2.7.])

$(w, \vec{v}) \notin \Omega_g(T^1S)$ のとき、この点は発散的である。

Proof. [III, Proposition 2.7.] の証明に基づいて証明を行う。

対偶を示す。 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ が発散的でないと仮定する。 $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ で $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u}))$ をみたすものを考える。このとき、ある正の実数列 $(t_n)_{n \geq 0}$ と $(\gamma_n)_n \subset \Gamma$ で、 $(\tilde{g}_{t_n} \gamma_n((z, \vec{u})))_{n \geq 0}$ が収束するようなものが存在する。この収束先を $(z', \vec{u}') \in T^1\mathbb{H}$ とする。また、 $\tilde{g}_{t_n} \gamma_n((z, \vec{u})) = (z_n, \vec{u}_n)$ とおくことにする。このとき、 z_n と z' の距離に注目すると

$$(d(z_n, z'))_{n \geq 0} = (d(\gamma_n^{-1} z_n, \gamma_n^{-1} z'))_{n \geq 0}$$

は有界である。また、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1} \tilde{g}_{t_n} \gamma_n((z, \vec{u})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{g}_{t_n}((z, \vec{u}))$$

より, $(\gamma_n^{-1}z_n)_{n \geq 0}$ は $u(+\infty)$ に収束することがわかる. これより, $(\gamma_n^{-1}z')_{n \geq 0}$ は $u(+\infty)$ に収束することがわかるので $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ が成り立つ. 定理 2.2 より, $(w, \vec{v}) \in \Omega_g(T^1S)$ がわかる. \square

一方, $\Omega_g(T^1S)$ 内の発散的でない点は, 極限集合を用いて次のように特徴付けられる.

命題 2.6. ([III, Proposition 2.8.]

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき, 以下は同値.

- (i) (w, \vec{v}) が発散的でない.
- (ii) $u(\pm\infty) \in L_c(\Gamma)$.

Proof. [III, Proposition 2.8.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. 非有界な正の実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で $(g_{t_n}((w, \vec{v})))_{n \geq 1}$ が収束するものをとる. このとき $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で $(\gamma_n \tilde{g}_{t_n}((z, \vec{u})))_{n \geq 1}$ がある $(z', \vec{u}') \in T^1\mathbb{H}$ に収束するものがとれる. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(t_n) = u(+\infty), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u(t_n), \gamma_n^{-1}(z')) = 0$$

が成り立つ. ここで, $u(t_n) \in [z, u(+\infty))$ である. また, γ_n^{-1} は等長変換なので

$$d(\gamma_n^{-1}(z), \gamma_n^{-1}(z')) = d(z, z')$$

が成り立つ. これより, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N > 0$ が存在して, 任意の $n > N$ に対して

$$\begin{aligned} d(\gamma_n^{-1}(z), u(t_n)) &\leq d(\gamma_n^{-1}(z), \gamma_n^{-1}(z')) + d(\gamma_n^{-1}(z'), u(t_n)) \\ &\leq d(z, z') + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. 今, $d(z, z')$ は有界なので conical の定義から $u(+\infty)$ は conical であることがわかる.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. conical の定義より, ある $\varepsilon > 0$ と $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$d(\gamma_n(z), [z, u(+\infty))) < \varepsilon$$

を満たすものがとれる. このとき $s_n > 0$ で, 任意の $n > 0$ に対して

$$d(\gamma_n(z), u(s_n)) < \varepsilon$$

を満たすものがとれる. ここで $u(s_n)$ に近いところに $\gamma_n(z)$ がくるように s_n の部分列をとる. このとき γ_n^{-1} でうつすと, z の近くに $\gamma_n^{-1} \tilde{g}_{s_n}((z, \vec{u}))$ がくる. z を中心とするコンパクト集合内の無限列は収束する. 単位ベクトルに関しても部分列をとれば収束するので, $(\gamma_n^{-1} \tilde{g}_{s_n}((z, \vec{u})))_{n \geq 1}$ は収束する. よって $(g_{s_n}((w, \vec{v})))_{n \geq 1}$ は収束する. \square

命題 2.4 と命題 2.6 より, $\Omega_g(T^1S)$ が発散的な元を含まないことと, $\Omega_g(T^1S)$ がコンパクトであることは同値であることがわかる.

また, 極限集合のうち conical でない要素に対応する軌道は, non wandering だが発散していくような軌道である.

2.3 周期的な geodesic flow

この節では、 T^1S 上で周期的な軌道を考える。 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ に関し、 $t > 0$ で、 $g_t((w, \vec{v})) = (w, \vec{v})$ を満たすものが存在するとき、周期的と呼ぶ。明らかに周期的な点は $\Omega_g(T^1S)$ に含まれる。

周期的な点に関し、その geodesic flow の端点は次のように特徴付けられる。

命題 2.7. ([III, Proposition 3.1.])

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき、以下は同値。

- (i) (w, \vec{v}) が周期的。
- (ii) hyperbolic な $\gamma \in \Gamma$ で、 $u(\pm\infty)$ が γ の固定点となるものが存在する。

Proof. [III, Proposition 3.1.] の証明に基づいて証明を行う。

(i) \Rightarrow (ii) を示す。 仮定より $t > 0, \gamma \in \Gamma$ で $\tilde{g}_t((z, \vec{u})) = \gamma((z, \vec{u}))$ を満たすものがとれる。これより、

$$\tilde{g}_{nt}((z, \vec{u})) = \gamma^n((z, \vec{u}))$$

が成り立つ。このことから、 γ は異なる 2 点 $u(\pm\infty)$ を固定する。よってこの等長変換は hyperbolic。

次に (ii) \Rightarrow (i) を示す。 仮定より、等長変換 γ は測地線 (γ^-, γ^+) を保存する。 $z \in (\gamma^-, \gamma^+)$ をとるとき、 $\gamma((z, \vec{u})) = \tilde{g}_{d(z, \gamma(z))}((z, \vec{u}))$ が成り立つ。よって $(w, \vec{v}) = g_{d(z, \gamma(z))}((w, \vec{v}))$ が成り立つので、 (w, \vec{v}) は周期的。 \square

フックス群には hyperbolic な元が無数に含まれている事が知られているので、 $\Omega_g(T^1S)$ 内に周期的な軌道が無数に存在する事がわかる。さらに、次の定理が成り立つ。

定理 2.8. ([III, Theorem 3.3.])

$\Omega_g(T^1S)$ 内に周期的な軌道は稠密に存在する。

Proof. [III, Theorem 3.3.] の証明に基づいて証明を行う。

π^1 による引き戻しを考える。 任意の (z, \vec{u}) に対し、 $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で、 γ_n^\pm が $u(\pm\infty)$ に収束するようなものが存在することを示せば良い。 補題 2.3 を適用することで、 $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{\pm 1}(i) = u(\pm\infty)$$

を満たすものがとれる。 n が十分大きいとき、 γ_n は hyperbolic であることを示せば良い。

ポアンカレディスクモデル $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で考える。 $D_0(\gamma_n)$ を $[0, \gamma_n(0)]_h$ の直交 2 等分線で区切られる半平面で $\gamma_n(0)$ を含む方とする。 $D_0(\gamma_n^{\pm 1})$ のユークリッド的な単位円板の直径は 0 に収束する。 今、 $u(\pm\infty)$ は異なる点なので、十分大きな n に対して $D_0(\gamma_n^{\pm 1})$ は交わらない。この条件を満たすような γ_n は hyperbolic。さらに、 γ_n^\pm は $D_0(\gamma_n^{\pm 1})$ の無限遠境界に含まれるので、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^\pm = u(\pm\infty)$$

が成り立つ. □

以上をまとめると, (w, \vec{v}) が含まれる集合と, $u(\pm\infty)$ が含まれる集合の間には図 6 のような対応があることがわかる. 特に $\Omega_g(T^1S)$ がコンパクトのとき, もしくは $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$ が成り立つ

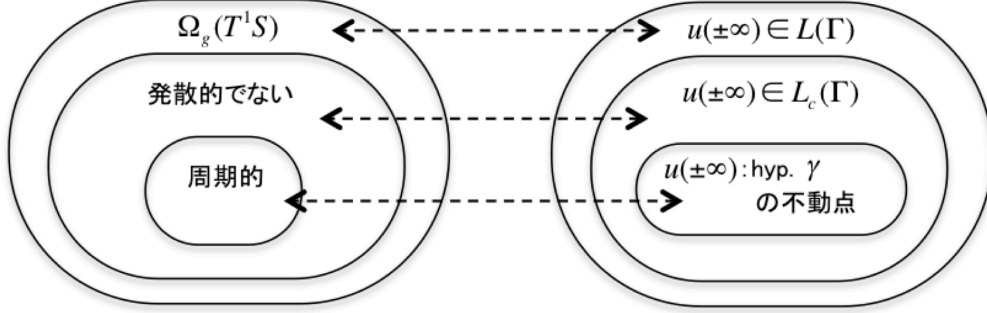


図 6

とき, 外側から 1 つ目と 2 つ目の集合はそれぞれ一致する.

最後に, non wandering 集合 $\Omega_g(T^1S)$ 内を稠密に走る軌道が存在することを示す.

定理 2.9. ([III, Theorem 4.2.])

ある $(w, \vec{v}) \in \Omega_g(T^1S)$ で,

$$\overline{g_{\mathbb{R}}((w, \vec{v}))} = \Omega_g(T^1S)$$

を満たすものが存在する.

この定理を示すために補題を 1 つ考える. $L(\Gamma) \times L(\Gamma)$ から対角線集合 Δ をのぞいたものを $L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ と表す.

補題 2.10. ([III, Lemma 4.1.])

Γ を非初等的とする. 任意の空でない開集合 $O, V \subset L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ に対し, $\gamma \in \Gamma$ で $\gamma(O) \cap V \neq \emptyset$ を満たすものが存在する.

Proof. [III, Lemma 4.1.] の証明に基づいて証明を行う.

O, V が空でない開集合 $O_1, O_2, V_1, V_2 \subset L(\Gamma)$ を用いて

$$O = O_1 \times O_2, V = V_1 \times V_2$$

と表せているときのみ考えればよい.

$L(\Gamma)$ の特性から V_1 は集積的な不動点 γ^+ を含む. これより, 十分大きな n に対して

$$\gamma^n(O_1) \cap V_1 \neq \emptyset$$

が成り立つ. さらに定理 2.8 より, hyperbolic な $h \in \Gamma$ で

$$h^- \in \gamma^n(O_1) \cap V_1, h^+ \in V_2$$

を満たすものがとれる。このとき、十分大きな k に対し $h^k \gamma^n(O_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ が成り立つ。また、 $h^- \in \gamma^n(O_1) \cap V_1$ より $h^- \in h^k \gamma^n(O_1) \cap V_1$ が成り立つことから $h^k \gamma^n(O_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ が成り立つ。これより、 $h^k \gamma^n(O) \cap V \neq \emptyset$ が成り立つ。□

この補題 2.10 を用いて定理 2.9 の証明をする。

Proof. [III, Theorem 4.2.] の証明に基づいて証明を行う。

空でない加算な開集合族 $(O_n)_{n \geq 1} \subset L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ で $L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ の任意の開集合が $(O_n)_{n \geq 1}$ の 1 つを含むものを考える。 $L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ の空でない部分開集合 O を固定する。補題 2.10 より、 $\gamma_1 \in \Gamma$ で

$$\gamma_1(O) \cap O_1 \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる。このとき、開集合 K_1 で $\overline{K_1}$ がコンパクト、 $\gamma_1(\overline{K_1}) \subset O_1$ を満たすものをとる。 O を K_1 に、 O_1 を O_2 に置き換えて議論を繰り返すことで $\gamma_2 \in \Gamma$ で

$$\gamma_2(K_1) \cap O_2 \neq \emptyset$$

を満たすものと、開集合 K_2 で $\overline{K_2}$ が K_1 内でコンパクト、 $\gamma_2(\overline{K_2}) \subset O_2$ を満たすものがとれる。この議論を繰り返すことで、相対コンパクトな入れ子型の開部分集合の列 $(K_n)_{n \geq 1}$ が得られる。

今、

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{K_n} \neq \emptyset$$

が成り立つことから、 $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{K_n}$ をとれる。このとき、任意の $n \geq 1$ に対し、 $\gamma_n(x) \in O_n$ が成り立つ。

ここで任意の $x' \in L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$ と x' の近傍 V' を考える。この近傍は $(O_n)_{n \geq 1}$ の取り方から、ある O_n を含んでいるので $\gamma_n(x) \in V'$ が成り立つ。 x の Γ 軌道は x' のすべての近傍と交わるので、 $x' \in \overline{\Gamma x}$ が成り立つ。これより、

$$\overline{\Gamma x} = L(\Gamma) \times L(\Gamma) - \Delta$$

が成り立つ。命題 2.1 を適用することで、主張を得る。□

2.4 幾何的有限性

この節では Γ が幾何的有限性を持つ場合の特徴を調べていく。 Γ が幾何的有限性を持つとき、命題 1.9 より、ある相対コンパクトな集合 $K \subset \mathbb{H}$ で

$$N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma) = K \cup \bigcup_{x \in L_p(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)} H_t^+(x) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$$

を満たすものが存在する。(ここで $H_t^+(x)$ は定理 1.6 を満たすものとする。) また、定理 1.10 より極限集合に関して $L(\Gamma) = L_c(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$ が成り立つ。このとき極限集合と軌道に関して次の定理が成り立つ。

定理 2.11. ([III, Theorem 2.11.]

Γ が非初等的で幾何的有限性を持つとき、次の性質が成り立つ.

- (i) コンパクトな集合 $K_0 \subset T^1S$ が存在し, $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ で $u(+\infty)$ が conical のとき, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とおくと, $g_t((w, \vec{v})) \in K_0$ を満たす実数 $t > 0$ の集合は非有界.
- (ii) $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ で $u(+\infty)$ が parabolic のとき, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とおくと, $T \geq 0$ で, 軌道 $(g_t((w, \vec{v})))_{t \geq T}$ の S への射影が S の尖点に含まれるようなものが存在する. さらに, $\tilde{g}_{[T, +\infty)}((z, \vec{u}))$ に制限したとき, $T^1\mathbb{H}$ から T^1S への射影は, 軌道 $g_{[T, \infty)}((w, \vec{v}))$ と同相.

Proof. [III, Theorem 2.11.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) を示す. 主張は非有界な正の実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で, $\pi(u(t_n)) \in \pi(K)$ を満たすものが存在することを示せば良い.

