

双曲幾何学にまつわる Klein 群論と 極限集合の Hausdorff 次元について

桂 悠祐

2010 年 5 月 29 日

概要

この書き物は、主に Nicholls [10] の要約で、私が 2009 年度に書いた修士論文を少し修正したものである。内容としては、主に Sullivan が 1980 年代に繰り広げた Klein 群論に関する仕事について取り扱っている。また、非専門家の方でも読めるように、双曲幾何の初歩から始まり、途中で必要な知識を補いつつ、要点を押さえながら書いた。この書き物を通じて、少しでも読者の皆様が何かを得ていただければ、私としては幸いである。最後に、修士論文の執筆の際には、系健太郎准教授 (名古屋大学) をはじめとする教員の方々や、現在博士後期課程の学生である足立真訓氏 (名古屋大学)、棕野純一氏 (名古屋大学) など多くの仲間に色々とアドバイスをいただいた。この場を借りてお礼申し上げたい。

序文

この論文は、少人数クラスの教科書 Nicholls [10] の要約を記述した第 I 部と、McMullen の論文 [8] に書かれている固有値アルゴリズムの紹介及びそのアルゴリズムを用いた計算結果を記述した第 II 部から構成されている。私の計算結果が非専門家の方々にも分かるように、第 I 部に双曲幾何学に関する基本事項を Nicholls [10] に沿ってまとめ、第 II 部にアルゴリズムの紹介と私の計算結果を記述した。

双曲幾何学とは、断面曲率がいたるところ -1 である連結な Riemann 多様体まつわる幾何学である。このような多様体を双曲多様体という。これには、Klein 群と呼ばれる群が大きく関わっている。なお、 d 次元 Klein 群とは実 $d + 1$ 次元単位球に Poincaré 計量を入れた双曲幾何単位球モデル \mathbb{B}^{d+1} の向きを保つ自己等長変換群 $\text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の離散部分群のことである。歴史上特に、 $d = 1$ のときを Fuchs 群といい、 $d = 2$ のときを単に Klein 群という。 d 次元 Klein 群の定義には離散性の条件のみを課したが、この条件だけで \mathbb{B}^{d+1} に真性不連続に作用することが分かる。従って、 d 次元 Klein 群 Γ が \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用するとき、 \mathbb{B}^{d+1} を Klein 群 Γ の作用で割った商空間 $M_\Gamma := \mathbb{B}^{d+1}/\Gamma$ には多様体の構造が入り、特に双曲多様体となる。そして、 M_Γ の基本群 $\pi_1(M_\Gamma)$ は Klein 群 Γ と群同型となる。逆に、 M を $d + 1$ 次元双曲多様体とするとその普遍被覆として \mathbb{B}^{d+1} が取れ、 M の基本群 $\pi_1(M)$ と群同型な被覆変換群 Γ は \mathbb{B}^{d+1} に作用する $\text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の離散部分群である。この関係によって、双曲多様体と Klein 群が対応している。

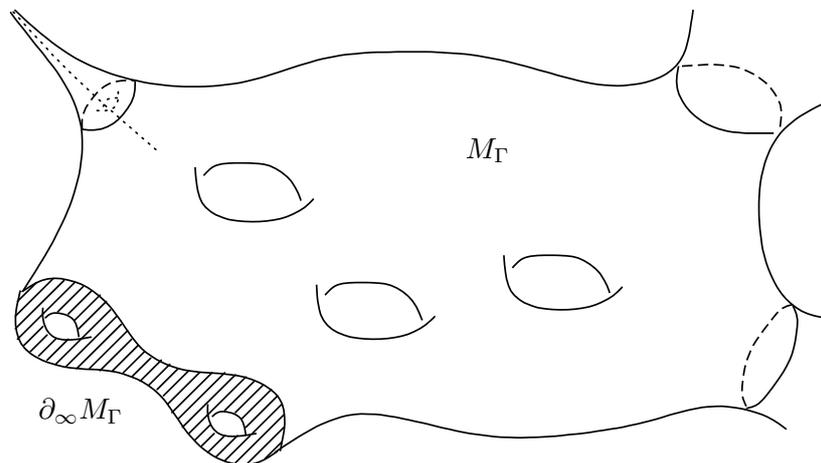


図 1 双曲多様体 M_Γ とその理想境界 $\partial_\infty M_\Gamma$ の想像図

なお、 $\text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ は Euclid 空間を 1 点コンパクト化した空間 $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の Möbius 変換で \mathbb{B}^{d+1} と各点で向きを保つものなす群 $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と一致する点は重要であり、この論文では Möbius 変換から Klein 群にアプローチすることを試みた。このアプローチは Beardon [2] をはじめ多くの書物で採用されているが、初等的な計算で理解できるように私の視点でまとめ直した。また、双曲幾

何は Riemann 幾何の特殊な場合を扱っているため, Riemann 幾何の言葉を多用してなるべく一般論とのつながりが分かるようにまとめた.

第 I 部では, 少人数クラスで勉強した Nicholls [10] の内容を中心に d 次元 Klein 群の力学系的側面を考察する. その際, 極限集合と呼ばれる単位球面 \mathbb{S}^d の部分集合を観察する. d 次元 Klein 群 Γ に対する極限集合とは $0 \in \mathbb{B}^{d+1}$ の Γ -軌道 $\Gamma(0)$ の Euclid 位相に関する集積点集合のことであり, $\Lambda(\Gamma)$ と書く. これは, Γ が \mathbb{B}^{d+1} に真性不連続に作用することから \mathbb{S}^d の部分集合となることが分かる. 極限集合は \mathbb{S}^d 上に複雑な模様を描くので, その Hausdorff 次元を考察することは興味深いことである. なお, 集合の Hausdorff 次元は空間に対する厚みや複雑さを表す量である. しかし, 極限集合の Hausdorff 次元を考察することは一般には難しく, この論文ではその部分集合である円錐型極限集合に焦点を当てる. 特に, Klein 群 Γ にまつわる 3 つの指数である, 円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$, 収束指数 $\delta(\Gamma)$, 臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ の間の関係を中心に議論を展開していく. 第 I 部の主な目標は, 以下の 3 つである.

目標 1. Poisson 核に対する様々な意味づけ.

目標 2. 理想境界 $\mathbb{S}_{\infty}^d = \partial_{\infty} \mathbb{B}^{d+1} = \mathbb{S}^d$ 上の共形測度に対する様々な意味づけ.

目標 3. 次の主定理を示すこと.

主定理. 幾何学的有限 Klein 群に対して $\Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$ が成り立つ.

以下, 各章で書かれている重要事項を簡潔に述べる.

第 1 章では, Euclid 幾何と双曲幾何の根本的な違いを考察すると共に, Möbius 変換, Möbius 変換の拡大率, Poisson 核などの概念を導入し, その性質を考察する. 特に, Möbius 変換の定義と, 単位球と向きを保つ Möbius 変換が Poincaré の双曲幾何単位球モデルの等長変換になることに重点を置く.

第 2 章では, まず Klein 群, Klein 群の極限集合と不連続領域, Klein 群の基本領域, Poincaré 級数, Klein 群の収束指数などの概念を導入し, その性質を考察すると共にいくつかの Klein 群の分類法を説明する. その中でも商双曲多様体の幾何学的性質を反映した, 体積有限, 凸コンパクト, 幾何学的有限の 3 つの格付けによる分類は, 以下の議論で核となる分類法である. 次に, 理想境界 \mathbb{S}_{∞}^d 上の点を Klein 群 Γ を用いて分類する. 具体的には, \mathbb{S}_{∞}^d の部分集合となる極限集合の元を, 円錐型極限点, 接球型極限点の 2 つに格付けし, Klein 群の軌道の部分点列や双曲球の影及び Poisson 核によってそれらの特徴付けることと, Dirichlet 集合を導入して理想境界 \mathbb{S}_{∞}^d は Lebesgue 測度で見ると接球型極限集合と Dirichlet 集合によってほとんど覆われていることを見る.

第 3 章では, 測度論の一般論を復習すると共に, Klein 群の極限集合を解析する上で必要な Hausdorff 測度及び理想境界上の共形測度の導入, そして Klein 群の臨界次元の導入を行う. 理想境界上の共形測度に関しては, その性質を具体的に見ていく. まず, Möbius 変換の拡大率や単位球モデルに対する双曲的 Laplace–Beltrami 作用素の固有関数とみなせる Poisson 核を用いて導入の動機付けをした後, 実際に理想境界上の共形測度である Patterson–Sullivan 測度の構成を行う. そ

して、共形測度の Klein 群に対するエルゴード性に関連した諸性質に重点を置いて考察する。

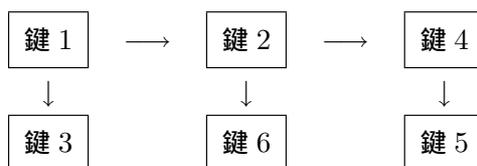
第 4 章では、第 1 章と第 3 章で導入した Klein 群の 3 つの指数である、収束指数 $\delta(\Gamma)$ 、円錐型極限集合の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ 、臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ の間の関係を導く。具体的にこの章の最終目標は、不等式

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma) \quad (0.1)$$

を示すことである。その際に鍵となる言葉は 6 つあり、本文に登場する順序に並べると次のようになる。

- 鍵 1 : Klein 群 Γ に対する Γ -不変測度の存在.
- 鍵 2 : 影の補題.
- 鍵 3 : 臨界次元の上からの評価.
- 鍵 4 : 軌道数え上げ関数の上からの評価.
- 鍵 5 : 収束指数の上からの評価.
- 鍵 6 : 円錐型極限集合の Hausdorff 測度の上からの評価.

これら鍵となる言葉の関係について考察するときの流れ図は次のようになる。



なお、鍵 2 は鍵 5 や鍵 6 を得るための道具であり、それぞれの主張に対応する定理は次のようになる。

主張	(鍵 1) \Rightarrow (鍵 4)	(鍵 4) \Rightarrow (鍵 5)	(鍵 1) \Rightarrow (鍵 6)
対応する定理	定理 4.12	定理 4.11	定理 4.14

そして、式 (0.1) が成り立つことを見る。

第 5 章では、Klein 群の中でも扱いやすい凸コンパクト Klein 群の持つ性質を見ていく。特にこの章では、収束指数と円錐型極限集合の Hausdorff 次元が一致することを証明することに重点を置く。第 4 章で一般の Klein 群 Γ に対して $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ が成り立つことを見るので、この章では特に凸コンパクト Klein 群 Γ に対して、不等式

$$\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \quad (0.2)$$

が成り立つことを見る。なお、現在では一般の Klein 群 Γ に対して

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma) \quad (0.3)$$

が成り立つことが証明されているが、式 (0.2) を証明することが難しく、ここでは凸コンパクト Klein 群についてこの事実を証明するに留める。

第 6 章では, 単位球 \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用する Klein 群と商双曲多様体の間の関係について考察する. その際, Klein 群 Γ と商双曲多様体 M_Γ をつなげる仲介役として M_Γ の単位接束 T^1M_Γ 上の測地流を導入すると共に, 測地流の持つエルゴード性にまつわる事項を紹介する. 流れのエルゴード性に関しては, 一般の Borel 可測空間上の流れに対して話を進めた. また, Γ が幾何学的有限のとき, 測地流は Patterson–Sullivan 測度から導かれる単位接束上の測度に関してエルゴード性を持つことを簡単に紹介し, 測地流のエルゴード性周辺の様々な性質を見る. 単位接束上の測地流は強力な道具でもあり, 円錐型極限集合の Hausdorff 次元を評価する際にも威力を発揮する. 最後に測地流を用いて, 幾何学的有限 Klein 群に対して式 (0.2) が成り立つことを証明し, 第 I の最終目標を達成する.

第 II 部では, McMullen の論文 [8] で述べられている極限集合の Hausdorff 次元の計算アルゴリズムについて, その解説とその適用例の計算について記述した. 第 II 部の主な目標は, 以下の 2 つである.

目標 1. McMullen [8] の論文紹介.

目標 2. McMullen の用いたアルゴリズムによる, 私の計算結果.

以下, 各章で書かれている重要事項を簡潔に述べる.

第 7 章は, 主に McMullen [8] の論文紹介である. この論文では, d 次元単位球面 \mathbb{S}^d 上の共形力学系とその不変測度に対して, 不変測度の次元の近似計算を与える, Markov 分割を用いた固有値アルゴリズムが紹介されている. このアルゴリズムは Klein 群の極限集合や複素力学系の Julia 集合の Hausdorff 次元を計算することにつながる. また, McMullen 自身もこのアルゴリズムを用いて実際に特殊な対称性を持つ Fuchs 群の極限集合の Hausdorff 次元やある 2 次多項式の Julia 集合の Hausdorff 次元を近似値として計算している. この章では, 固有値アルゴリズムと McMullen の構成した Fuchs 群の極限集合として現れる Cantor 集合の Hausdorff 次元について主に解説する.

第 8 章では, 私がこの固有値アルゴリズムを用いて計算した様々な高次元 Klein 群の極限集合の Hausdorff 次元の計算結果を紹介する. 具体的に群を構成して計算したものは 3 つあり,

- McMullen の構成した特殊な対称性を持つ Fuchs 群の高次元化.
- ある対称性を持つ古典的 Schottky 群によって \mathbb{S}^d 上に構成される Cantor 集合の Hausdorff 次元の計算例.
- 先の古典的 Schottky 群の対称性を弱めた群によって $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に構成される Cantor 集合の Hausdorff 次元の計算例.

である. 1 つ目は, McMullen の構成した Fuchs 群を高次元に一般化した Klein 群の極限集合として実現される Cantor 集合の Hausdorff 次元を計算したものである. 私は高次元における計算例をほとんど見たことがなかったので, 自分の手で計算してみた. なお後になって気づいたことであるが, 別の例に関して McMullen [8, p.706] に高次元で計算されたものが記述されている. 2 つ目は, 古典的 Schottky 群に対する計算結果である. McMullen の例は指数 2 の部分群を考えることによ

り, はじめて古典的 Schottky 群と見なすことができる. そこで, 私は直接古典的 Schottky 群を構成して, McMullen の用いた議論を適用して計算を試みた. なお, 指数 2 の部分群を考えることを回避することで, 商双曲多様体の様子が考察しやすくなるという利点がある. 3 つ目は, 2 つ目の群においてどこまで対称性を崩せるかという疑問の下で得た計算結果である. これは, 2 つ目の Klein 群に変数を新たに導入し, 商双曲多様体を変形させることを視野に入れて計算したものである.

追記

後で修士論文を見直した際に, いくつか誤植箇所が見つかった. しかしながら, 筆者の諸事情により未だ直せていない箇所も多い. その点ご留意いただきたい. また, 時間が作れば, ぼちぼち直しを行ったり, 書き加えていきたいと思う.

目次

第 I 部	Nicholls [10] の要約	8
1	双曲幾何学の準備	8
1.1	Euclid 幾何	8
1.2	Poincaré の双曲幾何モデル	9
1.3	Möbius 変換の定義とその性質	12
1.4	Möbius 変換と双曲計量	15
2	Klein 群とその極限集合	18
2.1	Klein 群とその極限集合	18
2.2	Klein 群の分類	21
2.3	理想境界 S_∞ 上の点の分類	28
3	極限集合を測る測度	33
3.1	測度論の準備	33
3.2	距離空間上の Hausdorff 測度と Borel 集合の Hausdorff 次元	37
3.3	理想境界上の共形測度	38
3.4	共形測度と双曲的 Laplace–Beltrami 作用素に対する固有関数	41
3.5	発散型 Klein 群の Patterson–Sullivan 測度	43
3.6	理想境界 S_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度の性質	48
4	Klein 群に対する各種指数の関係	52
4.1	影の補題と発散型 Klein 群	52
4.2	軌道数え上げ関数の導入とその振る舞い	55
4.3	収束指数と臨界次元の関係	56
4.4	円錐型極限集合の Hausdorff 次元と収束指数の関係	59
5	凸コンパクトな Klein 群	61
5.1	凸コンパクト Klein 群の持つ性質	61
5.2	収束指数と円錐型極限集合の Hausdorff 次元の関係	62
6	幾何的有限な Klein 群	64
6.1	Borel 測度空間上の流れに対するエルゴード理論	64
6.2	単位接束 T^1M_Γ 上の測地流	65
6.3	体積有限性と幾何的有限 Klein 群	67

6.4	収束指数と円錐型極限集合の Hausdorff 次元の関係	71
第 II 部 McMullen の論文 [8] の紹介と Cantor 集合の Hausdorff 次元		75
7	McMullen の論文紹介	75
7.1	d 次元単位球面 \mathbb{S}^d 上の共形力学系と Markov 分割	75
7.2	Markov 分割を用いた固有値アルゴリズム	77
8	\mathbb{S}^d 上に構成される Cantor 集合の Hausdorff 次元	82
8.1	$(0, d + 2)$ 型広義古典的 Schottky 群によって \mathbb{S}^d 上に構成される Cantor 集合 . . .	82
8.2	Cantor 集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ の Hausdorff 次元の計算	84
8.3	\mathbb{S}^1 上に構成される Cantor 集合とその Hausdorff 次元の計算	86
8.4	G_θ^1 の一般化 ~ 高次元化 ~	89
8.5	$G_{2,2}^r$ の一般化 ~ 長方形 ~	90

第 I 部

Nicholls [10] の要約

1 双曲幾何学の準備

この章では, Euclid 幾何の復習をしたのち, 2 つの Poincaré 双曲幾何モデル \mathbb{B}^{d+1} , \mathbb{H}^{d+1} と Möbius 変換の導入を主に行う. そして, それらが密接に関係していることを見る. 特に, \mathbb{B}^{d+1} を保ち $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ の各点で向きを保つような Möbius 変換 (以後, 単に \mathbb{B}^{d+1} と向きを保つ Möbius 変換と呼ぶ) が \mathbb{B}^{d+1} の等長変換になることに焦点を当てる.

1.1 Euclid 幾何

まずは, 記号の準備も兼ねて, 昔から知られていた Euclid 幾何の復習を行う.

定義 1.1 (Euclid 空間).

$d+1$ 次元実線型空間 \mathbb{R}^{d+1} とその上の Riemann 計量 $g_{\mathbb{R}}$ を

$$\mathbb{R}^{d+1} := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_{\mathbb{R}} := \|dx\|^2 := \sum_{i=1}^{d+1} dx_i \otimes dx_i$$

で定める. この Riemann 多様体 $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathbb{R}})$ を (または単に \mathbb{R}^{d+1} を) $d+1$ 次元 Euclid 空間といい, Riemann 計量 $g_{\mathbb{R}}$ を Euclid 計量という.

Euclid 計量 $g_{\mathbb{R}}$ は, Euclid 内積

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{d+1} x_i y_i, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

を Riemann 幾何の言葉で記述したものである. Euclid 内積は Euclid ノルム $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ を導き, これから 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ 間の距離 $\|x - y\|$ が定まる. そして, これから定まる通常の位相を Euclid 位相という. このように, Riemann 計量は Riemann 多様体上の距離を定める. しかしこれだけでなく, M の部分集合 E の体積も自然に定まる. 一般に, 向き付け可能 $d+1$ 次元 Riemann 多様体 (M, g) に対して M の部分集合 E の体積は, M 上の体積要素 dV_g を E 上で積分することによって定められる. なお, M 上の局所座標を $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ とすると, 体積要素 dV_g は局所的に

$$dV_g := \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{d+1}, \quad g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

と書ける. 従って, \mathbb{R}^{d+1} 上にも Euclid 計量 $g_{\mathbb{R}}$ から定まる標準的な体積要素 dV が構成でき, それは古典的な初等幾何学においてよく用いられてきたものである.

定義 1.2 (\mathbb{R}^{d+1} 上の体積要素).

\mathbb{R}^{d+1} 上の体積要素 dV を

$$dV := dx_1 dx_2 \cdots dx_{d+1} := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{d+1}$$

で定め, Riemann 可積分領域 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を dV で測った体積を $\text{Vol}(E)$ と書く.

以後, dV は \mathbb{R}^{d+1} 上の Lebesgue 測度と混同して用いる. 例えば, \mathbb{R}^{d+1} 上の球の体積は, 次のように計算できる.

例 1.3 (球の体積).

中心が $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ で半径が $r > 0$ の球を $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x - a\| < r\}$ で表す. このとき, 体積 $\text{Vol}[B(0, r)]$ は

$$\text{Vol}[B(0, r)] = \text{Area}(\mathbb{S}^d) \int_0^r t^d dt = \frac{\text{Area}(\mathbb{S}^d)}{d+1} r^{d+1}$$

と書ける. 但し, $\text{Area}(\mathbb{S}^d)$ は体積要素 dV を d 次元単位球面 $\mathbb{S}^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$ に制限した面積要素 dA で \mathbb{S}^d を測ったときの面積を表す. なお, dA も \mathbb{S}^d 上の Lebesgue 測度と混同して用いる.

これは, $d+1$ 次元 Euclid 空間上の球の体積は半径 r に対して r^d の割合で増加することを示している. この節の終わりとして, Euclid 幾何の性質をまとめておく.

定理 1.4 (Euclid 幾何の性質).

- (E1) $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathbb{R}})$ 上の測地線は直線である. 但し, 測地線とは局所的に最短な曲線のことである.
- (E2) \mathbb{R}^{d+1} 上の任意の 2 点 p, q に対し, p と q を結ぶ測地線が存在する. 即ち, $(\mathbb{R}^{d+1}, g_{\mathbb{R}})$ は完備 Riemann 多様体である.
- (E3) 上のような測地線は p, q に対し, 唯 1 つである.
- (E4) $d = 1$ のときを考える. 直線 l に対して p を l 上にない \mathbb{R}^2 上の点とする. このとき, p を通る直線 l と並行, 即ち, 直線 l と交わらないものが唯 1 つ存在する.

Euclid 幾何において最も特徴的なことは, Euclid 第 5 公準である (E4) の条件をみたすことである.

1.2 Poincaré の双曲幾何モデル

この節では, “Euclid 第 5 公準” をみたさない幾何モデルである, Poincaré の双曲幾何モデルを 2 つ導入する.

まずは, $d+1$ 次元単位球 $\mathbb{B}^{d+1} := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| < 1\}$ 上に双曲構造を構成する.

定義 1.5 (双曲幾何単位球モデル).

$d + 1$ 次元単位球 \mathbb{B}^{d+1} 上に Riemann 計量 $g_{\mathbb{B}}$ を

$$g_{\mathbb{B}} := \rho_{\mathbb{B}}^2 \|dx\|^2, \quad \rho_{\mathbb{B}}(x) := \frac{2}{1 - \|x\|^2} \quad (x \in \mathbb{B}^{d+1})$$

で定める. この $d + 1$ 次元 Riemann 多様体 $(\mathbb{B}^{d+1}, \rho_{\mathbb{B}})$ を (または単に \mathbb{B}^{d+1} を) 双曲幾何単位球モデルという. また, $g_{\mathbb{B}}$ から導かれる距離を $\rho_{\mathbb{B}}$ と書き, 双曲距離という. 更に, この距離から定まる位相を双曲位相という.

双曲計量は Euclid 計量と \mathbb{B}^{d+1} 上共形的なので, Euclid 位相と双曲位相は位相として同値である. \mathbb{B}^{d+1} の Euclid 位相に関する境界 $\partial\mathbb{B}^{d+1}$ は, d 次元単位球面 \mathbb{S}^d となる. \mathbb{S}^d は \mathbb{B}^{d+1} 上の点から双曲距離に関して無限遠に位置しているため, \mathbb{S}_{∞}^d と書くこともある. なお, 無限遠境界 $\partial_{\infty}\mathbb{B}^{d+1} = \mathbb{S}_{\infty}^d$ のように, 内側の空間に備えられた距離に関して “無限遠” にある “境界” のことを, 理想境界と呼ぶこともある. また, Euclid 空間と同様にこの計量に対する体積要素を書き下すと, 次のようになる.

定義 1.6 (\mathbb{B}^{d+1} 上の体積要素).

\mathbb{B}^{d+1} 上の体積要素 dV_h を

$$dV_h := \rho_{\mathbb{B}}^{d+1} dV$$

で定め, 可積分領域 $E \subset \mathbb{B}^{d+1}$ を dV_h で測った体積を $V_h(E)$ と書く.

Euclid 空間と同様に, 球の体積を計算してみると, 次のようになる.

例 1.7 (双曲球の体積).

中心が $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ で双曲半径が $r > 0$ の双曲球を $\Delta(a, r) := \{x \in \mathbb{B}^{d+1} \mid \rho_{\mathbb{B}}(x, a) < r\}$ で表す. このとき, 体積 $V_h[\Delta(0, r)]$ は

$$V_h[\Delta(0, r)] = \text{Area}(\mathbb{S}^d) \int_0^r \sinh^d t \, dt$$

と書ける.

これは, Euclid 空間のものとは大きく異なり, 双曲球の体積はその半径 r に対しておおよそ e^{rd} の割合で増加することを示している.

次に, $d + 1$ 次元上半空間 $\mathbb{H}^{d+1} := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_{d+1} > 0\}$ 上に双曲構造を構成する.

定義 1.8 (双曲幾何上半空間モデル).

$d + 1$ 次元上半空間 \mathbb{H}^{d+1} 上に Riemann 計量 $\rho_{\mathbb{H}}$ を

$$g_{\mathbb{H}} := \rho_{\mathbb{H}}^2 \|dx\|^2, \quad \rho_{\mathbb{H}}(x) := \frac{1}{x_{d+1}} \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{H}^{d+1})$$

で定める. この $d + 1$ 次元 Riemann 多様体 $(\mathbb{H}^{d+1}, \rho_{\mathbb{H}})$ を (または単に \mathbb{H}^{d+1} を) 双曲幾何上半空間モデルという. また, $g_{\mathbb{H}}$ から導かれる距離を $\rho_{\mathbb{H}}$ と書く.

このとき, \mathbb{H}^{d+1} の無限遠境界 $\partial_{\infty} \mathbb{H}^{d+1}$ は Euclid 空間を 1 点コンパクト化した空間 $\widehat{\mathbb{R}}^d := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ と同一視できる. 単位球モデルと同様に, $\widehat{\mathbb{R}}_{\infty}^d$ と書くこともある. 先と同様にこの計量に対する体積要素を書き下すと, 次のようになる.

定義 1.9 (\mathbb{H}^{d+1} 上の体積要素).

\mathbb{H}^{d+1} 上の体積要素 dV_h を

$$dV_h := \rho_{\mathbb{H}}^{d+1} dV$$

で定め, \mathbb{B}^{d+1} のときと同様に, 可積分領域 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を dV_h で測った体積を $V_h(E)$ と書く.

これまでに 2 つの双曲幾何モデルを構築したが, 実際にこれらは Riemann 多様体として同じものである. それは, 次で定義される \mathbb{B}^{d+1} から \mathbb{H}^{d+1} への Cayley 変換

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) = \left(\frac{2x_1}{\|e_{d+1} - x\|^2}, \dots, \frac{2x_d}{\|e_{d+1} - x\|^2}, p(x, e_{d+1}) \right)$$

が等長写像となることから分かる. 但し, $e_{d+1} \in \mathbb{R}^{d+1}$ は x_{d+1} 方向の単位ベクトルであり, p は

$$p(x, \xi) := \frac{1 - \|x\|^2}{\|\xi - x\|^2}, \quad x \in \mathbb{B}^{d+1}, \xi \in \mathbb{S}_{\infty}^d$$

で定められる *Poisson* 核である.

注意 1.10 (双曲計量と体積要素). Riemann 計量 $g_{\mathbb{B}}, g_{\mathbb{H}}$ を双曲計量, 距離 $\rho_{\mathbb{B}}, \rho_{\mathbb{H}}$ を双曲距離と呼ぶこともある. 以後断らない限り, 双曲距離 $\rho_{\mathbb{B}}, \rho_{\mathbb{H}}$ を単に ρ と書く. また, 体積は主に \mathbb{B}^{d+1} で測り, 体積要素 $dV_h, V_h(E)$ は \mathbb{B}^{d+1} と \mathbb{H}^{d+1} で同じ記号を用いる.

この節の終わりとして, これらの基本的な性質を, 次に列挙する.

定理 1.11 (双曲幾何モデルの性質).

- (H1) $(\mathbb{B}^{d+1}, g_{\mathbb{B}})$ 上の測地線は \mathbb{S}_{∞}^d と直交する円弧か直径である. また, $(\mathbb{H}^{d+1}, g_{\mathbb{H}})$ 上の測地線は $\widehat{\mathbb{R}}_{\infty}^d$ と直交する半円か半直線である.
- (H2) \mathbb{B}^{d+1} あるいは \mathbb{H}^{d+1} 上の任意の 2 点 p, q に対し, p と q を結ぶ測地線が存在する. 即ち, $(\mathbb{B}^{d+1}, g_{\mathbb{B}}), (\mathbb{H}^{d+1}, g_{\mathbb{H}})$ は完備 Riemann 多様体である.
- (H3) 上のような測地線は p, q に対し, 唯一つである.
- (H4) $d = 1$ のときを考える. 測地線 l に対して p を l 上でない \mathbb{B}^2 の点とする. このとき, p を通る測地線で l と並行, 即ち, 測地線 l と交わらないものは非可算無限個存在する (図 3).

Euclid 幾何とは異なり, 双曲幾何は Euclid 第 5 公準をみたさない幾何モデルの 1 つとなっている (図 2, 3). 双曲幾何モデルの場合, 測地線の形がそのことを明確に表している. この Riemann 多様体 $(\mathbb{B}^{d+1}, g_{\mathbb{B}}), (\mathbb{H}^{d+1}, g_{\mathbb{H}})$ 上の測地線を, 双曲測地線と呼ぶこともある.

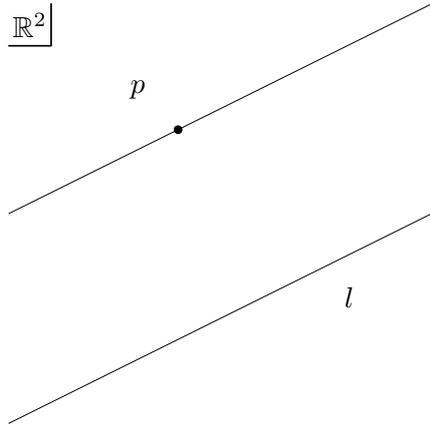


図2 Euclid 幾何 (平面幾何)

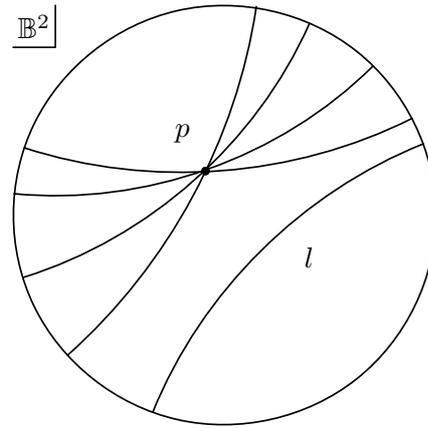


図3 双曲幾何単位球モデル

1.3 Möbius 変換の定義とその性質

この節では, Möbius 変換を定義してその性質を考察する. この内容に関しては, Ahlfors [1] や Beardon [2] を参考にまとめた.

Möbius 変換を定義するにあたり, $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} = \mathbb{R}^{d+1} \cup \{\infty\}$ 上の自己同相写像の中で, 超球面による反転や超平面による鏡映を考える. まず, 超球面による反転を定める. d 次元単位球面 \mathbb{S}^d に関する反転 J を

$$J(x) := x^* := \begin{cases} x/\|x\|^2 & (x \neq 0, \infty) \\ \infty & (x = 0) \\ 0 & (x = \infty) \end{cases}$$

と定める. そして, 中心 $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ 半径 $r > 0$ の d 次元超球面 $S(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x - a\| = r\}$ に関する反転 $R_{a,r}^{(s)}$ を

$$R_{a,r}^{(s)}(x) := \begin{cases} r^2(x - a)^* + a & (x \neq a, \infty) \\ \infty & (x = a) \\ a & (x = \infty) \end{cases}$$

と定める (図 4). 次に, 超平面による鏡映を定める. $t \in \mathbb{R}$ に対して $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ を法線ベクトルに持つ d 次元超平面 $H(a, t) := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x \cdot a = t\} \cup \{\infty\}$ に関する鏡映 $R_{a,t}^{(h)}$ を

$$R_{a,t}^{(h)}(x) := \begin{cases} x + ca & (x \neq \infty) \\ \infty & (x = \infty) \end{cases}$$

と定める (図 5). 但し, $c \in \mathbb{R}$ は x と $R_{a,t}^{(h)}(x)$ の中点が $H(a, t)$ 上の点となるように定める. 具体的に, c は $c = (-2x \cdot a + 2t)/\|a^*\|^2$ と書ける. つまり, $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対して

$$R_{a,t}^{(h)}(x) = x - 2(x \cdot a - t)a^*$$

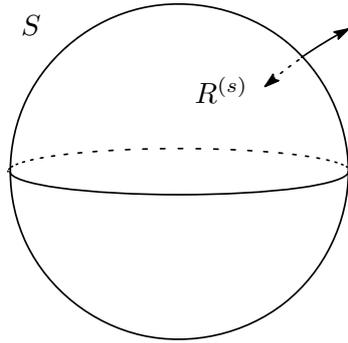


図 4 超球面による反転

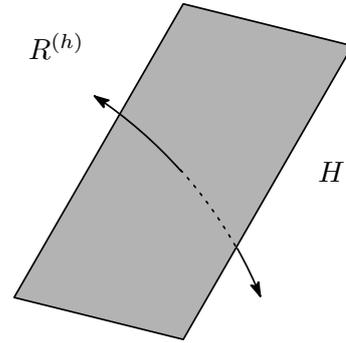


図 5 超平面による鏡映変換

と書ける.

以上を用いて, Möbius 変換を定義する.

定義 1.12 ($d + 1$ 次元 Möbius 変換).

$R_{a,r}^{(s)}$ や $R_{a,t}^{(h)}$ たちを有限回合成して得られる $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の自己同相写像を $d + 1$ 次元 Möbius 変換という. また, $d + 1$ 次元 Möbius 変換全体のなす群を $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ と書き, $d + 1$ 次元 Möbius 変換群という.

例えば, $d + 1$ 次直交行列 $A \in O(d + 1)$, 正数 $c > 0$, $d + 1$ 次元ベクトル $b \in \mathbb{R}^{d+1}$ を用いて定まるアフィン写像 $f(x) := cAx + b$ は Möbius 変換である. 特に, A 倍として定まる回転, c 倍として定まる拡大縮小, b ベクトル平行移動は Möbius 変換となる. Möbius 変換の特徴を表す性質を紹介していく.

定理 1.13.

$d + 1$ 次元 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ に対し, 各点 $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ における微分写像 $\gamma'(x)$ は等角行列である. 但し, 等角行列とは $d + 1$ 次直交行列の定数倍で表される行列である.

証明. まず, $x \neq 0$ なる $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対して $d + 1$ 次正方行列 Q_x を

$$Q_x := \left(q_{ij}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq d+1}, \quad q_{ij}(x) := \frac{x_i x_j}{\|x\|^2}.$$

で定める. 但し, E_{d+1} は $d + 1$ 次単位行列を表す. このとき, $Q_x^2 = Q_x$ と $[E_{d+1} - 2Q_x]^2 = E_{d+1}$ が成り立つ. 特に $E_{d+1} - 2Q_x$ は $d + 1$ 次直交行列となる. この行列を用いると, $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ に対して公式

$$J'(x) = \frac{1}{\|x\|^2} [E_{d+1} - 2Q_x] \quad (1.1)$$

$$R_{a,r}^{(s)'}(x) = \frac{r^2}{\|x - a\|^2} [E_{d+1} - 2Q_{x-a}] \quad (1.2)$$

$$R_{a,t}^{(h)'}(x) = E_{d+1} - 2Q_a \quad (1.3)$$

が成り立つ。但し、式に現れる分数の分母が 0 や ∞ とならないような x についてのみ考える。従って、微分写像の連鎖律より、 $d+1$ 次元 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ に対して各点 $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ における微分写像 $\gamma'(x)$ は等角行列であることが分かる。□

定理 1.13 は、 $d+1$ 次元 Möbius 変換が等角性を持つことをいっている。ここで、以後の計算に便利な拡大率の導入を行う。

定義 1.14 (拡大率).

$d+1$ 次元 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ に対し、各点 $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ での拡大率 $|\gamma'(x)|$ を

$$\frac{1}{|\gamma'(x)|} \gamma'(x) \in O(d+1)$$

をみたます正数と定義する。

これは連鎖律をみたます。即ち、 $\gamma, g \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$, $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ に対して $|(\gamma \circ g)'(x)| = |\gamma'(g(x))| |g'(x)|$ が成り立つ。式 (1.1), (1.2), (1.3) を用いると、次の公式が得られる。

公式 1.15. $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ に対して

$$|J'(x)| = \frac{1}{\|x\|^2}, \quad |R_{a,r}^{(s)'}(x)| = \frac{r^2}{\|x-a\|^2}, \quad |R_{a,t}^{(h)'}(x)| = 1$$

が成り立つ。また、 $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ と $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ に対して

$$\|\gamma(x) - \gamma(y)\|^2 = |\gamma'(x)| |\gamma'(y)| \|x - y\|^2 \quad (1.4)$$

が成り立つ。

なお、式 (1.4) から、 $d+1$ 次元 Möbius 変換の不変量が見出せる。

定義 1.16 (非調和比).

$x, y, z, w \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ に対し、非調和比 $[x, y, z, w]$ を

$$[x, y, z, w] := \frac{\|x - z\| \|y - w\|}{\|x - w\| \|y - z\|}$$

で定める。但し、 $0/0$ や ∞/∞ は 1 と定める。また、 $\|\infty - \infty\| = 0$ と定める。

命題 1.17 (非調和比の $d+1$ 次元 Möbius 変換に対する不変性).

任意の $x, y, z, w \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$, $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ に対し、 $[\gamma(x), \gamma(y), \gamma(z), \gamma(w)] = [x, y, z, w]$ が成り立つ。

証明. $0/0$ や ∞/∞ の形が現れないときは、式 (1.4) から従う。また、 $0/0$ や ∞/∞ の形が現れるときは、非調和比が $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \times \widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \times \widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \times \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の連続関数となることと Möbius 変換が $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の自己同相写像であることから従う。□

1.4 Möbius 変換と双曲計量

以後, $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の元で, \mathbb{B}^{d+1} と向きを保つものを考える. これら全体のなす $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の部分群を $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と書く. 後のために, \mathbb{B}^{d+1} を保つもの全体のなす $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の部分群を $\text{Möb}(\mathbb{B}^{d+1})$ と書き, \mathbb{B}^{d+1} を保ち向きを反転させるもの全体のなす $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の部分群を $\text{Möb}^-(\mathbb{B}^{d+1})$ と書く.

$\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の元で, \mathbb{B}^{d+1} と向きを保つ Möbius 変換としては, 例えば次のようなものが挙げられる.

例 1.18 (\mathbb{S}^d と直交する超球面を保つ Möbius 変換).

$a \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対して $\gamma_a := R_{a^\perp, 0}^{(h)} \circ R_{a^*, r_a}^{(s)}$ とおくと, $\gamma_a \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ である. 但し, a^\perp は 0 と a を通る d 次元超平面の法線ベクトルであり, $r_a := \sqrt{\|a^*\|^2 - 1}$ である. なお, この γ_a は \mathbb{S}^d と直交する超球面 $S(a^*, r_a)$ による反転と, 2 つの超球面 \mathbb{S}^d と $S(a^*, r_a)$ を 2 分するような超平面 $H(a^\perp, 0)$ による鏡映を合成したものである. このように構成した γ_a が $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元となることは, 以下で紹介する, 次の原点からの Euclid 距離の公式を組み合わせることで分かる.

公式 1.19. $a \in \mathbb{B}^{d+1}$, $b \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対し, 原点からの Euclid 距離の公式は

$$\begin{aligned} \left\| R_{a^*, r_a}^{(s)}(x) \right\|^2 &= \frac{\|x - a\|^2}{\|x - a^*\|^2 \|a\|^2} \\ &= \frac{\|x - a\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2) + \|x - a\|^2} \\ \left\| R_{b, t}^{(h)}(x) \right\| &= \|x\| \end{aligned}$$

となる.

次の 2 つの定理は, $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元を特徴付けるものである.

定理 1.20.

\mathbb{B}^{d+1} を保つ $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ が $\gamma(0) = 0$ をみたすとき, ある $d+1$ 次直交行列 $M_\gamma \in O(d+1)$ を用いて, $\gamma(x) = M_\gamma x$ と書ける. 更に, この M_γ は γ に対して一意に決まる.

証明. 非調和比を用いて証明できる. Nicholls [10, Lemma 1.3.1] を参照. □

定理 1.21.

任意の $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対し, $T_a(a) = 0$ となる $d+1$ 次元 Möbius 変換 $T_a \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ が存在する.

証明. $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対し, $T_a := R_{a, 0}^{(h)} \circ R_{a^*, r_a}^{(s)}$ が求めるものであることを示す. 実際に, $T_a(a) = 0$ は初等的な計算で確かめられる. また, $R_{a^*, r_a}^{(s)}$ と $R_{a, 0}^{(h)}$ が \mathbb{B}^{d+1} を保つことは, 公式 1.19 から分かる. 従って, 合成写像 $T_a := R_{a, 0}^{(h)} \circ R_{a^*, r_a}^{(s)}$ は向きと \mathbb{B}^{d+1} を保ち, $T_a(a) = 0$ をみたす. 故に, この

T_a が求めるものである. □

T_a の逆写像は初等的な計算から T_{-a} となることが分かる. 従って, 定理 1.20 と定理 1.21 より, $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ はある $d+1$ 次特殊直交行列 $M_\gamma \in SO(d+1)$ を用いて

$$\gamma(x) = T_{\gamma(0)}^{-1}(M_\gamma x) = T_{-\gamma(0)}(M_\gamma x)$$

と書けることが分かる. なお, 定理 1.21 の T_a は他にも良い性質を持つ. 例えば, T_a は $S(a^*, r_a)$ の内側を $S(-a^*, r_a)$ の外側に写す. なぜなら, $R_{a^*, r_a}^{(s)}$ は $S(a^*, r_a)$ の内側を $S(a^*, r_a)$ の外側に写し, $R_{a,0}^{(h)}$ は $S(a^*, r_a)$ の外側を $S(-a^*, r_a)$ の外側に写すからである. また, 次の公式が得られる.

公式 1.22. $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$, $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ に対し,

$$\begin{aligned} |T'_a(x)| &= \frac{1 - \|a\|^2}{\|x - a^*\|^2 \|a\|^2} = \frac{1 - \|a\|^2}{\|x^* - a\|^2 \|x\|^2} \\ \|T_a(x)\| &= \frac{\|x - a\|}{\|a\| \|x - a^*\|} = \frac{\|x - a\|}{\|x\| \|x^* - a\|} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 2 式とも, はじめの等号は式 (1.2), (1.3) と連鎖律を組み合わせれば分かる. また 2 つ目の等号は, $\|a\|^2 \|x - a^*\|^2 = \|a\|^2 \|x\|^2 - 2x \cdot a + 1 = \|x\|^2 \|x^* - a\|^2$ から分かる. □

以上により, $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ が \mathbb{B}^{d+1} に等長的に作用することが分かる.

定理 1.23 ($\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の \mathbb{B}^{d+1} に対する等長性).

任意の $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対して

$$\frac{|\gamma'(x)|}{1 - \|\gamma(x)\|^2} = \frac{1}{1 - \|x\|^2}$$

が成り立つ. 特に $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元は, 距離空間 $(\mathbb{B}^{d+1}, \rho_{\mathbb{B}})$ の等長変換であり, 体積要素 dV_h を保つ.

証明. まず, 定理 1.20 と定理 1.21 より, ある $d+1$ 次特殊直交行列 $M_\gamma \in SO(d+1)$ を用いて $\gamma(x) = T_{\gamma(0)}^{-1}(M_\gamma x) = T_{-\gamma(0)}(M_\gamma x)$ と書けることに注意する. また, 公式 1.22 を用いた初等的な計算により

$$\frac{|T'_a(x)|}{1 - \|T_a(x)\|^2} = \frac{1}{1 - \|x\|^2}$$

が導かれることに注意する. この式と, $y \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対して $|M'_\gamma(y)| = 1$ と $\|M_\gamma y\| = \|y\|$ が成り立つことから

$$\frac{|\gamma'(x)|}{1 - \|\gamma(x)\|^2} = \frac{1}{1 - \|x\|^2}$$

が分かる. □

実は、逆も正しい。即ち、 \mathbb{B}^{d+1} と向きを保つ等長変換全体のなす集合を $\text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と書くと、この集合の元は $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ に属する。また、Möbius 変換は等角性を持つので、理想境界 \mathbb{S}_∞^d 上の自己等角変換であり、逆に \mathbb{S}_∞^d 上の自己等角変換は、 \mathbb{B}^{d+1} と向きを保つ Möbius 変換に拡張できる (Poincaré 拡張)。従って、 \mathbb{S}_∞^d 上の自己等角変換全体のなす集合を $\text{Conf}^+(\mathbb{S}_\infty^d)$ と書くと

$$\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1}) = \text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1}) = \text{Conf}^+(\mathbb{S}_\infty^d) \quad (1.5)$$

が成り立つ。更に、 $d = 1$ のときは 2 次実射影特殊線型群 $PSL(2, \mathbb{R})$ と、 $d = 2$ のときは 2 次複素射影特殊線型群 $PSL(2, \mathbb{C})$ と一致することが知られている。

最後に、各種拡大率の公式と双曲距離の公式を述べる。

公式 1.24 (拡大率と Poisson 核). $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$, $x \in \mathbb{B}^{d+1}$, $\xi \in \mathbb{S}_\infty^d$ に対して

$$\begin{aligned} |T'_a(\xi)| &= p(a, \xi) \\ |\gamma'(x)| &= \frac{1 - \|\gamma(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} \\ |(\gamma^{-1})'(\xi)| &= p(\gamma(0), \xi) \end{aligned}$$

が成り立つ。

公式 1.25 (\mathbb{B}^{d+1} 上の双曲距離の公式). $x, y \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= \log \frac{1 + \|x\|}{1 - \|x\|} \\ \rho(x, y) &= \log \frac{\|y\| \|y^* - x\| + \|x - y\|}{\|y\| \|y^* - x\| - \|x - y\|} \end{aligned}$$

が成り立つ。

2 Klein 群とその極限集合

この章では、本論の主人公となる Klein 群とその軌道の集積点集合として構築される極限集合を導入する。そして、Klein 群の持つ初等的な性質を紹介したのち、それに基づき Klein 群をいくつかの種類に分類する。また、極限集合上の点を軌道の集積の仕方によって 2 種類に分ける。

2.1 Klein 群とその極限集合

まずは、 d 次元 Klein 群 を定義する。定理 1.20 と定理 1.21 から、任意の $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ は、ある $d+1$ 次特殊直交行列 $M_\gamma \in SO(d+1)$ を用いて $\gamma(x) = T_{-\gamma(0)}(M_\gamma x)$ と書ける。ここで、 $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ から直積集合 $\mathbb{B}^{d+1} \times SO(d+1)$ への写像 Φ を $\Phi(\gamma) := (\gamma(0), M_\gamma)$ で定める。この写像は定理 1.20 より矛盾なく定義でき、定義の仕方より全単射である。これを用いると $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ には写像 Φ から誘導される位相を入れることができ、位相群の構造が入る。なお、この位相は広義一様収束から定まる位相と同値であることが知られている。従って、次の点に注意する。

注意 2.1. $\text{Isom}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と $\text{Conf}^+(\mathbb{S}_\infty^d)$ に広義一様収束位相を入れると、式 (1.5) は “位相群として同型である” と見ることもしできる。

以上を用いて、 d 次元 Klein 群 を以下で定義する。

定義 2.2 (Klein 群).

$\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の離散部分群のことを、 d 次元 Klein 群という。また、向きと上半空間モデル \mathbb{H}^{d+1} を保つ Möbius 変換全体のなす群 $\text{Möb}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ の離散部分群も Klein 群と呼ぶ。なお、 $\text{Möb}(\mathbb{B}^{d+1})$ の離散部分群を Klein 群と呼ぶこともある。

例 2.3 (双曲多様体の基本群).

Klein 群 Γ が \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用するとき、 Γ は双曲多様体 M_Γ の基本群 $\pi_1(M_\Gamma)$ と群同型である。一方で、 $d+1$ 次元双曲多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ は M の普遍被覆空間 \mathbb{B}^{d+1} に作用する被覆変換群 Γ と群同型であり、 Γ は d 次元 Klein 群である。但し、 $d+1$ 次元双曲多様体とは局所的に \mathbb{B}^{d+1} 等長的な $d+1$ 次元連結 Riemann 多様体のことである。

例 2.4 (広義古典的 Schottky 群).

まず、 $B_1^+, B_1^-, \dots, B_m^+, B_m^-, D_1, \dots, D_n$ を球の境界が \mathbb{S}_∞^d と直交するような互いに交わらない $2m+n$ 個の \mathbb{R}^{d+1} 上の閉球とする。また、 $1 \leq k \leq m$ に対して $\gamma_k \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ を B_k^+ を $\widehat{\mathbb{R}^{d+1}} \setminus B_k^-$ に写すものとし、 $1 \leq l \leq n$ に対して $\rho_l \in \text{Möb}^-(\mathbb{B}^{d+1})$ を球面 ∂D_l に対する反転とする。これに対して $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m, \rho_1, \dots, \rho_n \rangle \subset \text{Möb}(\mathbb{B}^{d+1})$ で定められる d 次元 Klein 群を (m, n) 型広義古典的 Schottky 群という。但し、各 γ_k の定め方には自由度があり、各 ρ_l は球 D_l に対して一意に定まることに注意する。また、 $m=0$ あるいは $n=0$ のとき B_k^+, B_k^- あるいは

D_l はないものと見なし, $n = 0$ のとき Γ を古典的 Schottky 群という. なお, $(0, n)$ 型広義古典的 Schottky 群 $\Gamma = \langle \rho_1, \dots, \rho_n \rangle$ は古典的 Schottky 群と見なすことができる. それは, Γ の指数 2 の部分群 $\Gamma_+ = \Gamma \cap \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1}) = \langle \rho_2\rho_1, \rho_3\rho_1, \dots, \rho_n\rho_1 \rangle$ を考えれば良い.

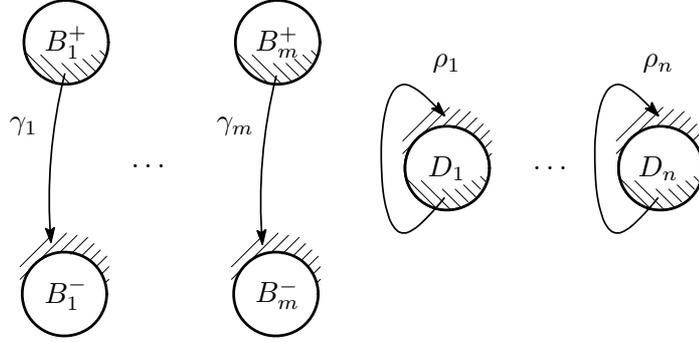


図 6 広義古典的 Schottky 群の生成元の写し方

例えば, 次のようにして広義古典的 Schottky 群を構成することができる. \mathbb{S}_∞^d と直交するような \mathbb{R}^{d+1} 上の 2 つの球 $B(a_1, r_1)$ と $B(a_2, r_2)$ に対して, $B(a_1, r_1)$ を $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \setminus \overline{B(a_2, r_2)}$ に自然に写す $d+1$ 次元 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ を, $B(a_1, r_1)$ を $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \setminus \overline{B(a_2, r_2)}$ に写す Möbius 変換 $\gamma_1 \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$

$$\gamma_1(x) := r_1 r_2 (x - a_1)^* + a_2, \quad x \in \widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$$

と 0 と a_2 を通る超平面による鏡映 γ_2 の合成 $\gamma := \gamma_2 \circ \gamma_1$ として定める. このような自然に写す Möbius 変換 γ によって各 γ_k を定めると, 広義古典的 Schottky 群が構成ができる.

例 2.5 (1 点穴あきトーラス群).

ここでは, \mathbb{B}^2 を複素平面 \mathbb{C} 上の単位円盤 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ と同一視する. $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を

$$\gamma_1(z) := \frac{\sqrt{2}z + 1}{z + \sqrt{2}}, \quad \gamma_2(z) := \frac{\sqrt{2}z + i}{-iz + \sqrt{2}} \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}})$$

で定める. これらは 4 つの複素円盤

$$\begin{aligned} B_1^+ &:= \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \left| z + \sqrt{2} \right| < 1 \right\}, & B_1^- &:= \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \left| z - \sqrt{2} \right| < 1 \right\} \\ B_2^+ &:= \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \left| z + \sqrt{2}i \right| < 1 \right\}, & B_2^- &:= \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \left| z - \sqrt{2}i \right| < 1 \right\} \end{aligned}$$

を考えると, $j = 1, 2$ に対して γ_j は B_{2j-1} を $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_{2j}}$ に写し (図 7), 共に \mathbb{D} を保つ. γ_1, γ_2 を用いて Fuchs 群 Γ_T を $\Gamma_T := \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ で定める. 複素円盤の円周は互いに接するが, 開円盤自体は互いに交わらないことから, このような Γ_T も古典的 Schottky 群と呼ぶ. なお, \mathbb{D}/Γ_T は 1 つ穴の開いたトーラス (図 8) になることから Γ_T は 1 点穴あきトーラス群と呼ばれる.

さて, d 次元 Klein 群の持つ基本的な性質を見ていく. d 次元 Klein 群の離散性から直ちに従うことは, 各点 $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の Γ -軌道 $\Gamma(x)$ は \mathbb{B}^{d+1} 上に集積点を持たないことである. 但し, 各軌

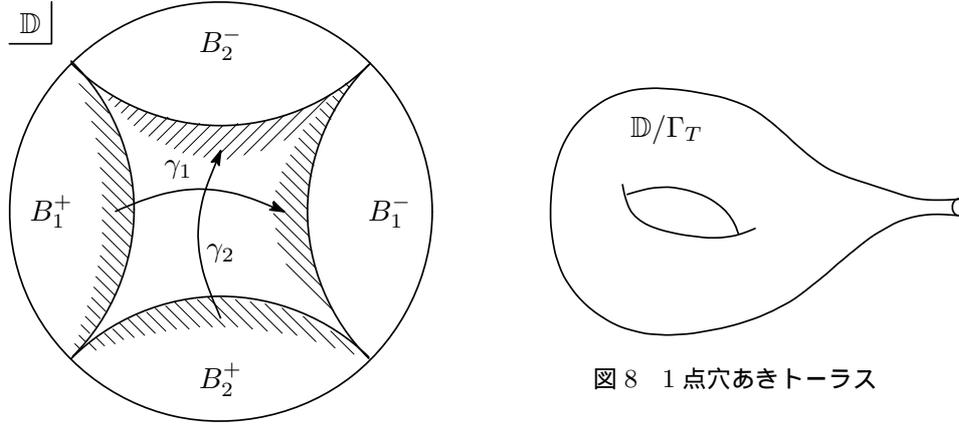


図7 Γ_T の生成元の写し方

図8 1点穴あきトーラス

道は $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の部分集合と見なし、その集積点については常に Euclid 位相を用いる。もしある点 $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ に集積すると仮定とすると、 $n \rightarrow \infty$ に対して $\gamma_n(x) \rightarrow a$ となる列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が取れる。このとき各 γ_n はある $d+1$ 次特殊直交行列 M_n を用いて $\gamma_n = T_{-\gamma_n(x)} \circ M_n$ と書ける。ところで $SO(d+1)$ はコンパクトなので、必要ならば部分列を取ることで $\{M_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ に対してある $d+1$ 次特殊直交行列 M に収束しているとして良い。これにより、 $n \rightarrow \infty$ に対して $\gamma_n \rightarrow T_{-a} \circ M$ となる。これは、 Γ の離散性に反する。従って、各点 $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の Γ -軌道 $\Gamma(x)$ は \mathbb{B}^{d+1} 上に集積点を持たない。

ところで、 d 次元 Klein 群の定義には離散性のみを課したが、実はもっと強い作用になっている。

定理 2.6.

d 次元 Klein 群 Γ は \mathbb{B}^{d+1} に真性不連続に作用する。即ち、任意の $z \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対し、 z の開近傍 $U_z \subset \mathbb{B}^{d+1}$ で、 $\#\{\gamma \in \Gamma \mid U_z \cap \gamma(U_z) \neq \emptyset\} < \infty$ をみたすものが存在する。なお、この条件を満たす z を Γ の不連続点という。また、 Γ は \mathbb{B}^{d+1} に真性不連続に作用するための必要十分条件は、 \mathbb{B}^{d+1} 上の任意のコンパクト集合 K に対して $\#\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\} < \infty$ が成り立つことである。

証明. 後者のみ示す。背理法を用い、コンパクト集合 $K \subset \mathbb{B}^{d+1}$ で $\#\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\} = \infty$ が成り立つものが取れると仮定する。 K は有界閉集合なので、 $K \subset \Delta(x, r)$ となる $r > 0$ が取れる。このとき、 $\Delta(x, r) \cap \gamma(\Delta(x, r)) \neq \emptyset$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ が無限個取れるので、閉球 $\overline{\Delta(x, 2r)}$ には無限個の $\gamma(x)$ が属する。これは、 Γ が離散的であることに反する。故に、任意のコンパクト集合 K に対して $\#\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\} < \infty$ が成り立つ。□

特に、 K として任意の自然数 n に対して原点 0 中心で半径 n の双曲閉球 $\overline{\Delta(0, n)}$ と取れば、 $\gamma(0) \in \overline{\Delta(0, n)}$ なる $\gamma \in \Gamma$ は有限個しかないと分かる。このことから、 Γ の濃度は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度以下、即ち、可算濃度以下であることが従う。また、 Γ が \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用する、即ち、位数有限な元を持たないとき、商空間 $M_\Gamma := \mathbb{B}^{d+1}/\Gamma$ は \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲計量から誘導される計量を備えた

Riemann 多様体となる. なお, Γ が \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用していない場合であっても, 商空間 M_Γ は Hausdorff 空間になることが知られている.

次に, d 次元 Klein 群 Γ に対する極限集合と不連続領域を定義する. 先の議論により, $d+1$ 次元単位球上の各点 $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の Γ -軌道 $\Gamma(x)$ は \mathbb{B}^{d+1} 上に集積点を持たない. しかし, \mathbb{B}^{d+1} の Euclid 位相での閉包 $\overline{\mathbb{B}^{d+1}} = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| \leq 1\}$ はコンパクト集合なので, $\overline{\mathbb{B}^{d+1}}$ 上集積点を持つ. $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の Γ -軌道 $\Gamma(x)$ の集積点全体のなす集合を $\Lambda(x)$ と書く. 具体的には, $\Lambda(x) = \overline{\Gamma(x)} \cap \mathbb{S}_\infty^d$ で与えられる. この性質を用いて, 極限集合と不連続領域を定義する.

定義 2.7 (Klein 群の極限集合と不連続領域).

d 次元 Klein 群 Γ に対し, $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の集積点集合 $\Lambda(\Gamma) := \Lambda(x)$ を Γ の極限集合といい, その元を極限点という. また, Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ を理想境界 \mathbb{S}_∞^d 上の Γ の不連続点全体のなす集合として定める.

注意 2.8. d 次元 Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は, 基点 $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ の取り方によらない. なぜなら, $x, y \in \mathbb{B}^{d+1}$, $\xi \in \Lambda(x)$ とし, $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\gamma_n(x) \rightarrow \xi$ ($n \rightarrow \infty$) となる Γ の点列とすると, 各 n に対して $\rho(\gamma_n(x), \gamma_n(y)) = \rho(x, y)$ であることから $n \rightarrow \infty$ に対して $\|\gamma_n(x) - \gamma_n(y)\| \rightarrow 0$, つまり, $\gamma_n(y) \rightarrow \xi$ ($n \rightarrow \infty$) が分かるからである. また, 極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は Γ -不変な \mathbb{S}^d 上の閉集合となることも定義から直ちに分かる.

極限集合の定義では Γ -軌道の基点として \mathbb{B}^{d+1} 上の点を用いたが, 実際にはここに制限する必要はなく Klein 群 Γ の不連続点であれば十分であり, 一部を除いた極限点でも良い (Ahlfors [1, p.80]). 従って, 特に $\mathbb{S}_\infty^d \setminus \Lambda(\Gamma) = \Omega(\Gamma)$ が成り立つ. なお, 基点は一部を除いた極限点でも良いことから, 極限集合は完全集合とも呼ばれる.

例 2.9 ((m, n) 型広義古典的 Schottky 群).

例 2.4 において導入した (m, n) 型広義古典的 Schottky 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は Cantor 集合になる. その様子を描いたものが図 9 である. なお, Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ と指数 2 の部分群 Γ_+ の極限集合 $\Lambda(\Gamma_+)$ は一致する点に注意する.

例 2.10 (1 点穴あきトーラス群の極限集合).

例 2.5 の 1 点穴あきトーラス群 Γ_T の極限集合は $\Lambda(\Gamma_T) = \mathbb{S}^1$ であるが, この群を \mathbb{B}^3 に作用するように自然に拡張 (Poincaré 拡張) し, “1 つ穴の開いた状態を保つように変形” した Klein 群の極限集合は図 10 のように \mathbb{S}^1 と位相同相なものとなる. このような Klein 群は擬 Fuchs 群と呼ばれる.

2.2 Klein 群の分類

この節では, d 次元 Möbius 変換をその固定点に注目して分類した後, Klein 群をいくつかのクラスに分類する.

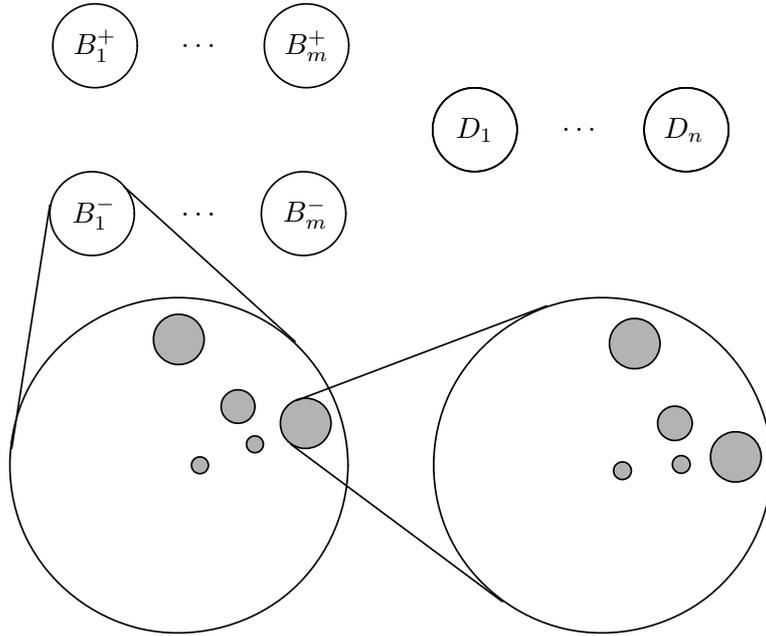


図9 広義古典的 Schottky 群の極限集合として現れる Cantor 集合

2.2.1 $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元の分類

$\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元は, 1 点コンパクト化された Euclid 空間 $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1}$ 上の自己同相写像なので, 特に $d+1$ 次元閉単位球 $\overline{\mathbb{B}^{d+1}}$ を保つ. 従って, Brouwer の不動点定理より, $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元は $\overline{\mathbb{B}^{d+1}}$ 上に固定点を持つ. これを基に, $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ の元を次のように分類する.

定義 2.11.

d 次元 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ を以下で分類する.

- (i) γ の固定点はちょうど 2 つであり, それらはいずれも理想境界 \mathbb{S}_∞^d 上にあるとき, γ を双曲的という.
- (ii) γ の固定点は 1 つしかなく, それが理想境界 \mathbb{S}_∞^d 上にあるとき, γ を放物的という.
- (iii) (i), (ii) 以外するとき, γ を楕円的という.

また, $\text{Möb}^+(\mathbb{H}^{d+1})$ の元の分類も同様に定義する.

例えば, $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対する T_a は双曲的であり, 特殊直交行列による回転は楕円的である. また, 上半空間モデル \mathbb{H}^{d+1} における \mathbb{H}^{d+1} を保つような平行移動は放物的である.

注意 2.12. 以後断らない限り, 単位球モデル, Möbius 変換群の次元, Klein 群の次元は, それぞれ $d+1, d, d$ とし明記せず, $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ など単に $\text{Möb}^+(\mathbb{B})$ と書くことにする. また, Cayley 変換 V で共役を取るにより, Klein 群は \mathbb{H} に作用するとも考える.