なぜならこの場合でないとき, 尖点は互いに交わらないので, $T > 0$ で $\pi([u(T), u(+\infty)))$ がある 1 つの尖点内に含まれるようなものがとれる. ($x \in \mathbb{H}(\infty)$) よって,

$$[u(T), u(+\infty)) \subset \gamma(H_t^+(x))$$

が成り立つ. このことから, $u(+\infty) = \gamma(x)$ がわかるが, これは $u(+\infty)$ が conical であることに矛盾する.

まず, $\varepsilon > 0$ を固定する. 任意の $(z', \vec{u}') \in T^1\mathbb{H}$ で $u'(+\infty) \in L_c(\Gamma)$ となるものを考える. (z, \vec{u}) で

$$u(+\infty) = u'(+\infty) \in L_c(\Gamma), \quad u(-\infty) \in L(\Gamma)$$

を満たすものをとると, $(w, \vec{v}) \in \Omega_g(T^1S)$ がわかるので, これは主張を満たす. $[z', u'(+\infty))$ と $[z, u(+\infty))$ は漸近的なので, $T > 0$ で, $[u'(T), u'(+\infty))$ が $[z, u(+\infty))$ の ε 近傍に含まれるようなものがとれる. 今, 非有界な正の実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で $\pi(u(t_n)) \in \pi(K)$ を満たすものがとれる. ε 近傍はコンパクトなので $K' = \pi(K) \cup \pi(\varepsilon\text{近傍})$ とおくと, これは T^1S でコンパクト. K を K' と置き換えることで非有界な正の実数列 $(t'_n)_{n \geq 1}$ で $\pi(u'(t'_n)) \in \pi(K)$ を満たすものがとれることがわかる.

(ii) を示す. $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ で $u(+\infty)$ が parabolic なものをとる. $u(+\infty)$ の Γ による固定化群を $\Gamma_{u(+\infty)}$ とするとき, 射影

$$q : H_t^+(u(+\infty))/\Gamma_{u(+\infty)} \rightarrow \pi(H_t^+(u(+\infty)))$$

は同相写像. よって十分大きな $T > 0$ に対して

$$[u(T), u(+\infty)) \subset \pi(H_t^+(u(+\infty)))$$

が成り立つ. さらに射影

$$p : H_t^+(u(+\infty)) \rightarrow H_t^+(u(+\infty))/\Gamma_{u(+\infty)}$$

の $[u(T), u(+\infty))$ への制限は同相写像. よって

$$q \circ p : H_t^+(u(+\infty)) \rightarrow H_t^+(u(+\infty))/\Gamma_{u(+\infty)} \rightarrow \pi(H_t^+(u(+\infty)))$$

は同相写像. よって $q \circ p$ は $[u(T), u(+\infty))$ から $\pi([u(T), u(+\infty)))$ への同相写像. \square

Γ が非初等的で幾何的有限性を持つとき, T^1S の尖点は有限個である. 各尖点に写される $T^1\mathbb{H}$ 上のホロサイクルを上手くとれば, 定理 2.11 の (i) と合わせて次がわかる.

系 2.12. ([III, Corollary 2.12.])

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき, $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ を満たす全ての半軌道 $g_{\mathbb{R}_+}((w, \vec{v})) = \{g_t((w, \vec{v})) \mid t > 0\}$ と交わるような T^1S のコンパクトな部分集合が存在する.

3 horocycle flow

3章では horocycle flow について述べる. horocycle flow とは上半平面上でホロサイクルに沿った軌道を商空間に落としたものであり, 正確にはフックス群 Γ に関する単位接バンドル T^1S 上の flow になっている. この章では, geodesic flow によく似た性質をもつ horocycle flow を定義し, その性質を geodesic flow と対比することを目的としている. geodesic flow と同様に non wandering 集合とフックス群の極限集合を対応づけることができるが, horocycle flow では特に parabolic な点に注目している. 特に命題 3.11 の「non wandering 集合内の軌道は稠密もしくは周期的のどちらかとなる」という性質が特徴的である. 2節では horocycle flow に対応するホロサイクルと上半平面上のベクトルを一対一対応づけることで, フックス群の作用と上半平面に作用する線形変換を関連づけている. また, geodesic flow と horocycle flow の関係を用いて2章3節の補題 2.10 の一般化も考えている.

3.1 horocycle flow

まずこの節では horocycle flow の定義を与える. まず, $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対し, $u(\infty)$ を中心とするホロサイクルで z を通るものを考える.

$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ を

- $\beta(0) = z$
- $\left(\frac{d}{ds}\beta(0), \vec{u} \right) : T_z\mathbb{H}$ の正の向きの基底

を満たす弧長パラメータとする. β の像を (z, \vec{u}) に関する向き付きホロサイクルと呼ぶ.

$\vec{v}(t)$ を, $(\frac{d}{ds}\beta(t), \vec{v}(t))$ が $T_{\beta(t)}^1\mathbb{H}$ の正の向きの直行基底となるような単位ベクトルとする. この

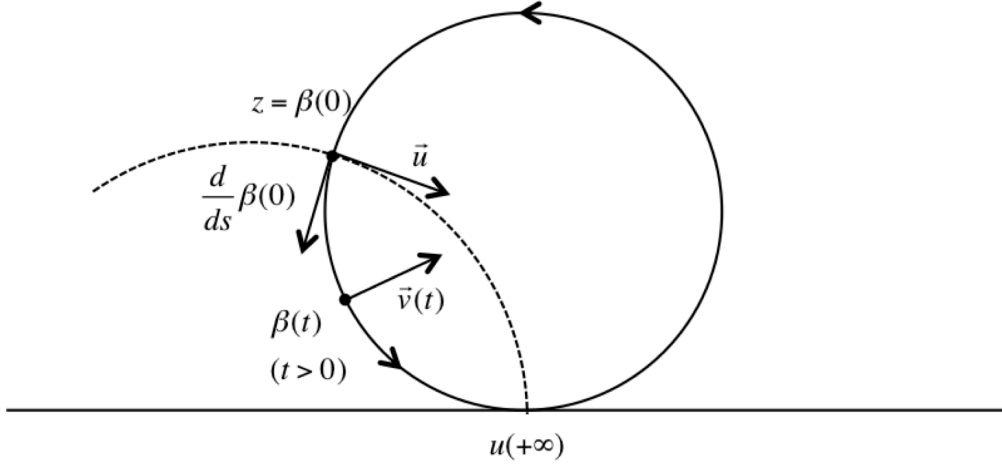


図 7

とき, $T^1\mathbb{H}$ 上の **horocycle flow** を

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} &\longrightarrow T^1\mathbb{H} \\ \tilde{h}_t((z, \vec{u})) &:= (\beta(t), \vec{v}(t)) \end{aligned}$$

と定義する.

これは, geodesic flow 同様に flow の定義を満たしている.

次に T^1S 上での horocycle flow を考える.

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ とする. T^1S 上の horocycle flow を

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times T^1S &\longrightarrow T^1S \\ h_t(\pi^1((z, \vec{u}))) &:= \pi^1(\tilde{h}_t((z, \vec{u}))) \end{aligned}$$

と定義する. この h は (z, \vec{u}) の取り方に依らない.

3.2 線型変換

この節では horocycle flow と上半平面に関する線型変換の対応付けを考える.

$$E := \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} / \{\pm Id\}$$

とする. この E はホロサイクルの全体の空間と見なすことができる. $T^1\mathbb{H}$ から E への写像 Φ を次のように定義する.

$$\Phi((z, \vec{u})) = \begin{cases} \pm \frac{e^{\frac{B_{u(+\infty)}(i, z)}{2}}}{\sqrt{1 + u^2(+\infty)}} \begin{pmatrix} u(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} & (u(+\infty) \neq \infty) \\ \pm e^{\frac{B_{u(+\infty)}(i, z)}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (u(+\infty) = \infty) \end{cases}$$

写像 Φ は, $T^1\mathbb{H}$ 上の $u(+\infty)$ を中心とするホロサイクルのオービットを E 上のあるベクトルに写す. 特にホロサイクルの大きさはベクトルの長さに対応している. この写像 Φ は, (z, \vec{u}) を $u(+\infty)$ を中心にもち 2 点 $z, u(+\infty)$ を通るようなホロサイクルにうつす写像と, x を中心とする半径 r のホロサイクルを上半平面上の $\frac{1}{\sqrt{2r}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつす写像の合成写像と考えることができる.

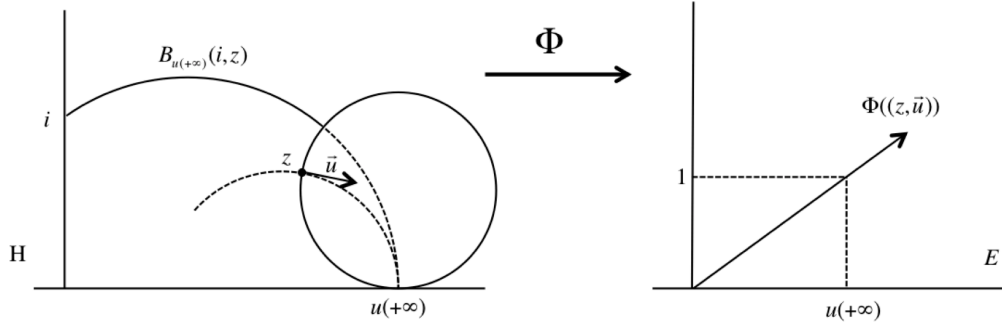


図 8

例 1. $z = i, u(+\infty) = \infty$ のとき $\Phi((z, \vec{u})) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる.

例 2. 有理数 $\frac{p}{q}$ を中心とし, ユークリッド的な直径が $\frac{1}{q^2}$ のホロサイクルを考える. これはホロサイクル $H_1 := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}z = 1\}$ の $PSL(2, \mathbb{Z})$ の元による像である. ここで

$$z = \frac{p}{q} + \frac{i}{q^2}, u(+\infty) = \frac{p}{q}$$

とするとき,

$$\Phi((z, \vec{u})) = \pm \frac{e^{\frac{B_{u(+\infty)}(i, z)}{2}}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

となる. ここからは $B_{u(+\infty)}(i, z)$ を求める. i の固定化群 K の元 k で, $\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \sin \theta = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ となるものをとる. この k を用いることで

$$k \left(\frac{p}{q} \right) = \infty, \quad k(z) = -\frac{p}{q} + (p^2 + q^2)i, \quad k(i) = i$$

とすることができる. この条件でのプーゼマンコサイクルを求めると, $p, q \geq 1$ より

$$B_{\infty}(i, k(z)) = \ln(p^2 + q^2)$$

となる. これを式 (3.1) に適用することで,

$$\Phi((z, \vec{u})) = \pm \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

が得られる.

写像 Φ は, \mathbb{H} の向きを保つ等長変換群 $PSL(2, \mathbb{R})$ の E へ作用を引き起こす. 今, 任意の $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ に対し, $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とかける. 任意の $\vec{\omega} = \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ に対し, E 上の線型変換 M_g を

$$M_g(\vec{\omega}) := \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{\omega}$$

とする.

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.1. ([V, Proposition 1.7.])

任意の $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対し,

$$\Phi(g((z, \vec{u}))) = M_g(\Phi((z, \vec{u})))$$

が成り立つ.

Proof. [V, Proposition 1.7.] の証明に基づいて証明を行う.

$(i, \vec{u}_1) \in T^1\mathbb{H}$ で $u_1(+\infty) = \infty$ を満たすものを考える. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

$$\Phi((i, \vec{u}_1)) = \pm e_1$$

と表せる. まず, 任意の $g \in G$ に対して

$$\Phi(g((i, \vec{u}_1))) = M_g(\pm e_1)$$

を示す.

$M_g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は 1 章より, 回転, 拡大, 平行移動の一次分数変換を用いて

$$M_g = \pm KAN$$

と分解できることが知られている.

k, a を K, A の一次分数変換とする. このとき, ∞ を中心とするプーゼマンコサイクルを考えると, 拡大のみが作用に関わることから

$$\begin{aligned} B_\infty(i, g^{-1}(i)) &= B_\infty(i, a^{-1}(i)) \\ &= B_\infty(i, \lambda^{-2}i) \end{aligned}$$

を得る. よって $B_\infty(i, g^{-1}(i)) = \ln \lambda^{-2}$ を得る. さらに,

$$\begin{aligned} M_g(e_i) &= KAN \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= KA \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= K \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $\|M_g(e_i)\| = \lambda$ がわかる. よって,

$$\|\Phi(g((i, \vec{u}_1)))\| = \|M_g(\pm e_i)\|$$

が成り立つ. また, 端点 $u_1(+\infty)$ は回転以外の作用では固定されるため

$$g(u_1(+\infty)) = k(\infty)$$

とできる.

また, c を定数とするとき

$$\begin{aligned} \Phi(g(i, \vec{u}_1)) &= c \begin{pmatrix} u_1(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より同一直線上にあるということから,

$$\Phi(g(i, \vec{u}_1)) = M_g(\Phi((i, \vec{u}_1)))$$

が成り立つ.

次に任意の $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に関し

$$\Phi(g((z, \vec{u}))) = M_g(\Phi((z, \vec{u})))$$

が成り立つことを示す.

$PSL(2, \mathbb{R})$ の $T^1\mathbb{H}$ への作用は推移的なので $g' \in G$ で

$$g'((i, \vec{u}_1)) = (z, \vec{u})$$

を満たすものがとれる. それゆえ,

$$\begin{aligned} \Phi(g((z, \vec{u}))) &= \Phi(gg'((i, \vec{u}_1))) \\ &= M_{gg'}(\Phi((i, \vec{u}_1))) \\ &= M_g(M_{g'}(\Phi((i, \vec{u}_1)))) \\ &= M_g(\Phi(g'((i, \vec{u}_1)))) \\ &= M_g(\Phi((z, \vec{u}))) \end{aligned}$$

がわかる. □

フックス群 Γ に関し, $T^1S = T^1\mathbb{H}/\Gamma$ 上の $h_{\mathbb{R}}$ に関する軌道と E 上での線型変換 M_{Γ} を関連づける.

命題 3.2. ([V, Proposition 2.1.])

$(z, \vec{u}), (z', \vec{u}') \in T^1\mathbb{H}$ をとる. $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})), (w', \vec{v}') = \pi^1((z', \vec{u}')) \in T^1S$ とするとき, 以下は同値.

- (i) 実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で, $(h_{t_n}((w, \vec{v})))_{n \geq 1}$ が (w', \vec{v}') に収束するものが存在する.
- (ii) 列 $(M_{\gamma_n})_{n \geq 1} \subset M_{\Gamma}$ で, $(M_{\gamma_n}(\Phi((z, \vec{u}))))_{n \geq 1}$ が $\Phi((z', \vec{u}'))$ に収束するものが存在する.

Proof. [V, Proposition 2.1.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. 仮定より, $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で $(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}((z, \vec{u})))$ が (z', \vec{u}') に収束するものがとれる. Φ の像を考えると, Φ は連続なので $\Phi(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}((z, \vec{u})))$ は $\Phi((z', \vec{u}'))$ に収束する. また, ホロサイクル上なので

$$\Phi(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}((z, \vec{u}))) = M_{\gamma_n}(\Phi((z, \vec{u})))$$

が成り立つ. 以上より $M_{\gamma_n}(\Phi((z, \vec{u})))$ は (z', \vec{u}') に収束する.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 仮定より $(M_{\gamma_n}(\Phi((z, \vec{u}))))_{n \geq 1}$ で $\Phi((z', \vec{u}'))$ に収束するものがとれる. Φ の定義より,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u(+\infty)) = u'(+\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i, \gamma_n(z)) = B_{u'(+\infty)}(i, z')$$

がわかる. このとき, $(t_n)_{n \geq 1}$ で $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n((z, \vec{u})))$ が z' を通り $\gamma_n(u(+\infty))$ を端点とする測地線と直交するようなものを考える. $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n((z, \vec{u}))) = (z_n, \vec{u}_n)$ とする. $u_n(+\infty) = \gamma_n(u(+\infty))$ より, $(u_n(+\infty))_{n \geq 1}$ は $u'(+\infty)$ に収束する. このとき, 同一ホロサイクル上なので

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i, \gamma_n(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{u_n(+\infty)}(i, z_n)$$

が成り立つ. よって $B_{u_n(+\infty)}(i, z_n)$ は $B_{u'(+\infty)}(i, z')$ に収束する. また z_n は z' を通る測地線上なので z' に収束することから,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}((w, \vec{v})) = (w', \vec{v}')$$

が成り立つ. □

3.3 horocycle flow に関する non wandering 集合

この節では horocycle flow に関する non wandering 集合について説明する.

点 $(w, \vec{v}) \in T^1S$ に関し, (w, \vec{v}) の任意の近傍 V に対して, 非有界な実数列 $(t_n)_{n \geq 0}$ で

$$h_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset$$

を満たすものが存在するとき, horocycle flow に関して non wandering と呼ぶ. horocycle flow に関し non wandering な点の集合を $\Omega_h(T^1S)$ と表す.

non wandering 集合 $\Omega_h(T^1S)$ と極限集合の関係を調べたい. まず, E 上で次のような集合を考える.

$$E(\Gamma) := \{\Phi((z, \vec{u})) \mid (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}, u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

$E(\Gamma)$ は M_Γ の作用で不変な閉集合である. $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ のとき, 特に $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ のとき, $E(\Gamma) = E$ が成り立つ.

命題 3.3. ([V, Proposition 2.6.])

Γ を非初等的なフックス群とする. このとき, $\pm w \in E(\Gamma)$ で $\overline{M_\Gamma(w)} = E(\Gamma)$ を満たすものが存在する.

この命題を示すために, ベクトル空間 \mathbb{R}^2 を考える. $SL(2, \mathbb{R})$ から $PSL(2, \mathbb{R})$ への標準写像による $M_\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ の逆像を $\hat{M}_\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ とする. この群は, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ から E への写像による $E(\Gamma)$ の逆像 $\hat{E}(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ に作用する. ここで補題を1つ紹介する.

補題 3.4. ([V, lemma 2.7.])

開円板 $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ を, $\hat{E}(\Gamma) \cap B_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$) をみたすものとする. このとき, $M \subset \hat{M}_\Gamma$ で

$$M(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる.

この補題の証明は省略する. この補題を用いて, 命題 3.3 を証明する.

Proof. [V, Proposition 2.6.] の証明に基づいて証明を行う.

$x \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ で $\overline{\hat{M}_\Gamma} = \hat{E}(\Gamma)$ を満たすものがとれることを示す. $(B_n)_{n \geq 1}$ を $\mathbb{R} - \{0, 0\}$ 内の開円板の列で $B_n \cap \hat{E}(\Gamma) \neq \emptyset$ を満たし, $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ 内の $\hat{E}(\Gamma)$ と交わる任意の開集合が $(B_n)_{n \geq 1}$ の元を含んでいるものとする. $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ 内の $\hat{E}(\Gamma)$ と交わる任意の開集合で, $(B_n)_{n \geq 1}$ の元を含んでいるものを1つとり O と固定する.

先の補題より, $M_1 \in \hat{M}_\Gamma$ で

$$M_1(O) \cap B_1 \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる. $K_1 \subset O$ を $\hat{E}(\Gamma)$ と交わるプレコンパクトな開集合とするとき

$$M_1(K_1) \subset B_1$$

が成り立つ.

O を K_1 に, B_1 を B_2 に置き換えることで $M_2 \in \hat{M}_\Gamma$ と, $K_2 \subset K_1$ で $\hat{E}(\Gamma)$ と交わるプレコンパクトな開集合がとれて,

$$M_2(K_2) \subset B_2$$

が成り立つ.

この議論から、列 $(M_n)_{n \geq 1} \subset \hat{M}_\Gamma$ と、プレコンパクトで入れ子型の開集合列 $(K_n)_{n \geq 1}$ で $\hat{E}(\Gamma)$ と交わるものがとれて、

$$M_n(K_n) \subset B_n$$

が成り立つ.

$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \cap \hat{E}(\Gamma)$ をとる. このとき任意の $n \geq 1$ に対し, $M_n(x) \in B_n$ が成り立つ.

任意の $x' \in \hat{E}(\Gamma)$ と, x' を中心として半径が 0 に収束する円板列 $(D_n)_{n \geq 1}$ をとる. 各 D_n に含まれる $(B_n)_{n \geq 1}$ の元を B_{i_n} とすると, $M_{i_n}(x) \subset B_{i_n} \subset D_n$ が成り立つ. これより,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{i_n}(x) = x'$$

が成り立つので, $x' \in \overline{\hat{M}_\Gamma(x)}$ がわかる. よって, $\hat{M}_\Gamma(x)$ は $\hat{E}(\Gamma)$ で稠密. \square

$E(\Gamma)$ の Φ による引き戻しを考える. この集合は

$$\tilde{F}(\Gamma) := \{(x, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H} \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

と書くことができる. $\tilde{F}(\Gamma)$ は Γ と $\tilde{h}_\mathbb{R}$ に関して不変な閉集合である. $\tilde{F}(\Gamma)$ の π^1 による像を $F(\Gamma)$ とすると, $F(\Gamma)$ は $h_\mathbb{R}$ に関して不変な閉集合である. この $F(\Gamma)$ に関して, 命題 3.2 と命題 3.3 より次の性質が成り立つ.

命題 3.5. ([V, Proposition 2.10.])

$(w, \vec{v}) \in T^1S$ で,

$$\overline{h_\mathbb{R}((w, \vec{v}))} = F(\Gamma)$$

を満たすものが存在する.

この $F(\Gamma)$ が horocycle flow に関する non wandering 集合と一致することを示す.

命題 3.6. ([V, Proposition 2.11.])

$F(\Gamma) = \Omega_h(T^1S)$ が成り立つ.

Proof. [V, Proposition 2.11.] の証明に基づいて証明を行う.

(\supset) を示す. $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ を non wandering と仮定する. (w, \vec{v}) の入れ子型な近傍の列 $(V_n)_{n \geq 1}$ と正の実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ かつ } h_{t_n}(V_n) \cap V_n \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる.

列 $((z_n, \vec{u}_n))_{n \geq 1} \subset T^1\mathbb{H}$ で $(w_n, \vec{v}_n) = \pi^1((z_n, \vec{u}_n)) \in T^1S$ とするとき, 以下を満たすものを考える.

- $(w_n, \vec{v}_n) \in V_n$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n, \vec{v}_n) = (w, \vec{v})$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n, \vec{u}_n) = (z, \vec{u})$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}((w_n, \vec{v}_n)) = (w, \vec{v})$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n, \vec{v}_n) = (w, \vec{v})$ より, $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{t_n} \gamma_n((z_n, \vec{u}_n)) = (z, \vec{u})$$

を満たすものがとれる. $\tilde{h}_{t_n}((z_n, \vec{u}_n)) = (z'_n, \vec{u}'_n)$ とする. このとき, 点 z'_n に関して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{t_n}(z_n) \\ &= u(+\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ.

また, (z_n, \vec{u}_n) に関して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{t_n} \gamma_n((z_n, \vec{u}_n)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{h}_{t_n}((z_n, \vec{u}_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n((z'_n, \vec{u}'_n)) \\ &= (z, \vec{u}) \end{aligned}$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\gamma_n(z'_n), z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} d(z'_n, \gamma_n^{-1}(z)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(z) = u(+\infty)$ より, $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ を得る.

(C) を示す. 命題 3.5 より, $(w, \vec{v}) \in F(\Gamma)$ で (w, \vec{v}) の軌道が $F(\Gamma)$ で稠密となるものがとれる. この (w, \vec{v}) は horocycle flow に関して non wandering, また, non wandering 集合は horocycle flow で不変な閉集合なので $F(\Gamma) \subset \Omega_h(T^1S)$ が成り立つ. \square

ここからは, non wandering 集合 $\Omega_h(T^1S)$ 内の軌道 $h_{\mathbb{R}}((w, \vec{v}))$ を, 端点によって特徴付けることを考えていく. 特に定理 3.7 と系 3.10 が, non wandering 集合内の軌道を考える際に重要なポイントである.

定理 3.7. ([V, Theorem 3.1.])

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対して $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とする. このとき以下は同値.

- $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$
- $h_{\mathbb{R}}((w, \vec{v}))$ が $\Omega_h(T^1S)$ 内で稠密.

この定理を示すために, horocyclic な点と M_Γ の関係性についての補題を紹介する.

補題 3.8. ([V, Lemma 3.2.]

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に関して, 以下は同値.

- (i) $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$
- (ii) $(M_{g_n})_{n \geq 1} \subset M_\Gamma$ で $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_{g_n}(\Phi((z, \vec{u})))\| = 0$ を満たすものが存在する.

Proof. 命題 1.5 による horocyclic な点の性質と, 命題 3.1 の証明よりわかる. □

この補題 3.8 を用いて, 定理 3.7 を証明する.

Proof. [V, Theorem 3.1.] の証明に基づいて証明を行う.

定理 3.7 を示すには次の 2 つが同値であることを示せば良い.

- (i)' $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$.
- (ii)' $\overline{M_\Gamma \Phi((z, \vec{u}))} = E(\Gamma)$ が成り立つ.

(ii)' \Rightarrow (i)' は, 仮定から $E(\Gamma)$ から (i)' を満たすような $(M_n)_{n \geq 1}$ がとれることが直ちにわかる.
(i)' \Rightarrow (ii)' を示す. $L_h(\Gamma)$ の点に関して場合分けを考える.

(case 1) $u(+\infty)$ が hyperbolic な等長変換の不動点の時を考える. M を M_Γ の γ に関する作用とする. 補題 3.8 より, E 上の作用について必要ならば γ を γ^{-1} に取り替えることで

$$M(\Phi((z, \vec{u}))) = \pm \lambda \Phi((z, \vec{u})) \quad (0 < \lambda < 1)$$

と表せるとしてよい. この場合, $M^n(\Phi((z, \vec{u}))) \rightarrow 0$ より, (i)' の特殊な場合であることに注意する. 命題 3.3 より, $(z', \vec{u}') \in T^1\mathbb{H}$ で

$$\overline{M_\Gamma \Phi((z', \vec{u}'))} = E(\Gamma)$$

を満たすものがとれるので, $\overline{M_\Gamma \Phi((z, \vec{u}))}$ が $\pm \mathbb{R}^* \Phi((z', \vec{u}'))$ を含むことを示せば良い. (z', \vec{u}') の取り方から, $u'(+\infty) \in L(\Gamma)$ が成り立つ. このとき, $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u(+\infty)) = u'(+\infty)$$

を満たすものがとれる.

$M_n \in M_\Gamma$ と $(p_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Z}$ を上手くとることで, $\lambda^{p_n} \|M_n(\Phi((z, \vec{u})))\|$ は 0 以外の実数 α に収束する. これより,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n M^{p_n} \Phi((z, \vec{u})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pm \lambda^{p_n} M^{p_n} \Phi((z, \vec{u}))$$

が成り立つ.

$u(+\infty)$ は γ の不動点より,

$$\gamma_n \gamma^{p_n} u(+\infty) = \gamma_n(u(+\infty))$$

が成り立つことから, $M^{p_n} \Phi((z, \vec{u}))$ の E 上での向きは $\Phi((z, \vec{u}))$ と同じ向きになることがわかる. これより,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pm \lambda^{p_n} M^{p_n} \Phi((z, \vec{u})) = \pm \alpha \frac{\Phi((z', \vec{u}'))}{\|\Phi((z', \vec{u}'))\|}$$

が成り立つ。よって、 $\overline{M_\Gamma \Phi((z, \vec{u}))} \ni \pm \mathbb{R}^* \Phi((z', \vec{u}'))$ がわかる。

(case 2) $u(+\infty)$ が horocyclic で、 Γ の任意の hyperbolic な等長変換で固定されない時を考える。 $\overline{M_\Gamma \Phi((z, \vec{u}))}$ が Γ のある hyperbolic な等長変換 Γ から誘導される M_Γ の固有ベクトル (mod ± 1) を含むことを示せば (case 1) に帰着できる。

$\gamma \in \Gamma$ を hyperbolic な等長変換、 M を γ に関する作用とする。このとき、 $(\gamma^{-n} u(+\infty))_{n \geq 1}$ は γ^- に収束する。補題 3.8 より、 $(M_n)_{n \geq 1} \subset M_\Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n(\Phi((z, \vec{u})))\| = 0$$

を満たすものがとれる。 $w \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ を $\Phi((z, \vec{u}))$ に射影するベクトル、 $\hat{M}, \hat{M}_n \in SL(2, \mathbb{R})$ をそれぞれ M, M_n に射影するものとする。 w^+, w^- を \hat{M} の固有ベクトルで ($|\lambda| > 1$) として

$$\hat{M}w^+ = \lambda w^+, \quad \hat{M}w^- = \frac{1}{\lambda} w^-$$

を満たすものとする。

$\hat{M}_n(w) = a_n w^+ + b_n w^-$ とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned} \hat{M}^{-n} \hat{M}_n(w) &= \hat{M}^{-n}(a_n w^+) + M^{-n}(b_n w^-) \\ &= \frac{a_n}{\lambda^n} w^+ + b_n \lambda^n w^- \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに部分列をとることで、 $(\hat{M}_n M_n(w))_{n \geq 1}$ は βw^- ($\beta \neq 0$) に収束する。これより、 $(M^{-n} M_n(\Phi((z, \vec{u}))))_{n \geq 1}$ が Γ の hyperbolic な等長変換から誘導される変換の固有ベクトル (mod ± 1) に収束することがわかる。□

3.4 周期的な horocycle flow

この節では周期的な horocycle flow の軌道と極限集合の関連づけを考える。 $(w, \vec{v}) \in T^1 S$ に関し、 $t > 0$ で $h_t((w, \vec{v})) = (w, \vec{v})$ を満たすものが存在するとき、horocycle flow に関し周期的と呼ぶ。このとき、周期的な点の特徴づけを考える。

命題 3.9. ([V, Proposition 3.4.])