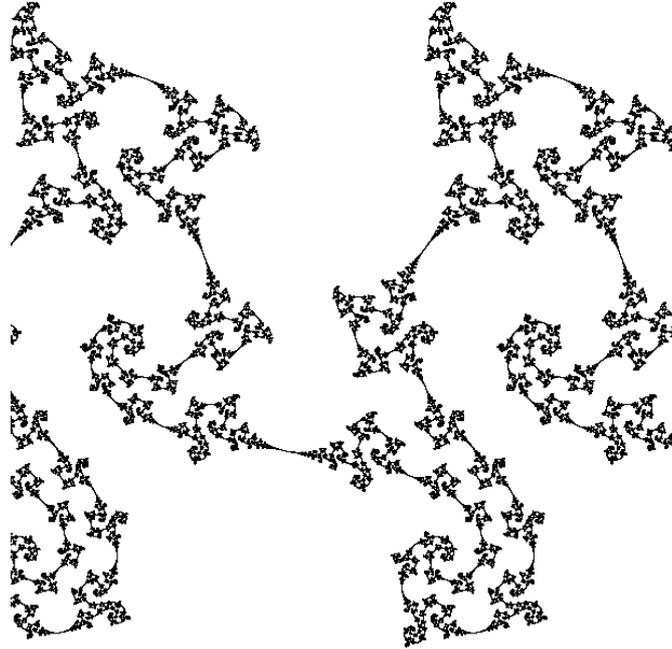


図 10 擬 Fuchs 群の極限集合 (図は和田昌昭氏によるソフト OPTi を用いて出力した.)

2.2.2 第 1 種 Klein 群と第 2 種 Klein 群

ここでは, Klein 群の極限集合の形に着目し, Klein 群を 2 つに分類する.

定義 2.13 (第 1 種 Klein 群と第 2 種 Klein 群).

Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ が $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}_\infty$ をみたすとき Γ を第 1 種 *Klein* 群といい, そうでないとき Γ を第 2 種 *Klein* 群という.

例えば, M_Γ がコンパクトとなる Γ や例 2.5 の 1 点穴あきトーラス群は第 1 種である. また, 広義古典的 Schottky 群は第 2 種である.

2.2.3 初等的な Klein 群と非初等的な Klein 群

ここでは Klein 群の極限集合の元の個数に着目して, Klein 群を 2 つに分類する.

定義 2.14 (初等的な Klein 群と非初等的な Klein 群).

Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ が $\#\Lambda(\Gamma) < \infty$ をみたすとき Γ を初等的といい, そうでないとき Γ を非初等的という.

この分類の仕方に関して大切なことは, 次の 2 つの事実である.

命題 2.15.

次が成り立つ.

- Klein 群 Γ が初等的なとき, $\#\Lambda(\Gamma)$ は 0, 1, 2 のいずれかである.
- Klein 群 Γ が非初等的なとき, 極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は非可算無限個の元を持ち, Γ は双曲的な元を必ず含む.

これから, 初等的な Klein 群の構造は比較的分かりやすいことが分かる. 例えば, Keen–Lakic [6, §5.2] において, 初等的 Fuchs 群の構造の分類に関する記述がされている. なお初等的な Klein 群の代表的な例は 1 元生成群である.

2.2.4 発散型 Klein 群と収束型 Klein 群

Klein 群を考察する上で, 次で定義される収束指数は有用である. また, これを用いて, 発散型 Klein 群と収束型 Klein 群を定義する.

定義 2.16 (収束指数).

Γ を Klein 群とし, $x, y \in \mathbb{B}$, $s > 0$ とする. これに対し, Γ の Poincaré 級数 $P^s(\Gamma; x, y)$ を収束発散を込めて,

$$P^s(\Gamma; x, y) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s\rho(x, \gamma(y))} \quad (2.1)$$

で定める. また, Γ の収束指数 $\delta(\Gamma)$ を $\delta(\Gamma) := \inf \{s > 0 \mid P^s(\Gamma; x, y) < \infty\}$ で定める.

注意 2.17. Poincaré 級数 $P^s(\Gamma; x, y)$ の収束発散は, x の取り方によらない. なぜなら, $x, x', y \in \mathbb{B}$, $\gamma \in \Gamma$, $s > 0$ に対して

$$e^{-s\rho(x, x')} e^{-s\rho(x', \gamma(y))} \leq e^{-s\rho(x', \gamma(y))} \leq e^{s\rho(x, x')} e^{-s\rho(x', \gamma(y))}$$

が成り立つからである. y の取り方によらないことも同様に言える. 従って, 収束指数 $\delta(\Gamma)$ の値は, $x, y \in \mathbb{B}$ の取り方によらない. 特に,

$$P^s(\Gamma; x, y) \asymp P^s(\Gamma; 0, 0) \quad (2.2)$$

が成り立つ. ここで $A \asymp B$ とは, 定数 C が $C^{-1}B \leq A \leq CB$ をみたすように取れることをいう. このとき, C を比較定数といい, A と B は比較可能であるという. 比較定数は時と場合に応じて何かに依存しても良い. 式 (2.2) の場合, 比較定数は $s > 0$, $x, y \in \mathbb{B}$ にのみ依存して良い. 以後, $x = y = 0$ の場合を主に考え, $P^s(\Gamma) := P^s(\Gamma; 0, 0)$ とおく.

Poincaré 級数は s が大きければ収束しやすく, 小さければ発散しやすい. 従って, Poincaré 級数の収束発散の境目は大変興味深いところであり, 収束指数を導入する動機となる. 但し, $s = \delta(\Gamma)$ としても, 収束するか発散するかは分からない. そこで, Klein 群を次の 2 つに分類する.

定義 2.18 (発散型 Klein 群と収束型 Klein 群).

Γ を Klein 群とし, 収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. これに対して $P^\delta(\Gamma) = \infty$ のとき, Γ を発散型といい, $P^\delta(\Gamma) < \infty$ のとき, Γ を収束型という.

Poincaré 級数を考えることの最大の意義は, Patterson–Sullivan 測度と呼ばれる理想境界 S_∞ 上の有限 Borel 測度の構成に用いることにある. これについては第 3 章で触れる.

Poincaré 級数の収束発散を定義 2.16 の式 (2.1) の形で考えると不都合が生じる場合があるため, いくつかの書き換えを行う. まず, Poisson 核を用いた書き換えを行う. $x \in \mathbb{B}$ と $\xi \in \Omega(\Gamma)$ に対し, 公式 1.24 と公式 1.25 より

$$e^{-\rho(0, \gamma(x))} = \frac{1 - \|\gamma(x)\|}{1 + \|\gamma(x)\|} \asymp \frac{1 - \|\gamma(x)\|^2}{\|\xi - \gamma(x)\|^2} = p(\gamma(x), \xi)$$

であることに注意する. 但し, 比較定数は $\gamma \in \Gamma$ によらないものをとる. これより, $\xi \in \Omega(\Gamma)$ と $s > 0$ に対して

$$P^s(\Gamma) \asymp P^s(\Gamma; 0, x) \asymp \sum_{\gamma \in \Gamma} [p(\gamma(x), \xi)]^s \quad (2.3)$$

が分かる. 次に, 拡大率を用いた書き換えを行う. 公式 1.24 と公式 1.25 より

$$e^{-\rho(0, \gamma(x))} = \frac{1 - \|\gamma(x)\|}{1 + \|\gamma(x)\|} \asymp \frac{1 - \|\gamma(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} = |\gamma'(x)|$$

であることに注意する. これより,

$$P^s(\Gamma) \asymp P^s(\Gamma; 0, x) \asymp \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|^s \quad (2.4)$$

が分かる. 特に, $x = 0$ のとき, $|\gamma'(0)| \asymp 1 - \|\gamma(0)\|$ なので

$$P^s(\Gamma) \asymp \tilde{P}^s(\Gamma) := \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - \|\gamma(0)\|)^s \quad (2.5)$$

も成り立つ. 式 (2.3), (2.4), (2.5) と 3 つの書き換えを行った中でも, この最後の形が良く用いられる. 例えば, 次の命題の証明は式 (2.5) の形を用いて証明を行う.

命題 2.19.

Γ が第 2 種 のとき, $\tilde{P}^d(\Gamma) < \infty$ が成り立つ. 従って, $\delta(\Gamma) \leq d$ が成り立つ. 更に, Γ が発散型のとき $\delta(\Gamma) < d$ が成り立つ.

証明. Nicholls [10, Theorem 1.6.2] を参照. □

2.2.5 Klein 群の基本領域と Klein 群の幾何的分類

ここでは, Klein 群 Γ に対する商空間 M_Γ の幾何的側面から Klein 群を分類する. しかし M_Γ は一般に考察しにくいので, まずは基本領域と呼ばれる, M_Γ を \mathbb{B} 上で切り開いたときにできる領域を導入して考察する. 一般に, 基本領域とは次で定義されるものである.

定義 2.20 (基本領域).

X を位相空間とし, 群 G が X に作用しているとする. このとき, 次の 2 条件 (FD1), (FD2) をみたす X 上の領域 Ω を, X に対する G の基本領域という.

$$(FD1) \quad X = \bigcup_{g \in G} \overline{g(\Omega)}.$$

$$(FD2) \quad \Omega \cap g(\Omega) = \emptyset \quad (g \in G).$$

また, $g \in G$ に対して $\Omega(g) := \overline{\Omega} \cap \overline{g(\Omega)}$ とおき, これが空集合でないとき $\Omega(g)$ を基本領域 Ω の面という.

例えば, 例 2.4 の広義古典的 Schottky 群の基本領域 Ω は図 11 の斜線部分のように取ることができる. 一般の Klein 群の \mathbb{B} に対する基本領域については, 次のような 2 つの構成法が知られている.

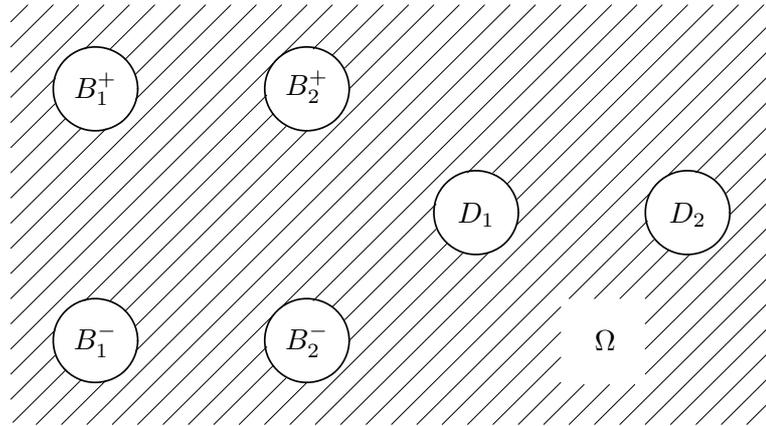


図 11 (2, 2) 型広義古典的 Schottky 群の基本領域 Ω

例 2.21 (Dirichlet 領域).

Klein 群 Γ に対して $a \in \mathbb{B}$ を Γ の楕円元によって固定されないものとする. これに対して

$$D_a := \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}} D(\gamma), \quad D(\gamma) := \{x \in \mathbb{B} \mid \rho(x, a) < \rho(\gamma(x), a)\}$$

で定まる \mathbb{B} 上の領域 D_a は Γ の基本領域となる. これを *Dirichlet 領域* という.

例えば, 例 2.5 の Dirichlet 領域は図 12 の斜線部分のようになる. 次に, Dirichlet 領域と本質的には作り方は変わらない Ford 領域も導入する.

例 2.22 (Ford 領域).

原点 $0 \in \mathbb{B}$ が楕円元の固定点となっていないような Klein 群 Γ に対して

$$F := \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}} F(\gamma), \quad F(\gamma) := \{x \in \mathbb{B} \mid |\gamma'(x)| < 1\} = \{\|x\| < \|\gamma(x)\|\}$$

で定まる \mathbb{B} 上の領域 D_a は Γ の基本領域となる. これを *Ford 領域* という.

いずれも基本領域となることは構成法より容易に分かる. また, Dirichlet 領域の構成において $a = 0$ と取れば両者は一致する. Ford 領域を導入する 1 つの動機として, 理想境界 S_∞ に対する Γ の基本領域の構成法を与えていることが挙げられる.

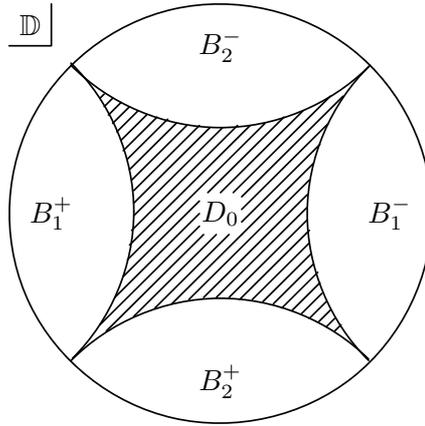


図 12 1つ穴あきトーラス群 Γ_T の Dirichlet 領域 D_0

次に, M_Γ の“芯”となる部分集合凸芯を導入する.

定義 2.23 (凸芯).

\mathbb{S}_∞ の部分集合 E に対し, E の凸包 $\text{ch}(E)$ を, \mathbb{B} の部分集合

$$\{z \in \mathbb{B} \mid E \text{ 上のある 2 点を端点に持つ双曲測地線が } z \text{ を通る}\}$$

を含む最小の双曲的凸閉集合として定める. E として Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda := \Lambda(\Gamma)$ を考えると, $\text{ch}(\Lambda)$ は Γ -不変である. これを *Nielsen* 凸領域という (図 13 の薄い斜線部分). そして, Nielsen 凸領域を Γ の作用で割った M_Γ の部分集合 $C_\Gamma := \text{ch}(\Lambda)/\Gamma$ を Γ の凸芯という (図 14).

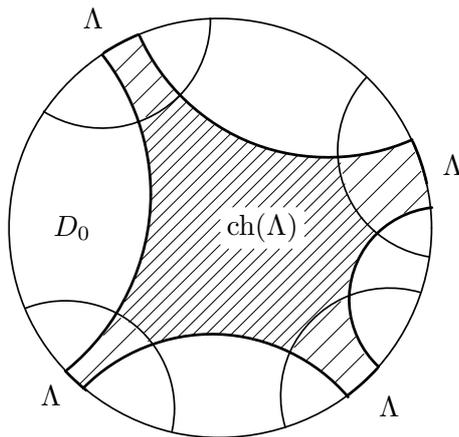


図 13 Nielsen 凸領域

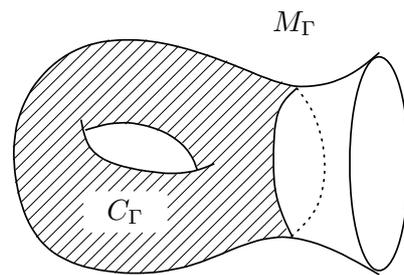


図 14 凸芯

この凸芯は Nielsen 凸領域 $\text{ch}(\Lambda)$ に対する Γ の基本領域 (図 13 の濃い斜線部分) を考えることにより, \mathbb{B} 上の領域を用いて考察できる. 以上を用いて, Klein 群 Γ の幾何的性質による分類を次のように行う.

定義 2.24 (Klein 群の幾何的分類).

- M_Γ の \mathbb{B} から誘導される体積 $V_h(M_\Gamma)$ が有限となるとき, Γ は体積有限であるという.
- 凸芯 $C_\Gamma \subset M_\Gamma$ がコンパクト集合となるとき, Γ は凸コンパクトであるという.
- Γ が有限生成であり, C_Γ の M_Γ 上での体積 $V_h(C_\Gamma)$ が有限となるとき, Γ は幾何的有限であるという.

Klein 群の例として挙げたものとこれらの条件を照らし合わせると次のようになる.

	体積有限	凸コンパクト	幾何的有限
M_Γ がコンパクト			
広義古典的 Schottky 群	×		
穴あきトーラス群		×	

また, 定義 2.24 の条件を基本領域の言葉で書き直すと, 次のようになる.

命題 2.25 (凸コンパクトな Klein 群).

- Klein 群 Γ が体積有限であることと Γ の基本領域で体積が有限となるものが取れることは同値である.
- Klein 群 Γ が凸コンパクトであることと Γ の Nielsen 凸領域に関する基本領域で相対コンパクトになるようなものが取れることは同値である.
- d 次元 Klein 群 Γ に対して $d = 1, 2$ のとき, Klein 群 Γ が幾何的有限であることと Γ の基本領域で面が有限個となるようなものが取れることは同値である.

幾何的有限 Klein 群に関して基本領域の言葉で書き直すには少し条件が必要となる. これに関しては, Kapovich [5, p.5] にまとめられている.

2.3 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の点の分類

この節では, Klein 群 Γ に対する $a \in \mathbb{B}$ の Γ -軌道 $\Gamma(a)$ の近付き方の違いによって理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の点の分類をする. 特に, 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の点で, 円錐型極限点, 接球型極限点, Dirichlet 点と呼ばれるものに焦点を絞り, 理想境界 \mathbb{S}_∞ が接球型極限集合と Dirichlet 集合でほとんど覆われていることを見る.

まずは, 円錐型極限点を定義する. そのために, 円錐領域と呼ばれる領域を導入する.

定義 2.26 (円錐領域).

$\xi \in \mathbb{S}_\infty$ を頂点とし, 角度 θ だけ開いた円錐領域 $\text{Cone}(\xi, \theta)$ を

$$\text{Cone}(\xi, \theta) := \{x \in \mathbb{B} \mid \angle(\xi, \xi - x) < \theta, \|x - \xi\| < \cos \theta\}$$

で定める. 但し, $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対して $\angle(x, y)$ は 2 ベクトル x, y のなす角度, 即ち $\angle(x, y) := \cos^{-1}(x \cdot y / (\|x\| \|y\|))$ を表す.

これを用いて、円錐型極限点を以下で定義する.

定義 2.27 (円錐型極限点).

Γ を Klein 群とし, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ とする. 任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ と角度 θ が, 任意の n に対して $\gamma_n(a) \in \text{Cone}(\xi, \theta)$ となるように取れるとき, ξ を円錐型極限点という (図 15). また, 円錐型極限点全体のなす集合を $\Lambda_c(\Gamma)$ と書き, 円錐型極限集合という.

注意 2.28. 必要ならば部分列を取ることにより, $\gamma_n(a)$ は ξ に Euclid 位相で収束するとして良い. 従って, 円錐型極限点は極限点である. また, 注意 2.8 と同様の議論により, ある $a \in \mathbb{B}$ に対して同様の主張が成り立てば十分である.

要するに, 円錐型極限点はある円錐領域の中から Γ -軌道が集積する極限点のことである. 次に, 接球型極限点を定義する. そのために, 接球, 接球面と呼ばれる領域を導入する.

定義 2.29 (接球, 接球面).

$\xi \in \mathbb{S}_\infty$ で内接する半径 r の接球 $\text{HB}(\xi, r)$, 及び接球面 $\text{HS}(\xi, r)$ を

$$\text{HB}(\xi, r) := B((1-r)\xi, r) = \{x \in \mathbb{B} \mid \|x - (1-r)\xi\| < r\}$$

$$\text{HS}(\xi, r) := S((1-r)\xi, r) = \{x \in \mathbb{B} \mid \|x - (1-r)\xi\| = r\} \cup \{\xi\}$$

で定める.

接球を用いて, 接球型極限点を以下で定義する.

定義 2.30 (接球型極限点).

Γ を Klein 群とし, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ とする. 任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ と半径 r が, 任意の n に対して $\gamma_n(a) \in \text{HB}(\xi, r)$ となるように取れるとき, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ を接球型極限点という (図 16). また, 接球型極限点全体のなす集合を $\Lambda_h(\Gamma)$ と書き, 接球型極限集合という.

円錐型極限点のときと同様の議論により, ある $a \in \mathbb{B}$ について主張が成り立てば良く, 接球型極限点は極限点である. つまり, 接球型極限点はある接球の中から Γ -軌道が集積する極限点のことである. また, 円錐型極限点と接球型極限点の定義から $\Lambda_c(\Gamma) \subset \Lambda_h(\Gamma)$ が成り立つことが分かる. 最後に, Dirichlet 点を定義する.

定義 2.31 (Dirichlet 点).

Γ を Klein 群とし, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ とする. 任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して $r > 0$ が, Γ -軌道 $\Gamma(a)$ が接球面 $\text{HS}(\xi, r)$ には入るが接球 $\text{HB}(\xi, r)$ には入らないように取れるとき, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ を *Dirichlet* 点という. また, Dirichlet 点全体のなす集合を $D(\Gamma)$ と書き, Γ の *Dirichlet* 集合という.

これもある $a \in \mathbb{B}$ について主張が成り立てば良い. Dirichlet 点 $\xi \in D(\Gamma)$ はある ξ で内接する接球に Γ -軌道が入らない状況を表している.

この節では, 円錐型極限点, 接球型極限点, Dirichlet 点の 3 点を導入した. これら 3 点と Γ -軌道の状況をまとめると, 次のようになる.

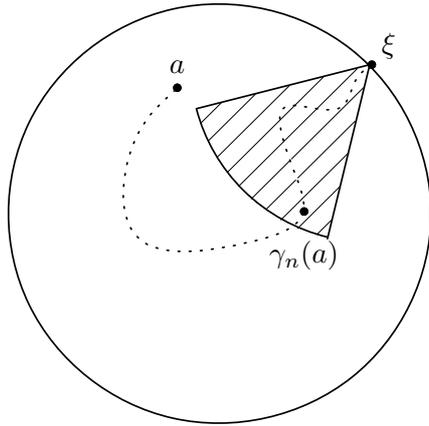


図 15 円錐型極限点 ξ

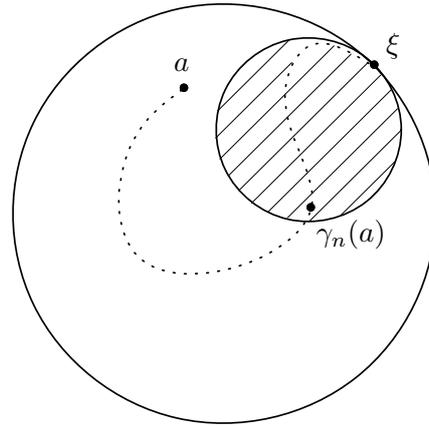


図 16 接球型極限点 ξ

円錐型極限点	ある円錐領域の中から Γ -軌道が集積する.
接球型極限点	ある接球の中から Γ -軌道が集積する.
Dirichlet 点	ある接球には Γ -軌道が入らない.

これらの条件を解析的な条件などで書き換えていく. まずは, 円錐型極限点について考察する.

定理 2.32 (円錐型極限点).

Klein 群 Γ に対し, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ が円錐型極限点であるための必要十分条件は, 任意の $x \in \mathbb{B}$ に対し列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ と定数 M が

$$\frac{\|\xi - \gamma_n(x)\|}{1 - \|\gamma_n(x)\|} \leq M$$

をみたすように取れることである.

もちろん, ある x について主張が成り立てば十分である. また, 円錐型極限点はその点を端点にもつ双曲測地線と Γ -軌道の距離や“影”と呼ばれるものと関連が深いので, これらによる書き換えも考察しておく. ここで, $a \in \mathbb{B}$ と $\xi, \eta \in \mathbb{S}_\infty$ を結ぶ双曲測地線 $l := \overline{\xi\eta}$ との双曲距離 $\rho(a, l)$ (図 17) は

$$\cosh \rho(a, l) = \frac{2\|a - \xi\| \|a - \eta\|}{\|\xi - \eta\| (1 - \|a\|^2)} \quad (2.6)$$

で与えられ, “影” は以下で定義されるものであることに注意する.

定義 2.33 (双曲球の影).

$x \in \mathbb{B}, a \in \mathbb{B}, r > 0$ とする. これに対して $\Delta(a, r)$ の観察点 x から理想境界 \mathbb{S}_∞ への影 $b(x; a, r)$ を, x から $\Delta(a, r)$ を \mathbb{S}_∞ へ射影したものを, 即ち,

$$b(x; a, r) := \{\xi \in \mathbb{S}_\infty \mid \xi \text{ と } x \text{ を結ぶ双曲測地線は } \Delta(a, r) \text{ を通る}\}$$

で定める (図 18).

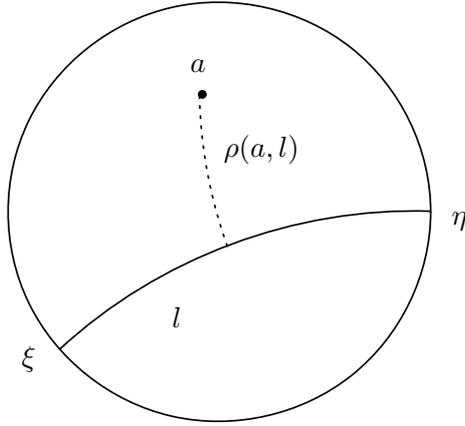


図 17 $\rho(a, l)$

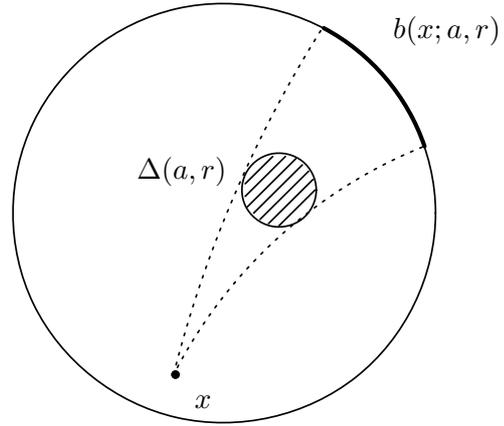


図 18 影

定理 2.34 (円錐型極限点の諸性質).

$\xi \in \mathbb{S}_\infty$ に対し, 以下は同値である.

- (1) ξ は円錐型極限点である.
- (2) ξ を端点を持つある双曲測地線 l とある $k > 0$ が, 任意の $a \in \mathbb{B}$ と無限個の $\gamma \in \Gamma$ に対して l と $\gamma(a)$ の双曲距離が k 以下となるように取れる.
- (3) 任意の $x, a \in \mathbb{B}$ に対してある $r > 0$ が, ξ が無限個の $b(x; \gamma(a), r)$ に属するように取れる. つまり, $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表すと

$$\Lambda_c(\Gamma) = \bigcup_{r>0} \Lambda_c^r(\Gamma), \quad \Lambda_c^r(\Gamma) := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} b(x; \gamma_n(a), r)$$

と書ける.

証明. Nicholls [10, Theorem 1.2.4] を参照. □

次に, 接球型極限点の書き換えを行う. この際, 接球は Poisson 核と関わりが深いことが分かる. 実際, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ と $0 < r < 1$ なる r に対して

$$\begin{aligned} \text{HB}(\xi, r) &= \left\{ x \in \mathbb{B} \mid \frac{1}{p(x, \xi)} < \frac{r}{1-r} \right\} \\ \text{HS}(\xi, r) &= \left\{ x \in \mathbb{B} \mid \frac{1}{p(x, \xi)} = \frac{r}{1-r} \right\} \cup \{\xi\} \end{aligned}$$

が成り立つことが初等的な計算により確かめられる. 従って, 次のように書き換えられる.

定理 2.35 (接球型極限点).

Klein 群 Γ に対し, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ が接球型極限点であるための必要十分条件は, 任意の $x \in \mathbb{B}$ に対して列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\xi - \gamma_n(x)\|^2}{1 - \|\gamma_n(x)\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p(\gamma_n(x), \xi)} = 0$$

をみたすように取れることである.

これもある x について主張が成り立てば十分である. 最後に, Dirichlet 点の書き換えを行う.

定理 2.36 (Dirichlet 点).

Klein 群 Γ に対して $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ が Dirichlet 点であるための必要十分条件は, 任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して $\gamma \in \Gamma$ が $\xi \in \partial D_a$ となるように取れることである. 但し, D_a は a を中心とする Γ の Dirichlet 領域である.

証明. Nicholls [10, Theorem 2.6.3] を参照. □

やはり, ある a について主張が成り立てば十分である. これは, Dirichlet 点という呼び名が付けられた所以である. Dirichlet 点は定義よりある ξ で内接する接球に Γ -軌道が入らない状況を表している. 一方で, 定理は接球の中から点列が接球型極限点に収束する様子を主張している. しかし, その差にあたる理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の部分集合 $Q := \mathbb{S}_\infty \setminus [\Lambda_h(\Gamma) \cup D(\Gamma)]$ は Lebesgue 測度で見ると本当に薄いものであることが言える. それが次の主張である.

定理 2.37.

理想境界 \mathbb{S}_∞ は, $\mathbb{S}_\infty = \Lambda_h(\Gamma) \cup D(\Gamma) \cup Q$ と分解できる. 但し, $\text{Area}(Q) = 0$ である.

証明. Nicholls [10, Theorem 2.6.6] を参照. □

Q 上の点は *Garnett* 点と呼ばれ, どの次元においても存在することが知られている (Nicholls [9]).

3 極限集合を測る測度

この章では, Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ を測るための測度を 2 つ用意する. それに伴い, はじめに測度論の必要事項を復習する. その後, 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の測度を 2 つ用意する. 特に, 2 つ目に導入する Γ -不変共形測度については, Klein 群や複素力学系といった共形力学系を考える上で大変重要なものであるので, その性質を詳しく見ていく.

3.1 測度論の準備

この節では, 測度論の復習と以下の議論に必要な測度論に関する事実を紹介する. なお, この節は抽象測度論に関する事項を新井 [13] と小谷 [15] を, また Radon–Nikodym 微分に関する事項を伊藤 [14] を参考にまとめた.

3.1.1 測度空間の定義とその性質

まずは, “集合上のものさしもどき” というべき, 外測度を導入する.

定義 3.1 (外測度).

X を集合とし, 2^X を X の部分集合全体のなす集合とする. 2^X 上の関数 m が以下の 3 つの公理 (M'1), (M'2), (M'3) をみたすとき, m を X 上の外測度という.

(M'1) $A \subset X$ に対して $0 \leq m(A) \leq +\infty$ が成り立つ. 特に, $m(\emptyset) = 0$ が成り立つ.

(M'2) $A \subset B \subset X$ のとき, $m(A) \leq m(B)$ が成り立つ.

(M'3) 可算個の $A_n \in 2^X$ に対して, $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ が成り立つ.

外測度の例としては, Lebesgue 外測度や次節で導入する Hausdorff 外測度が挙げられる. 外測度を考える利点としては, 部分集合全体のなす集合上で関数を定義すれば良いということにある. しかし, これでは必ずしも完全加法性が成り立つとは限らないため, “ものさし” として用いることはできない. 但し, 部分集合全体を考えるのではなく, ある条件を満たす特別な部分集合のなす集合に外測度を制限すると, “集合上のものさし” というべき以下で導入する測度になる.

定義 3.2 (測度空間).

X を集合, \mathfrak{M} を 2^X の部分集合とする. \mathfrak{M} が以下の 3 つの公理 (S1), (S2), (S3) をみたすとき, \mathfrak{M} を X 上の σ -加法族という.

(S1) $X \in \mathfrak{M}$ である.

(S2) $E \in \mathfrak{M}$ のとき, $E^c := X \setminus E \in \mathfrak{M}$ が成り立つ.

(S3) 可算個の $E_n \in \mathfrak{M}$ に対して, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$ が成り立つ.

このとき, $E \in \mathfrak{M}$ を \mathfrak{M} -可測集合(または単に可測集合)といい, X と \mathfrak{M} の組 (X, \mathfrak{M}) を可測空間という.

また, 可測空間 (X, \mathfrak{M}) に対して \mathfrak{M} 上の関数 μ が次の 3 つの公理 (M1), (M2), (M3) をみたすとき, μ を (X, \mathfrak{M}) 上の測度という.

(M1) $E \in \mathfrak{M}$ に対して $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$ が成り立つ.

(M2) $\mu(\emptyset) = 0$ が成り立つ.

(M3) 互いに素な可算個の $E_n \in \mathfrak{M}$ に対して, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ が成り立つ.

このとき, 3 つ組 (X, \mathfrak{M}, μ) を測度空間という.

外測度 m から測度空間を構成する場合には, Caratheodory の条件,

$$m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^c) \quad (A \in 2^X)$$

をみたすような $E \in 2^X$ 全体のなす集合上に m を制限すれば良い. または, σ -加法族 \mathfrak{M} の任意の元 E が Caratheodory の条件をみたすような \mathfrak{M} を考えれば良い.

測度空間を考える 1 つの動機として, 測度空間 (X, \mathfrak{M}, μ) 上では X 上のある条件をみたした関数の測度 μ による積分が考えられることが挙げられる. X 上の関数の測度 μ による積分は, 以下のように定義する. まずは, X 上の μ -可測関数を導入する. X 上の実数値関数 f が, 任意の开区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(I) \in \mathfrak{M}$ という条件をみたすとき, f を μ -可測関数という. 次に, 特別な X 上の μ -可測関数である単関数を導入する. X 上の実数値関数 f が, X を被覆している有限個 (N 個) の互いに素な可測集合 $E_n \in \mathfrak{M}$, 即ち,

$$X = \bigcup_{n=1}^N E_n, \quad E_m \cap E_n = \emptyset \quad (m \neq n)$$

をみたすものと N 個の実数 a_n を用いて

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n 1_{E_n}(x), \quad 1_{E_n}(x) := \begin{cases} 1 & x \in E_n \\ 0 & x \notin E_n \end{cases} \quad (3.1)$$

と表示できるとき, f を単関数という. ここで, 次の事実に注意する.

命題 3.3 (可測関数の単関数近似).

f を X 上の非負値 μ -可測関数とする. このとき, X 上の単関数の列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 任意の $x \in X$ に対して,

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq s_n(x) \leq \cdots \leq f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

をみたすものが取れる.

この事実を基に, X 上の非負値 μ -可測関数 f の測度 μ による積分を以下で定める.

定義 3.4 (可測関数の積分).

E を \mathfrak{M} -可測集合とする. f が単関数で式 (3.1) と表示されているとき, f の μ による E 上の積分を

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sum_{n=1}^N a_n \mu(E_n \cap E)$$

で定め, f が X 上の非負値 μ -可測関数のとき, f の μ による E 上の積分を

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sup \left\{ \int_E s(x) d\mu(x) \mid s \text{ は } s \leq f \text{ なる } X \text{ 上の単関数} \right\}$$

で定める.

このようにして関数の積分を定義すると, Lebesgue 積分論でお馴染みの, 単調収束定理 ([13, 定理 H.7]), Fatou の補題 ([13, 定理 H.8]), Lebesgue の収束定理 ([13, 定理 H.9]), Fubini の定理 ([15, 定理 3.35]) が成り立つ.

最後に, Radon–Nikodym の定理を述べる. その準備として, σ -有限の概念を導入する. (X, \mathfrak{M}, μ) を測度空間とする. このとき, μ に対して可算個の $E_n \in \mathfrak{M}$ が

$$\mu(E_n) < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}), \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

をみたすように取れるとき, μ を σ -有限測度という. 特に $\mu(X) < +\infty$ のとき, μ を有限測度という.

定理 3.5 (Radon–Nikodym の定理).

(X, \mathfrak{M}) を可測空間とし, μ, ν を σ -有限な (X, \mathfrak{M}) 上の測度で μ が ν に対して絶対連続, 即ち, $\nu(E) = 0$ なる $E \in \mathfrak{M}$ に対して $\mu(E) = 0$ が成り立つとする. このとき, X 上のある正値 ν -可測関数 f が, 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対して

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\nu(x)$$

をみたすように ν に関してほとんど至るところ一意的に取れる. この f は μ の ν に関する微分を表す関数なので, μ の ν に関する Radon–Nikodym 微分といい, $d\mu/d\nu := f$ と書く.

この Radon–Nikodym 微分は, 通常の 1 変数関数の微分積分学において知られている, 線型性, 合成関数の微分に該当するものをみたす. 即ち, μ, ν, τ を σ -有限な (X, \mathfrak{M}) 上の測度で μ が ν に対して絶対連続であり, ν が τ に対して絶対連続であるとする. このとき,

$$\frac{d(a\mu + b\nu)}{d\tau} = a \frac{d\mu}{d\tau} + b \frac{d\nu}{d\tau}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{d\mu}{d\nu} \frac{d\nu}{d\tau}, \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\frac{d\mu}{d\tau}}{\frac{d\nu}{d\tau}} \quad (a, b > 0)$$

が成り立つ. これは, Radon–Nikodym 微分の一意性から分かる.

3.1.2 距離空間上の Borel 測度と諸定理

ここでは, (X, d) を距離空間とし, X 上の距離 d から生成される位相と関係が深い Borel 可測空間とその上の Borel 測度について考察する.

まず, いくつかの用語を定義する. X 上の σ -加法族 $\mathcal{B}(X)$ を開集合全体のなす集合を含む最小の σ -加法族として定める. これを Borel 加法族といい, 可測集合 $E \in \mathcal{B}(X)$ を Borel 集合という. そして, 2 つ組 $(X, \mathcal{B}(X))$ を Borel 可測空間といい, Borel 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上に測度 μ が与えられているとき, μ を Borel 測度という.

よく使われる Borel 測度には Lebesgue 測度や Hausdorff 測度の他に, 次で定義される点 $x \in X$ に対する Dirac 測度 D_x

$$D_x(E) := \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \quad (E \in \mathcal{B}(X))$$

を足し合わせて構成するものがある. 特に, Dirac 測度に関しては $D_x(\{x\}) = 1$ と 1 点集合を測ることができる. 一般に, 測度 μ が条件 $\mu(x) := \mu(\{x\}) > 0$ をみたすとき, 点 x のことを質点といい, 値 $\mu(x)$ のことを質量という. また, Borel 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の Borel 測度 μ に対して, 補集合を μ で測ると 0 となるような最小の閉集合を μ の台といい, $\text{supp } \mu$ と書く. 例えば, X 上の N 個の元 $\{x_n\}_{n=1}^N$ と実数 $\{a_n\}_{n=1}^N$ に対して, Borel 測度 $\mu := \sum_{n=1}^N a_n D_{x_n}$ を考えると, 各点 x_n が質点であり, 点 x_n を測った値 a_n が質量である. また, μ の台は $\text{supp } \mu = \{x_n\}_{n=1}^N$ となる.

Borel 測度は質点のように測度が集中している点をほとんど至るところに持つ. このような点は密度点と呼ばれ, 以下の定理はその存在を示すものである.

定理 3.6 (密度点の存在 (c.f. Federer [4, p.158])).

Borel 集合 $E \subset X$ に対して

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mu[B_d(x, r) \cap E]}{\mu[B_d(x, r)]} = 1, \quad B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

が, μ に関してほとんど至るところ $x \in E$ で成り立つ. この式をみたす x を μ の密度点という.

Federer [4] では, Radon–Nikodym 微分はほとんど至るところ各点で計算できることが記述されている.

命題 3.7 (c.f. Federer [4, p.155]).

μ, ν を Borel 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の σ -有限な測度で μ が ν に対して絶対連続であるとする. このとき, Radon–Nikodym 微分は

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mu[B_d(x, t)]}{\nu[B_d(x, t)]}$$

と ν に関してほとんど至るところ $x \in X$ について計算できる.

この命題から, “Radon–Nikodym 微分” と呼ばれている理由が伺える.

最後に Helly の選出定理を述べる. この定理は, コンパクト距離空間 X 上の有界測度のなす集合の, 弱位相に関する一種のコンパクト性を主張するものである.

定理 3.8 (Helly の選出定理).

X をコンパクト距離空間とし, $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X 上の非負値 Borel 測度の列で $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(X) < \infty$ をみたすものとする. このとき, ある $\{\mu_n\}$ の部分列 $\{\mu_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ で, ある X 上の Borel 測度 μ に弱収束する, 即ち, X 上の任意の正值連続関数 f に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x) d\mu_{n(k)}(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

が成り立つような $\{\mu_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が取れる.

この定理については, 例えば小谷 [15, 系 4.19] を見よ.

3.2 距離空間上の Hausdorff 測度と Borel 集合の Hausdorff 次元

Klein 群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は集積点集合であり, 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上に複雑な模様を描く. そこで, 集合の複雑さを測る尺度の 1 つとして, 距離空間上の Hausdorff 測度と Borel 集合の Hausdorff 次元を導入する. なお, Hausdorff 次元は空間に対する集合の厚みを表すことにより, 集合の複雑さを表現する. この節の内容に関しては, 新井 [13, 第 14 章, 第 15 章] を参考にまとめた.

命題 3.9 (Hausdorff 外測度).

(X, d) を距離空間, E を X の部分集合とし, $\varepsilon > 0$ をとる. これに対し, E の開被覆で

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_d(x_n, r_n), 0 < r_n < \varepsilon, x_n \in X$$

なる $\{B(x_n, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える. これを, E の ε -被覆という. これを用いて

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_n^s \mid \{B_d(x_n, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ は } E \text{ の } \varepsilon\text{-被覆である} \right\}$$

とおくと, $\mathcal{H}_\varepsilon^s(E)$ は ε に関して単調減少且つ下に有界である. そこで, $s > 0$ に対して

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E)$$

と定めると, \mathcal{H}^s は X 上の外測度となる. これを, s 次元 Hausdorff 外測度という. 更に, 可測集合を X 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}(X)$ に制限すると, 各 Borel 集合は Caratheodory の条件をみたすことから \mathcal{H}^s は X 上の Borel 測度となる.

これらを用いて, 次で Hausdorff 測度と Borel 集合の Hausdorff 次元を定める.

定義 3.10 (距離空間上の Hausdorff 測度と Borel 集合の Hausdorff 次元).

命題 3.9 で構成された X 上の Borel 測度 \mathcal{H}^s を s 次元 Hausdorff 測度という. また, Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(X)$ の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} E$ を

$$\dim_{\mathcal{H}} E := \sup \{s > 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

で定める.

Borel 集合 E の Hausdorff 次元を, s 次元 Hausdorff 測度が発散するような最小の s として定めた. ところが, この次元を少しでも下回ってしまうと E の Hausdorff 測度は 0 となることが分かる. 従って, $\dim_{\mathcal{H}} E = \inf \{s > 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$ が成り立つ. つまり, Hausdorff 次元とは Hausdorff 測度が 0 から ∞ へ飛び移る瞬間の Hausdorff 測度の次元を表している.

以後, Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} 上の s 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^s が \mathbb{R}^{d+1} 上の自己同相写像によってどのように振る舞いを変えるかを考察する. ベクトル $a \in \mathbb{R}^{d+1}$, スカラー $k > 0$, $d+1$ 次直交行列 $A \in O(d+1)$ に対して, a 平行移動 $f_a(x) := x + a$, k 倍 $k(x) := kx$, A 回転 $f_A(x) := Ax$ ($x \in \mathbb{R}^{d+1}$) を考える. このとき, 以下が成り立つ.

公式 3.11 (s 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^s の写像による変換則). \mathbb{R}^{d+1} 上の Borel 集合 E に対して

$$\mathcal{H}^s[f_a(E)] = \mathcal{H}^s(E), \quad \mathcal{H}^s[k(E)] = k^s \mathcal{H}^s(E), \quad \mathcal{H}^s[f_A(E)] = \mathcal{H}^s(E)$$

が成り立つ.

これらは Euclid ノルムが一定の変化率を持つことから分かる. 詳しい証明については, 例えば新井 [13, 第 14 章] を参照せよ. もっと一般に, s 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^s の Möbius 変換による変換則は次で与えられる.

命題 3.12 (s 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^s の Möbius 変換による変換則).

$\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^{d+1}})$ と \mathbb{R}^{d+1} 上の Borel 集合 E で $\gamma(E) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ なるものに対して

$$\mathcal{H}^s[\gamma(E)] = \int_E |\gamma'(x)|^s d\mathcal{H}^s(x)$$

が成り立つ.

特に, $s = d+1$ のときは変換則が Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} 上の Lebesgue 測度の変換則と一致していることが見てとれる. 実際に, Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} 上の Lebesgue 測度 V と $d+1$ 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^s は定数倍の差を除き一意する (新井 [13, p219 定理 14.23]).

3.3 理想境界上の共形測度

この節では, 極限集合のものさしとも言うべき理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の共形測度の導入を行う. $s > 0$ とする.

定義 3.13 (理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の共形測度).

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の測度の族 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ が、任意の $x, x' \in \mathbb{B}$ に対して σ_x と $\sigma_{x'}$ が互いに絶対連続であり、Radon–Nikodym 微分が

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x'}}(\xi) = \left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s$$

をみたすとき、 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元共形測度という。

s 次元共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は単位球モデル \mathbb{B} 上の関数とも思える。それは、Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_\infty)$ に対して以下で定義される関数 σ とみなすことである。

$$\sigma(x) := \sigma_x(E) = \int_E [p(x, \xi)]^s d\sigma_0(\xi) \quad (x \in \mathbb{B})$$

この見方は単位球モデル \mathbb{B} との繋がりを見る上で大変重要であり、詳しく次節で見ていく。次に、Klein 群 Γ に対する不変性を導入する。

定義 3.14 (理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の Γ -不変測度).

Klein 群 Γ に対して理想境界上の測度の族 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ が、任意の $x \in \mathbb{B}$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し、 $\gamma^* \sigma_x = \sigma_{\gamma^{-1}(x)}$ をみたすとき、 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は Γ -不変であるという。

Γ -不変性は引き戻しの定義より、Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_\infty)$ に対して “ x から $\gamma(E)$ を測ることに $\gamma^{-1}(x)$ から E を測ることが同じである” ということを主張している。以後、 Γ -不変な共形測度を考察していく。それに伴い、Klein 群の 3 つ目の指数を導入する。

定義 3.15 (理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度と臨界次元).

Klein 群 Γ に対し、台が極限集合に含まれる Γ -不変な s 次元共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度という。また、臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ を

$$\alpha(\Gamma) := \{s > 0 \mid \text{理想境界 } \mathbb{S}_\infty \text{ 上の } 0 \text{ でない } s \text{ 次元 } \Gamma\text{-不変共形測度が存在する}\}$$

で定める。

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の 0 でない s 次元 Γ -不変共形測度が存在するかどうか、この章における今後の焦点となる。

以下、 s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ の Γ -不変性を考察する。まずは Möbius 変換の拡大率を用いた考察を行う。 Γ -不変と共形性を用いると、 $\gamma \in \Gamma$ と理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の Borel 集合 E に対して

$$\gamma^* \sigma_0(E) = \int_E [p(\gamma^{-1}(0), \xi)]^s d\sigma_0(\xi) = \int_E |\gamma'(\xi)|^s d\sigma_0(\xi)$$

が成り立つ。これは、 $\gamma \in \Gamma$ による変換則が “拡大率の s 乗になる” という主張であり、 s が “次元” と呼ばれる理由である。もっと詳しく、 s 次元 Γ -不変共形測度を “微分” の視点から考察する。それに伴い、共形写像の Riemann 計量による微分を導入する。

定義 3.16 (共形写像の Riemann 計量による微分).

(M, g) を Riemann 多様体とし, f を M 上の自己 C^1 -級写像で g と共形なもの, 即ち, ある M 上の正值連続関数 h で $f^*g = hg$ をみたすものが取れるとする. このとき, f の Riemann 計量 g による微分 $|f'|_g$ を

$$|f'|_g := \sqrt{\frac{f^*g}{g}} := \sqrt{h}$$

で定める.

f の Riemann 計量 g による微分 $|f'|_g$ の各点 $p \in M$ での値は g から導かれる M 上の距離 d を用いて

$$|f'(p)|_g = \lim_{x \rightarrow p} \frac{d(f(x), f(p))}{d(x, p)} := \lim_{d(x, p) \searrow 0} \frac{d(f(x), f(p))}{d(x, p)}$$

と書けることが, 定義から分かる. また, これは写像の合成に関する連鎖律をみたす. 実際に f と φ を g と共形な M 上の自己 C^1 -級写像とすると, ある M 上の正值連続関数 h と \tilde{h} で各点 $p \in M$ に対して $(f^*g)_p = h(p)g_p$ と $(\varphi^*g)_p = \tilde{h}(p)g_p$ をみたすものが取れて

$$((\varphi \circ f)^*g)_p = (f^*(\varphi^*g))_p = h(p)(\varphi^*g)_{f(p)} = h(p)\tilde{h}(f(p))g_{(\varphi \circ f)(p)} \quad (p \in M)$$

となるから

$$|(\varphi \circ f)'(p)|_g = |\varphi'(f(p))|_g |f'(p)|_g \quad (p \in M)$$

が成り立つ. Riemann 計量による微分の例を見ていく.

例 3.17 (Möbius 変換の Euclid 計量による微分).

Möbius 変換 γ の Euclid 計量 $g_{\mathbb{R}}$ による微分 $|\gamma'(p)|_{g_{\mathbb{R}}}$ は拡大率 $|\gamma'(p)|$ に一致する.

例 3.18 (理想境界 \mathbb{S}_{∞} 上の球面計量による微分).

球面計量 $g_0 := g_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{S}_{\infty}}$ から導かれる距離を d_0 と書くと, 2 点 $\xi, \eta \in \mathbb{S}_{\infty}$ の距離 $d_0(\xi, \eta)$ は 2 点 $\xi, \eta \in \mathbb{S}_{\infty}$ を結ぶ弧の長さ $\cos^{-1}(\langle \xi, \eta \rangle)$ となる. これは, 2 ベクトル ξ, η のなす角度でもある. これに対して, Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の球面計量 g_0 による微分 $|\gamma'_0(\xi)| := |\gamma'(\xi)|_{g_0}$ は拡大率 $|\gamma'(\xi)|$ に一致する. 更に, $x \in \mathbb{B}$ に対して新しい球面計量 g_x を, x を 0 に写す Möbius 変換 T_x を用いて $g_x := T_x^*g_0$ で定め, これから導かれる距離を d_x とすると, 2 点 $\xi, \eta \in \mathbb{S}_{\infty}$ の距離 $d_x(\xi, \eta)$ は $d_x(\xi, \eta) = d_0(T_x(\xi), T_x(\eta))$ と書け, Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ の球面計量 g_x による微分 $|\gamma'_x(\xi)| := |\gamma'(\xi)|_{g_x}$ は

$$|\gamma'_x(\xi)| = \lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{d_0(T_x(\xi), T_x(\eta))}{d_0(\xi, \eta)} = \frac{p(\gamma^{-1}(x), \xi)}{p(x, \xi)}$$

と表される.

証明. まず, $|\gamma'_0(\xi)| = |\gamma'(\xi)|$ は球面計量の定義から従う. 2 つ目の主張を示すために, $|\gamma'_x(\xi)|$ を計算する. これは Riemann 計量 g_x が各点 $\xi \in \mathbb{S}_{\infty}$ で $(g_x)_{\xi} = |T'_x(\xi)|^2(g_0)_{\xi} = [p(x, \xi)]^2(g_0)_{\xi}$ と

ることと, 各 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^{d+1}})$, $x \in \mathbb{B}$, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ に対して $p(\gamma^{-1}(x), \xi) = p(x, \gamma(\xi))|\gamma'(x)|$ が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} |\gamma'_x(\xi)| &= \sqrt{\frac{(\gamma^*g_x)_\xi}{(g_x)_\xi}} = \sqrt{\frac{[p(x, \gamma(\xi))]^2(\gamma^*g_0)_\xi}{[p(x, \xi)]^2(g_0)_\xi}} \\ &= \frac{p(x, \gamma(\xi))}{p(x, \xi)} \sqrt{\frac{(\gamma^*g_0)_\xi}{(g_0)_\xi}} = \frac{p(x, \gamma(\xi))}{p(x, \xi)} |\gamma'(\xi)| \\ &= \frac{p(\gamma^{-1}(x), \xi)}{p(x, \xi)} \end{aligned}$$

と計算でき, 主張を得る. □

この微分を用いると, 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度は次の変換則を持つことが分かる.

命題 3.19.

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ と Borel 集合 E に対して

$$\gamma^*\sigma_x(E) = \int_E \left[\frac{p(\gamma^{-1}(x), \xi)}{p(x, \xi)} \right]^s d\sigma_x(\xi) = \int_E |\gamma'_x(\xi)|^s d\sigma_x(\xi)$$

が成り立つ.

一般に, 第 7.1 節において導入される \mathbb{S}_∞ 上の共形力学系 \mathcal{F} に対して, \mathbb{S}_∞ 上の有限 Borel 測度 ν が任意の $f \in \mathcal{F}$ と f を E に制限したときに単射になるような Borel 集合 $E \subset \mathbb{S}_\infty$ に対して変換則

$$f^*\nu(E) = \nu[f(E)] = \int_E |f'(\xi)|_\tau^s d\nu(\xi)$$

をみたすものを s 次元 \mathcal{F} -不変測度という. 但し, τ は標準的な \mathbb{S}_∞ 上の球面計量 g_0 と共形な Riemann 計量である. 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度はこの典型例となっている.

3.4 共形測度と双曲的 Laplace–Beltrami 作用素に対する固有関数

前節で, 共形測度は \mathbb{B} 上の関数としてとらえられることを説明した. この節では, その“関数としてとらえられる”視点から, 共形測度について考察を行う. その前に, 双曲幾何モデル上の双曲的 Laplace–Beltrami 作用素を導入する. なお, この節の内容に関しては主に Ahlfors [1, p.55–71] を参照した.

定義 3.20 (Laplace–Beltrami 作用素).

(M, g) を $d + 1$ 次元 Riemann 多様体とする. このとき, M 上の C^∞ -級関数全体のなす集合 $C^\infty(M)$ に作用する線型作用素 Δ_g を $\Delta_g := \text{div grad}$ で定める. これを, M 上の Laplace–Beltrami 作用素という. なお, Laplace–Beltrami 作用素は M 上の C^2 -級関数全体のなす集合 $C^2(M)$ から M 上の連続関数全体のなす集合 $C^0(M)$ への線型写像ともみなす.

これは、点 $x \in M$ のまわりの局所座標 $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ と M 上の C^2 -級関数 f を用いて

$$\Delta_g(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{n=1}^{d+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \left(\sqrt{g(x)} \sum_{j=1}^{d+1} g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)$$

と書ける。但し、 $\sqrt{g(x)}$ と $g^{ij}(x)$ はそれぞれ $1 \leq i, j \leq d+1$ に対して

$$g_{ij}(x) := g_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}, \quad \sqrt{g(x)} := \sqrt{\det(g_{ij}(x))}$$

で定められる。Laplace–Beltrami 作用素の具体例を見る。

例 3.21 (Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} 上の Laplace 作用素 Δ)。

Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} 上の Laplace–Beltrami 作用素は、Laplace 作用素 $\Delta = \sum \partial^2 / \partial x_i^2$ と一致する。

例 3.22 (双曲幾何モデル $\mathbb{B}^{d+1}, \mathbb{H}^{d+1}$ 上の Laplace–Beltrami 作用素)。

双曲幾何単位球モデル $(\mathbb{B}^{d+1}, g_{\mathbb{B}})$ 上の Laplace–Beltrami 作用素は

$$\Delta_{g_{\mathbb{B}}} = \frac{(1-r^2)^2}{4} \left[\Delta + \frac{2(d-1)r}{1-r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right]$$

で与えられる。但し、原点中心の極座標表示を行った。また、双曲幾何上半空間モデル $(\mathbb{H}^{d+1}, g_{\mathbb{H}})$ 上の Laplace–Beltrami 作用素は

$$\Delta_{g_{\mathbb{H}}} = x_{d+1}^2 \left[\Delta - \frac{d-1}{x_{d+1}} \frac{\partial}{\partial x_{d+1}} \right]$$

と書ける。但し、座標は $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ と書いた。

定義 3.23 (Laplace–Beltrami 作用素 Δ_h)。

$(\mathbb{B}^{d+1}, g_{\mathbb{B}})$ 上の Laplace–Beltrami 作用素 $\Delta_{g_{\mathbb{B}}}$ と $(\mathbb{H}^{d+1}, g_{\mathbb{H}})$ 上の Laplace–Beltrami 作用素 $\Delta_{g_{\mathbb{H}}}$ を双曲的 Laplace–Beltrami 作用素といい、 Δ_h と書く。また、 \mathbb{B}^{d+1} の領域 Ω 上の C^2 -級関数 f が Ω 上で $\Delta_h(f) = 0$ をみたすとき、 f を Ω 上の双曲的調和関数という。 \mathbb{H}^{d+1} においても同様に、双曲的調和関数を定める。

Δ_h の定義から、双曲幾何モデル $\mathbb{B}^{d+1}, \mathbb{H}^{d+1}$ の計量を保つような座標の取り方によらないことが分かるから、各 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ と \mathbb{B}^{d+1} 上の C^2 -級関数 f に対して、 $\Delta_h(f \circ \gamma) = (\Delta_h f) \circ \gamma$ が成り立つ。特に、 f が \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的調和関数であるとき、各 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ に対する合成関数 $f \circ \gamma$ も \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的調和関数になる。

例 3.24 (双曲的調和測度)。

\mathbb{S}^d 上の面積要素 dA とそれに対する \mathbb{S}^d 上の L^1 -関数 f を用いて、 \mathbb{B}^{d+1} 上の有限 Borel 測度の族 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}^{d+1}}$ を、 $d\sigma_x(\xi) := [p(x, \xi)]^d f(\xi) dA(\xi)$ で定め、 \mathbb{B}^{d+1} 上の関数 σ を $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対して $\sigma(x) := \sigma_x(\mathbb{S}^d)$ で定める。このとき、 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}^{d+1}}$ は d 次元共形測度であり、 σ は \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的

調和関数となる. このようにして定められる \mathbb{B}^{d+1} 上の有限 Borel 測度の族 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}^{d+1}}$ を \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的調和測度という. また, 各 $\eta \in \mathbb{S}^d$ に対して x をある円錐領域 $\text{Cone}(\eta, \theta)$ の中から η に近づけると, $\sigma(x) \rightarrow \text{Area}(\mathbb{S}^d)f(\eta)$ となることが知られている (Ahlfors [1, p.69]).

例 3.24 で定めた関数 σ が実際に \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的調和関数となることを確認するには, 次の定理を用いれば良い.

定理 3.25 (双曲的 Laplace 作用素の固有値と固有関数).

各 $\xi \in \mathbb{S}^d$ と $s \in \mathbb{R}$ に対して, Poisson 核 $p(\cdot, \xi)^s$ を \mathbb{B}^{d+1} 上の関数とみなす. このとき, \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的 Laplace–Beltrami 作用素 Δ_h に対する固有値 $s(s-d)$ の固有関数となる. また, \mathbb{H}^{d+1} 上の座標関数 x_{d+1}^s は \mathbb{H}^{d+1} 上の固有値 $s(s-d)$ の固有関数となる.

証明. Ahlfors [1, §5.8] または Nicholls [10, Theorem 5.1.3] を参照. □

この定理から, \mathbb{B}^{d+1} 上の関数 $\sigma(x) = \sigma_x(\mathbb{S}^d)$ が固有値 $s(s-d)$ の固有関数となることが分かる. これは s 次元共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}^{d+1}}$ を考える理由の 1 つとして挙げられる.

3.5 発散型 Klein 群の Patterson–Sullivan 測度

この節では, 発散型 Klein 群 Γ に対して理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度を構成する. なお, 収束型 Klein 群においても, 以下の議論を少し修正すれば, 同様の性質を持つ $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度が得られる.

3.5.1 有限 Borel 測度 $\mu_{x,s}$ 構成

$x, y \in \mathbb{B}$, $s > \delta(\Gamma)$ とする. このとき, $0 < P^s(\Gamma; x, y) < \infty$ に注意する. まずは以下で定義するように, $\Gamma(x)$ の各点 $\gamma(y)$ に重み $e^{-s\rho(x, \gamma(y))}/P^s(\Gamma; y, y)$ を付けた Dirac 測度 $D_{\gamma(y)}$ を足し合わせることで, $\overline{\mathbb{B}}$ 上の有限 Borel 測度 $\mu_{y;x,s}$ を構成する. つまり $\mu_{y;x,s}$ を

$$\mu_{y;x,s} := \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-s\rho(x, \gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} D_{\gamma(y)}$$

で定める. このとき全測度は, $\mu_{y;x,s}(\overline{\mathbb{B}}) = P^s(\Gamma; x, y)/P^s(\Gamma; y, y)$ より有限となる. 特に, $x = y$ のとき, $\mu_{x;x,s}$ は確率 Borel 測度となる.

注意 3.26. 以後, y は 1 つ固定して議論を進める. それに伴い, $\mu_{y;x,s}$ は $\mu_{x,s}$ と書く.

3.5.2 有限 Borel 測度 $\mu_{x,s}$ の基点 x の取り替え

ここでは、 $s > \delta(\Gamma)$ なる s を 1 つ固定して、 $x \in \mathbb{B}$ を取り替えたときの振る舞いを考察する。まずは、 $x, x' \in \mathbb{B}$ に対して $\mu_{x,s}$ と $\mu_{x',s}$ が比較可能なことを見る。実際に、三角不等式により

$$\mu_{x,s} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-s\rho(x,\gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} D_{\gamma(y)} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-s\rho(x',\gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} e^{s\rho(x,x')} D_{\gamma(y)} = e^{s\rho(x,x')} \mu_{x',s} \quad (3.2)$$

となるから、 $\mu_{x,s} \asymp \mu_{x',s}$ が成り立つ。但し、比較定数として \mathbb{S}_∞ 上の Borel 集合によらない $e^{s\rho(x,x')}$ が取れる点に注意する。なお、 $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ のまわりでは次のような比較ができる。

命題 3.27 (基点の取り替え).

$x, x' \in \mathbb{B}$, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$, $t > 0$ とし、Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{B}})$ に対し、 $E(t) := E \cap B(\xi, t)$ とおく。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $t_0 > 0$ が、 $0 < t < t_0$ なる任意の t に対し、

$$\left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s - \varepsilon \right] \mu_{x',s}[E(t)] \leq \mu_{x,s}[E(t)] \leq \left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s + \varepsilon \right] \mu_{x',s}[E(t)]$$

が成り立つように取れる。

証明. まず、 $x, x', z \in \mathbb{B}$, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ に対して、 $z \rightarrow \xi$ のときの $e^{-\rho(x,z)}/e^{-\rho(x',z)}$ の挙動は

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{e^{-\rho(x',z)}}{e^{-\rho(x,z)}} = \frac{p(x', \xi)}{p(x, \xi)} \quad (3.3)$$

で与えられることに注意する。これは、公式 1.25 を用いた初等的な計算によって確かめられる。Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{B}})$ に対して 1_E を E に関する定義関数とすると

$$\begin{aligned} \mu_{x,s}[E(t)] &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-s\rho(x,\gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} 1_{E(t)}(\gamma(y)) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma; \gamma(y) \in B(\xi, t)} \frac{e^{-s\rho(x,\gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} 1_E(\gamma(y)) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma; \gamma(y) \in B(\xi, t)} \frac{e^{-s\rho(x,\gamma(y))}}{e^{-s\rho(x',\gamma(y))}} \frac{e^{-s\rho(x',\gamma(y))}}{P^s(\Gamma; y, y)} 1_E(\gamma(y)) \end{aligned}$$

となる。ここで式 (3.3) より、 $\varepsilon > 0$ に対して $t_0 > 0$ で、 $0 < t < t_0$ なる t と $\gamma(y) \in B(\xi, t)$ なる $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s - \varepsilon < \frac{e^{-s\rho(x,\gamma(y))}}{e^{-s\rho(x',\gamma(y))}} < \left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s + \varepsilon$$

が成り立つものが取れる。上式の左辺と右辺は $\gamma \in \Gamma$ によらないので、 $0 < t < t_0$ なる t に対して

$$\left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s - \varepsilon \right] \mu_{x',s}[E(t)] \leq \mu_{x,s}[E(t)] \leq \left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s + \varepsilon \right] \mu_{x',s}[E(t)]$$

が成り立つ。 □

次の系は, この命題より直ちに導かれる.

系 3.28.

記号は命題 3.27 の仮定にあるものに準ずる. このとき,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mu_{x,s}[E(t)]}{\mu_{x',s}[E(t)]} = \left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^s$$

が成り立つ.

また, x' の特別な場合として, x の Γ -軌道 $\Gamma(x)$ 上にある場合を考察する.

命題 3.29.

任意の $x \in \mathbb{B}$, $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\gamma^* \mu_{x,s} = \mu_{\gamma^{-1}(x),s}$ が成り立つ.

証明. 初等的な計算による. □

3.5.3 Patterson–Sullivan 測度の定義とその性質

発散型 Klein 群 Γ に対して, Patterson–Sullivan 測度を構成する. まず, $\delta(\Gamma) < s_n < \delta(\Gamma) + 1$ 且つ $n \rightarrow \infty$ に対して $s_n \searrow \delta(\Gamma)$ をみたす数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を一つ取り, 確率 Borel 測度の列 $\{\mu_{y,s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える. このとき, 定理 3.8 より, 対応する測度が弱収束するような $\{s_n\}$ の部分列が取れる. この弱収束極限となる確率 Borel 測度を $\tilde{\mu}$ と書く. また, 記号の煩雑を防ぐために, このとき取った $\{s_n\}$ の部分列を改めて $\{s_n\}$ と書く.

$\tilde{\mu}$ は $\overline{\mathbb{B}}$ 上の確率 Borel 測度の弱収束極限として定めたが, これは理想境界 S_∞ 上の確率 Borel 測度として見るができる. 実際にもっと強い, 極限集合上に台を持つことが分かる.

定理 3.30 ($\tilde{\mu}$ の台).

$\tilde{\mu}$ は極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ 上に台を持つ.