$(z, \vec{u}) \in T^1 \mathbb{H}$ と、向きを保存する等長変換 $\gamma \in \Gamma$ をとる。以下は同値。

- (i) $T > 0$ で、 $\tilde{h}_T((z, \vec{u})) = \gamma((z, \vec{u}))$ を満たすものが存在する。
- (ii) γ は parabolic で、かつ $u(+\infty)$ を固定する。

Proof. [V, Proposition 3.4.] の証明に基づいて証明を行う。

(i) \Rightarrow (ii) を示す. 周期的の定義より, 任意の $n \in \mathbb{Z}^*$ に対して

$$\tilde{h}_{nT}((z, \vec{u})) = \gamma^n((z, \vec{u}))$$

が成り立つ. これより, γ は $u(+\infty)$ を固定する. 今, $\gamma \neq Id$ かつ hyperbolic でないので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^{-n}(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n(z) \\ &= u(+\infty) \end{aligned}$$

より γ は parabolic.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 仮定から γ は parabolic で

$$\gamma(u(+\infty)) = u(+\infty)$$

が成り立つので, (z, \vec{u}) に関するホロサイクルを保存する. よって $T > 0$ で $\tilde{h}_T((z, \vec{u})) = \gamma((z, \vec{u}))$ を満たすものがとれる. \square

この命題より, 周期的な軌道と parabolic な等長変換には次のような関係が考えられる.

系 3.10. ([V, Corollary 3.5.]

周期的な軌道に関し, 次の性質が成り立つ.

• 以下は同値.

(i) $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対し, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき, (w, \vec{v}) が $\Omega_h(T^1S)$ 上で horocycle flow に関し周期的となる.

(ii) $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$.

• 以下は同値.

(i) $\Omega(T^1S)$ が horocycle flow に関する周期的軌道を含む.

(ii) Γ が parabolic な要素を含む.

horocycle flow に関する周期的な軌道について次がわかる.

命題 3.11. ([V, Proposition 3.6.]

horocycle flow に関する周期的な要素の集合は, \emptyset でないならば $\Omega_h(T^1S)$ 内で稠密となる.

Proof. [V, Proposition 3.6.] の証明に基づいて証明を行う.

$(z_0, \vec{u}_0) \in T^1\mathbb{H}$ に対し, $(w_0, \vec{v}_0) = \pi^1((z_0, \vec{u}_0)) \in T^1S$ とするとき, T^1S 内で周期的な要素 (w_0, \vec{v}_0) が存在すると仮定する. $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対し, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とする. このとき極限集合の特性から $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_0(+\infty)) = u(+\infty)$$

を満たすものをとる. $u_n(+\infty) = \gamma_n(u_0(+\infty))$ とおき, 列 $((z, \vec{u}_n))_{n \geq 1} \subset T^1\mathbb{H}$ を考える.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (z, \vec{u}_n) = (z, \vec{u})$ より

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w, \vec{v}_n) = (w, \vec{v})$$

が成り立つ. さらに $\gamma_n(u(+\infty))$ は parabolic より, (w, \vec{v}) は周期的. □

以上の性質をまとめると図9のような対応があることがわかる.

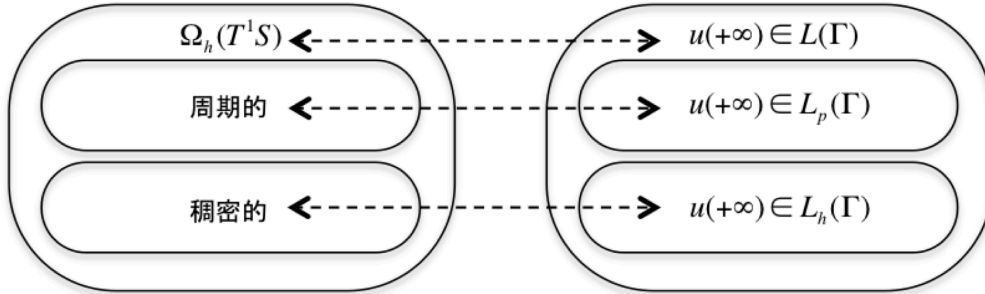


図9

3.5 幾何的有限性

この節では Γ が幾何的有限性を持つフックス群の場合を考える. このとき, 極限集合について

$$L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$$

が成り立つ. 定理 3.7 より, $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$ であることと軌道が non wandering 集合内で稠密となることは同値である. また, 系 3.10 より $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$ であることと軌道が周期的となることは同値である. これらをまとめると次のようになる.

定理 3.12. ([V, Theorem 4.1.])

以下は同値

- (i) Γ が非初等的なフックス群で幾何的有限性を持つ.
- (ii) $\Omega_h(T^1S)$ に制限した horocycle flow の軌道は $\Omega_h(T^1S)$ 内で稠密, もしくは周期的となる.

この定理より, Γ の性質と horocycle flow と E 上の線型変換 M_Γ に関して, 次のようにまとめることができる.

命題 3.13. ([V, Proposition 4.2., Proposition 4.3.])

Γ を非初等的なフックス群とする.

- 以下は同値.
 - Γ が幾何的有限性を持つ.
 - $\Omega_h(T^1S)$ に制限した horocycle flow の軌道は $\Omega_h(T^1S)$ 内で稠密, もしくは周期的となる.

– 任意の $v \in E(\Gamma)$ に対し, $\overline{M_\Gamma(v)} = E(\Gamma)$ が成り立つか, もしくはある $M \in M_\Gamma - Id$ で $Mv = v$ を満たすものが存在する.

• 以下は同値.

- Γ が凸コンパクト.
- $\Omega_h(T^1S)$ は空でない閉集合で, 全ての軌道が non wandering 集合内で稠密となる.
- 任意の $v \in E(\Gamma)$ に対し, $\overline{M_\Gamma(v)} = E(\Gamma)$ が成り立つ.

• 以下は同値.

- Γ が uniform lattice.
- T^1S は空でない閉集合で, 全ての軌道が non wandering 集合内で稠密となる.
- 任意の $v \in E(\Gamma)$ に対し, $\overline{M_\Gamma(v)} = E$ が成り立つ.

3.6 geodesic flow と horocycle flow の関係

この節では geodesic flow と horocycle flow の関係を調べ, 2章3節の補題 2.10 の一般化を考える. まず, geodesic flow と horocycle flow に関して次の性質が成り立つことを簡単に示す.

補題 3.14. ([V, Property 3.3.]

$(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, $s, t \in \mathbb{R}$ に関して

$$\tilde{g}_t \tilde{h}_s \tilde{g}_{-t}((z, \vec{u})) = \tilde{h}_{se^{-t}}((z, \vec{u}))$$

が成り立つ.

Proof. 図 10 よりわかる. □

この性質を用いて次の定理を示す.

定理 3.15. ([III, Theorem 4.3.]

空でない開集合 $O, V \subset \Omega_g(T^1S)$ に対し, ある $T > 0$ が存在して, 任意の $t \geq T$ に関して $g_t(O) \cap V \neq \emptyset$ が成り立つ.

Proof. [III, Theorem 4.3.] の証明に基づいて証明を行う.

背理法で示す. 今, ある空でない開集合 $O, V \subset \Omega_g(T^1S)$ に対し非有界な実数列 $(t_n)_{n \geq 1}$ で $O \cap g_{t_n}(V) = \emptyset$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$ として考える. 定理 2.8 より, $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ に対し, $(w, \vec{v}) = \pi^1((z, \vec{u})) \in T^1S$ とするとき, $(w, \vec{v}) \in V$ で $g_{\mathbb{R}}$ に関して周期的なものがとれる. この $g_{\mathbb{R}}$ の周期を T とする. $-r_n \in \mathbb{N}$, $-T < s_n \leq 0$ をとり, $t_n = r_n T + s_n$ とする. この部分列をとることで, 実数 S に収束する部分列 $(s_n)_{n \geq 1}$ を考えることができる. 今, (w, \vec{v}) は周期なので $u(+\infty)$ は horocyclic であるから, 定理 3.7 より

$$\overline{h_{\mathbb{R}}((w, \vec{v}))} = \Omega_h(T^1S)$$

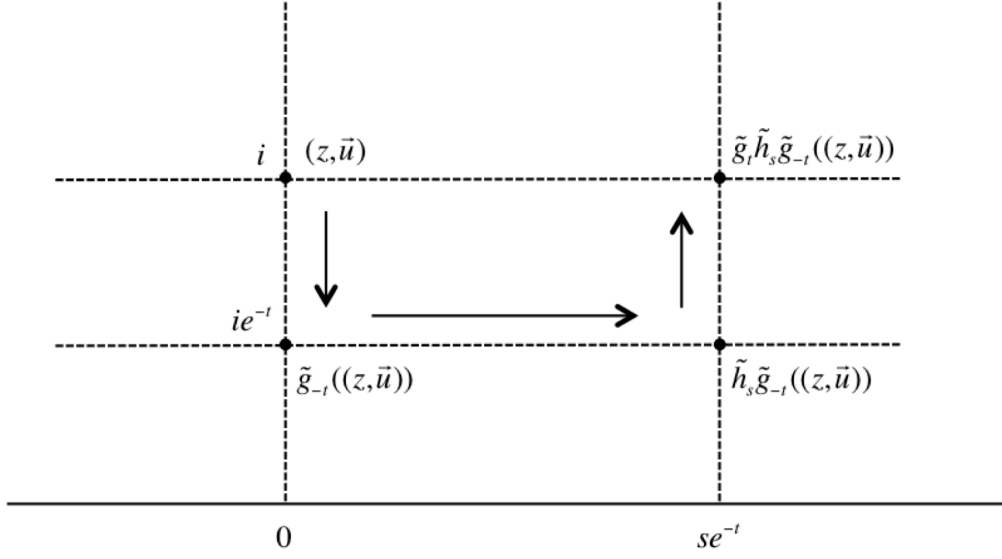


図 10

が成り立つ. さらに, 命題 3.6 と定理 2.2 から

$$\Omega_g(T^1 S) \subset \Omega_h(T^1 S)$$

がわかる. このことから, $t \in \mathbb{R}$ で $h_t((w, \vec{v})) \in g_{-s}(O)$ を満たすものがとれる. hyperbolic な等長変換 $\gamma \in \Gamma$ で $u(+\infty) = \gamma^+$, $\text{length}(\pi^1((\gamma^-, \gamma^+))) = T$ を満たすものを考える. γ の取り方から

$$\gamma^n((z, \vec{u})) = \tilde{g}_{nT}((z, \vec{u}))$$

が成り立つ. これと, 補題から

$$\begin{aligned} \gamma^{-n} \tilde{g}_{-r_n T}(\tilde{h}_t((z, \vec{u}))) &= \tilde{g}_{-r_n T} \tilde{h}_t(\gamma^{-r_n}((z, \vec{u}))) \\ &= \tilde{g}_{-r_n T} \tilde{h}_t \tilde{g}_{-r_n T}((z, \vec{u})) \\ &= \tilde{h}_{te^{r_n T}} \tilde{g}_{-r_n T} \tilde{g}_{-r_n T}((z, \vec{u})) \\ &= \tilde{h}_{te^{r_n T}} \tilde{g}_{-2r_n T}((z, \vec{u})) \end{aligned}$$

を得る. これを π^1 で落とすことで,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{-r_n T}(\tilde{h}_t((w, \vec{v}))) &= \tilde{h}_{te^{r_n T}} \tilde{g}_{-2r_n T}((w, \vec{v})) \\ &= h_{te^{r_n T}}((w, \vec{v})) \end{aligned}$$

が得られる.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{te^{r_n T}}((z, \vec{u})) = (w, \vec{v})$$

より, $(\tilde{g}_{-r_n T}(\tilde{h}_t((z, \vec{v}))))_{n \geq 1}$ は (w, \vec{v}) に収束することがわかる. これから, 十分大きな n に対し, $g_{s+r_n T}(V) \cap O \neq \emptyset$ が成り立つ. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s) = 0$ より, 十分大きな n に対し $g_{t_n}(V) \cap O \neq \emptyset$ が成り立つ. しかし, これは仮定に矛盾する. \square

この定理は2章3節の補題2.10の一般化である.

4 無理数の近似と geodesic flow

この章ではフックス群 Γ をモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ に限定したとき, 無理数の有理数近似とモジュラー群の商空間 \mathbb{H}/Γ 上の軌道の有界性を関連づけることが主題となっている. まず, 1節で無理数の有理数近似として連分数展開を考える. 無理数の連分数展開がモジュラー群の上半平面上への作用と関係していることを調べる. 2節では無理数とモジュラー群の商空間 \mathbb{H}/Γ 上の軌道の関係を考える. モジュラー群の極限集合は有理数が parabolic な点に, 無理数が conical な点に対応している. conical な点 x に向かう軌道の中でも尖点部分を何度も出入りする軌道に注目して調べていく. このような軌道に関して「conical な点 x に向かう軌道が尖点のどれくらいの深さまでならば無限回出入りできるのか」ということを調べることが, この章のメインである. そのために, 尖点部分を何度も出入りする軌道と交わるホロサイクルを用いて尖点における軌道の $h(x)$ を導入する. 高さ $h(x)$ が有界のとき x を幾何的不良近似と呼ぶ. 3節では無理数 x の幾何的不良近似性と, x の連分数展開を関連づけを考える. そのために x の有理数近似の精度に関する $\nu(x)$ を導入する. $\nu(x)$ が小さいほど近似の精度が良くなり, $\nu(x) > 0$ が成り立つ時, x を不良近似と呼ぶ. x が不良近似であることと x が幾何的不良近似であることは同値であることがポイントである. 定理4.11として, 無理数 x の連分数展開 $[n_0; n_1, n_2, \dots]$ の係数が上に有界であることと, x が不良近似であること, つまりモジュラー群の商空間 \mathbb{H}/Γ 上の軌道が有界であることが同値であることを示す.