証明. 示したいことは, 極限点を含まない任意の開集合 $U \subset \overline{\mathbb{B}}$ に対して $\tilde{\mu}(U) = 0$ となることである. ところで, Γ は集合 $\mathbb{B} \cup \Omega(\Gamma)$ に真性不連続に作用しているので, 固定されている $y \in \mathbb{B}$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して, U として $U = B(\gamma(y), r) \cap \overline{\mathbb{B}}$ の形で $\gamma(y)$ 以外に Γ -軌道 $\Gamma(y)$ の元を含まないようなものを考えれば十分である. 今, 測度の弱収束性により

$$\tilde{\mu}(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{y,s_n}(U) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-s_n \rho(y, \gamma(y))}}{P^{s_n}(\Gamma; y, y)} 1_U(\gamma(y)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-s_n \rho(y, \gamma(y))}}{P^{s_n}(\Gamma; y, y)}$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{s_n}(\Gamma; y, y) = \infty$$

を示せばよい. ここで, $\lambda_n := \rho(y, \gamma_n(y))$ が n について広義単調増加になるように $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と番号付けを行い, Dirichlet 級数 $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n z}$ を考える. 但し, z は複素変数とする. なお, 以下の議論は Titchmarsh [12, p.290–294] による. このとき, $f(z)$ は領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \delta(\Gamma)\}$

上正則であり, 点 $\delta(\Gamma)$ は f の特異点となる. 従って, $n \rightarrow \infty$ に対して $P^{s_n}(\Gamma; y, y) = f(s_n) \rightarrow \infty$ となるので, 証明が完了する. \square

この $\tilde{\mu}$ を用いて, Patterson–Sullivan 測度を定める.

定義 3.31 (Patterson–Sullivan 測度).

この確率 Borel 測度 $\tilde{\mu}$ を用いて, 極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ 上に台を持つ理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の有限 Borel 測度の族 $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を, 理想境界上の Borel 集合 E と $x \in \mathbb{B}$ に対して

$$\mu_x(E) := \int_E \left[\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right]^{\delta(\Gamma)} d\tilde{\mu}(\xi)$$

で定める. このように定義される $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を *Patterson–Sullivan 測度* という. また, 有限 Borel 測度 $\mu := \mu_0$ を *Patterson–Sullivan 測度* と呼ぶこともある.

注意 3.32. 一般に, Patterson–Sullivan 測度 $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は一意に定まらない.

以後, Patterson–Sullivan 測度 $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ が 0 でない $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度となることを見る. 0 でないことは $\tilde{\mu}$ が確率 Borel 測度であることから従い, 台が極限集合に含まれることは既に見た. まずは, $\delta(\Gamma)$ 次元共形測度であることを見る. これは, Patterson–Sullivan 測度の定義 3.31 より直ちに従う.

定理 3.33 (共形性).

任意の 2 点 $x, x' \in \mathbb{B}$ に対して μ_x と $\mu_{x'}$ は互いに絶対連続であり, Radon–Nikodym 微分は

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_{x'}}(\xi) = \left(\frac{p(x, \xi)}{p(x', \xi)} \right)^\delta$$

となる. 但し, $\delta := \delta(\Gamma)$ である.

次に, Γ -不変性を見る. そのために, 各 μ_x は μ_{x, s_n} の弱収束極限としてとらえられることを見る. この際, s が有界な範囲 $\delta(\Gamma) < s < \delta(\Gamma) + 1$ しか動かないとすれば, $\mu_{x, s}$ の全測度 $\mu_{y, s}(\overline{\mathbb{B}})$ は s によらず一様に押さえられることに注意する. 実際に, 式 (3.2) より

$$\mu_{x, s}(\overline{\mathbb{B}}) \leq e^{s\rho(x, y)} \mu_{y, s}(\overline{\mathbb{B}}) = e^{s\rho(x, y)}$$

が成り立つ. これにより, 一般の $x \in \mathbb{B}$ に対しても定理 3.8 が適用可能であることが分かる. このことを, 次の定理の証明の中で用いる.

定理 3.34.

任意の $x \in \mathbb{B}$ に対し, μ_{x, s_n} は μ_x に弱収束する.

証明. 命題 3.27 より $\varepsilon > 0$ に対して $t_0 > 0$ が, $0 < t < t_0$ なる任意の t に対して

$$\left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^s - \varepsilon \right] \mu_{y, s}[E(t)] \leq \mu_{x, s}[E(t)] \leq \left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^s + \varepsilon \right] \mu_{y, s}[E(t)] \quad (3.4)$$

が成り立つように取れることに注意する. $\{s_{n(i)}\}$ と $\{s_{n(j)}\}$ を $\{s_n\}$ の部分列で, 有限 Borel 測度の列 $\{\mu_{x,s_{n(i)}}\}$ と $\{\mu_{x,s_{n(j)}}\}$ がそれぞれ, ある有限 Borel 測度 ν_x と σ_x に弱収束するものとする. 但し, 弱収束するような部分列の取り方によらないことも見るために 2 つの部分列を取った. このとき, 弱収束性から

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{x,s_{n(i)}}[E(t)] = \nu_x[E(t)]$$

などが成り立つため, 式 (3.4) より

$$\left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^\delta - \varepsilon \right] \tilde{\mu}[E(t)] \leq \nu_x[E(t)] \leq \left[\left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^\delta + \varepsilon \right] \tilde{\mu}[E(t)] \quad (3.5)$$

が成り立つ. ところで, $\tilde{\mu}(E) = 0$ なる Borel 集合 E に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\mu}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{y,s_n}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{y,s_{n(i)}}(E) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} e^{s_{n(i)}\rho(x,y)} \mu_{x,s_{n(i)}}(E) \\ &= e^{\delta\rho(x,y)} \nu_x(E) \quad (\delta := \delta(\Gamma)) \end{aligned}$$

より, $\nu_x(E) = 0$ が分かる. 従って, $\tilde{\mu}$ は ν_x に対して絶対連続である. 従って, 定理 3.5 より Radon–Nikodym 微分の存在が分かり, 命題 3.7 と式 (3.5) より

$$\frac{d\sigma_x}{d\tilde{\mu}}(\xi) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\sigma_x[E(t)]}{\tilde{\mu}[E(t)]} = \left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^\delta$$

が分かる. σ_x についても同様に議論を進めると

$$\frac{d\mu_x}{d\tilde{\mu}}(\xi) = \frac{d\nu_x}{d\tilde{\mu}}(\xi) = \frac{d\sigma_x}{d\tilde{\mu}}(\xi) = \left(\frac{p(x, \xi)}{p(y, \xi)} \right)^\delta$$

が分かる. よって Radon–Nikodym 微分の一意性より, $\mu_x = \sigma_x = \nu_x$ が分かる. 故に, μ_{x,s_n} は μ_x に弱収束することが分かった. \square

これにより, μ_{x,s_n} における Γ -不変性から μ_x の Γ -不変性が引き継がれることが分かる.

定理 3.35 (Γ -不変性).

任意の $x \in \mathbb{B}$, $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\gamma^* \mu_x = \mu_{\gamma^{-1}(x)}$ が成り立つ.

証明. $x \in \mathbb{B}$, $\gamma \in \Gamma$ とする. 命題 3.29 と定理 3.34 を用いると

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma^{-1}(x)}(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\gamma^{-1}(x), s_n}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^* \mu_{x, s_n}(E) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{x, s_n}[\gamma(E)] = \mu_x[\gamma(E)] \\ &= \gamma^* \mu_x(E) \end{aligned}$$

となり, 主張を得る. \square

以上で, 次が分かった.

系 3.36 (臨界次元と収束指数の関係).

Patterson–Sullivan 測度 $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は δ 次元 Γ -不変共形測度である. 従って, $\alpha(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ が成り立つ.

3.6 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度の性質

この節では, Klein 群 Γ に対する理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度のエルゴード性にまつわるいくつかの性質を紹介する. まずは, 群作用に関するエルゴード性を導入する.

定義 3.37 (群作用に関するエルゴード性).

(X, \mathfrak{M}, ν) を測度空間とし, 集合 X に群 G が作用しているとする. このとき, G が測度 ν に関してエルゴード性を持つ, または G が測度空間 (X, \mathfrak{M}, ν) にエルゴード的に作用するとは, \mathfrak{M} -可測集合 $E \subset X$ で G -不変なもの, 即ち, 任意の $g \in G$ に対して $g(E) = E$ が成り立つようなものに対して, $\nu(E) = 0$ か $\nu(X \setminus E) = 0$ のいずれかが成り立つことをいう. また, 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ がエルゴード性を持つとは, 任意の $x \in \mathbb{B}$ に対して Γ が σ_x に対してエルゴード性を持つことをいう.

測度空間 (X, \mathfrak{M}, ν) に群 G がエルゴード的に作用するとき, G -不変な \mathfrak{M} -可測集合は ν で見ると本当に薄い集合かその逆のどちらかであることを主張する性質である. 次の命題はその様子を物語っている.

命題 3.38.

測度空間 (X, \mathfrak{M}, ν) に群 G がエルゴード的に作用すると仮定する. このとき, X 上の任意の G -不変な ν -可測関数 f は ν に対してほとんど至るところ定数関数である.

証明. 対偶を証明する. X 上の G -不変な ν -可測関数 f で “ほとんど至るところ定数関数でないもの” とする. このとき, $M > 0$ が \mathfrak{M} -可測集合 $E^+ := \{x \in X \mid f(x) > M\}$ と $E^- := \{x \in X \mid f(x) \leq M\}$ に対して $\nu(E^+), \nu(E^-) > 0$ となるように取れる. この E^+ と E^- は作り方から G -不変なので, G は ν に関してエルゴード性を持たないことが分かる. \square

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度の考察に戻る. まずは, s 次元 Γ -不変共形測度がエルゴード性を持つことと一意性を持つことは同値であることを見る.

定理 3.39 (s 次元 Γ -不変共形測度のエルゴード性と一意性).

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ がエルゴード性を持つことと定数倍を除き一意であることは同値である.

証明の概略. まず必要性を示す. 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ がエルゴード性を持つと仮定する. また, ν_x も s 次元 Γ -不変共形測度であると仮定する. これに対して有限 Borel 測度 π_x を $\pi_x := (\sigma_x + \nu_x)/2$ で定めると, Radon–Nikodym 微分の性質よりこれも s 次元

Γ -不変共形測度となることが分かる. 更に, 定義の仕方から σ_x と ν_x は π_x について絶対連続であることが分かる. このとき, これらの Radon–Nikodym 微分が Γ -不変となり, 命題 3.38 から 2 つの Radon–Nikodym 微分 $(d\sigma_x/d\pi_x)(\xi)$, $(d\nu_x/d\pi_x)(\xi)$ は π_x についてほとんど至るところ定数関数であることが分かる. これより, Radon–Nikodym 微分の性質を用いると, ν_x は σ_x の定数倍であることが分かる.

次に十分性を対偶を用いて示す. 理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ がエルゴード性を持たないと仮定する. このとき, Γ -不変な Borel 集合 $\tilde{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_\infty)$ で, 任意の $x \in \mathbb{B}$ に対して $\sigma_x(\tilde{E}) > 0$, $\sigma_x(\mathbb{S}_\infty \setminus \tilde{E}) > 0$ をみたすものが取れる. これを用いて, 有限 Borel 測度 ν_x を σ_x の \tilde{E} への制限 $\nu_x := \sigma_x|_{\tilde{E}}$ として定める. この $\{\nu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は s 次元 Γ -不変共形測度であることが分かる.

以上で, 主張は示された. 詳しくは, Nicholls [10, Theorem 4.2.1] を参照. \square

次に, どんな s 次元 Γ -不変共形測度に対しても円錐型極限集合への Γ の作用はエルゴード的であることを見る. そのために, 補題を用意する.

補題 3.40 (Nicholls [10, Lemma 4.3.3]).

任意の $c > 0$ に対して定数 $a > 0$ が, $\rho(0, \gamma(0)) \geq c$ なる任意の $\gamma \in \Gamma$ と $\eta \in b(0; \gamma(0), c)$ に対して

$$\frac{a}{1 - \|\gamma(0)\|} \leq p(\gamma(0), \eta) \leq \frac{2}{1 - \|\gamma(0)\|}$$

が成り立つように取れる.

Γ は円錐型極限集合に対してエルゴード的に作用することを見る.

定理 3.41 (s 次元 Γ -不変共形測度の円錐型極限集合への作用).

理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は円錐型極限集合 $\Lambda_c := \Lambda_c(\Gamma)$ にエルゴード的に作用する. 即ち, 任意の $x \in \mathbb{B}$ と Γ -不変な円錐型極限集合上の Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\Lambda_c)$ に対して, $\sigma_x(E) = 0$ か $\sigma_x(\Lambda_c \setminus E) = 0$ のいずれかが成り立つ.

証明. $E \in \mathcal{B}(\Lambda_c)$ を Γ -不変な円錐型極限集合上の Borel 集合とする. これに対して, $\sigma_x(E) = 0$ なら示すことはないので $\sigma_x(E) > 0$ として $\sigma_x(E) = \sigma_x(\mathbb{S}_\infty)$ を示せばよい. 以下, $x = 0$ として議論を進める. 一般の x の場合も同様に証明できる. σ_0 に対する密度点 $\xi \in E$ を取ると ξ は円錐型極限点でもあるので, 以下をみたす列 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ が取れる.

- 任意の $c > 0$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap E]}{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)} = 1$
- 点列 $\{\gamma_n^{-1}(0)\}$ は, ξ を頂点に持つある円錐領域の中から ξ に収束する.
- 点列 $\{\gamma_n(0)\}$ はある $\xi' \in \mathbb{S}_\infty$ に収束する.

今, $\lambda := \max \{\sigma_0(\eta) \mid \eta \in \Lambda_c(\Gamma)\}$ とおく. なお, $\max \{\sigma_0(\eta) \mid \eta \in \Lambda_c(\Gamma)\}$ は存在する. もし存在しないとすると, σ_0 が有限測度であることに反する. このとき,

$$\lim_{r \searrow 0} \sigma_0[B_{d_0}(\xi', r)] = \sigma_0(\xi') \leq \lambda$$

が成り立つ. ここで, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $r > 0$ が $\sigma_0[B_{d_0}(\xi', r)] - \sigma_0(\xi') < \varepsilon$ をみたすように取れるので, $\sigma_0[B_{d_0}(\xi', r)] \leq \lambda + \varepsilon$ が成り立つ. また, $c > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ を, $n > N$ に対して $\mathbb{S}_\infty \setminus b(\gamma_n(0); 0, c) \subset B_{d_0}(\xi', r)$ が成り立つように取ると (図 19)

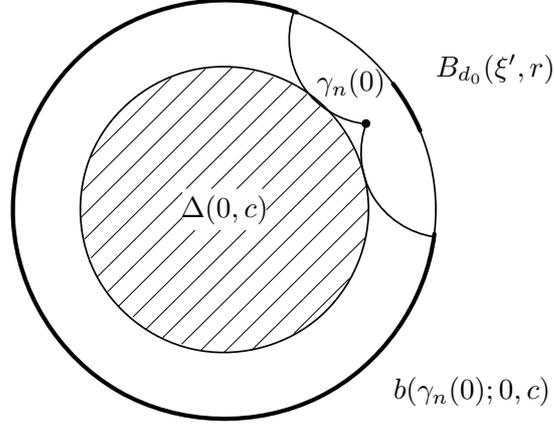


図 19 $\mathbb{S}_\infty \setminus b(\gamma_n(0); 0, c) \subset B_{d_0}(\xi', r)$

$$\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c)] \geq \sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \sigma_0[B_{d_0}(\xi', r)] \geq \sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \lambda - \varepsilon$$

が $n > N$ に対して成り立つ. 従って, $b(\gamma_n(0); 0, c) = \gamma_n(b(0; \gamma_n^{-1}(0), c))$ が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c) \cap E]}{\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c)]} &= \frac{\sigma_{\gamma_n^{-1}(0)}[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap E]}{\sigma_{\gamma_n^{-1}(0)}[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)]} \\ &= \frac{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap E} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)}{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)} \\ &= 1 - \frac{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus E)} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)}{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)} \\ &= 1 - \frac{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus E)} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)}{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)} [p(\gamma_n^{-1}(0), \eta)]^s d\sigma_0(\eta)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &\geq 1 - \frac{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus E)} [2(1 - \|\gamma_n^{-1}(0)\|)^{-1}]^s d\sigma_0(\eta)}{\int_{b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)} [a(1 - \|\gamma_n^{-1}(0)\|)^{-1}]^s d\sigma_0(\eta)} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{a}\right)^s \frac{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus E)]}{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)]} \end{aligned} \quad (3.7)$$

を得る. 但し, 式 (3.6) を式 (3.7) で評価する際に補題 3.40 を使用した. ところで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus E)]}{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)]} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c) \cap E]}{\sigma_0[b(0; \gamma_n^{-1}(0), c)]} = 0$$

に注意すると, 必要ならば N を大きく取り直して, $n > N$ に対して

$$\frac{\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c) \cap E]}{\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c)]} \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとして良い. 以上より,

$$\begin{aligned} \sigma_0(E) &\geq \sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c) \cap E] \geq (1 - \varepsilon)\sigma_0[b(\gamma_n(0); 0, c)] \\ &\geq (1 - \varepsilon)(\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \lambda - \varepsilon) \end{aligned}$$

となり, $\varepsilon \searrow 0$ として $\sigma_0(E) \geq \sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \lambda$ を得る. しかし, 円錐型極限集合上質点を持たない (c.f. Nicholls [10, Theorem 3.5.3]) ので $\lambda = 0$ であり, $\sigma_0(E) \geq \sigma_0(\mathbb{S}_\infty)$ となって主張を得る. \square

この定理は, Γ -不変な Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\Lambda_c)$ は σ_x で見ると本当に薄い集合か円錐型極限集合とほとんど差がないかのどちらかであることを主張している.

4 Klein 群に対する各種指数の関係

以降, 特に断らない限り *Klein* 群 Γ は非初等的であると仮定する. この章では, Klein 群 Γ に対する 3 つの指数である, 収束指数 $\delta(\Gamma)$, 臨界次元 $\alpha(\Gamma)$, 円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ の間の関係を見いだすための強力な 2 つの道具を用意する. 1 つ目は影の補題と呼ばれる定理であり, 2 つ目は軌道数え上げ関数である. そしてこれらの道具を用いて, 任意の Klein 群 Γ に対して 3 つの指数の間に

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$$

なる関係が成り立つことを見る. なお上式の不等号について, Nicholls [10] では凸コンパクト Klein 群や幾何的有限 Klein 群に対して等号が成り立つことが, Bishop–Jones [3] では一般の Klein 群に対して等号が成り立つことが示されている.

4.1 影の補題と発散型 Klein 群

この節では, 影の補題と呼ばれる強力な定理の主張を述べ, 証明する. この定理は影の s 次元 Γ -不変共形測度が影の半径 r の s 乗と比較可能であることを主張するものであり, この章と次の章の至る所で活躍するため, 欠かせないものである. そして, 系として分かる Poincaré 級数の収束と円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の共形測度の関係について触れる. 更に, 凸コンパクト Klein 群と幾何的有限 Klein 群が発散型となることを証明する.

定理 4.1 (影の補題).

Klein 群 Γ に対して $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を質点 1 点のみからならない, 即ち, $\sigma_0(\xi) = \sigma_0(\mathbb{S}_\infty)$ なる $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ は存在しない s 次元 Γ -不変共形測度とする. このとき, 定数 $a, A, C > 0$ が, 任意の $c > C$ に対して

$$a < \frac{\sigma_0(b(0; \gamma(0), c))}{[r(0; \gamma(0), c)]^s} < A$$

が, 有限個の $\gamma \in \Gamma$ を除いて成り立つように取れる. 但し, $x, y \in \mathbb{B}$, $c > 0$ に対する $r(x; y, c)$ とは影 $b(x; y, c)$ の球面距離 d_x による半径 (図 20) のことであり,

$$\tan r(x; y, c) = \frac{\tanh c(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}{2\|y\| \|x - y\| \|x - y^*\|} \quad (y \neq 0)$$

と書けることが, 双曲三角法を用いると分かる.

注意 4.2. 0 を x に置き換えた同様の評価が成り立つ. 但し, 定数 $a, A, C > 0$ は x による.

注意 4.3. 定理の仮定をみたらような共形測度は, Klein 群が非初等的のときは必ず存在する. 例えば, Patterson–Sullivan 測度がそうである.

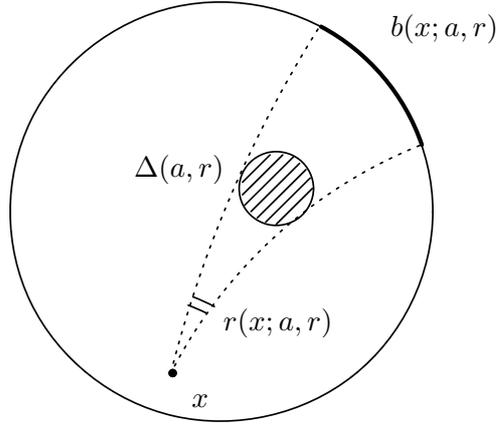


図 20 $r(x; y, c)$

証明. まず,

$$\lambda := \frac{\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) + \sigma_0(\eta)}{2}, \quad \sigma_0(\eta) = \max_{\xi \in \mathbb{S}_\infty} \sigma_0(\xi)$$

とおく. なお, $\max \sigma_0(\xi)$ は存在する. もし存在しないとすると, σ_0 が有限測度であることに反する. このとき, σ_0 は質点 1 つからなるものではないので, $\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) > \sigma_0(\eta)$, 即ち, $\lambda > \sigma_0(\eta)$ が成り立つ.

ここで, もし $\varepsilon_n \searrow 0$ なる数列 $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と点列 $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}_\infty$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\sigma_0[B_{d_0}(\xi_n, \varepsilon_n)] > \lambda$ をみたすものが取れたとする. これに対し, 必要ならば $\{\xi_n\}$ の部分列を取ることにより, ある $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ に収束するとして良い. このとき, $\sigma_0(\xi) \geq \lambda$ が成り立つが, これは $\lambda > \sigma_0(\eta)$ に反する. 従って $\varepsilon > 0$ で, 任意の $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ に対して $\sigma_0[B_{d_0}(\xi, \varepsilon)] \leq \lambda$ が成り立つものが取れる.

更に, $\rho(z, 0) > C$ なる任意の $z \in \mathbb{B}$ に対し, $[\mathbb{S}_\infty \setminus b(z; 0, C)] \subset B_{d_0}(\xi_z, \varepsilon)$ をみたすような $\xi_z \in \mathbb{S}_\infty$ が取れるように, $C > 0$ を取る (c.f. 図 19). このとき, $\rho(\gamma(0), 0) > C$ なる $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \sigma_0[b(\gamma(0); 0, c)] = \sigma_0[\mathbb{S}_\infty \setminus b(\gamma(0); 0, c)] \leq \sigma_0[B_{d_0}(\xi_{\gamma(0)}, \varepsilon)] \leq \lambda$$

となり,

$$\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) - \lambda \leq \sigma_0[b(\gamma(0); 0, c)] \leq \sigma_0(\mathbb{S}_\infty) \quad (4.1)$$

を得る. ところで,

$$\begin{aligned} & \sigma_0[b(\gamma(0); 0, c)] \\ &= \sigma_0[\gamma(b(0; \gamma^{-1}(0), c))] = \sigma_{\gamma^{-1}(0)}[b(0; \gamma^{-1}(0), c)] \\ &= \int_{b(0; \gamma^{-1}(0), c)} \frac{d\sigma_{\gamma^{-1}(0)}(\xi)}{d\sigma_0}(\xi) d\sigma_0(\xi) = \int_{b(0; \gamma^{-1}(0), c)} \left[\frac{P(\gamma^{-1}(0), \xi)}{P(0, \xi)} \right]^s d\sigma_0(\xi) \\ &\asymp \int_{b(0; \gamma^{-1}(0), c)} \left[\frac{1}{1 - \|\gamma^{-1}(0)\|} \right]^s d\sigma_0(\xi) = \frac{\sigma_0[b(0; \gamma^{-1}(0), c)]}{(1 - \|\gamma^{-1}(0)\|)^s} \end{aligned}$$

となることに注意すると, 式 (4.1) よりある定数 $a', A' > 0$ が, $\rho(\gamma(0), 0) > C$ なる $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$a' < \frac{\sigma_0[b(0; \gamma^{-1}(0), c)]}{[r(0; \gamma^{-1}(0), c)]^s} < A' \quad (4.2)$$

をみたすように取れる. また, $1 - \|\gamma^{-1}(0)\|$ と $r(0; \gamma^{-1}(0), c)$ が $\rho(\gamma(0), 0) > C$ なる $\gamma \in \Gamma$ によらず比較可能である (Nicholls [10, Lemma 4.4.4]) ことから, ある定数 $a, A > 0$ が,

$$a < \frac{\sigma_0[b(0; \gamma^{-1}(0), c)]}{[r(0; \gamma^{-1}(0), c)]^s} < A$$

をみたすように取れることが分かる. 故に, 主張を得る. \square

この定理の系として, 次の Poincaré 級数の収束と円錐型極限集合の Γ -不変共形測度に関する定理を得る.

定理 4.4.

Klein 群 Γ に対して $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とする. また, Poincaré 級数 $P^s(\Gamma)$ が収束すると仮定する. このとき, 円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ に対して, $\sigma_x[\Lambda_c(\Gamma)] = 0$ が成り立つ.

証明. まず, $\rho(0, \gamma_n(0))$ が n について広義単調増加になるように $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と番号付ける. また, 式 (2.5) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \|\gamma_n(0)\|)^s = \tilde{P}^s(\Gamma) \asymp P^s(\Gamma) < \infty$$

であることに注意する. これより, $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (1 - \|\gamma_n(0)\|)^s < \varepsilon$$

且つ $c > C$ と $n > N$ なる n について $\rho(0, \gamma_n(0)) > c$ をみたすように取れる. 但し, C は定理 4.1 の主張にある定数である. このとき, 定理 4.1 の証明にある式 (4.2) より

$$\sigma_0 \left[\bigcup_{n=N+1}^{\infty} b(0; \gamma_n(0), c) \right] \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b(0; \gamma_n(0), c) < \sum_{n=N+1}^{\infty} A'(1 - \|\gamma(0)\|)^s = A'\varepsilon$$

となる. ところで, 定理 2.34 と影の定義より

$$\Lambda_c(\Gamma) = \bigcup_{c > C} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} b(0; \gamma_n(0), c)$$

であるから, $\varepsilon \searrow 0$ として主張を得る. \square

この定理の系として, 凸コンパクト Klein 群と幾何的有限 Klein 群が発散型となることを得る.

系 4.5 (凸コンパクト Klein 群).

凸コンパクト Klein 群 Γ は発散型である.

証明. μ を凸コンパクト Klein 群 Γ に対する Patterson–Sullivan 測度とする. また, Γ の収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. 凸コンパクト Klein 群の極限点は円錐型極限点であることと μ の台は円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ に含まれることから, $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] > 0$ が分かる. 従って, 定理 4.4 より $P^\delta(\Gamma) = \infty$ が分かり, Γ は発散型であることが分かる. \square

幾何的有限 Klein 群 Γ に対しても同様に, $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] > 0$ を示すことにより証明できる. 但し, これには少し議論が必要である. その議論のために, 次の定理を認める.

定理 4.6 (Nicholls [10, Theorem 2.7.2]).

幾何的有限 Klein 群 Γ に対し, 極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は円錐型極限点と有界放物型固定点からなる, 即ち,

$$\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma) \cup \{\Gamma \text{ の有界放物型固定点} \}$$

と書ける. なお, 放物的な元 $\gamma \in \Gamma$ の固定点 $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ が有界放物型固定点であるとは, Γ_ξ を Γ の ξ における固定化群, 即ち, $\Gamma_\xi := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\xi) = \xi\}$ とするとき, 商空間 $(\Lambda(\Gamma) \setminus \{\xi\})/\Gamma_\xi$ がコンパクトとなることをいう. 詳しくは, Nicholls [10, p.43] を参照.

Γ の有界放物型固定点は可算個しかないことに注意して, 議論を進める. μ を幾何的有限 Klein 群 Γ に対する Patterson–Sullivan 測度とし, 円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ に対して $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] > 0$ が成り立つことを示す. μ の台は円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ に含まれることから, Γ の有界放物型固定点は質点ではないことを見ればよい. これは, Nicholls [10, Theorem 3.5.9] より分かる. 従って, 次の主張を得る.

系 4.7 (幾何的有限 Klein 群).

幾何的有限 Klein 群 Γ は発散型である.

以上により, 凸コンパクト Klein 群と幾何的有限 Klein 群が発散型となることが分かった.

4.2 軌道数え上げ関数の導入とその振る舞い

この節では, Klein 群 Γ に対する Γ -軌道の振る舞いを考察する. そのために次の軌道数え上げ関数を導入する.

定義 4.8 (軌道数え上げ関数).

Klein 群 Γ と $x, y \in \mathbb{B}$, $r > 0$ に対して軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r; x, y)$ を

$$N_\Gamma(r; x, y) := \#\{\gamma \in \Gamma \mid \rho(x, \gamma(y)) \leq r\}$$

で定める. 特に, $x = y = 0$ のとき, $N_\Gamma(r) := N_\Gamma(r; 0, 0)$ と書く.

Γ は \mathbb{B} に真性不連続に作用するので軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r; x, y)$ は矛盾なく定義される. 即ち, 値 $N_\Gamma(r; x, y) \in \mathbb{N}$ は r, x, y に応じて唯 1 つ定まる. 以後, Klein 群 Γ に対する軌道数え上げ関数

の振る舞いを $x = y = 0$ の場合に焦点を置いて Γ -軌道を考察する. これによって, Γ -軌道 $\Gamma(0)$ の散らばり具合が分かる.

はじめに, 軌道数え上げ関数の上からの評価を考える. 任意の Klein 群 Γ に対して軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r)$ の増大度は大きくても e^{dr} の割合であることが分かる. それが次の定理である.

定理 4.9 (軌道数え上げ関数の上からの評価).

Γ を Klein 群とし, $x, y \in \mathbb{B}$ とする. このとき, ある定数 $A_1 = A_1(x, y, \Gamma) > 0$ が任意の $r > 0$ に対して $N_\Gamma(r; x, y) < A_1 \cdot e^{dr}$ が成り立つように取れる.

証明. Nicholls [10, Theorem 1.5.1] を参照. □

上の定理では軌道数え上げ関数の上からの評価を与えた. しかし, 一般に下から評価することは難しい. ここでは, 体積有限な Klein 群 Γ に対して軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r)$ の下からの評価を与える.

定理 4.10 (体積有限な Klein 群 Γ に対する軌道数え上げ関数の下からの評価).

体積有限な Klein 群 Γ に対して正数 $R_1 > 0$ と $a_1 > 0$ が, 任意の $r > R_1$ に対して $N_\Gamma(r) > a_1 \cdot e^{dr}$ が成り立つように取れる.

証明. Nicholls [10, Theorem 1.5.2] を参照. □

なお, この節の 2 つの定理から, 体積有限な Klein 群 Γ に対する軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r)$ は, 十分大きい $r > 0$ に対して $N_\Gamma(r)$ は e^{dr} と比較可能であることが分かる.

4.3 収束指数と臨界次元の関係

この節では, 任意の Klein 群に対してその収束指数と臨界次元が一致することを見る. はじめに, 収束指数を上から評価するための“軌道数え上げ関数の評価に関する十分条件”を与え, そのあとに, 共形測度を用いて軌道数え上げ関数を評価する.

4.3.1 軌道数え上げ関数の評価と収束指数の関係

軌道数え上げ関数が上から評価されている場合, 収束指数を上から評価することができる.

定理 4.11 (軌道数え上げ関数の評価と収束指数の関係).

Klein 群 Γ に対して定数 $A, s, R_0 > 0$ が, $r \geq R_0$ なる r に対して

$$N_\Gamma(r) \leq A \cdot e^{sr} \tag{4.3}$$

をみたすように取れるとき, $\delta(\Gamma) \leq s$ が成り立つ.