4.1 連分数展開

この節では, 無理数の連分数展開とモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ の作用の関係を考える.

連分数とは, $n_0 \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{N}$ に対し

$$n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}}$$

の形で表されるものである. この連分数を $[n_0; n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k]$ とかくことにする. 実数 x が与えられた時, 連分数を用いて近似することができる. x が有理数のときは, 連分数は有限回で終わり

$$x = [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k] \quad (n_k > 1)$$

と表すことができる. x が無理数のとき, 連分数は無限に続く. 例として, $x = \sqrt{2}$ のときは

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

と表すことができる.

次に \mathbb{H} の等長変換

$$\phi(z) = z + 1, \quad \psi(z) = \frac{z}{z + 1}$$

を考える. この等長変換に対し, 任意の自然数 l, m について

$$\phi^l(z) = z + l, \quad \psi^m(z) = \frac{1}{m + \frac{1}{z}}$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} \phi^{n_0} \psi^{n_1} \dots \phi^{n_{2k}}(z) &= n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_{2k} + z}}} \\ \phi^{n_0} \psi^{n_1} \dots \psi^{n_{2k+1}}(z) &= n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_{2k} + \frac{1}{n_{2k+1} + \frac{1}{z}}}}} \end{aligned}$$

とすることができる. $z = 0, \infty$ として考えることで連分数展開を得ることができる.

この2点 $0, \infty$ を結ぶ向き付き測地線 $L = (0, \infty)$ の $PSL(2, \mathbb{Z})$ の元による像をファレイ直線と呼ぶ. T を $\{0, 1, \infty\}$ を頂点とする双曲三角形とすると, ファレイ直線に関して

$$\phi(L) = (1, \infty), \quad \psi(L) = (0, 1)$$

となるので, T の辺はファレイ直線で表せる. また, $PSL(2, \mathbb{Z})$ の基本領域

$$\Delta = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |z| \geq 1, |z - 1| \geq 1\}$$

に関して, $\tau(z) = \frac{z-1}{z}$ により,

$$T = \Delta \cup \tau(\Delta) \cup \tau^2(\Delta)$$

が成り立つ.

$PSL(2, \mathbb{Z})$ は 0 と ∞ の2点を固定する自明でない等長変換をもたないので, 任意のファレイ直線 L に対し, $\gamma \in \Gamma$ で $\gamma(L) = L$ を満たすものが唯一存在する.

$x \in \mathbb{H}(\infty)$ に関し, 半測地線 $[i, x)$ と交わるファレイ直線の本数による特徴付けを考える.

命題 4.1. ([II, Proposition 4.3.])

$x \in \mathbb{H}$ に関し, 以下は同値.

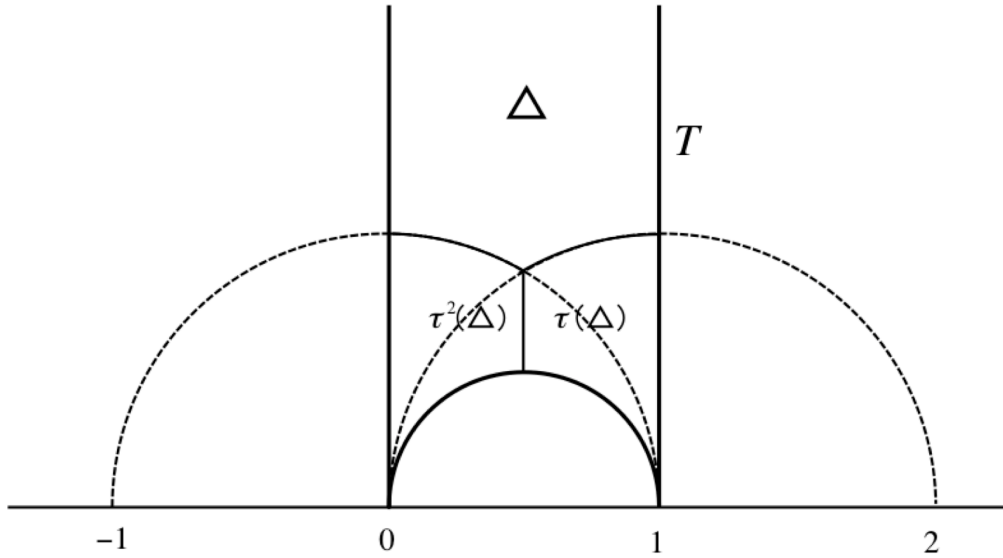


図 11

- (i) 半直線 $[i, x)$ が無限個のファレイ直線と交わる.
- (ii) x が無理数である.

Proof. [II, Proposition 4.3.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. $[i, x)$ が高々有限個のファレイ直線と交わる場合を考える. このとき, $z \in [z, x)$ と $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ で $[z, x) \subset \gamma(T)$ を満たすものをとる. x はファレイ直線の端点になるため, $[\gamma^{-1}(z), \gamma^{-1}(x))$ は T 内の半直線となる. よって, $\gamma^{-1}(x) \in \{0, 1, \infty\}$ がわかるので, $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ がわかる. よって $[i, x)$ が無限個のファレイ直線と交わる時, x は無理数.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の場合を考える. 今 $L_p(PSL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ より, $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ で $\gamma(\infty)$ を満たすものがとれる. 半直線 $\gamma^{-1}([i, x))$ は $\gamma^{-1}(i)$ を通る垂直な半直線なので, $n \in \mathbb{Z}$ と $z \in (i, x]$ で

$$\phi^n \gamma^{-1}([z, x)) \subset T$$

を満たすものがとれる. Δ の局所有限性から $\phi^n \gamma^{-1}([i, x))$ は高々有限個の T の像と交わることをわかる. よって $\phi^n \gamma^{-1}([i, x))$ は有限のファレイ直線と交わる. このことから $[i, x)$ も有限個のファレイ直線と交わる. 以上より, x が無理数の時は $[i, x)$ は無限個のファレイ直線と交わる. \square

正の無理数 x に注目し, $[i, x)$ と交わる無限個のファレイ直線への番号付けを考える. $[i, x)$ の弧長パラメータを $(r(t))_{t \geq 0}$ とする.

列 $(L_n)_{n \geq 0} = (x_n, y_n)_{n > 0}$ を次のように定める.

- 番号 $n : [i, x)$ と L_n の交点を $r(t_n)$ としたとき, $t_n < t_{n+1}$ を満たすようにとる.
- 向き: L_n が実軸に直交する半直線のとき, $y_n = \infty$ を満たすようにとる. L_n が実軸と直交する円弧の時, $x_n < y_n$ を満たすようにとる.

ファレイ直線の性質より, $\gamma_n \in PSL(2, \mathbb{Z})$ で $\gamma_n(L) = L_n$ を満たすものがただ1つ存在する. $\gamma_n^{-1}([i, x))$ を考える. この半直線は L と $\gamma_n^{-1}(r(t_n))$ で交わっている. このとき, $\gamma_n([z, x))$ はファレイ直線 $\phi(L) = (0, 1)$ もしくは $\psi(L) = (1, \infty)$ と交わることがわかる. よって, $\gamma_n^{-1}(L)$ は $\phi(L)$ もしくは $\psi(L)$ と交わる. これより,

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \phi \text{ もしくは } \gamma_{n+1} = \gamma_n \psi$$

が成り立つ.

次に, 整数列 $\{n_k\}_{k \geq 0}$ を図 12 から次のように定める.

- $k = 0$ のとき, $n_0 := \begin{cases} |x| \leq 1 \text{ のとき, } & 0 \\ |x| > 1 \text{ のとき, } & x \text{ の整数部分} \end{cases}$
- $k \geq 1$ のとき, $n_k = \max\{l \in \mathbb{N} \mid \gamma_{n_k+l} = \gamma_{n_{k-1}} \phi^l \text{ もしくは } \gamma_{n_k+l} = \gamma_{n_{k-1}} \psi^l\}$

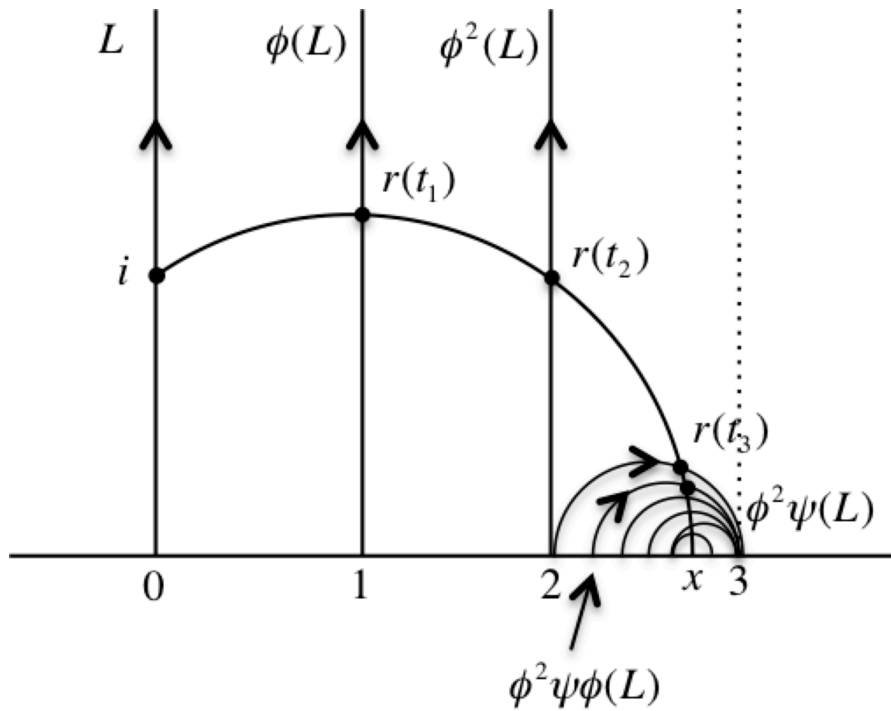


図 12

このとき, 次の主張が成り立つ.

命題 4.2. ([II, Proposition 4.6.])

有理数列 $([n_0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 0}$ は x に収束する. 特にこの有理数列は一意に存在する.

Proof. [II, Proposition 4.6.] の証明に基づいて証明を行う.

ファレイ直線の取り方から $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ が存在して, ある x は入れ子型の区間列 $(\gamma_k(0), \gamma_k(\infty))$ もし

くは $(\gamma_k(\infty), \gamma_k(0))$ に含まれる. 任意の $k \geq 1$ に対し $\gamma_k(0), \gamma_k(\infty) \in [n_0, n_0 + 1]$ が成り立つことから, $0 < |\gamma_k(0) - \gamma_k(\infty)| \leq 1$ がわかる.

よって $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma_k(0) - \gamma_k(\infty)| = 0$ を示せばよい. これを背理法を用いて示す. $d > 0, (\gamma_{k_p})_{p \geq 1}$ で $|\gamma_{k_p}(0) - \gamma_{k_p}(\infty)|$ を満たすものがとれたと仮定する. このとき, ファレイ直線 $g_{k_p}(L)$ は \mathbb{H} のユークリッド線分

$$I = \left(n_0 + i\frac{d}{2}, n_0 + 1 + i\frac{d}{2} \right)$$

と交わる. 今 L は双曲三角形 T の辺で, T は基本領域 Δ の像の有限ユニオンより, 無限個の等長変換 $g \in PSL(2, \mathbb{Z})$ が存在して $g(\Delta)$ は I と交わる. これは Δ が局所有限であることに矛盾. よって, $([n_0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 0}$ は x に収束する.

唯一性を示す. x に収束する $([n'_0; n'_1, \dots, n'_k])_{k \geq 0}$ をとる. このとき,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \phi^{n'_0} \dots \phi^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \phi^{n_0} \dots \phi^{n_{2p}}(0)$$

が成り立つ. ここで,

$$\phi^{n'_0} \dots \phi^{n'_{2p}}(0) \in (n'_0, n'_0 + 1) \text{ かつ } \phi^{n_0} \dots \phi^{n_{2p}}(0) \in (n_0, n_0 + 1)$$

より $n_0 = n'_0$ がわかる. これより, $\phi^{n'_0}, \phi^{n_0}$ を除いても差し支えないので

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \psi^{n'_1} \dots \psi^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \psi^{n_1} \dots \psi^{n_{2p}}(0)$$

が成り立つ. 次に,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{([0; n'_1, \dots, n'_{2p}])} \right)_{p \geq 1} &= ([n'_1; n'_2, \dots, n'_{2p}])_{p \geq 1} \\ \left(\frac{1}{([0; n_1, \dots, n_{2p}])} \right)_{p \geq 1} &= ([n_1; n_2, \dots, n_{2p}])_{p \geq 1} \end{aligned}$$

を考えることで, 先の議論と同様にして $n'_1 = n_1$ がわかる. この議論を続けることで, 任意の $k \geq 0$ に対して $n_k = n'_k$ が成り立つ. \square

4.2 尖点近傍の軌道

この節では, $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ としたとき, $x \in \mathbb{H}(\infty)$ に対して軌道 $\pi([z, x])$ と尖点近傍がどう交わるかを考える. 特に尖点近傍に無限回出入りするような x の特徴付けを行いたい.

モジュラー群の極限集合に関して $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$ が成り立つ. 特に $L_p(\Gamma) = \Gamma(\infty)$ が成り立つ. 命題 1.12 より, parabolic な元は有理数に, conical な元は無理数に対応していることがわかる. 無限遠点 ∞ を中心とする, $t > 0$ のホロサイクルを $H_t := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}z = t\}$, ホロ

ディスクを $H_t^+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}z \geq t\}$ をとかく. ∞ の固定化群を Γ_∞ とするとき, 定理 1.6 より $t > 0$ で任意の $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ に対して

$$\gamma H_t^+ \cap H_t^+ = \emptyset$$

が成り立つような場合を考える. モジュラー曲面 $S = \mathbb{H}/\Gamma$ は, ∞ を中心とするホロディスク H_t^+ による尖点をただ1つだけ持つ. この尖点を $\pi(H_t^+)$ と表すことにする.