証明. まず $\varepsilon, r > 0$ を取り, Poincaré 級数 $P^{s+\varepsilon}(\Gamma)$ の r -部分和

$$P_r^{s+\varepsilon}(\Gamma) := \sum_{\gamma \in \Gamma; \rho(0, \gamma(0)) \leq r} e^{-\rho(s+\varepsilon)\rho(0, \gamma(0))}$$

を考える. これを Lebesgue-Stieltjes 積分で書き直して計算すると,

$$\begin{aligned} P_r^{s+\varepsilon}(\Gamma) &= \sum_{\gamma \in \Gamma; \rho(0, \gamma(0)) \leq r} e^{-(s+\varepsilon)\rho(0, \gamma(0))} = \int_0^r e^{-(s+\varepsilon)t} dN_\Gamma(t) \\ &= \left[e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) \right]_0^r - \int_0^r -(s+\varepsilon)e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) dt \\ &= e^{-(s+\varepsilon)r} N_\Gamma(r) + (s+\varepsilon) \int_0^r e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) dt \end{aligned}$$

を得る. 但し, 途中で Lebesgue-Stieltjes 積分の部分積分を行った. ところで, 上式第 2 項は $r \geq R_0$ に対して

$$\begin{aligned} (s+\varepsilon) \int_0^r e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) dt &= I + (s+\varepsilon) \int_{R_0}^r e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) dt \\ &\leq I + (s+\varepsilon) \int_{R_0}^r e^{-(s+\varepsilon)t} A e^{st} dt = I + (s+\varepsilon) A \int_{R_0}^r e^{-\varepsilon t} dt \\ &\leq I + \frac{s+\varepsilon}{-\varepsilon} A e^{-\varepsilon(r-R_0)} \left(I := (s+\varepsilon) \int_0^{R_0} e^{-(s+\varepsilon)t} N_\Gamma(t) dt \right) \end{aligned}$$

と評価できるので, 仮定を用いると

$$P_r^{s+\varepsilon}(\Gamma) \leq A e^{-\varepsilon r} + I + \frac{s+\varepsilon}{-\varepsilon} A e^{-\varepsilon(r-R_0)}$$

となる. よって, $r \rightarrow \infty$ に対し, $P_r^{s+\varepsilon}(\Gamma)$ は有限値に収束することが分かる. つまり, Poincaré 級数 $P^{s+\varepsilon}(\Gamma)$ は収束する. 故に, $\delta(\Gamma) \leq s$ が成り立つ. \square

4.3.2 共形測度を用いた軌道数え上げ関数の評価

実は, 定理 4.11 の仮定にある評価式 (4.3) は, s 次元 Γ -不変共形測度が存在するとき可能である.

定理 4.12 (Γ -不変共形測度を用いた軌道数え上げ関数の評価).

Γ を Klein 群, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とし, $x, y \in \mathbb{B}$ とする. このとき, 定数 $A_2 = A_2(x, y, \Gamma)$, $R_2 = R_2(x, y, \Gamma) > 0$ が, $r \geq R_2$ なる任意の r に対して

$$N_\Gamma(r; x, y) \leq A_2 \cdot e^{sr}$$

をみたすように取れる.

証明. $x = y = 0$ の場合のみ示す. 他の場合も同様に示すことができる. $c > C$ なる c を十分大きく取る. 但し, C は定理 4.1 の主張にある定数である. $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma_k := \{\gamma \in \Gamma \mid k \leq \rho(0, \gamma(0)) < k+1\}, \quad n(k) := \#\Gamma_k$$

とおき, 影の族 $\mathcal{S}_k := \{b(0; \gamma(0), c) \mid \gamma \in \Gamma_k\}$ を考えることにより $n(k)$ を評価していく. $\gamma \in \Gamma_k$, $\xi \in b(0; \gamma(0), c)$ とし, 0 と ξ を結ぶ双曲測地線を $l := \overline{0\xi}$ とおく. このとき, $\rho(\gamma(0), l) < c$ が

成り立つ。ここで、 S_k に属する影の重なり具合を見積もるために、 $\Delta(\gamma(0), c)$ と $\Delta(\gamma(0), 2c)$ を比較する。 Γ は \mathbb{B} に真性不連続に作用するので、 Γ と c にのみにしかよらない定数 $M > 0$ が、 $N_\Gamma(2c) = N_\Gamma(2c; \gamma(0), 0) \leq M$ をみたすように取れる。これは、 $\Delta(\gamma(0), 2c)$ に入る Γ -軌道 $\Gamma(0)$ の個数が高々 M であることに他ならない。これより、 $m_\xi := \#\{\gamma \in \Gamma \mid \xi \in b(o; \gamma(0), c)\}$ とすると $0 \leq m_\xi \leq M$ が成り立ち、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_k} \sigma_0[b(0; \gamma(0), c)] \leq M\sigma_0(\mathbb{S}_\infty)$$

が分かる。ここで、定理 4.1 の証明から定数 $a' > 0$ と $A' > 0$ が、 $k > c$ なる k と $\gamma \in \Gamma_k$ に対して

$$a' < \frac{\sigma_0[b(0; \gamma(0), c)]}{(1 - \|\gamma(0)\|)^s} < A'$$

が成り立つように取れることと、 $e^{-\rho(0, x)}$ と $1 - \|x\|$ が $x \in \mathbb{B}$ によらず比較可能なことから、定数 $c_1 > 0$ が $\gamma \in \Gamma_k$ に対して $(1 - \|\gamma(0)\|)^s \geq c_1 e^{-sk}$ をみたすように取れることに注意する。これより、

$$\begin{aligned} n(k)a'c_1e^{-sk} &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma_k} c_1(1 - \|\gamma(0)\|)^s < \sum_{\gamma \in \Gamma_k} \sigma_0[b(0; \gamma(0), c)] \\ &\leq M\sigma_0(\mathbb{S}_\infty) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$n(k) \leq C_1 e^{sk} \quad \left(C_1 := \frac{M\sigma_0(\mathbb{S}_\infty)}{a'c_1} \right)$$

が成り立つ。

さて、上の評価を用いて軌道数え上げ関数 $N_\Gamma(r)$ の評価を行う。 $[r]$ を r を超えない最大の自然数とすると、 $r > c$ なる r に対して

$$\begin{aligned} N_\Gamma(r) &\leq N_\Gamma([r] + 1) = \sum_{k=0}^{[r]+1} n(k) = S + \sum_{k=[c]+1}^{[r]+1} n(k) \quad \left(S := \sum_{k=0}^{[c]} n(k) \right) \\ &\leq S + \sum_{k=[c]+1}^{[r]+1} C_1 e^{sk} = S + C_1 e^{s([c]+1)} \frac{e^{s([r]-[c]+1)} - 1}{e^s - 1} \\ &= S + \frac{C_1 e^{s([r]+2-r)}}{e^s - 1} e^{sr} \\ &\leq A_2 \cdot e^{sr} \end{aligned}$$

となる。従って、 $r \geq R_2$ なる任意の r に対して $N_\Gamma(r) \leq A_2 \cdot e^{sr}$ が成り立つように、正の定数 A_2 、 R_2 が取れる。これより主張を得る。 \square

定理 4.11, 定理 4.12 と臨界次元の定義より、次が従う。

系 4.13 (収束指数と臨界次元の関係)。

Klein 群 Γ に対して、 $\delta(\Gamma) \leq \alpha(\Gamma)$ が成り立つ。特に、系 3.36 より、 $\delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$ が成り立つ。

4.4 円錐型極限集合の Hausdorff 次元と収束指数の関係

この節では, 円錐型極限集合の Hausdorff 次元を収束指数による上から評価を与える. これは, 共形測度を用いて円錐型極限集合の Hausdorff 測度を上から評価することで得られる.

定理 4.14.

Klein 群 Γ に対し, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とする. このとき, $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq s$ が成り立つ.

証明. $c > 0$ を定理 4.1 の仮定をみたすように取り, $\varepsilon > 0$ を取る. これに対して, 円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の影による ε -被覆 $\{b(0; \gamma_n(0), c)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次のように構成する. まず, $r(0; \gamma_1(0), c) < \varepsilon$ をみたすように, $\gamma_1 \in \Gamma$ を取る. 以下帰納的に $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を, $r(0; \gamma_n(0), c) < \varepsilon$ 且つ $b(0; \gamma_n(0), c)$ の中心が

$$\mathbb{S}_\infty \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} b(0; \gamma_i(0), c)$$

に含まれるように取る. これに対し $b(n)$ を, 影 $b(0; \gamma_n(0), c)$ の半径 $r(0; \gamma_n(0), c)$ を半分にしたも

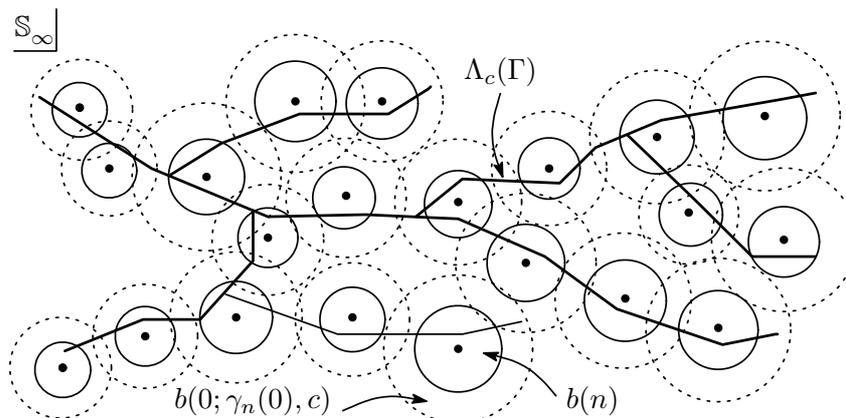


図 21 $\{b(0; \gamma_n(0), c)\}$ と $\{b(n)\}$ の構成法. 点は影の中心を表す.

のとすると, 作り方から $i \neq j$ のとき $b(i) \cap b(j) = \emptyset$ が成り立つ. ここで, U を $\{b(n)\}$ の和集合とする. このとき, 定理 4.1 より

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^s[\Lambda_c(\Gamma)] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (r(0; \gamma_n(0), c))^s = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r(0; \gamma_n(0), c)}{2}\right)^s \\ &\leq A \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0[b(n)] = A \cdot \sigma_0(U) \leq A \cdot \sigma_0(\mathbb{S}_\infty) < \infty \end{aligned}$$

となるので, $\varepsilon \searrow 0$ として $\mathcal{H}^s[\Lambda_c(\Gamma)] < \infty$ を得る. 故に, Hausdorff 次元の定義から $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq s$ が成り立つ. \square

注意 4.15. 上の証明中にある円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の ε -被覆をうまく取り, 不等式の評価を良くすることによって, 定数 $A > 0$ が, 任意の Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}_\infty)$ に対して $\sigma_0(E) \leq A \cdot \mathcal{H}^s(E)$ をみたすように取れることが証明できる.

この定理と $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度である Patterson–Sullivan 測度を構成できることから, 次が従う.

系 4.16.

任意の Klein 群 Γ に対して, $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ が成り立つ.

最後に, 系 4.13 と系 4.16 をまとめることにより, この章の目標であった次の主張を得る.

定理 4.17 (各種指数の関係).

任意の Klein 群 Γ に対して, $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$ が成り立つ.

5 凸コンパクトな Klein 群

この章では, Klein 群の中でも特に扱いやすい凸コンパクト Klein 群の性質を見ていく. 特に, 収束指数 $\delta(\Gamma)$ と臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ の間に $\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ なる関係が成り立つことを証明することに重点を置く.

5.1 凸コンパクト Klein 群の持つ性質

この節では, 凸コンパクト Klein 群 Γ に対する軌道数え上げ関数や s 次元 Γ -不変共形測度の持つ性質を簡単に見ていく.

まずは, $x, y \in \mathbb{B}$, $r > 0$ に対する軌道数え上げ関数 $N_{\Gamma}(r; x, y)$ の振る舞いを考察する. そのために凸コンパクト Klein 群 Γ に対する収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. 第 4 章では定理 4.12 において, 一般の Klein 群 Γ に対する $N_{\Gamma}(r; x, y)$ は $e^{\delta r}$ より大きい振る舞いはしないことを見た. Γ が凸コンパクトのときもっと強いことがいえ, 軌道数え上げ関数 $N_{\Gamma}(r; x, y)$ は特定の条件の下で本当に $e^{\delta r}$ のように振る舞うことが分かる.

定理 5.1 (Nicholls [10, Theorem 4.6.5]).

凸コンパクト Klein 群 Γ に対してある定数 $A_1, R_1 > 0$ が, 任意の $x, y \in \mathbb{B}$ と $r > R_1$ に対して

$$N_{\Gamma}(r; x, y) \leq A_1 e^{\delta r}$$

をみたとすように取れる. また, ある定数 $a_1, r_1 > 0$ が, Nielsen 凸領域上の任意の 2 点 $x, y \in \text{ch}(\Lambda)$ と $r > r_1$ に対して

$$N_{\Gamma}(r; x, y) \geq a_1 e^{\delta r}$$

をみたとすように取れる. 但し, 極限集合を $\Lambda := \Lambda(\Gamma)$ とおいた.

次に, 0 でない非自明な s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ の持つ性質を簡単に見る. まず, $s > \delta(\Gamma)$ なら Poincaré 級数 $P^s(\Gamma)$ が収束することから $\sigma_x[\Lambda_c(\Gamma)] = 0$ が分かり, Γ が凸コンパクトのとき $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma)$ となることから $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は自明なものとなる. よって, $s \leq \delta(\Gamma)$ でなければならない. 一方で, $\delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$ であるから, 共形測度が非自明なものは $s = \delta(\Gamma)$ に限られることが分かる. 更に, s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は円錐型極限集合にエルゴード的に作用するので, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は定数倍を除き一意に定まることが分かる. 従って, 凸コンパクト Klein 群 Γ に対する非自明な s 次元 Γ -不変共形測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ は, 次元が $s = \delta(\Gamma)$ に限られ, しかも Patterson–Sullivan 測度と定数倍を除き一致することが分かる. しかも, $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度である Patterson–Sullivan 測度のもつ性質はこれだけに留まらず, 次のことも分かる.

定理 5.2 (Nicholls [10, Theorem 4.6.4]).

収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. このとき, Patterson–Sullivan 測度 μ は定数倍を除き δ 次元

Hausdorff 測度 \mathcal{H}^δ と一致する.

5.2 収束指数と円錐型極限集合の Hausdorff 次元の関係

凸コンパクト Klein 群 Γ の場合, 円錐型極限集合の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ を下から評価することができる. 円錐型極限集合の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ を下から評価する場合, うまく円錐型極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ の被覆を取り, Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^\delta[\Lambda_c(\Gamma)]$ を下から評価する必要がある. このために次の 2 つの定理を用意する.

定理 5.3.

凸コンパクト Klein 群 Γ に対し, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とする. このとき, 定数 $a, A, r_0 > 0$ が, 任意の極限点 $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ と $0 < r < r_0$ なる任意の r に対して

$$a < \frac{\sigma_0[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^s} < A$$

が成り立つように取れる.

証明. $\Lambda := \Lambda(\Gamma)$ とおき, Nielsen 凸領域 $\text{ch}(\Lambda)$ を考える. このとき, $0 \in \text{ch}(\Lambda)$ として良い. もし, $0 \notin \text{ch}(\Lambda)$ であれば, $0 \in U$ となるような $\text{ch}(\Lambda)$ のある K -近傍 $U := [\text{ch}(\Lambda)]_K$ を取り, $\text{ch}(\Lambda)$ の代わりに考えれば良い. 但し, $K > 0$ と部分集合 $D \subset \mathbb{B}$ に対して $[D]_K$ は双曲距離 ρ に関する K -近傍 $[D]_K := \{x \in \mathbb{B} \mid \rho(x, D) < K\}$ を表す. U は, 作り方から Γ -不変となる. 従って, Γ は凸コンパクトであるから, この U に対する相対コンパクトな基本領域 $F \subset \mathbb{B}$ が取れる. これに対し, $d := \text{diam}_\rho F$ とおき, $c > 0$ を, $c - d$ が C は定理 4.1 の主張にある定数 C に対して $c - d > C$ をみたすように取る.

今, $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ に対して 0 から ξ に伸びる双曲測地線を $l := \overline{0\xi}$ とおくと, U の作り方から $l \subset U$ である. そして, 十分小さい $r > 0$ に対して $B_{d_0}(\xi, r) = b(0; k\xi, c)$ をみたす $0 < k < 1$ と取り, $k\xi \in \sigma$ を考える. このとき, F の作り方から, $k\xi \in \gamma(\overline{F})$, $\rho(\gamma(0), k\xi) \leq d$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ が取れる. これより, $\Delta(\gamma(0), c - d) \subset \Delta(k\xi, c) \subset \Delta(\gamma(0), c + d)$ が成り立つ. 従って, これらを 0 から射影した影を考えると, $b(0; \gamma(0), c - d) \subset b(0; k\xi, c) \subset b(0; \gamma(0), c + d)$ が得られ, これらを測度 σ_0 で測ると, $\sigma_0[b(0; \gamma(0), c - d)] \leq \sigma_0[B_{d_0}(\xi, r)] \leq \sigma_0[b(0; \gamma(0), c + d)]$ が成り立つ. よって,

$$\frac{\sigma_0[b(0; \gamma(0), c - d)]}{[r(0; k\xi, c)]^s} \leq \frac{\sigma_0[B_{d_0}(\xi, r)]}{[r(0; k\xi, c)]^s} \leq \frac{\sigma_0[b(0; \gamma(0), c + d)]}{[r(0; k\xi, c)]^s} \quad (5.1)$$

となる. ここで, $r(0; k\xi, c) \asymp r$ であり比較定数として k や ξ によらないものが取れるので, 式 (5.1) の中辺は

$$\frac{\sigma_0[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^s} \asymp \frac{\sigma_0[B_{d_0}(\xi, r)]}{[r(0; k\xi, c)]^s}$$

となる. あとは, 式 (5.1) の右辺と左辺の有界性を言えば良い. これは, 式 (5.1) の右辺が

$$\frac{\sigma_0[b(0; \gamma(0), c + d)]}{[r(0; k\xi, c)]^s} = \frac{\sigma_0[b(0; \gamma(0), c + d)]}{(r(0; \gamma(0), c + d))^s} \left(\frac{r(0; \gamma(0), c + d)}{r(0; k\xi, c)} \right)^s$$

と変形できるので, 定理 4.1 と簡単な計算 (Nicholls [10, Lemma 4.6.1]) により, γ や k, ξ によらず上に有界であることが分かる. 左辺の下界性も同様に言える. 以上より, 定理の主張を得る. \square

定理 5.4.

凸コンパクト Klein 群 Γ に対し, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とする. このとき定数 $b > 0$ が, 任意の Borel 集合 $E \subset \Lambda(\Gamma)$ に対して $b \cdot \sigma_0(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$ をみたすように取れる. 但し, \mathcal{H}^s は理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の s 次元 Hausdorff 測度である.

証明. Borel 集合 $E \subset \Lambda(\Gamma)$ と $0 < \varepsilon < r_0$ なる ε を取る. Hausdorff 測度の定義より, $\varepsilon' > 0$ に対して

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (r'_i)^s - \varepsilon'$$

をみたす E の ε -被覆 $\{B_{d_0}(x_i, r'_i)\}$ が取れる. これに対して E の開被覆 $\{B_{d_0}(\xi_i, r_i)\}$ を, $r_i := 2r'_i$, $\xi_i \in \Lambda(\Gamma) \cap B_{d_0}(x_i, r'_i)$ と取る. このとき, 定理 5.3 よりある定数 $A > 0$ が存在して

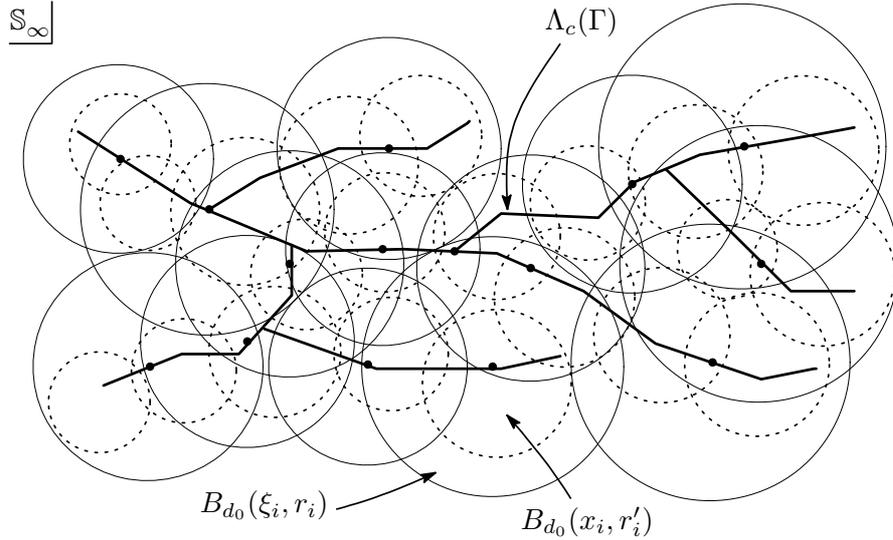


図 22 E の開被覆 $\{B_{d_0}(\xi_i, r_i)\}$ の作り方. 点は各極限点 ξ_i を表す.

$$\sigma_0(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_0[B_{d_0}(\xi_i, r_i)] \leq A \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s = 2^s A \sum_{i=1}^{\infty} (r'_i)^s \leq 2^s A \mathcal{H}_\varepsilon^s(E) + 2^s A \varepsilon'$$

となる. 従って, $b := 2^{-s} A^{-1}$ とおき, $\varepsilon, \varepsilon' \searrow 0$ として $b \cdot \sigma_0(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$ を得る. \square

凸コンパクト Klein 群 Γ に対し μ を Patterson–Sullivan 測度とすると, $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] > 0$ が成り立つことから次が従う.

系 5.5.

凸コンパクト Klein 群 Γ に対し, $\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ が成り立つ. 従って, $\alpha(\Gamma) = \delta(\Gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ が成り立つ.

6 幾何的有限な Klein 群

この章では、測地流という強力な道具を用意したのち幾何的有限 Klein 群の性質を見ていく。そして凸コンパクトのときと同様に、収束指数 $\delta(\Gamma)$ と臨界次元 $\alpha(\Gamma)$ の間に $\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ なる関係が成り立つことを、測地流を用いて証明する。以後、Klein 群 Γ は非初等的且つ \mathbb{B} に自由に作用すると仮定する。

6.1 Borel 測度空間上の流れに対するエルゴード理論

この節では、距離空間 (X, d) 上の Borel 測度 ν と ν -不変な X 上の流れに関するエルゴード理論 (Nicholls [10, Chapter 7]) を紹介する。以後、 (X, d) を完備可分局所コンパクト距離空間とし、 ν を σ -有限な (X, d) 上の Borel 測度とする。更に、 X 上のコンパクト集合は ν で有限であると仮定する。まずは、流れを定義する。

定義 6.1 (流れ).

$X \times \mathbb{R}$ から X への写像 φ が 1 径数変換群であるとき、即ち、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$ とおくと次の 3 条件、(F1), (F2), (F3) をみたすとき φ を X 上の流れという。 φ_t のことを流れと呼ぶこともある。

(F1) $\varphi_0 = \text{Id}_X$.

(F2) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$ が任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

(F3) φ は連続写像である。

また、任意の $t \in \mathbb{R}$ と Borel 集合 $E \subset X$ に対して $\varphi_t^* \nu(E) = \nu(E)$ が成り立つとき、 X 上の流れ φ は ν -不変であるという。

以後、 t は時間変数として扱う。以後、流れの持つエルゴード性に着目する。そのために、流れのエルゴード性を以下で定める。

定義 6.2 (流れのエルゴード性).

Borel 測度空間 $(X, \mathcal{B}(X), \nu)$ に対して X 上の流れ φ が、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して φ_t が ν に関してエルゴード的に作用する、即ち、 φ_t 不変な Borel 集合 $E \subset X$ に対して $\nu(E) = 0$, $\nu(X \setminus E) = 0$ のいずれかが成り立つとき、 φ は ν に関してエルゴード的に作用する、または φ は ν に関してエルゴード性を持つという。

エルゴード理論においてよく知られているものに、次のエルゴード定理と呼ばれるものである。

定理 6.3 (エルゴード定理).

$(X, \mathcal{B}(X), \nu)$ を Borel 測度空間とし、 ν -不変な X 上の流れ φ が ν に関してエルゴード的に作用すると仮定する。また、 f, g を X 上の実数値関数で ν について L^1 -可測なものとし、 g については

更に $g > 0$ 且つ

$$\int_0^\infty g(\varphi_t(x)) dt = +\infty$$

が ν に関してほとんど至るところ $x \in X$ で成り立つと仮定する. このとき,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T f(\varphi_t(x)) dt}{\int_0^T g(\varphi_t(x)) dt} = \frac{\int_X f(x) d\nu(x)}{\int_X g(x) d\nu(x)}$$

ほとんど至るところ $x \in X$ で成り立つ. 特に, ν が有限測度のとき, $g = 1$ とすると

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt = \frac{1}{\nu(X)} \int_X f(x) d\nu(x)$$

ほとんど至るところ $x \in X$ で成り立つ.

証明. Nicholls [10, Theorem 7.2.8] を参照. □

また, エルゴード性の類似の性質として, 次の保存性が挙げられる.

定義 6.4 (保存的な流れ).

$x \in X$ に対してコンパクト集合 $F \subset X$ と無限個の $t_n \in \mathbb{R}$ が, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\varphi_{t_n}(x) \in F$ 且つ $n \rightarrow \infty$ に対して $t_n \rightarrow +\infty$ となるように取れるとき, x を流れ φ に対して保存的な点という. 保存的な点全体のなす集合を C と書く. また, $\nu(C) = \nu(X)$ となるとき, φ は X に ν に関して保存的に作用するという.

例えば, 次のような条件下ではこの保存性が成り立つ.

定理 6.5 (Nicholls [10, Theorem 7.2.9]).

Borel 測度 ν が有限測度のとき, φ は X に ν に関して保存的に作用する.

次節以降で扱う“測地流”では, エルゴード性と保存性は同値なものとなる.

6.2 単位接束 T^1M_Γ 上の測地流

この節では, M_Γ の単位接束 T^1M_Γ 上の測地流の概念を導入する. これはいわば, “ M_Γ 上の双曲測地線に沿ってものを流す”ことである. 測地流を用いることで, 凸コンパクト Klein 群で分かっていたことを, 条件の弱い群まで拡張することができる.

6.2.1 単位接束 $T^1\mathbb{B}$ 上の測地流

まずは, 単位球モデル \mathbb{B} の単位接束 $T^1\mathbb{B}$ 上の測地流の概念を導入する. \mathbb{B} 上の双曲測地線に沿ってものを流すことを考えるため, 以下では \mathbb{B} 上の向きづけられた双曲測地線全体のなす集合 Ω を考察する. その際に \mathbb{B} は完備 Riemann 多様体であることから, 基点と速度ベクトルの組 (x, ξ) を 1 つ決めることにより向きづけられた双曲測地線が 1 つ決まる, 即ち, \mathbb{B} 上の単位接束 $T^1\mathbb{B}$ が

ら Ω への自然な全射があることに注意する. 以後, $(x, \xi) \in T^1\mathbb{B}$ で $x \in \mathbb{B}$ を基点とし初期速度が $\xi \in T_x^1\mathbb{B}$ である \mathbb{B} 上の向きづけられた双曲測地線を表す (図 23). なお, $T^1\mathbb{B}$ 上には第 1 基本形式

$$ds^2 := g_{\mathbb{B}} + \left\| d\xi^2 - 2 \frac{(\xi \cdot dx)x - (\xi \cdot x)dx}{1 - \|x\|^2} \right\|^2, \quad g_{\mathbb{B}} = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \|dx\|^2$$

によって, $d+1$ 次元 Möbius 変換で不変な Riemann 計量が入り (Ahlfors [1, p.75]), これによって導かれる $T^1\mathbb{B}$ 上の距離を d と書く.

次に, 単位接束 $T^1\mathbb{B}$ に対する Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B})$ の作用と $T^1\mathbb{B}$ 上の測地流を定めるために, 以下のように座標を入れる. 双曲測地線 $l = (x, \xi) \in T^1\mathbb{B}$ に対して, その 2 端点をそれぞれ $\eta_- := l(-\infty)$, $\eta_+ := l(+\infty)$ とおき, 双曲測地線 l の Euclid 距離に関する中点を l_{mid} とする. そして, x が l_{mid} より η_+ 側にあるときは $s := \rho(x, l_{mid})$ と定め, x が l_{mid} より η_- 側にあるときは $s := -\rho(x, l_{mid})$ と定める. この 3 つ組み (η_-, η_+, s) によって, $T^1\mathbb{B}$ 上に座

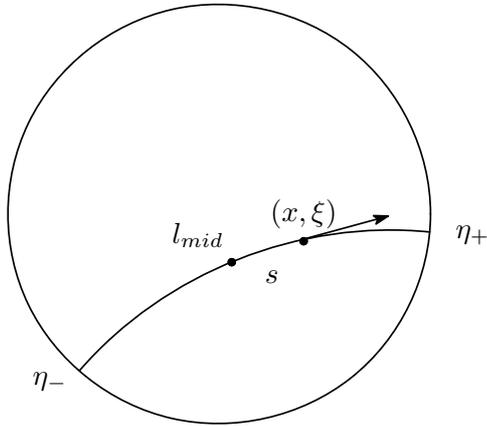


図 23 (x, ξ) と (η_-, η_+, s) の関係

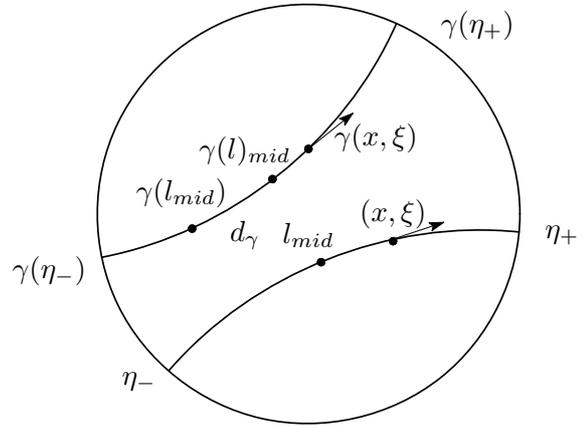


図 24 Möbius 変換 $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B})$ の作用

標が定まる (図 23). これを用いて $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B})$ の作用を, $l = (\eta_-, \eta_+, s) \in T^1\mathbb{B}$ に対して $\gamma(\eta_-, \eta_+, s) := (\gamma(\eta_-), \gamma(\eta_+), s + d_\gamma)$ で定める. 但し, d_γ は双曲測地線 $\gamma(l)$ の中点 $\gamma(l)_{mid}$ を用いて $d_\gamma := \pm \rho(\gamma(l_{mid}), \gamma(l)_{mid})$ で与えられる (図 24). 符号の付け方は先に準ずる. この作用は, 座標 (x, ξ) を用いると

$$\gamma(x, \xi) = \left(\gamma(x), \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} \xi \right)$$

と書ける. また, $T^1\mathbb{B}$ 上の測地流 φ を以下のように定める.

定義 6.6 ($T^1\mathbb{B}$ 上の測地流).

単位接束 $T^1\mathbb{B}$ 上の流れ φ を

$$\varphi_t(\eta_-, \eta_+, s) := (\eta_-, \eta_+, s + t), \quad t \in \mathbb{R}, (\eta_-, \eta_+, s) \in T^1\mathbb{B}$$

で定める. φ は $T^1\mathbb{B}$ 上の基点を双曲測地線に沿って流すことから, 測地流ともいう.

定義より, 測地流 φ は $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B})$ の作用と可換であることが分かる.

6.2.2 T^1M_Γ 上の測地流と測地流で不変な測度

この節では, Klein 群 Γ に対する T^1M_Γ 上の測地流と Patterson–Sullivan 測度 μ から導かれる T^1M_Γ 上の測度を導入する. このために, まずは μ から導かれる \mathbb{B} の単位接束 $T^1\mathbb{B}$ 上の測度を導入する. これは, Sullivan が Ahlfors [1, p.78] の手法を Patterson–Sullivan 測度に適用したものである.

定義 6.7 ($T^1\mathbb{B}$ 上の測度).

Patterson–Sullivan 測度 μ から導かれる $T^1\mathbb{B}$ 上の測度 m_μ を

$$dm_\mu(\eta_-, \eta_+, s) := \frac{d\mu(\eta_-)d\mu(\eta_+)ds}{\|\eta_+ - \eta_-\|^{2\delta}}, \quad (\eta_-, \eta_+, s) \in T^1\mathbb{B}$$

で定める. 但し, 可測集合は $T^1\mathbb{B}$ 上の Borel 集合とする. また, $\delta := \delta(\Gamma)$ とおいた.

この m_μ は, φ_t -不変であることが定義から直ちに分かる. また, Γ の作用で不変であることも分かる. なぜなら, Patterson–Sullivan 測度の $\gamma \in \Gamma$ による変換則が $d\mu(\gamma(\xi)) = |\gamma'(\xi)|^\delta d\mu(\xi)$ であり, 一方で公式 1.15 の式 (1.4) より $\|\gamma(\eta_+) - \gamma(\eta_-)\|^2 = |\gamma'(\eta_+)||\gamma'(\eta_-)|\|\eta_+ - \eta_-\|^2$ となるからである.

さて, T^1M_Γ 上の測地流 $\tilde{\varphi}$ と, Patterson–Sullivan 測度 μ から導かれる T^1M_Γ 上の測度 \tilde{m}_μ を定める. $\tilde{\pi}$ を \mathbb{B} から M_Γ への商写像とし, $[\eta_-, \eta_+, s]$ で (η_-, η_+, s) を含む同値類を表す. まず, $T^1M_\Gamma = (T^1\mathbb{B})/\Gamma$ に注意して T^1M_Γ 上の測地流 $\tilde{\varphi}$ を

$$\tilde{\varphi}_t[\eta_-, \eta_+, s] := [\varphi(\eta_-, \eta_+, s + t)], \quad t \in \mathbb{R}, (\eta_-, \eta_+, s) \in T^1M_\Gamma$$

で定める. これは, φ が $\gamma \in \text{Möb}^+(\mathbb{B})$ の作用と可換であることから矛盾なく定義できる. 次に, Patterson–Sullivan 測度 μ から導かれる T^1M_Γ 上の測度 \tilde{m}_μ を以下で定める. まずは T^1M_Γ 上の σ -加法族 \mathfrak{M}_μ を

$$\mathfrak{M}_\mu := \{E \subset T^1M_\Gamma \mid \tilde{\pi}^{-1}(E) \text{ は } T^1\mathbb{B} \text{ 上の Borel 集合}\}$$

で定める. そして, Γ に関する $T^1\mathbb{B}$ 上の基本領域 F を 1 つ取り, \mathfrak{M}_μ -可測集合 E の測度を

$$\tilde{m}_\mu(E) := m_\mu[\tilde{\pi}^{-1}(E) \cap F], \quad E \in \mathfrak{M}_\mu$$

で定める. これは, 基本領域 F の取り方によらないことが, m_μ は Γ の作用で不変であることから直ちに従う. つまり, \tilde{m}_μ も矛盾なく定義されている. なお, m_μ が φ_t -不変であることから, \tilde{m}_μ は $\tilde{\varphi}_t$ -不変であることが従う.

6.3 体積有限性と幾何的有限 Klein 群

この節では, Klein 群 Γ に対する単位接束 T^1M_Γ の体積有限性にまつわることを紹介する. ここでいう体積有限性とは, 通常/body有限性ではなく $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ のことである. この性質を持つ群からは大量の情報が得られる. その情報について, Nicholls [10] に書かれていることを以下にまとめた.

6.3.1 体積有限性にまつわる Klein 群の持つ性質

ここでは、 $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ をみたく Klein 群 Γ の持つ性質を紹介する. Nicholls [10, Chapter 8] において、この性質が詳細にわたって記述されている. 但し、所々誤植があるのできちんとした証明がついているわけではない. しかしその後、様々な論文によってその証明の穴が修復され、以下に述べる定理は全て正しいことが分かっている.

まずは、 $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ をみたく Klein 群 Γ の持つ性質を列挙する. 以下に述べる性質は全て同値であり、後で $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ をみたく Klein 群 Γ が実際にこれらの性質を持つことを見る.

定理 6.8 (Nicholls [10, Theorem 8.3.7]).

Klein 群 Γ に対して、以下は同値である.

- (i) $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] = \mu(\mathbb{S}_\infty)$ が成り立つ.
- (ii) $\tilde{\varphi}$ は T^1M_Γ に \tilde{m}_μ に関して保存的に作用する.
- (iii) $\tilde{\varphi}$ は T^1M_Γ に \tilde{m}_μ に関してエルゴード的に作用する.
- (iv) Γ は $\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty$ に $\mu \times \mu$ に関してエルゴード的に作用する.
- (v) $P^\delta(\Gamma) \asymp \tilde{P}^\delta(\Gamma) = \infty$ が成り立つ. 従って、 Γ は発散型である.

少し言葉の説明が必要な部分もあるので、以下で補う. まず、(ii) について補足する. 定義より \tilde{m} に関してほとんど至るところ $[x, \xi]$ に対してあるコンパクト $K \subset T^1M_\Gamma$ が、 $\tilde{\varphi}([x, \xi])$ が未来方向に無限回通過するように取れる. このとき、 x を基点とし ξ を初期速度とするような M_Γ 上の双曲測地線 $[x, \xi]$ はコンパクト集合 $\pi(K)$ 上を未来方向に無限回通過することが分かる (図 25). 但し、 π は T^1M_Γ から M_Γ への基点を対応させる自然な射影である. 次に、(iv) について補足する.

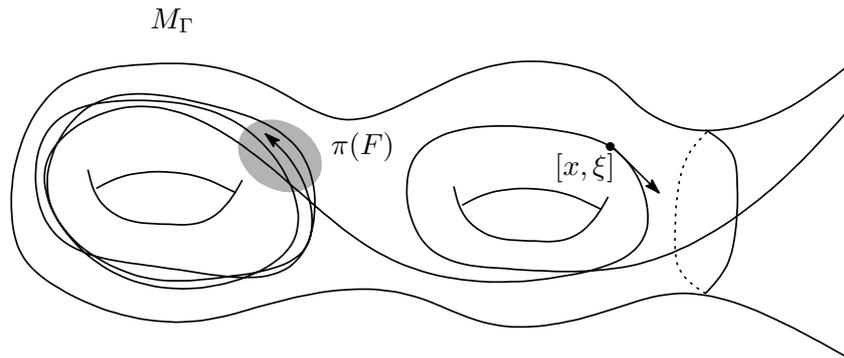


図 25 測地流の持つ保存性

$\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty$ への Γ の作用は $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(\xi, \eta) := (\gamma(\xi), \gamma(\eta))$ で定める. この作用は、 $T^1\mathbb{B}$ へ Γ の作用と対応しており、 $\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty$ を考えることは \mathbb{B} 上の双曲測地線の端点を考えることにつながる.

さて、 $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ をみたく Klein 群 Γ が上の性質を持つことを実際にを見る.

定理 6.9 (Nicholls [10, Theorem 8.3.7]).

$\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ をみたます Klein 群 Γ に対して以下が成り立つ.

- (i) 非自明な Γ -不変共形測度の次元は $\delta(\Gamma)$ に限られる.
- (ii) 非自明な $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変共形測度は定数倍を除き一意に定まり, それは Patterson–Sullivan 測度 $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ の定数倍である.
- (iii) $\mu[\Lambda_c(\Gamma)] = \mu(\mathbb{S}_\infty)$ が成り立つ.
- (iv) $\tilde{\varphi}$ は T^1M_Γ に \tilde{m}_μ に関してエルゴード的に作用する.

証明. $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ であり, \tilde{m}_μ は $\tilde{\varphi}_t$ -不変であることから, 定理 6.4 より $\tilde{\varphi}$ は T^1M_Γ に \tilde{m}_μ に関して保存的に作用することが分かる. 従って, 定理 6.8 の性質を全てみたます. これで (iii), (iv) は示された. また特に, Γ は $\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty$ に $\mu \times \mu$ に関してエルゴード的に作用することから, Γ は \mathbb{S}_∞ に μ に関してエルゴード的に作用することも分かる. 故に, 定理 3.39 より (ii) が導かれる. (i) は第 5 章 (p.61) で用いた議論によって分かる. \square

6.3.2 幾何的有限 Klein 群の体積有限性

ここでは, 幾何的有限 Klein 群 Γ が体積有限性を持つことを示す. これは, Sullivan によって行われた. そのために, いくつかの準備を行う. μ を Γ に対する Patterson–Sullivan 測度とし, 収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. これに対して \mathbb{B}^{d+1} 上の関数 φ を,

$$\varphi_\mu := \mu_x(\mathbb{S}_\infty^d) = \int_{\mathbb{S}_\infty^d} [p(x, \xi)]^\delta d\mu(\xi)$$

で定める. この φ_μ は, \mathbb{B}^{d+1} 上の双曲的 Laplace–Beltrami 作用素 Δ_h に対する固有値 $\delta(\delta - d)$ の固有関数である. また, φ_μ は双曲的体積要素に対する次のような可積分性を持つ.

定理 6.10 (Nicholls [10, Theorem 5.3.3]).

Γ を幾何的有限 Klein 群とする. また, D を \mathbb{B} に対する Γ の基本領域とし, $K > 0$ に対して $D(K) := D \cap [\text{ch}(\Lambda)]_K$ とおく. このとき,

$$\int_{D(K)} [\varphi_\mu(x)]^2 dV_h(x) < \infty \quad (6.1)$$

が成り立つ. 但し, $[\text{ch}(\Lambda)]_K$ は Nielsen 凸領域 $\text{ch}(\Lambda)$ の双曲距離に関する K -近傍である.

のちのために, この積分領域 $D(K)$ を双曲測地線を用いて書き換えておく.

$$D(K) = \bigcup_{\xi, \eta \in \Lambda(\Gamma)} D_{\xi\eta}(K), \quad D_{\xi\eta}(K) := D \cap [\xi\eta]_K$$

また, 被積分関数 φ_μ^2 も書き換えておく.

公式 6.11 (Nicholls [10, Lemma 5.3.2]). $x \in \mathbb{B}^{d+1}$ に対して $[\varphi_\mu(x)]^2$ は,

$$[\varphi_\mu(x)]^2 = 4^\delta \int_{\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty} |\xi - \eta|^{-2\delta} [\cosh L_{\xi\eta}(x)]^{-2\delta} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \quad (6.2)$$

と書ける. 但し, $L_{\xi\eta}(x)$ は x と双曲測地線 $\overline{\xi\eta}$ の双曲距離である.

この公式は, Fubini の定理と $L_{\xi\eta}(x)$ を書き下した式 (2.6) を用いた初等的な計算で確かめられる. 準備の最後に, 1 つ補題を用意する.

補題 6.12.

双曲測地線を芯とする円柱領域 $D_{\xi\eta}(K)$ の双曲的な体積 $V_h[D_{\xi\eta}(K)]$ は, K のみによるある定数 $C'(K)$ と双曲測地線分 $D_{\xi\eta}(0)$ の双曲的な長さの積として表される.

証明. 円柱領域 $D_{\xi\eta}(K)$ の双曲的な体積は, 双曲測地線分 $D_{\xi\eta}(0)$ に沿って切り口の双曲的な面積を積分することによって計算できることによる. その切り口の双曲的な面積は一定値 $C'(K)$ である. \square

さて, 本論に戻る. Sullivan によって示されたのは, 次の定理である.

定理 6.13 (Sullivan [11]).

Γ を幾何的有限 Klein 群とする. このとき, $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ が成り立つ.

証明. 仮定より式 (6.1) が成り立つので,

$$C(\Gamma, K) \tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \int_{D(K)} [\varphi_\mu(x)]^2 dV_h(x)$$

を示せばよい. 但し, $C(\Gamma, K)$ は Γ と K にしかよらない定数である. 上式左辺を式 (6.2) 評価していくと,

$$\int_{D(K)} [\varphi_\mu(x)]^2 dV_h(x) = 4^\delta \int_{D(K)} \left[\int_{\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty} \frac{[\cosh L_{\xi\eta}(x)]^{-2\delta}}{|\xi - \eta|^{2\delta}} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \right] dV_h(x) \quad (6.3)$$

$$= 4^\delta \int_{\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty} \frac{1}{|\xi - \eta|^{2\delta}} \left[\int_{D_{\xi\eta}(K)} \frac{dV_h(x)}{[\cosh L_{\xi\eta}(x)]^{2\delta}} \right] d\mu(\xi) d\mu(\eta) \quad (6.4)$$

$$> \frac{4^\delta}{[\cosh(K)]^{2\delta}} \int_{\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty} \frac{V_h[D_{\xi\eta}(K)]}{|\xi - \eta|^{2\delta}} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \quad (6.5)$$

$$= \frac{4^\delta C'(K)}{[\cosh(K)]^{2\delta}} \int_{\mathbb{S}_\infty \times \mathbb{S}_\infty} \left[\int_{D_{\xi\eta}(0)} ds \right] \frac{1}{|\xi - \eta|^{2\delta}} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \quad (6.6)$$

$$= C(\Gamma, K) \tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) \left(C(\Gamma, K) := \frac{4^\delta C'(K)}{[\cosh(K)]^{2\delta}} \right) \quad (6.7)$$

となる. 但し, 式 (6.3) から式 (6.4) へは Fubini の定理を, 式 (6.4) から式 (6.5) へは $L_{\xi\eta}(x) < K$ であることを, 式 (6.6) から式 (6.7) へは μ の台が $\Lambda(\Gamma)$ に含まれることと $\tilde{\mu}$ の定義を用いた. なお, 式 (6.5) から式 (6.6) へは補題 6.12 を用いた. 以上により, $\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ が示された. \square

従って, 幾何的有限 Klein 群は定理 6.8 や定理 6.9 の結論にある性質を持つことが分かった.

6.4 収束指数と円錐型極限集合の Hausdorff 次元の関係

この節では、第 I 部の最終目標である、幾何的有限 Klein 群 Γ に対して等式

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma)$$

が成り立つことを証明する. $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ となることは既に第 4 章で見たため、逆向きの不等式 $\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ を示せばよい. このためには凸コンパクト Klein 群の場合と同様に、 \mathbb{S}_{∞} 上の球の Patterson–Sullivan 測度とその半径の間の評価が必要となる. その評価を与えるために、まずは 1 つ補題を用意する. 以後、基点と初期速度を明記する必要のない限り、 $T^1 M_{\Gamma}$ の元を u , v などと書く.

補題 6.14.

$u \in T^1 M_{\Gamma}$ とし、 $t \in \mathbb{R}$ と $v \in T^1 M_{\Gamma}$ に対して $f_v(t) := \tilde{d}(u, \tilde{\varphi}_t(v))$ とおく. このとき、

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} f_v(T) = 0$$

が \tilde{m} に関してほとんど至るところ $v \in T^1 M_{\Gamma}$ に対して成り立つ.

証明. まず、 $t \in \mathbb{R}$ と $u \in T^1 M_{\Gamma}$ を取り、単位接束 $T^1 M_{\Gamma}$ 上の関数 ψ_t を $\psi_t(v) := \dot{f}_v(t)$ で定める. 但し、 \dot{f}_v は時間変数 t による微分を表す. 特に、 $t = 0$ のとき $\psi(v) = \dot{f}_v(0)$ と書く. このとき、

$$\psi(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_v(h) - f_v(0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{d}(v, \tilde{\varphi}_t(v))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + o(h)}{h} = 1$$

より、 $|\psi(v)| \leq 1$ が各 $v \in T^1 M_{\Gamma}$ に対して成り立つ. 従って、 $\tilde{m}_{\mu}(T^1 M_{\Gamma}) < \infty$ より ψ は \tilde{m}_{μ} -可測関数である. 特に、 $v = [x, \xi]$ に対して $-v = [x, -\xi]$ と書くと $\psi(-v) = -\psi(v)$ となることから

$$\int_{T^1 M_{\Gamma}} \psi(v) d\tilde{m}_{\mu}(v) = 0$$

が成り立つ. 今、 $\tilde{m}_{\mu}(T^1 M_{\Gamma}) < \infty$ なので φ は \tilde{m}_{μ} に関してエルゴード的である. 従って、定理 6.3 より

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tilde{\varphi}_t(v)) dt = \int_{T^1 M_{\Gamma}} \psi(v) d\tilde{m}_{\mu}(v) = 0$$

が \tilde{m}_{μ} に関してほとんど至るところ $v \in T^1 M_{\Gamma}$ に対して成り立つ. ところで、上式左辺において

$$\frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tilde{\varphi}_t(v)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{f}_{\tilde{\varphi}_t(v)}(0) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{f}_v(t) dt = \frac{1}{T} [f_v(T) - f_v(0)]$$

であるから、主張を得る. □

\mathbb{S}_{∞} 上の球の Patterson–Sullivan 測度とその半径の間の評価を与えるのが、次の定理である.

定理 6.15.

$\tilde{m}_\mu(T^1M_\Gamma) < \infty$ なる Klein 群 Γ に対してある定数 $A > 0$ と $\mu(F) > 0$ なるあるコンパクト集合 $F \subset \mathbb{S}_\infty$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $r_0 > 0$ が, μ に関してほとんど至るところ $\xi \in F$ と $0 < r < r_0$ なる任意の r に対して

$$\frac{\mu[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^{\delta-\varepsilon}} < A$$

をみたすように取れることが成り立つ. 但し, 収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおいた.

証明. まず, $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ と $r > 0$ に対する $\mu[B_{d_0}(\xi, r)]$ を上から評価する. $\xi \in \mathbb{S}_\infty, t > 0$ とし, $x_t \in \mathbb{B}$ を双曲測地線 $\overline{0\xi}$ 上の点で $\rho(0, x_t) = t$ をみたすものとする. これに対して, $D_{t,\xi} \subset \mathbb{B}$ を

$$D_{t,\xi} := \left\{ y \in \mathbb{B} \mid \angle 0x_t y \geq \frac{\pi}{2} \right\}$$

で定める. 但し, $\angle 0x_t y$ は x_t で交わる 2 本の双曲測地線 $\overline{0x_t}, \overline{x_t y}$ のなす角である. これは Euclid 半直線 0ξ 上のある点 z を中心とする半径 $\lambda > 0$ の球 $B(z, \lambda)$ と \mathbb{B} との交わりとして書ける. 但し, $\lambda = (\sinh t)^{-1}$ の関係が成り立つ (Beardon [2, p.157]). ここで, $B_{t,\xi} := D_{t,\xi} \cap \mathbb{S}_\infty$ とおくと, 十分小さな $r > 0$ に対して $B_{d_0}(\xi, r) = B_{t,\xi}$ となる t が取れることに注意する. なお, 図 26 より r と t について $\tan r = \lambda = (\sinh t)^{-1}$ なる関係が成り立つ. 以下, $\mu(B_{t,\xi})$ を上から評価する. 双曲三

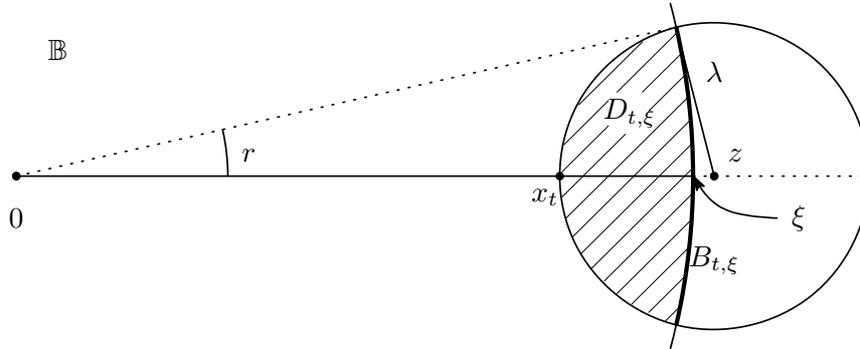


図 26 球の図

角比の公式 (Beardon [2, p.148]) より, $y \in D_{t,\xi}$ に対して

$$\begin{aligned} \cosh \rho(0, y) &= \cosh \rho(0, x_t) \cosh \rho(y, x_t) - \sinh(\angle x_t 0 y) \sinh(\angle x_t y 0) \sin(\angle 0 x_t y) \\ &\geq \cosh t \cosh \rho(y, x_t) \end{aligned}$$

であるから, $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(0) \in D_{t,\xi}$ とすると

$$\begin{aligned} e^{\rho(0, \gamma(0))} &> \cosh \rho(0, \gamma(0)) \geq \cosh t \cosh \rho(\gamma(0), x_t) \\ &\geq \frac{1}{4} e^{\rho(x_t, \gamma(0))} e^t \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(0) \in D_{t,\xi}\}$ とおき, $s > \delta(\Gamma)$ とすると

$$\sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(0,\gamma(0))} < \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{4} e^{\rho(x_t,\gamma(0))} e^t \right)^{-s} = 4^s e^{-st} \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(x_t,\gamma(0))} \quad (6.8)$$

が成り立つ. 更に, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ を $\tilde{\gamma}(0) \in \Gamma(0)$ が最も x_t に近くなるように取り, $f_\xi(t) := \rho(x_t, \tilde{\gamma}(0))$ とおく. このとき, 三角不等式より $\rho(x_t, \gamma(0)) \geq \rho(\tilde{\gamma}(0), \gamma(0)) - f_\xi(t)$ であるから

$$\sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(x_t,\gamma(0))} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(\tilde{\gamma}(0),\gamma(0))} e^{sf_\xi(t)} = e^{sf_\xi(t)} \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(\tilde{\gamma}(0),\gamma(0))}$$

となる. これと式 (6.8) より,

$$e^{st} \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(x_t,\gamma(0))} < 4^s e^{sf_\xi(t)} \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(\tilde{\gamma}(0),\gamma(0))} < 4^s e^{sf_\xi(t)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s\rho(0,\gamma(0))}$$

となる. ところで, Patterson–Sullivan 測度の構成法 (p.45) より

$$\mu_{0,s}(D_{t,\xi}) = \frac{1}{P^s(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma'} e^{-s\rho(0,\gamma(0))} < \frac{1}{P^s(\Gamma)} \frac{4^s e^{sf_\xi(t)}}{e^{st}} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s\rho(0,\gamma(0))} = \frac{4^s e^{sf_\xi(t)}}{e^{st}}$$

であり, $s_n \searrow \delta(\Gamma)$ なる数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して μ_{0,s_n} は μ に弱収束する (定理 3.34) ことから,

$$\mu(B_{t,\xi}) = \mu(D_{t,\xi}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{0,s_n}(D_{t,\xi}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{s_n} e^{s_n f_\xi(t)}}{e^{s_n t}} = \frac{4^\delta e^{\delta f_\xi(t)}}{e^{\delta t}} \quad (6.9)$$

となる. 但し, 収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおいた. なお, Γ は非初等的であるから $\delta > 0$ である.

次に, $\mu(B_{d_0}(\xi, r))/r^{\delta-\varepsilon}$ を定数で上から評価する. 但し, $r = r(t)$ は $B_{d_0}(\xi, r) = B_{t,\xi}$ をみたすものとし, このとき $r = \tan^{-1}(\sinh t)^{-1}$ なる関係が成り立つことに注意する. つまり, r を十分小さくすると t は十分大きくなる. ところで, $t > (\log 2)/2$ なる t に対して $\sinh^{-1} t > 2e^{-t}$ となることと, 関数 $\tan^{-1} \theta$ の $\theta = 0$ における Taylor 展開が $\tan^{-1} \theta = \theta + o(\theta)$ となることから, $T_1 = T_1(\xi) > 0$ が $t > T_1$ なる t に対して $r > e^{-t}$ となるように取れる. これより, $0 < \varepsilon < \delta(\Gamma)$ なる ε に対して

$$\frac{\mu[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^{\delta-\varepsilon}} = \frac{\mu(B_{t,\xi})}{r^{\delta-\varepsilon}} \leq \frac{4^\delta e^{\delta f_\xi(t)}}{e^{\delta t}} \cdot \frac{1}{e^{-t(\delta-\varepsilon)}} = 4^\delta e^{\delta f_\xi(t) - \varepsilon t}$$

となる. ここで, 補題 6.14 を $u := [0, \xi]$, $v := [x_t, \xi]$ に対して適用すると, μ に関してほとんど至るところ $\xi \in \mathbb{S}_\infty$ と $\varepsilon > 0$ に対して $T_2 = T_2(\xi, \varepsilon) > 0$ が, $t > T_2$ のとき $f_\xi(t)/t < \varepsilon/\delta$ をみたすように取れることが分かる. このとき, $e^{\delta f_\xi(t) - \varepsilon t} < 1$ となる. 従って, $r_0 = r_0(\xi, \varepsilon) > 0$ が $0 < r < r_0$ なる r に対して

$$\frac{\mu[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^{\delta-\varepsilon}} < 4^\delta$$

が成り立つように取れる.

今, ξ を μ の密度点とし, 十分小さい $r' > 0$ に対してコンパクト集合 $F \subset \mathbb{S}_\infty$ を $F := \overline{B_{d_0}(\xi, r')}$ とおくと $\mu(F) > 0$ である. 更に, $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ を $\xi \in F$ によらないように取り直すことにより, $0 < r < r_0$ なる r に対して

$$\frac{\mu[B_{d_0}(\xi, r)]}{r^{\delta-\varepsilon}} \leq A, \quad (A := 4^\delta)$$

が成り立つ. これで, 証明が完了した. □

この評価の系として, 次が成り立つ.

系 6.16.

Γ を $\tilde{m}_\mu(T^1 M_\Gamma) < \infty$ をみたす Klein 群とし, 収束指数を $\delta := \delta(\Gamma)$ とおく. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathcal{H}^{\delta-\varepsilon}[\Lambda_c(\Gamma)] > 0$ が成り立つ. 但し, $\mathcal{H}^{\delta-\varepsilon}$ は理想境界 \mathbb{S}_∞ 上の $\delta - \varepsilon$ 次元 Hausdorff 測度である.

証明. F は定理 6.15 にあるものとし, $\tilde{F} := F \cap \Lambda_c(\Gamma)$ とおく. また, $\varepsilon > 0$ とし, $\mathcal{H}^{\delta-\varepsilon}(\tilde{F}) < \mathcal{H}^{\delta-\varepsilon}[\Lambda_c(\Gamma)]$ に注意する. このあとの議論は定理 5.4 と同様に行えばよい. □

従って, Hausdorff 次元の定義から次が分かる.

定理 6.17.

$\tilde{m}_\mu(T^1 M_\Gamma) < \infty$ なる Klein 群 Γ に対して $\delta(\Gamma) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma)$ が成り立つ. 従って,

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$$

が成り立つ.

第 II 部

McMullen の論文紹介と Schottky 群によって \mathbb{S}^d 上に作られる Cantor 集合の Hausdorff 次元

7 McMullen の論文紹介

この章では, McMullen [8] の論文紹介を行う. 具体的には, d 次元単位球面 \mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} とそれに対する \mathbb{S}^d 上の s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν を考え, Markov 分割を用いた s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν の次元 s を求める固有値アルゴリズムを紹介する. なお, この論文は須川敏幸氏によって解説がされている ([17]). 以下の内容は, この解説 [17] も参考にした. また, 論文紹介という観点から, 既に導入した用語について再び説明をしたものもある.

7.1 d 次元単位球面 \mathbb{S}^d 上の共形力学系と Markov 分割

まずは用語の定義から始める. \mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} とは, \mathbb{S}^d 上の Riemann 計量 τ に対する共形写像のなす族, 即ち,

$$\mathcal{F} = \{f : U(f) \rightarrow \mathbb{S}^d \mid f^*\tau = h\tau \text{ となる } U(f) \text{ 上の正值連続関数 } h \text{ が取れる} \}$$

のことである. 但し, $U(f) \subset \mathbb{S}^d$ は C^1 -級写像 f の定義域を表し, τ は標準的な球面計量 σ と共形的な \mathbb{S}^d 上の Riemann 計量とする. 但し, 標準的な球面計量 σ は立体射影により $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ と同一視したとき, \mathbb{R}^d 上で

$$\sigma = \frac{4}{(1 + \|x\|^2)^2} \|dx\|^2$$

と書けるものである. また, 第 3.3 節において導入したように, h は f の τ に関する微分を与える関数なので $|f'|_\tau := \sqrt{f^*\tau/\tau} := \sqrt{h}$ と書く. 特に, $|f'| = |f'|_\sigma$ と書く. $d+1$ 次元 Möbius 変換 $f \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ に対して, これは拡大率と一致することに注意する.

また, s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν とは, \mathbb{S}^d 上の有限 Borel 測度であり, 任意の $f \in \mathcal{F}$ と f を E に制限したときに単射になるような Borel 集合 $E \subset U(f)$ に対して変換則

$$\nu[f(E)] = \int_E |f'(\xi)|_\tau^s d\nu(\xi) \quad (7.1)$$

をみたすものである. 以後, 断らない限り標準的な球面計量 σ を考え, \mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} とそれに対する \mathbb{S}^d 上の s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν の組を (\mathcal{F}, ν) で表す.

例 7.1 (Klein 群).

Γ を d 次元 Klein 群とし, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}^{d+1}}$ を s 次元 Γ -不変共形測度とする. 但し, Γ の元の定義域は \mathbb{S}^d とする. このとき, (Γ, σ_x) は \mathbb{S}^d 上の共形力学系とそれに対する \mathbb{S}^d 上の s 次元 Γ -不変測度の組となる. 特に $x = 0$ のとき, 変換則 (7.1) に現れる微分は標準的な球面計量 σ に関するものとなる.

次に, (\mathcal{F}, ν) に対する Markov 分割 \mathcal{P} を定義する. これは測度 ν の台に対する分割であり, その細かい 1 つ 1 つを見ていくことで ν の振る舞いを考察する.

定義 7.2 ((\mathcal{F}, ν) に対する Markov 分割).

$\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ が以下の条件 (MP0) から (MP5) をみたすとき, \mathcal{P} を (\mathcal{F}, ν) に対する Markov 分割という. 但し, $i \mapsto j$ は $\nu[f_i(P_i) \cap P_j] > 0$ を意味する.

(MP0) 各 $i \in I$ に対して $f_i \in \mathcal{F}$ であり, P_i は $U(f_i)$ 内のコンパクト集合である.

(MP1) 任意の $i \in I$ に対して $f_i(P_i) \supset \bigcup_{i \mapsto j} P_j$ が成り立つ.

(MP2) $i \mapsto j$ なる $j \in I$ に対して, f_i は $P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ のある近傍上で同相写像である.

(MP3) 任意の $i \in I$ に対して $\nu(P_i) > 0$ が成り立つ.

(MP4) $i \neq j$ のとき, $\nu(P_i \cap P_j) = 0$ が成り立つ.

(MP5) $\nu[f_i(P_i)] = \nu\left(\bigcup_{i \mapsto j} P_j\right) = \sum_{i \mapsto j} \nu(P_j)$ が成り立つ.

なお, 各 P_i を Markov 分割 \mathcal{P} の区画という.

例として, Schottky 群に対する Markov 分割の具体的な構成法を紹介する.

例 7.3 (Schottky 群に対する Markov 分割).

\mathbb{S}^d 上の $2m + n$ 個の閉球 $B_1^+, B_1^-, \dots, B_m^+, B_m^-, D_1, \dots, D_n$ に対する (m, n) 型広義古典的 Schottky 群 Γ を考える (例 2.4). これに対する生成元を, $1 \leq k \leq m$ に対して B_k^+ の内部を $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \setminus B_k^-$ に写すものを $\gamma_k \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^{d+1})$ とし, $1 \leq l \leq n$ に対して球 D_l に対応する反転を $\rho_l \in \text{Möb}^-(\mathbb{B}^{d+1})$ とする.

μ を Γ に対する Patterson–Sullivan 測度とし, (Γ, μ) に対する Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を以下で構成する. まず, $I := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 2m + n\}$ とする. 次に, $1 \leq k \leq m$ に対して, $i = 2k - 1$ のときは $f_i := \gamma_k$, $P_i := B_k^+$ とおき, $i = 2k$ のときは $f_i := \gamma_k^{-1}$, $P_i := B_k^-$ とおく. また, $1 \leq l \leq n$ に対して, $i = 2m + l$ のとき $f_i := \rho_l$, $P_i := D_l$ とおく. このように Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ が定まる.

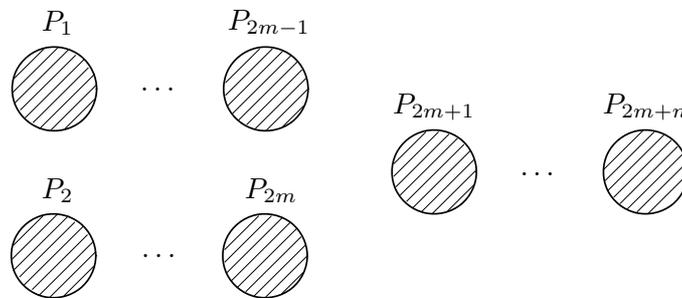


図 27 Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$

命題 7.4.

例 7.3 で定めた $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ は (Γ, μ) に対する Markov 分割となる.