$z \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}(\infty)$ をとり, $(r(s))_{s \geq 0}$ を $[z, x)$ の弧長パラメータとする. 図 13 のように $\pi([z, x))$ が尖点 $\pi(H_t^+)$ に向かう条件を考える. このとき, 次の性質が成り立つ.

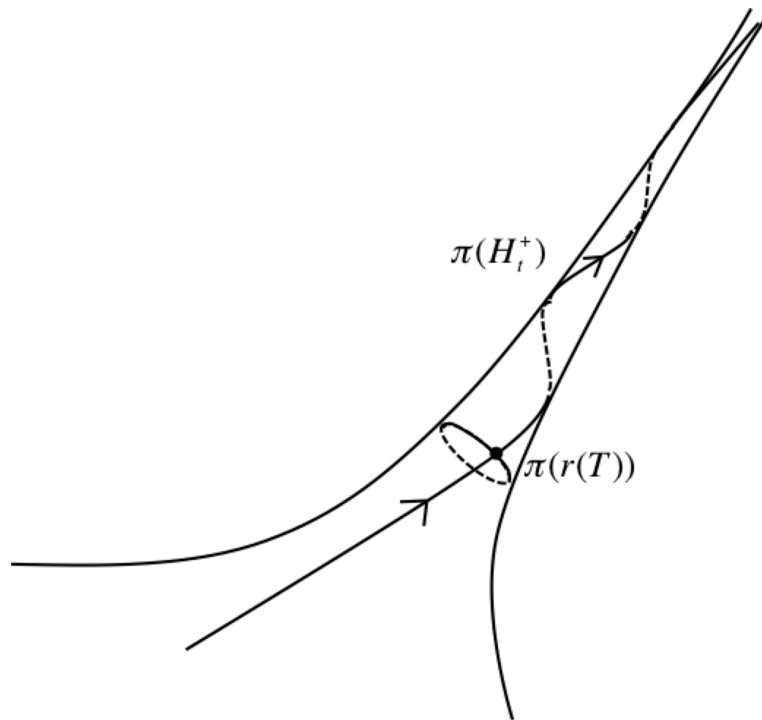


図 13

命題 4.3. ([VII, Proposition 1.1.]

以下は同値.

- (i) $x \in L_p(\Gamma)$.
- (ii) $T \geq 0$ で $\pi([r(T), x)) \subset \pi(H_t^+)$ を満たすものが存在する.

Proof. [VII, Proposition 1.1.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. $x = \gamma(\infty)$ が成り立つと仮定すると, 定理 2.11 より直ちに $T \geq 0$ で

$$\pi([r(T), x)) \subset \pi(H_t^+)$$

を満たすものが存在することがわかる.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 仮定より $T \geq 0$ で $\pi([r(T), x]) \subset \pi(H_t^+)$ を満たすものがとれる. このとき,

$$[r(T), x] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty} \gamma(H_t^+)$$

が成り立つ. 今, ホロサイクルは互いに交わりを持たないので $[r(T), x]$ はある 1 つのホロディスク内に含まれることがわかる. これより, ある $\gamma \in \Gamma$ を用いて $x = \gamma(\infty)$ と表せる. \square

ここからは, $x \in L_c(\Gamma)$ のときに注目する. 命題 2.6 より, $x \in L_c(\Gamma)$ ときフックス群の商空間 \mathbb{H}/Γ 上の軌道は発散的でない. 実はある無理数 x に対して \mathbb{H}/Γ 上の軌道 $\pi([z, x])$ は非有界となることが知られている. (これはあとで示す.) よって十分大きな t_0 に対し, 非有界な実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_{t_0}^+) \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる.

$x \in L_c(\Gamma)$ を特徴付けるために, ホロディスクの族を考える. (図 14) ここで, ホロディスクに

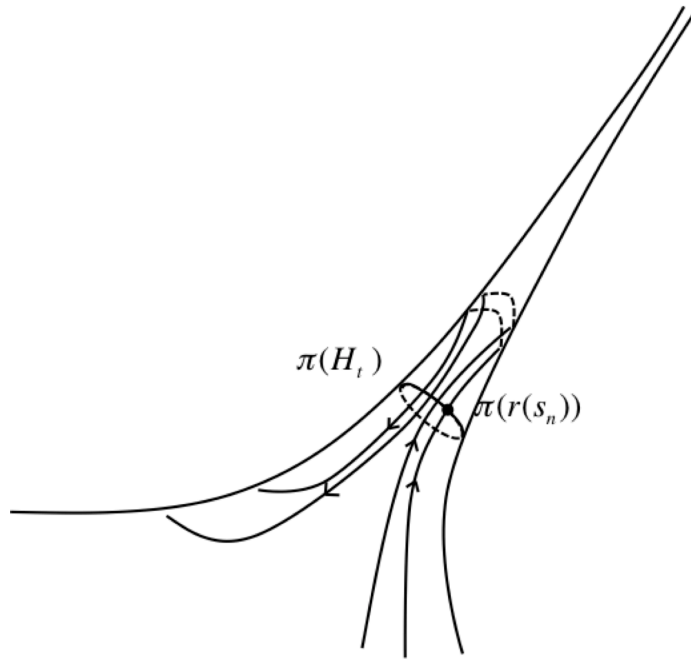


図 14

関する t について $E([z, x])$ を次のように定める.

$$E([z, x]) := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0, \text{非有界な実数列 } (s_n)_{n \geq 1} \text{ で } \pi(r(s_n)) \in \pi(H_t) \text{ を満たすものが存在する}\}$$

これは, x に向かう軌道が尖点のどれくらいの深さまでならば無限回出入りできるのかということ, ホロサイクルに関する t で考えている. $E([z, x])$ について, $x \in L_p(\Gamma)$ のときは明らかに $E([z, x]) = \emptyset$ が成り立つ.

$E([z, x])$ に関して, 次の性質が成り立つ.

命題 4.4. ([VII, Proposition 1.5.]

$x \in L_c(\Gamma)$ のとき, 以下が成り立つ.

- $t_1 > 0$ で任意の $x \in L_c(\Gamma)$ に対して $t_1 \in E([z, x])$ を満たすものが存在する.
- $x \in L_c(\Gamma)$ のとき, $E([z, x])$ の上限は z に依存しない.

Proof. [VII, Proposition 1.5.] の証明に基づいて証明を行う.

$x \in L_c(\Gamma)$ と仮定する. 今 Γ は幾何的有限で非初等的なので命題 2.6 より, x によらないコンパクトな $K_1 \subset S$ と, 非有界な $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\pi(r(s_n)) \in K_1$$

を満たすものがとれる. このとき, K_1 をコンパクトな $\tilde{K}_1 \subset H_{t_1}^+$ に持ち上げる. このとき, $s'_n \geq s_n$ で

$$\pi(r(s'_n)) \in \pi(H_{t_1})$$

を満たすものがとれる. よって $t_1 \in E([z, x])$ がわかる.

次に z への依存性について考える. $x \in L_c(\Gamma)$ をとる. z と異なる点 $z' \in \mathbb{H}$ をとり, $[z', x]$ の弧長パラメータを $(r(s))_{s \geq 0}$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $T \geq 0$ で

$$[r'(T), x] \in [z, x] \text{ の } \varepsilon \text{ 近傍}$$

を満たすものがとれる. $t \in E([z, x])$ を固定する. このとき取り方から, $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma$ と, 非有界な実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\gamma_n(r(s_n)) \in H_t$$

を満たすものがとれる. この関係は, ブーゼマンコサイクルを用いると

$$B_\infty(i, \gamma_n(r(s_n))) = t$$

と表せる.

$\varepsilon > 0$ と $(s'_n)_{n \geq 1}$ を

$$d(r'(s'_n), r(s_n)) \leq 1$$

を満たすようにとる. このとき, ブーゼマンコサイクルの性質から

$$\begin{aligned} B_\infty(i, \gamma_n(r'(s_n))) &= B_\infty(i, \gamma_n(r(s_n))) + B_\infty(\gamma_n(r(s_n)), \gamma_n(r'(s_n))) \\ &= t + B_\infty(\gamma_n(r(s_n)), \gamma_n(r'(s_n))) \end{aligned}$$

とできる. これより,

$$t - \varepsilon \leq B_\infty(i, \gamma_n(r'(s_n))) \leq t + \varepsilon$$

が成り立つことから

$$\pi(r'(s_n)) \in \pi(H_{t-\varepsilon}^+)$$

がわかる. よって, $s''_n \geq s'_n$ で

$$\pi(r'(s''_n)) \in \pi(H_{t-\varepsilon})$$

を満たすものがとれる. これより,

$$t - \varepsilon \in E([z', x])$$

がわかる. よって, $E([z', x])$ の上限は少なくとも $E([z, x])$ の上限であることがわかる. z と z' を入れ替えることで題意が示される. \square

$x \in L_c(\Gamma)$ に対し, $E([z, x])$ の上限を尖点における軌道 $\pi([z, x])$ の高さといい, $h(x)$ と表す. $h(x)$ が有限のとき, x を幾何的不良近似 (**geometrically badly approximated**) と呼ぶ.

$\pi([z, x])$ が有界のとき, x が幾何的不良近似となることは $E([z, x])$ の定義より明らかである. この逆が成り立つことを示す.

命題 4.5. ([VII, Proposition 2.1.]

以下は同値.

- (i) $x \in L_c(\Gamma)$ が幾何的不良近似.
- (ii) $t > 0$ で

$$\pi([z, x]) \cap \pi(H_t^+) = \emptyset$$

を満たすものが存在する. すなわち, $\pi([z, x])$ は有界である.

Proof. [VII, Proposition 2.1.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. $x \in L_c(\Gamma)$ で幾何的不良近似のものをとる. このとき $t > h(x)$ で, 任意の $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ に対して

$$\gamma(H_t^+) \cap H_t^+ = \emptyset$$

を満たすものをとる. $h(x)$ の定義から, $T > 0$ で

$$\pi([r(T), x]) \cap \pi(H_t) = \emptyset$$

を満たすものがとれる. 十分大きな t に対し, ホロサイクルの像 $\pi(H_t)$ は S を 2 つの連結成分に分ける. このとき, $\pi([r(T), x])$ は $S - \pi(H_t^+)$ のほうに含まれることがわかる. 今, $\pi([z, r(T)])$ はコンパクトなので $t' \geq t$ で

$$\pi([z, x]) \cap \pi(H_{t'}^+) = \emptyset$$

を満たすものがとれる.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. 仮定より $t > 0$ で

$$\pi([z, x]) \cap \pi(H_t^+) = \emptyset$$

を満たすものがとれる. $x \in L_c(\Gamma)$ より $t' > 0$ と, 非有界な実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_t)$$

を満たすものがとれる. これより $t > t'$ がわかるので, x は幾何的不良近似である. \square

4.3 デイオファントス近似

前節の最後で、 $x \in L_c(\Gamma)$ が幾何的不良近似であることと、尖点 $\pi(H_t^+)$ に向かう軌道 $\pi([z, x])$ の有界性を関係付けた。この節では x が無理数のとき、尖点 $\pi(H_t^+)$ へ向かう軌道 $\pi([z, x])$ の有界性と x の連分数展開の関係を調べる。

Γ をモジュラー群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ とする。まず、無理数を有理数で近似したときの評価を考える。関数 $\Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ - \{0\}$ で、任意の無理数 x に関し、 x に収束する有理数列 $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$ を考えた時、

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \Psi(|q_n|) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty$$

を満たすものを考える。このとき、ベストとなる Ψ の取り方を調べていく。

無理数 x に関し、 p_n が nx の整数部分とすると、

$$\left| \frac{nx}{n} - \frac{p_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

より、

$$\left| x - \frac{p_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

を満たすことがわかる。これより、求めたい $\Psi(n)$ は $\frac{1}{n}$ よりも小さいことがわかる。

近似の評価に関して、さらに次の定理が成り立つ。

定理 4.6. ([VII, Theorem 3.1.])

x を無理数とする。有理数列 $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$ で、以下を満たすものが存在する。

- (i) $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{2q_n^2}$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = +\infty$

この定理より、 $\Psi(n) < \frac{1}{2n^2}$ がわかる。

定理の証明の準備として、ホロサイクルのユークリッド幾何的な半径と有理数の関係を考える。

$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$, $p(z) = z + 1$ とする。 $\gamma \in \Gamma$ の作用 $\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$) に対し、 $\sigma(\gamma) = c$ とする。このとき、 ∞ を中心とするホロサイクル H_t の $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ による像の半径は

$$\frac{1}{t\sigma^2(\gamma)}$$

と表せる。 $x \in \mathbb{R}$ をとり、測地線 (∞, x) とホロサイクルの像 $\gamma(H_t)$ が交わるときを考えると、図 15 より

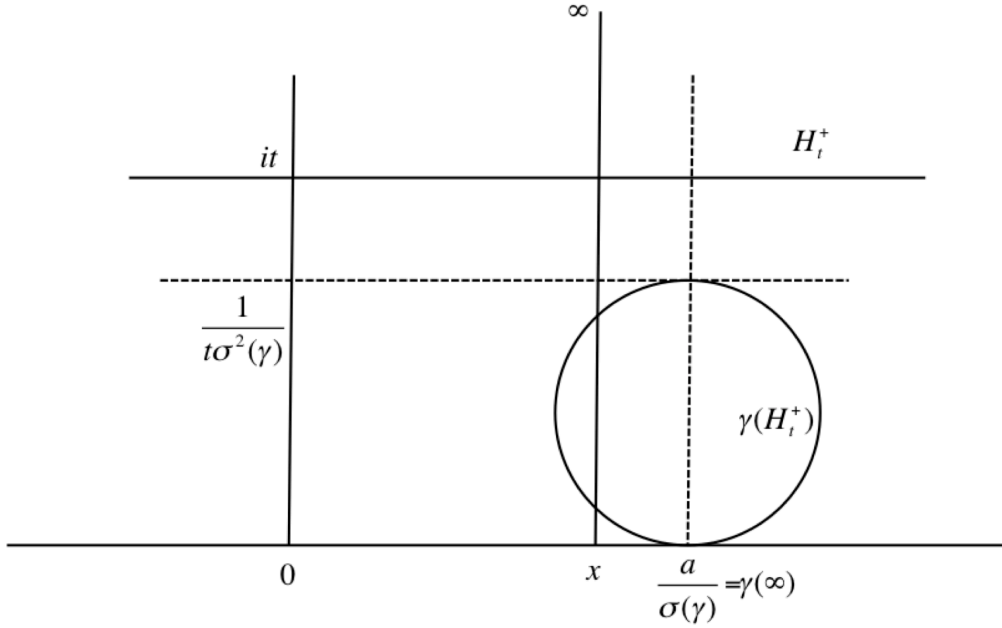


図 15

$$|x - \gamma(\infty)| \leq \frac{1}{2t\sigma^2(\gamma)}$$

が成り立つ.

このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 4.7. ([VII, Lemma 3.5.])

$x \in \mathbb{R}$ をとり, 測地線 (∞, x) の弧長パラメータを $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$ とする. このとき, 以下は同値.

(i) 正の実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \text{ かつ } \pi(r(s_n)) \in \pi(H_t)$$

を満たすものが存在する.

(ii) 列 $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma - \Gamma_\infty$ で

$$|x - \gamma_n(\infty)| \leq \frac{1}{2t\sigma^2(\gamma_n)} \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(\gamma_n) = +\infty$$

を満たすものが存在する.

Proof. [VII, Lemma 3.5.] の証明に基づいて証明を行う.

(i) \Rightarrow (ii) を示す. 仮定より $\pi(r(s_n)) \in \pi(H_t)$ なので, $(\gamma)_{n \geq 1}$ で

$$r(s_n) \in \gamma_n(H_t)$$

を満たすものがとれる。測地線 (∞, x) は $\gamma_n(H_t)$ と交わるので、

$$|x - \gamma_n(\infty)| \leq \frac{1}{2t\sigma^2(\gamma_n)}$$

が成り立つ。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty \text{ かつ } \gamma_n(H_t) \cap H_t = \emptyset$$

より、 $(\sigma(\gamma_n))_{n \geq 1}$ は非有界。

(ii) \Rightarrow (i) を示す。これは図 16 よりわかる。 □

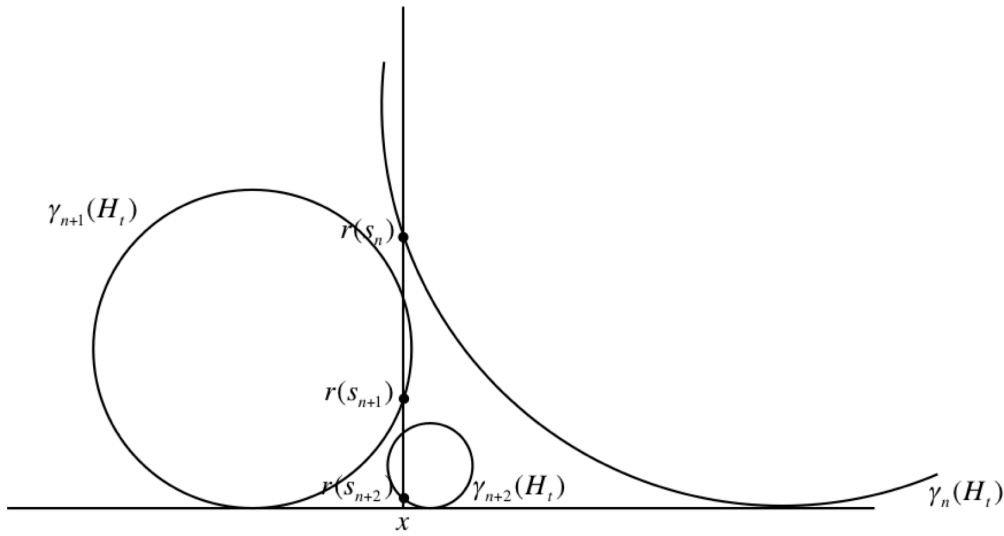


図 16

この補題を用いて定理 4.6 を証明する。

Proof. [p,154] の証明に基づいて証明を行う。

x を無理数とする。補題 4.7 より、正の実数列 $(s_n)_{n \geq 1}$ で

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_1) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

を満たすものがとれることを示せば良い。

背理法で示す。 $z \in (\infty, x)$ で

$$\pi([z, x]) \cap \pi(H_1) = \emptyset$$

を満たすものがとれると仮定する。これを \mathbb{H} に持ち上げて考える。指数 3 の elliptic な等長変換

$$\tau(z) = \frac{z-1}{z}$$

を考える。この τ, τ^2 は H_1 を図 17 のように移す。今、 Γ の基本領域は

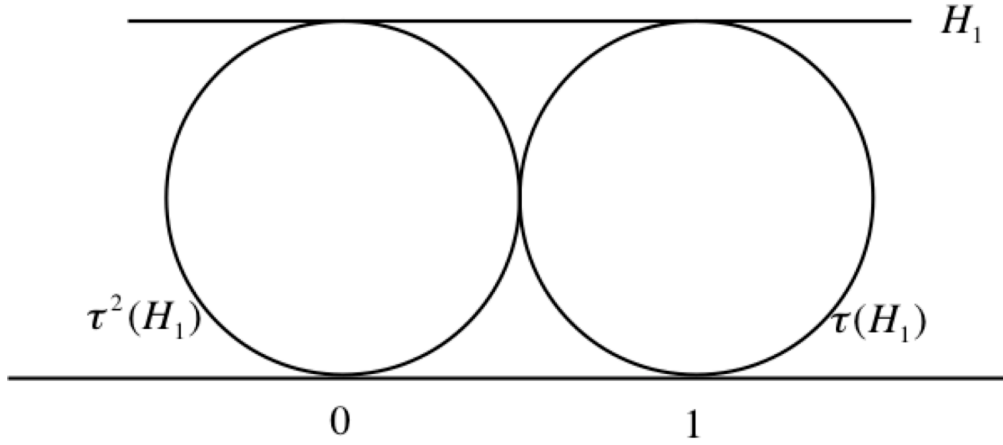


図 17

$$\Delta = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |z| \geq 1, |z - 1| \geq 1\}$$

と表せる. このとき, $\gamma \subset \Gamma$ で $\gamma(z) \in \Delta$ を満たすものがとれる. 今,

$$x \notin \Gamma(\infty) \text{ かつ } [\gamma(z), \gamma(x)] \cap H_1 = \emptyset$$

より,

$$[\gamma(z), \gamma(x)] \subset \mathbb{H} - H_1^+$$

が成り立つ. 同様に

$$[\gamma(z), \gamma(x)] \subset \mathbb{H} - \tau(H_1^+)$$

$$[\gamma(z), \gamma(x)] \subset \mathbb{H} - \tau^2(H_1^+)$$

が成り立つ. 図 18 より $[\gamma(z), \gamma(x)]$ はコンパクトな集合に含まれるが, これは矛盾. \square

無理数 x に関し, 近似の精度を調べるために

$$\nu(x) := \inf \left\{ \rho > 0 \mid \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \text{ で } \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{\rho}{q_n^2} \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty \text{ を満たすものが存在する} \right\}$$

とする. $\nu(x) > 0$ のとき, x を不良近似数 (**badly approximated**) と呼ぶ.

定理 4.6 より, 任意の x に関して

$$\nu(x) \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ. さらに, $\nu(x)$ と $h(x)$ に関して次の定理が成り立つ.

定理 4.8. ([VII, Lemma 3.5.])

任意の無理数 x に関して,

$$\frac{1}{2\nu(x)} = h(x)$$

が成り立つ.

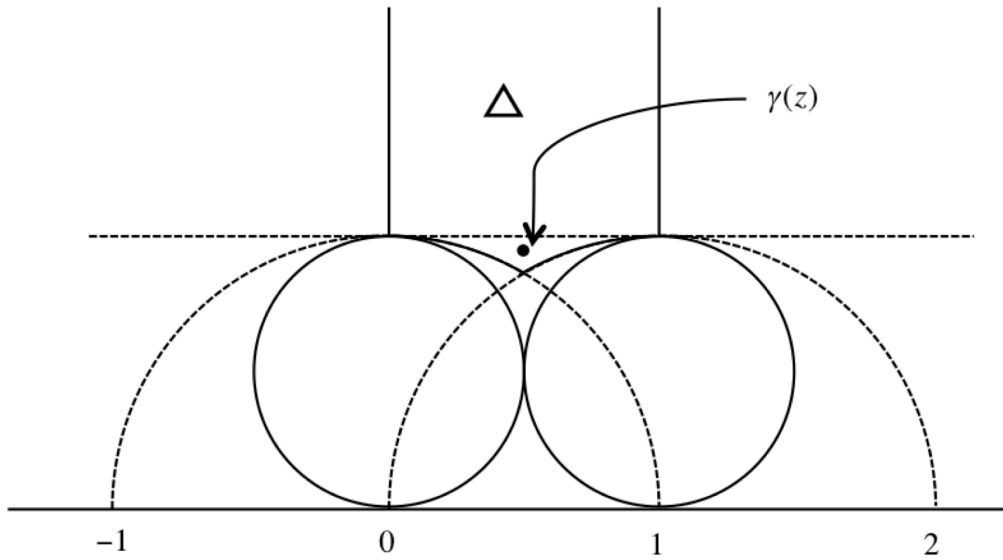


図 18

Proof. $\nu(x)$ に関して,

$$\rho = \frac{1}{2t}, \quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{\sigma(\gamma)} = \gamma(\infty)$$

とおくことで,

$$\frac{1}{2\nu(x)} = \sup\{t > 0 \mid (\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \Gamma - \Gamma_\infty \text{ で } |x - \gamma_n(\infty)| \leq \frac{1}{2t\sigma^2(\gamma)} \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(\gamma) = +\infty\}$$

と表せる. 補題 4.7 を適用することで,

$$\frac{1}{2\nu(x)} = h(x)$$

がわかる. □

この定理より, $\nu(x) > 0$ が成り立つことと $h(x)$ が有界であることは同値であることがわかる. よって x が幾何的的不良近似であることと x が不良近似であることは同値であることがわかる.

次の定理は, 定理 4.6 よりも厳密な評価を与えるものである.

定理 4.9. ([VII, Theorem 3.3.]

$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ とする. 任意の無理数 x に関し, 次が成り立つ.

- $\nu(x) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ が成り立つ.
- 以下は同値.
 - (i) $\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(ii) $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ に対し $x \in \Gamma(\omega)$ が成り立つ.

Proof. [p,155] の証明に基づいて証明を行う.

定理 4.8 より, 定理 4.9 の主張は

- $h(x) \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ.
- 以下は同値.

(i) $h(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ に対し $x \in \Gamma_\omega$ が成り立つ.

と書き直すことができるので, こちらを示せば良い.

まず, x が hyperbolic な等長変換 $\gamma \in \Gamma$ の不動点の時を考える. z を γ の軸上の点で

$$\pi([z, x]) = \pi((\gamma^-, \gamma^+))$$

を満たすものとする. このとき, $h(x)$ は

$$\pi((\gamma^-, \gamma^+)) \cap \pi(H_t) \neq \emptyset$$

を満たす最大の $t > 0$ であることがわかる. これは, 図 19 より

$$h(x) = \frac{1}{2} \max\{|g(\gamma^-) - g(\gamma^+)| \mid g \in \Gamma\}$$

と表せる.

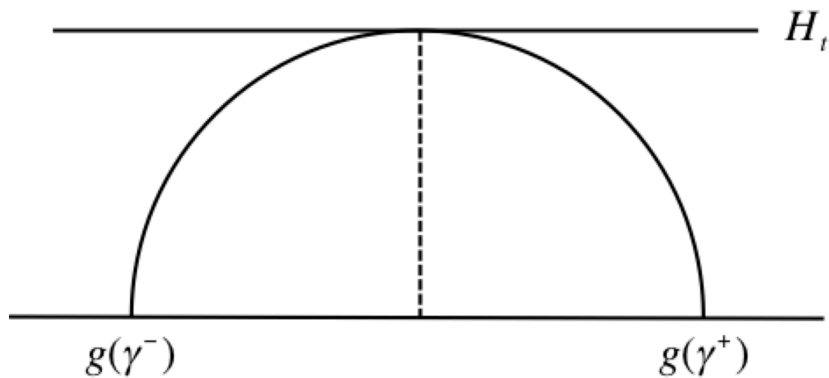


図 19

$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ より, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ で $ad - bc = 1$ を満たすものを用いて

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

と表せる. 今, γ は hyperbolic なので $c \neq 0$ である. このとき, g による共役を考えることで

$$|g(\gamma^-) - g(\gamma^+)| = \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{\sigma(g\gamma g^{-1})}$$

を得る. これより,

$$h(x) = \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2} \min\{\sigma(g\gamma g^{-1}) \mid g \in \Gamma\}$$

とできる.

ここで, $x = \omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ のときを考える. この x は, hyperbolic な等長変換

$$\gamma(z) = \phi\psi = \frac{2z + 1}{z + 1}$$

の不動点である.

g による共役を考えたとき, $g\gamma g^{-1}$ も hyperbolic となるなので

$$\sigma(g\gamma g^{-1}) \neq 0$$

がわかる. また, $\sigma(g\gamma g^{-1}) \in \mathbb{Z}$ より,

$$\sigma(g\gamma g^{-1}) \geq 1$$

が成り立つ. 特に, $\gamma = \phi\psi$ のとき,

$$\sigma(g\gamma g^{-1}) = 1$$

がわかるので, $h(x)$ は $x = \omega$ で最小値をとる. これより,

$$h(\omega) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

が成り立つ.

次に一般の時を考える. $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ より, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に関して

$$h(\gamma x) = h(x)$$

が成り立つ. これより, $x \in [0, 1]$ で考えても差し支えない. 連分数展開を用いることで,

$$x = [n_0; n_1, \dots, n_k]_{k \geq 1}$$

と表せる. このとき, 連分数展開とホロサイクルについて次の補題が成り立つ.

補題 4.10. ([VII, Lemma 3.6.])

$(g_i)_{i \geq 1} \subset \Gamma$ で

$$g_i^{-1}((\infty, x)) \cap H_{\frac{1}{2}}\left(n_i + \frac{1}{n_{i+1} + 1}\right) \neq \emptyset \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(g_i^{-1}) = +\infty$$

を満たすものが存在する.

Proof. [VII, Lemma 3.6.] の証明に基づいて証明を行う。

$$\phi(z) = z + 1, \quad \psi(z) = \frac{z}{z+1}, \quad s(z) = -\frac{1}{z}$$

とする。このとき、

$$s\psi^n s = \phi^{-n}, \quad s\phi^n s = \psi^{-n}$$

が成り立つ。

$k \geq 1$ に対し、

$$k \text{ が偶数のとき, } \gamma_k = \psi^{n_1} \cdots \phi^{n_k}$$

$$k \text{ が奇数のとき, } \gamma_k = \psi^{n_1} \cdots \psi^{n_k}$$

とする。

i が偶数のとき、 $g_i = \gamma_{i-1} = \psi^{n_1} \cdots \psi^{n_{i-1}}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g_i^{-1} &= \gamma_{i-1}^{-1} \\ &= \psi^{-n_1} \cdots \psi^{-n_{i-1}} \\ &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s \end{aligned}$$

を得る。 $z = \infty$ のとき、

$$\begin{aligned} g_i^{-1}(\infty) &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s(\infty) \\ &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1}(0) \\ &= s[n_{i-1}; n_{i-2}, \dots, n_1] \\ &= -[0; n_{i-1}, \dots, n_1] \end{aligned}$$

を得る。また $z = x$ のとき、

$$\begin{aligned} g_i^{-1}(x) &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s(x) \\ &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s([0; n_1, \dots, n_k]_{k \geq 1}) \\ &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s\phi^0 \psi^{n_1} \cdots (\infty) \\ &= s\phi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s s\psi^0 \phi^{-n_1} \psi^{-n_2} \cdots s(\infty) \\ &= s\psi^{-n_i} \cdots s(\infty) \\ &= s\phi^{n_i} \cdots (\infty) \\ &= [n_i; n_{i+1}, \dots, n_k]_{k \geq 1} \end{aligned}$$

を得る。 i が奇数のとき、 $g_i = \gamma_{i-1} s = \psi^{n_1} \cdots \phi^{n_{i-1}} s$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g_i^{-1} &= s\gamma_{i-1}^{-1} \\ &= s\phi^{-n_1} \cdots \psi^{-n_{i-1}} \\ &= \psi^{n_{i-1}} \cdots \phi^{n_1} s \end{aligned}$$

を得る. $z = \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} g_i^{-1}(\infty) &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1} s(\infty) \\ &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1}(0) \\ &= [0; n_{i-1}, \dots, n_1] \end{aligned}$$

を得る. また $z = x$ のとき,

$$\begin{aligned} g_i^{-1}(x) &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1} s(x) \\ &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1} s([0; n_1, \dots, n_k]_{k \geq 1}) \\ &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1} s \phi^0 \psi^{n_1} \dots (\infty) \\ &= \psi^{n_{i-1}} \dots \phi^{n_1} s s \psi^0 \phi^{-n_1} \psi^{-n_2} \dots s(\infty) \\ &= \psi^{-n_i} \dots s(\infty) \\ &= s \psi^{n_i} \dots (\infty) \\ &= s[0; n_i, n_{i+1}, \dots, n_k]_{k \geq 1} \\ &= -[n_i; n_{i+1}, \dots, n_k]_{k \geq 1} \end{aligned}$$

を得る. 以上から i が偶数, 奇数どちらでも

$$\begin{aligned} |g_i^{-1}(\infty) - g_i^{-1}(x)| &= [0; n_{i-1}, \dots, n_1] + [n_i; n_{i+1}, \dots, n_k]_{k \geq 1} \\ &= \frac{1}{n_{i-1} + \frac{1}{\ddots}} + n_i + \frac{1}{n_{i+1} + \frac{1}{\ddots}} \\ &> n_i + \frac{1}{n_{i+1} + \frac{1}{\ddots}} \\ &> n_i + \frac{1}{n_{i+1} + 1} \end{aligned}$$

を得る. これより,

$$\frac{1}{2} |g_i^{-1}(\infty) - g_i^{-1}(x)| > \frac{1}{2} \left(n_i + \frac{1}{n_i + 1} \right)$$

が成り立つ. 図 20 より,

$$g_i^{-1}((\infty, x)) \cap H_{\frac{1}{2}} \left(n_i + \frac{1}{n_{i+1} + 1} \right) \neq \emptyset$$

がわかるので,

$$(\infty, x) \cap g_i \left(H_{\frac{1}{2}} \left(n_i + \frac{1}{n_{i+1} + 1} \right) \right) \neq \emptyset$$

が成り立つ. また, ホロサイクルのうつり方から $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(g_i) = +\infty$ がわかる. \square

定理 4.9 の証明に戻る. (x, ∞) の弧長パラメータを $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$ とする. $(n_i)_{i \geq 1}$ の項で場合分けを考える.

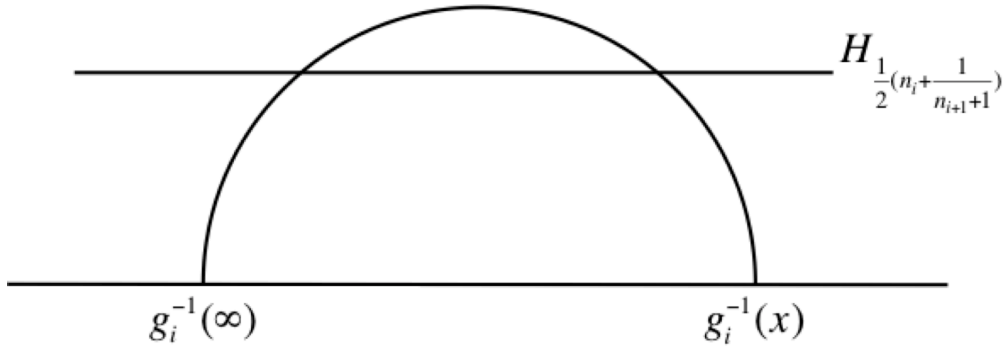


図 20

(case 1) $(n_i)_{i \geq 1}$ が 3 以上の項を無限にもつときを考える. $n_i = 3$ とし, 補題 4.10 を適用することで,

$$g_i^{-1}((\infty, x)) \cap H_{\frac{1}{2}(3 + \frac{1}{n_{i+1}+1})} \neq \emptyset$$

を得る. このとき,

$$\frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{n_{i+1}+1} \right) > \frac{3}{2}$$

である. 図 21 から, $h(x) \geq \frac{3}{2}$ より, $h(x) > \frac{\sqrt{5}}{2}$ がわかる.

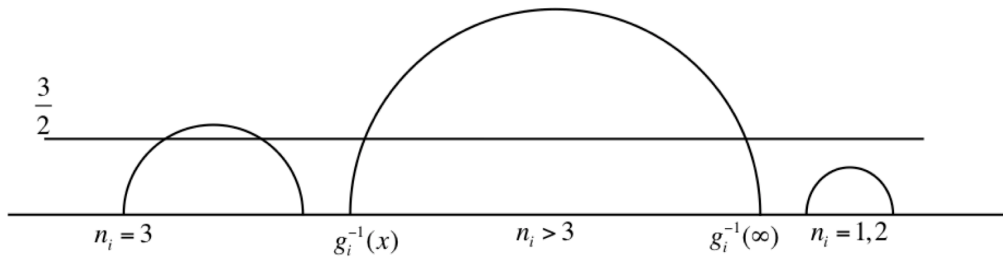


図 21

(case 2) $(n_i)_{i \geq 1}$ が 2 の項を無限に含み, かつ任意の i に対して $1 \leq n_i \leq 2$ が成り立つ場合を考える. ホロサイクル $H_{\frac{1}{2}(n_i + \frac{1}{n_{i+1}+1})}$ に関して,

$$n_i = 1, n_{i+1} = 1 \text{ のとき, } H_{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1+1})} = H_{\frac{3}{4}}$$

$$n_i = 1, n_{i+1} = 2 \text{ のとき, } H_{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2+1})} = H_{\frac{2}{3}}$$

$$n_i = 2, n_{i+1} = 1 \text{ のとき, } H_{\frac{1}{2}(2 + \frac{1}{1+1})} = H_{\frac{5}{4}}$$

$$n_i = 2, n_{i+1} = 2 \text{ のとき, } H_{\frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2+1})} = H_{\frac{7}{6}}$$

となる. 補題 4.10 を適用することで, (case 1) と同様に $h(x) > \frac{\sqrt{5}}{2}$ がわかる.

(case 3) $(n_i)_{i \geq 1}$ の全ての項が 1 の場合を考える。このとき、

$$x = [0; 1, 1, \dots] = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

が知られている。これより、

$$h(\phi(x)) = h(\omega) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。 □

最後に、無理数 x の連分数展開と不良近似を関係づける。 x が不良近似とは $\nu(x) > 0$ を満たすときであった。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 4.11. ([VII, Theorem 3.4.])

x を無理数とする。以下は同値。

- (i) x の連分数展開 $[n_0; n_1, n_2, \dots]$ において、係数 $(n_i)_{i \geq 0}$ は上に有界。
- (ii) x は不良近似。

Proof. [p,159] の証明に基づいて証明を行う。

定理 4.8 より、定理の主張は次の (i)', (ii)' が同値であることと書き換えられる。

- (i)' x の連分数展開 $[n_0; n_1, n_2, \dots]$ において、係数 $(n_i)_{i \geq 0}$ は上に有界。
- (ii)' $\pi([z, x])$ は有界。

not(i)' \Rightarrow not(ii)' を示す。 $(n_i)_{i \geq 1}$ が非有界と仮定する。このとき、任意の $t > 0$ に対し、 $(n_{i_k})_{k \geq 1}$ で $n_{i_k} \geq 2t$ を満たすものをとる。 (∞, x) の弧長パラメータを $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$ とする。補題 4.7, 補題 4.10 より、

$$\frac{1}{2} \left(n_{i_k} + \frac{1}{n_{i_{k+1}} + 1} \right) \geq \frac{1}{2} \left(2t + \frac{1}{n_{i_{k+1}} + 1} \right) > t$$

が成り立つので、任意の t に関して $h(x) > t$ が成り立つ。よって x は幾何的不良近似。

not(ii)' \Rightarrow not(i)' を示す。 $\pi([i, x])$ が非有界と仮定する。任意の整数 $k \geq 2$ に対し $S - \pi(H_k^+)$ は有界であるから、 $\pi([i, x])$ は尖点方向に無限にのびていることがわかる。それゆえ、 $K \geq 2$ で、任意の $k \geq K$ に関して $\pi([i, x]) \cap \pi(H_k) \neq \emptyset$ が成り立つものがとれる。この性質を \mathbb{H} 上で考える。このとき、 $(g_k)_{k \geq K} \subset \Gamma$ で

$$g_k^{-1}([i, x]) \cap H_k \neq \emptyset$$

を満たすものがとれる。いま、 g_k は整数 a, b, c, d で $ad - bc = 1$ を満たすものを用いて $g_k(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ と表せる。これより

$$g_k^{-1}(i) = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2} + \frac{i}{a^2 + c^2}$$

と計算できることから、

$$\text{Im}(g_k^{-1}(i)) \leq 1$$

がわかる. このとき, 図 22 のように $g_k^{-1}([i, x])$ はホロサイクル H_k と 2 点で交わる. これより,

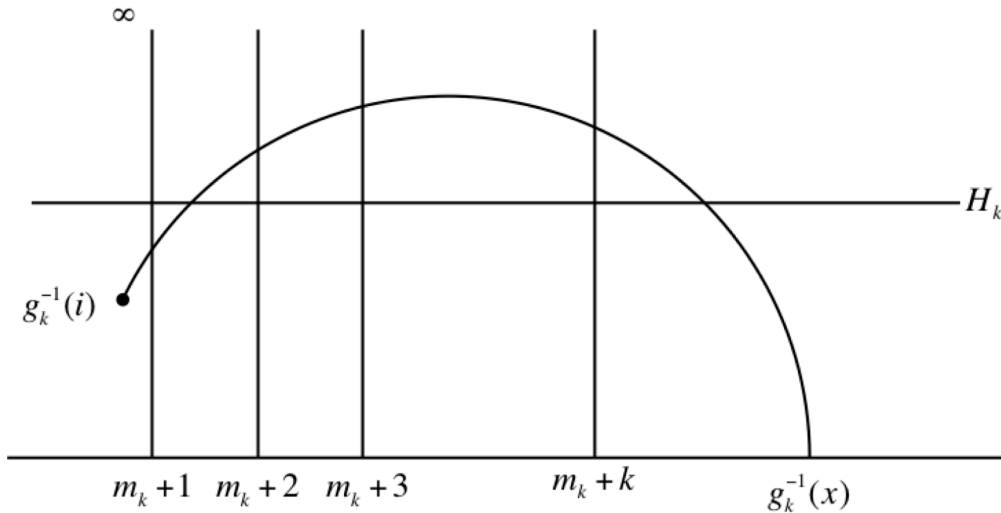


図 22

$$|\operatorname{Re}(g_k^{-1}(i)) - g_k^{-1}(x)| > k$$

が成り立つ. このことから, $g_k^{-1}([i, x])$ は少なくとも k 本の測地線

$$((m_k + 1), \infty), ((m_k + 2), \infty), \dots, ((m_k + k), \infty)$$

と交わる. よって, $[i, x]$ は連続した k 本のファレイ直線

$$g_k \phi^{m_k+1}(L), g_k \phi^{m_k+2}(L) g_k, \dots, \phi^{m_k+k}(L)$$

と交わることがわかる. 連分数展開の構成から任意の $k \geq K$ に対し $n_i \geq k$ がとれるので, $(n_i)_{i \geq 0}$ は非有界. \square

例 3. Larange の定理 ([3], 第 3 章, 定理 3.3) より, 整係数二次方程式の実根となる無理数は循環連分数に展開されることが知られている. よって x が整係数二次方程式の実根となる無理数のとき, x の連分数展開の係数は上に有界なので x は幾何的不良近似である.

例 4. ネピア数 e は

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$$

と連分数展開されることが知られている. ([5], 第 1 章, 定理 11)

e の係数は

$$n_0 = 2, n_{3m-2} = 1, n_{3m-1} = 2m, n_{3m} = 1 \quad (m \geq 1)$$

と表せるので, 係数 $(n_i)_{i \geq 0}$ は上に非有界. よって幾何的不良近似でない.

参考文献

- [1] Françoise Dal'Bo, Geodesic and Horocyclic Trajectories, Springer-Verlag London, 2011
- [2] 深谷賢治, 双曲幾何, 岩波書店, 1996
- [3] 高木貞治, 初等整数論講義 第2版, 共立出版, 1971
- [4] Peter J. Nicholls, The Ergodic Theory of Discrete Groups, Cambridge University Press, 1989
- [5] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版, 1999