証明. まず, (MP3) を背理法により示す. ある i について $\mu(P_i) = 0$ であると仮定し, i について場合分けを行って示す. $1 \leq k \leq m$ に対して $i = 2k - 1$ と書けるときの, $f_i(P_i) \supset \bigcup_{j \neq 2k} P_j \supset \text{supp } \mu$ であり, 各 P_i は交わらないことから

$$\sum_{j \neq 2k} \mu(P_j) = \mu[f_i(P_i)] = \int_{P_i} |f_i'(\xi)|^\delta d\mu(\xi) = 0 \quad (7.2)$$

となる. 但し, δ は $\Gamma(\mathcal{C})$ の収束指数である. 従って, $j \neq 2k$ に対して $\mu(P_j) = 0$ である. ところで, Schottky 群 $\Gamma(\mathcal{C})$ の極限集合 $\Lambda(\Gamma(\mathcal{C}))$ に対して $\mu[\Lambda(\Gamma(\mathcal{C}))] > 0$ であることと, $\Lambda(\Gamma(\mathcal{C}))$ は $\{P_i\}_{i \in I}$ で被覆されていることから,

$$\mu(P_{2k}) = \sum_{i \in I} \mu(P_i) = \mu[\Lambda(\Gamma(\mathcal{C}))] > 0$$

が従う. しかし, 式 (7.2) を $i = 2k$ として適用すると上式と矛盾することが分かる. また, $i = 2k$ と書けるときのも上と同様である. 最後の場合分けである $1 \leq l \leq n$ に対して $i = 2m + l$ と書けるときの, 式 (7.2) と仮定より任意の $i \in I$ に対して $\mu(P_i) = 0$ が分かるので, やはり $\mu[\Lambda(\Gamma(\mathcal{C}))] > 0$ に矛盾する. 以上より, 任意の $i \in I$ に対して $\mu(P_i) > 0$ であることが分かった. このことから $i \mapsto j$ は, $1 \leq k \leq m$ に対して, $i = 2k - 1$ のときは $j \neq 2k$ と, $i = 2k$ のときは $j \neq 2k - 1$ と, $1 \leq l \leq n$ に対して, $i = 2m + l$ のときは $j \neq i$ と同値であることが従う. これより, 公理 (MP0), (MP1), (MP2), (MP4) は, $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ の定め方から直ちに分かる. また (MP5) は,

$$\mathbb{S}^d \setminus \text{supp } \mu \supset \mathbb{S}^d \setminus \Lambda(\Gamma(\mathcal{C})) \supset P_i \setminus \bigcup_{i \mapsto j} f_i^{-1}(P_j)$$

から分かる. □

7.2 Markov 分割を用いた固有値アルゴリズム

この節では, \mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} に対する s 次元 \mathcal{F} -不変測度の次元 s を求めるための, Markov 分割を用いた固有値アルゴリズムを紹介する. アルゴリズムを紹介するにあたり, Markov 分割 \mathcal{P} の細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ を次で定める.

定義 7.5 (Markov 分割の細分).

Markov 分割 \mathcal{P} に対してその細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ を, $\mathcal{R}(\mathcal{P}) := \{(P_{ij}, f_i)\}_{(i,j) \in \mathcal{R}(I)}$ で定める. 但し, $i \mapsto j$ に対して P_{ij} は $P_{ij} := P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ で定められる \mathbb{S}^d 上のコンパクト集合であり, 添字集合 $\mathcal{R}(I)$ は $\mathcal{R}(I) := \{(i, j) \in I \times I \mid i \mapsto j\}$ で定める.

実際に, このように細分を取ると Markov 分割が構成できる. そのことを証明するために 1 つ補題を用意する.

補題 7.6.

$(i, j), (k, l) \in \mathcal{R}(I)$ に対して, $(i, j) \mapsto (k, l)$ となる必要十分条件は, $j = k$ であり, 特に $j \mapsto l$ である. 但し, $(i, j) \mapsto (k, l)$ は $\nu[f_i(P_{ij}) \cap (P_{kl})] > 0$ を意味する.

証明. まず, 必要性を示す. $(i, j) \mapsto (k, l)$ とする. このとき, $i \mapsto j$ と Markov 分割の公理 (MP1), (MP2) に注意すると

$$\begin{aligned} f_i(P_{ij}) \cap P_{kl} &= f_i(P_i \cap f_i^{-1}(P_j)) \cap (P_k \cap f_k^{-1}(P_l)) \\ &= [f_i(P_i) \cap P_j] \cap [P_k \cap f_k^{-1}(P_l)] \\ &= P_j \cap [P_k \cap f_k^{-1}(P_l)] \end{aligned}$$

となるので, 公理 (MP4) より $\nu[f_i(P_{ij}) \cap (P_{kl})] > 0$ となるためには $j = k$ が必要である. このとき $(j, l) \in \mathcal{R}(I)$ より, $j \mapsto l$ である.

次に, 十分性を示す. $j = k$ とする. 先程と同様の計算で, $f_i(P_{ij}) \cap P_{kl} = P_k \cap f_k^{-1}(P_l) = P_{kl}$ が得られる. ところで, $k \mapsto l$ と P_k 上で $|f'_k(\xi)| > 0$ であることから,

$$0 < \nu[f_k(P_k) \cap P_l] = \nu[f_k(P_{kl})] = \int_{P_{kl}} |f'_k(\xi)|^s d\nu(\xi) \quad (7.3)$$

が成り立つ. もし $\nu(P_{kl}) = 0$ なら, 式 (7.3) の右辺は 0 となり左辺に矛盾する. 故に, $\nu[f_i(P_{ij}) \cap (P_{kl})] = \nu(P_{kl}) > 0$ となり, $(i, j) \mapsto (k, l)$ である. \square

以下, 細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ は Markov 分割となることを示す.

命題 7.7.

Markov 分割 \mathcal{P} に対して, その細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ はまた Markov 分割となる.

証明. 示すべきことは, 以下である.

(MP1') 任意の $(i, j) \in \mathcal{R}(I)$ に対して, $f_i(P_{ij}) \supset \bigcup_{j \mapsto l} P_{jl}$ が成り立つ.

(MP2') 任意の $(i, j), (j, l) \in \mathcal{R}(I)$ に対して, f_i は $P_{ij} \cap f_i^{-1}(P_{jl})$ のある近傍上で同相写像である.

(MP3') 任意の $(i, j) \in \mathcal{R}(I)$ に対して, $\nu(P_{ij}) > 0$ が成り立つ.

(MP4') $(i, j) \neq (k, l)$ のとき, $\nu(P_{ij} \cap P_{kl}) = 0$ が成り立つ.

(MP5') 任意の $(i, j) \in \mathcal{R}(I)$ に対して,

$$\nu[f_i(P_{ij})] = \nu\left(\bigcup_{j \mapsto l} P_{jl}\right) = \sum_{j \mapsto l} \nu(P_{jl})$$

が成り立つ.

(MP1') は, (MP1) より

$$f_i(P_{ij}) = f_i(P_i) \cap P_j = P_j \supset P_j \cap \bigcup_{j \mapsto l} f_j^{-1}(P_l) = \bigcup_{j \mapsto l} P_{jl}$$

となることから従う。(MP2') は, (MP2) より f_i が P_{ij} のある近傍上で同相写像となることから従う。(MP3') は, 式 (7.3) と同様の議論により分かる。(MP4') は, $(i, j) \neq (k, l)$ のとき, $i \neq k$ または, $i = k$ 且つ $j \neq l$ であることと, $P_{ij} \cap P_{kl} = [P_i \cap P_k] \cap [f_i^{-1}(P_j) \cap f_k^{-1}(P_l)]$ に注意すると, (MP4) と式 (7.3) と同様の議論により分かる. 最後に, (MP5') を示す. (MP1) より, $(i, j) \in \mathcal{R}(I)$ に対して $f_i(P_{ij}) = P_j$ であることに注意する. ところで, (MP2) と (MP5) より

$$\begin{aligned} 0 &= \nu \left[f_j(P_j) \setminus \bigcup_{j \mapsto l} P_l \right] = \nu \left[f_j \left(P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} f_j^{-1}(P_l) \right) \right] \\ &= \int_{P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} f_j^{-1}(P_l)} |f'_j(\xi)|^s d\nu(\xi) \end{aligned}$$

と書けるので, $|f'_j(\xi)| > 0$ より $\nu[P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} f_j^{-1}(P_l)]$ となる. これと,

$$P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} P_{jl} = P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} [P_j \cap f_j^{-1}(P_l)] = P_j \setminus \bigcup_{j \mapsto l} f_j^{-1}(P_l)$$

となることから, $\nu(P_j) = \nu(\bigcup_{j \mapsto l} P_{jl})$ が従う. これで, 1 つ目の等号が示された. なお, 2 つ目の等号は各 P_{jl} が互いに交わらないことから分かる. \square

これで, 細分を取るという操作が意味を持つことが分かった. 以下で固有値アルゴリズムを定義する.

定義 7.8 (固有値アルゴリズム).

\mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} とそれに対する \mathbb{S}^d 上の s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν の組を (\mathcal{F}, ν) とし, $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を (\mathcal{F}, ν) に対する Markov 分割とする. これに対し, 以下の手順により固有値アルゴリズムを定める.

(EA1) 各 $i \in I$ に対して基点 $x_i \in P_i$ を 1 つずつ取り, $i \mapsto j$ なる $j \in I$ に対して, $y_{ij} := f_i^{-1}(x_j) \in P_i$ とおく.

(EA2) 正方行列 $T = (T_{ij})_{i, j \in I}$ を,

$$T_{ij} := \begin{cases} |f'_i(y_{ij})|^{-1} & i \mapsto j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める.

(EA3) $a > 0$ に対し, 正方行列 $T^a := (T_{ij}^a)$ のスペクトル半径 $\lambda(T^a)$ を考え, $\lambda(T^a) = 1$ となるように $a > 0$ を解く. なお, 正方行列のスペクトル半径とは, 正方行列に対する固有値の最大絶対値のことである.

(EA4) $a(\mathcal{P}) := a$ として, 指数 $a(\mathcal{P})$ を出力する.

(EA5) 細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ の基点として y_{ij} を採用し, (EA1) に戻る.

以後これを繰り返して, n 回細分 $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ に対する指数 $a(\mathcal{R}^n(\mathcal{P}))$ を出力していく.

正方行列の固有値を考える意義は、ベクトル $m := (\mu(P_i))_{i \in I}$ を考察することにより見いだすことができる:

$$\begin{aligned} m_i := \mu(P_i) &= \sum_{i \rightarrow j} \mu[f_i^{-1}(P_j)] = \sum_{i \rightarrow j} \int_{P_j} |(f_i^{-1})'(x)|^\delta d\mu(x) \\ &\approx \sum_{i \rightarrow j} |f_i'(y_{ij})|^{-\delta} \mu(P_j) = \sum_{i \rightarrow j} T_{ij}^\delta m_j. \end{aligned}$$

つまり、 m は T^δ に対する固有値 1 の固有ベクトルに近いものとなっている。

以下、手順 (EA1) から (EA5) に従って s 次元 \mathcal{F} -不変測度の次元 s を求めていくのだが、今のところ一般の Markov 分割に対してこのアルゴリズムを用いると近似値が出力できることは証明されていない。以後、近似値を出力させるための 1 つの十分条件として、次で定める Markov 分割に対する拡大性を課して議論を進めていく。

定義 7.9 (拡大的な Markov 分割).

Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ が σ と共形的な計量 τ に関して拡大的であるとは、ある正数 $K > 1$ が任意の $i \in I$ と $i \mapsto j$ なる $x \in P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ に対して $|f_i'(x)|_\tau > K$ をみたすように取れることをいう。このとき、拡大定数 K を明示して $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を K -拡大的ともいう。

この条件は、細分 $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ を取っても保たれることは、定義から分かる。ここで、広義古典的 Schottky 群の例についてこの条件を考察する。

命題 7.10 (広義古典的 Schottky 群).

Γ を、 \mathbb{S}^d 上の $2m + n$ 個の閉球 $B_1^+, B_1^-, \dots, B_m^+, B_m^-, D_1, \dots, D_n$ に対する (m, n) 型広義古典的 Schottky 群とし、 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を例 7.3 で構成した Markov 分割とする。これに対して、次の 2 条件を課すと $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ は σ に関して拡大的である。

- (1) 各 B_k^\pm に対応する生成元は例 2.4 で紹介した“自然な Möbius 変換”である。
- (2) $1 \leq k \leq m$ なる任意の k に対して B_k^+ と B_k^- の半径が同じである。

証明. 境界が \mathbb{S}_∞^d と直交するような \mathbb{R}^{d+1} 上の 2 つの球 $B(a_1, r_1)$ と $B(a_2, r_2)$ に対して、 $\gamma \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{d+1})$ を $B(a_1, r_1)$ を $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \setminus \overline{B(a_2, r_2)}$ に“自然に写す Möbius 変換”とする。即ち、 γ は $B(a_1, r_1)$ を $\widehat{\mathbb{R}}^{d+1} \setminus \overline{B(a_2, r_2)}$ に写す Möbius 変換 $\gamma_1(x) = r_1 r_2 (x - a_1)^* + a_2$ と、 0 と a_2 を通る超平面による鏡映 γ_2 の合成 $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ で与えられる。従って、その微分は $|\gamma'(x)| = |\gamma_1'(x)| = r_1 r_2 / \|x - a_1\|^2$ となる。故に、 $r_1 = r_2$ のとき $B(a_1, r_1)$ 上で $|\gamma'(x)| > 1$ が成り立つ。

さて、条件 (1), (2) を課すと、 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ は σ に関して拡大的となることを示す。まず、条件 (1) より各生成元は上のように構成されている。また、 \mathcal{P} の作り方から各 $P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ は P_i の内部に含まれるコンパクト集合なので、条件 (2) を課すと各 $P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$ に対して $|f_i'| > K_{ij} > 1$ となる定数 K_{ij} が取れる。これより、 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ は σ に関して拡大的となることが従う。□

この拡大性の条件を課すと、Markov 分割を構成しているコンパクト集合の直径が、細分を取る毎にだんだん小さくなっていくことが分かる。それが、次の命題である。

命題 7.11 (McMullen [8, Proposition 2.1]).

計量 τ に関する K -拡大的な Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ に対して, P_i の直径 $\text{diam}_\tau(P_i)$ の最大値を L_0 とおく. また, 同様に \mathcal{P} の n 回細分 $\mathcal{R}^n(\mathcal{P})$ に対してもその区画たちの直径の最大値として L_n を定める. このとき, $n \rightarrow \infty$ に対して $L_n = L_0 O(K^{-n})$ が成り立つ.

McMullen [8] によって証明された定理は, 以下のものである. 証明については, 須川 [17] に詳しい解説がなされている. この証明の中で, 各区画の直径が小さくなっていくことが効く.

定理 7.12 (McMullen [8, Theorem 2.2]).

\mathbb{S}^d 上の共形力学系 \mathcal{F} とそれに対する \mathbb{S}^d 上の s 次元 \mathcal{F} -不変測度 ν の組を (\mathcal{F}, ν) とし, $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を (\mathcal{F}, ν) に対する K -拡大的な Markov 分割とする. このとき,

$$s = a(\mathcal{P}) + O(L_0) \quad (L_0 \searrow 0)$$

が成り立つ. つまり, $L_0 \searrow 0$ に対して $s \sim a(\mathcal{P})$ となる. 従って, 命題 7.11 より $n \rightarrow \infty$ に対して $s = a(\mathcal{R}^n(\mathcal{P})) + O(K^{-n})$ が成り立つことが分かる.

微分 $|f'_i(x)|$ は, σ と共形的などんな計量で計算してもかまわないことが, 定理の証明から分かる. McMullen [8] において, 固有値アルゴリズムは次のように応用されている.

例 7.13 (McMullen [8, Theorem 3.5]).

まず, \mathbb{S}^1 に直交する 3 つの同じ大きさの互いに交わらない円 S_1, S_2, S_3 を均等に配置する. また, $i = 1, 2, 3$ に対して各 S_i に対する反転を ρ_i と書き, これらで生成される $(0, 3)$ 型広義古典的 Schottky 群を $\Gamma_\theta := \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3 \rangle$ とおく. なお, $0 < \theta < 2\pi/3$ なる θ は, \mathbb{S}^1 と S_1 のそれぞれの交点と原点 0 を結んで得られる扇形の中心角を表す (図 28). このとき, 極限集合 $\Lambda(\Gamma_\theta)$ の Hausdorff 次元は

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda(\Gamma_\theta) \sim \frac{\log 2}{\log 12 - 2 \log \theta} \quad (\theta \searrow 0)$$

となる.

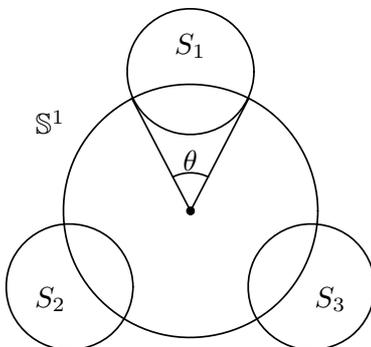


図 28 McMullen の構成した広義古典的 Schottky 群

8 \mathbb{S}^d 上に構成される Cantor 集合の Hausdorff 次元

私は McMullen [8] において構成された $(0, 3)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ の一般化を行った. 具体的には, \mathbb{S}^d に作用する $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d を構成し, その極限集合として実現される Cantor 集合の Hausdorff 次元の $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動を求めた. 更に, 私が構成した \mathbb{B}^{d+1} に自由に作用する古典的 Schottky 群に対する計算例も紹介する. なお, 私の計算結果では漸近挙動を陰関数表示で与えたため, そのグラフを Mathematica で出力し掲載した.

8.1 $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群によって \mathbb{S}^d 上に構成される Cantor 集合

この節では, McMullen [8] において構成された $(0, 3)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ の一般化である, \mathbb{S}^d に作用する $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d を構成する.

8.1.1 \mathbb{S}^d に内接する頂点数 $d+2$ の正多面体 $\Delta[d+2]$

まずは, \mathbb{S}^d に内接する $d+2$ 単体 $\Delta[d+2] \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を単位球の次元 d について帰納的に構成していく. 以後, $\Delta[d+2]$ の 2 頂点間の距離が一定 l_d となるように単体を構成するので, $d+2$ 単体 $\Delta[d+2]$ を頂点数 $d+2$ の正多面体とよぶ.

$d=1$ のとき, \mathbb{S}^1 に内接する正三角形の凸包として $\Delta[3]$ を定める. これは, 正三角形の 3 頂点を $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{S}^1$ とすると, $\Delta[3] = \text{ch}(v_1, v_2, v_3)$ と書ける. このとき, $i \neq j$ なる $i, j = 1, 2, 3$ に対して 2 ベクトル間のなす角 $\cos^{-1}(v_i \cdot v_j)$ は等しいので, これを θ_1 とおく. なお, \mathbb{R}^{d+1} の部分集合 X に対する凸包 $\text{ch}(X)$ とは, X を含む最小の凸閉部分集合のことである. 特に, X が n 個の元からなる, 即ち, $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ と書けるときの $\text{ch}(X) = \text{ch}(v_1, \dots, v_n)$ と書く.

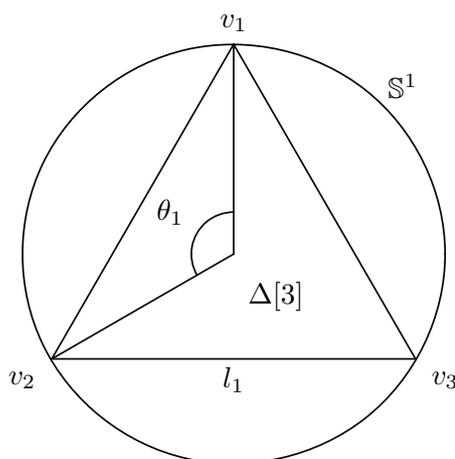


図 29 正三角形の凸包 $\Delta[3]$

次に, \mathbb{S}^{d-1} に内接する頂点数 $d+1$ の正多面体 $\Delta[d+1] \subset \mathbb{R}^d$ を用いて, \mathbb{S}^d に内接する頂点

数 $d+2$ の正多面体 $\Delta[d+2] \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を構成していく. まず, $v_{d+2} := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ とおく. そして $0 < \theta < \pi$ なる θ に対して \mathbb{S}_θ^{d-1} を, \mathbb{S}^d と超平面 $\{x_{d+1} = \cos \theta\}$ の共通部分, 即ち, $\mathbb{S}_\theta^{d-1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \mid x_{d+1} = \cos \theta\}$ とおく. これは, \mathbb{S}^{d-1} の各元を $\sin \theta$ 倍したものの $\{(\sin \theta)x \mid x \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ と同一視できる (図 30). このとき, \mathbb{S}_θ^{d-1} に内接する頂点数 $d+1$ の正多面体を $\Delta_\theta[d+1] = \text{ch}(v_1, \dots, v_{d+1}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ とし, $\Delta_\theta[d+1]$ の辺の長さは $(\sin \theta)l_{d-1}$ であるこ

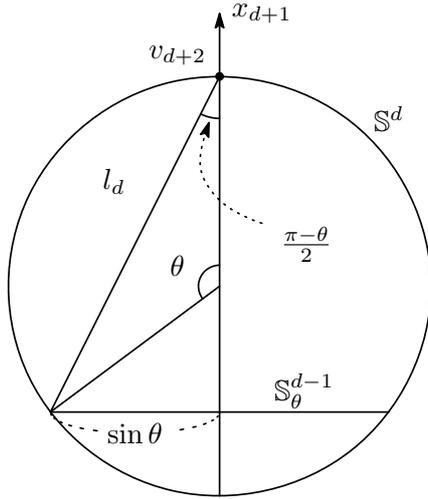


図 30 正多面体 $\Delta[d+2]$ の断面図

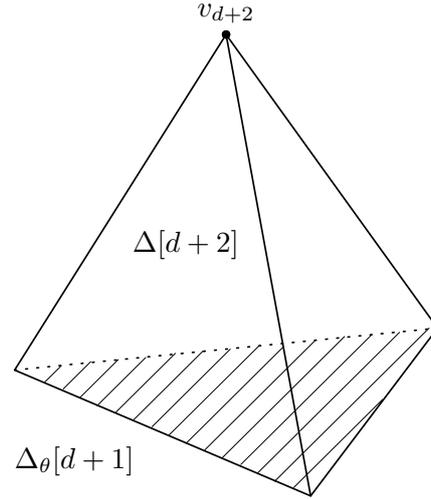


図 31 正多面体 $\Delta[d+2]$

とに注意する. 以下, $d+2$ 個の頂点に対して, $i \neq j$ のとき $\|v_i - v_j\|$ の値が一定になるように θ を決める. i, j が共に $d+2$ でないときは $\|v_i - v_j\|$ は一定の値 $(\sin \theta)l_{d-1}$ になるので, $i = d+2, j \neq d+2$ を考える. まず, $l_d = (\sin \theta)l_{d-1}$ でなければならない (図 30). また, $l_d = \|v_{d+2} - v_j\|$ は v_{d+2} から \mathbb{S}_θ^{d-1} までの距離なので $[\sin(\pi/2 - \theta/2)]l_d = \sin \theta$ をみたく (図 30). 従って, 連立方程式

$$\begin{cases} l_d = (\sin \theta)l_{d-1} \\ (\sin(\frac{\pi-\theta}{2}))l_d = \sin \theta \end{cases}$$

を解けば良い. これを解くと

$$l_d^2 = \frac{2(d+2)}{d+1}, \quad \theta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{l_d}{2} \right)$$

となる. このようにして定まる θ を $\theta_d := \theta$ と書く. そして, 正多面体 $\Delta_{\theta_d}[d+1] = \text{ch}(v_1, \dots, v_{d+1}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ の頂点と v_{d+2} のなす凸包として, \mathbb{S}^d に内接する頂点数 $d+2$ の正多面体 $\Delta[d+2] := \text{ch}(v_1, \dots, v_{d+2}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を定める (図 31).

8.1.2 \mathbb{S}^d に作用する $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d

考察する対象となる $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d を, 以下の手順で構成する. 但し, θ は $0 < \theta < \theta_d$ なるものとする.

まず, $\text{diam}_\sigma(B(a^*, r_a) \cap \mathbb{S}^d) = \theta$ となるような $a \in \mathbb{B}^{d+1}$ を取り, $t = t(\theta) := \|a\|$, $r = r(\theta) := r_a$ とおく. 但し, $r_a = \sqrt{\|a^*\|^2 - 1}$ であり, $B(a^*, r_a)$ の境界 $S(a^*, r_a)$ は \mathbb{S}^d と直交する超球面であることを思い出す (p.15). また, \mathbb{S}^d に内接する正多面体 $\Delta[d+2]$ の頂点を $v_1, \dots, v_{d+2} \in \mathbb{S}^d$ とし, $1 \leq i \leq d+2$ なる自然数 i に対して $a_i := (tv_i)$ とおく. ここで, 各 i に対して ρ_i を球面 $S(a_i^*, r)$ に対する反転 $\rho_i(x) := r^2(x - a_i^*)^* + a_i^*$ と定め, Γ_θ^d を $\Gamma_\theta^d := \langle \rho_i \rangle_{1 \leq i \leq d+2}$ と定める. このとき, θ

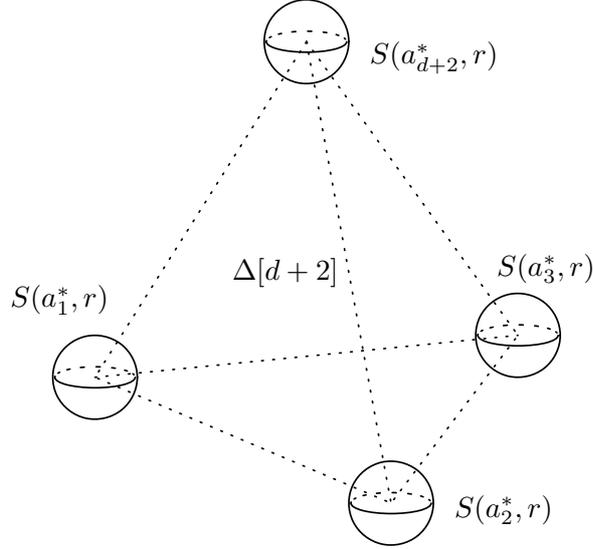


図 32 Γ_θ^d の生成元の配置

の取り方から $d+2$ 個の各閉球 $D_i := \overline{B(a_i, r)}$ は互いに交わらず, r の取り方から各 ρ_i は \mathbb{S}^d を保つことが分かる (例 1.18). 従って, Γ_θ^d は \mathbb{S}^d に作用する $(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群であり, この極限集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ は Cantor 集合となる.

8.2 Cantor 集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ の Hausdorff 次元の計算

$(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d の極限集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ として表現される Cantor 集合の Hausdorff 次元を, McMullen の例の手順を踏んで $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動を求める.

まず, μ を Γ_θ^d の伴う Patterson–Sullivan 測度として, (Γ_θ^d, μ) の Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を次で構成する. $I := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq d+2\}$ とし, 各 $i \in I$ に対して $P_i := \overline{B(a_i, r)} \cap \mathbb{S}^d$, $f_i := \rho_i$ とおく. これは, 例 7.10 より拡大的な Markov 分割となる. 次に固有値アルゴリズムの手順を踏んで, Hausdorff 次元の漸近挙動を求める. はじめに, $i \mapsto j$ と $i \neq j$ が同値なことに注意し, $x_i \in P_i$ と $y_{ij} := \rho_i^{-1}(x_j) \in P_i$ を取る. これに対して, 行列 $T = (T_{ij})_{1 \leq i, j \leq d+2}$ を計算する. 各 P_i の Euclid 半径 r と P_i の中心 $a_i \in \mathbb{R}^2$ と x_i の距離は, $\theta \searrow 0$ のとき $\theta \sim 2r$, $\|x_j - a_i\|^2 \sim 2(d+2)/(d+1)$ なので, $i \neq j$ に対して

$$\frac{1}{|\rho_i'(y_{ij})|} = |\rho_i'(x_j)| = \frac{r_i^2}{\|x_j - a_i\|^2} \sim \frac{\theta^2}{2^{2\frac{d+2}{d+1}}} = \frac{(d+1)\theta^2}{8(d+2)} =: t \quad (\theta \searrow 0)$$

が成り立つ。ここで、次の命題を用意する。

命題 8.1.

$a \in \mathbb{C}$ に対して $n + 1$ 次正方行列 M を、対角成分が 0 でそれ以外が a となる行列、即ち、 $M := (a(1 - \delta_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n+1}$ と定める。但し、 δ は Kronecker の δ 記号を表す。このとき、 $n + 1$ 次正方行列 M の固有多項式 $\Phi_M(x)$ は、

$$\Phi_M(x) = \det(xE_{n+1} - M) = (x - da)(x + a)^d$$

となる。

証明. n に関する帰納法による。まず、 $n = 0$ のときは示すことはない。次に、 $n = k - 1$ のとき、命題が正しいとして $n = k$ のときに正しいことを示す。このとき、

$$\begin{aligned} \Phi_M(x) &= \det(xE_{k+1} - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x & -a & -a & \dots & -a \\ -a & x & -a & \dots & -a \\ -a & -a & x & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x & -a & \dots & -a \\ -a & x & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a & -a & \dots & x \end{pmatrix} - (-a)(k-1) \det \begin{pmatrix} -a & -a & \dots & -a \\ -a & x & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a & -a & \dots & x \end{pmatrix} \\ &= (x - (k-1)a)(x + a)^{k-1} - (-a)(k-1) \det \begin{pmatrix} -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & x+a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a & 0 & \dots & x-a \end{pmatrix} \\ &= \{x - (k-1)a\}(x + a)^{k-1} - a^2(x + a)^{k-1} \\ &= (x - ka)(x + a)^k \end{aligned}$$

となり、 $n = k$ のときも正しいことが分かった。以上より、命題は正しい。 □

これより、 $d + 2$ 次正方行列 T^a の固有多項式は、命題 8.1 より

$$\det(xE_{d+1} - T^a) \sim (x - (d+1)t^a)(x + t^a)^{d+1}$$

と、 $\theta \searrow 0$ に対して漸近的に求めることができる。従って、 T^a のスペクトル半径 $\lambda(T^a)$ は $\lambda(T^a) \sim (d+1)t^a$ となる。そして、 $1 = (d+1)t^{-a}$ をみたすように $a > 0$ を求めると、 $a = \log(1/(d+1))/\log t$ となる。故に、定理 7.12 より

$$\delta(\Gamma_\theta^d) \sim a = \frac{-\log(d+1)}{\log \theta^2 - \log 12} = \frac{\log(d+1)}{\log \frac{8(d+2)}{d+1} - 2 \log \theta} \quad (\theta \searrow 0)$$

が成り立つ。ところで、 Γ_θ^d は凸コンパクトであるから $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda(\Gamma_\theta^d) = \delta(\Gamma_\theta^d)$ となり、次を得る。

定理 8.2 (Cantor 集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ の Hausdorff 次元).

$(0, d+2)$ 型広義古典的 Schottky 群 Γ_θ^d の極限集合 $\Lambda(\Gamma_\theta^d)$ として表現される Cantor 集合の Hausdorff 次元は, $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動として

$$\dim_{\mathcal{H}} \Lambda(\Gamma_\theta^d) \sim \frac{\log(d+1)}{\log \frac{8(d+2)}{d+1} - 2 \log \theta} \quad (\theta \searrow 0) \quad (8.1)$$

で与えられる. なお, 図 33 は下から $d = 10, 100, 1000$ のものである.

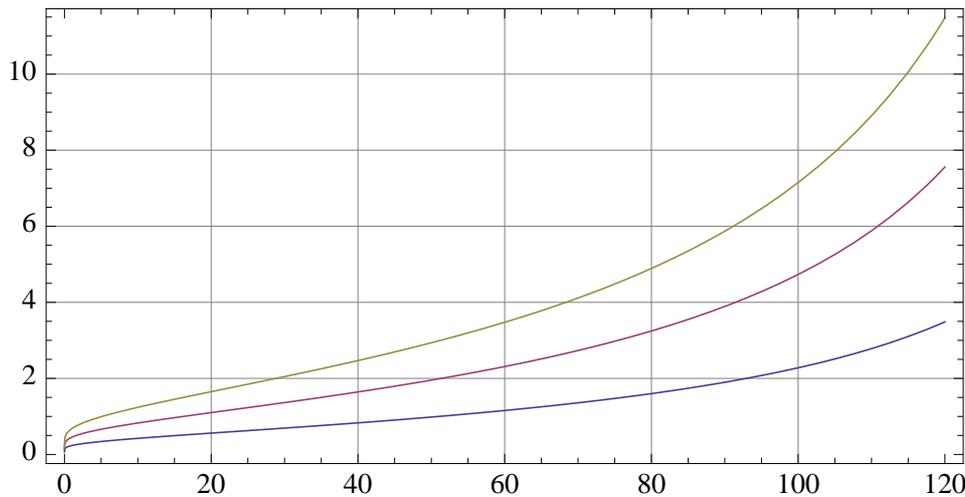


図 33 式 (8.1) のグラフ (横方向: θ 軸, 縦方向: Hausdorff 次元の軸)

8.3 \mathbb{S}^1 上に構成される Cantor 集合とその Hausdorff 次元の計算

McMullen [8] の例では, 生成元が楕円的であり, \mathbb{B}^2 上に固定点を持っていた. そこで私は双曲的な元で生成する古典的 Schottky 群で同じような計算ができないかと試みた.

まず, Euclid 空間 \mathbb{R}^2 に標準的な正規直交座標 (x_1, x_2) を入れて $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$ とおき, $0 < \theta < \pi/2$ なる θ を取る. また, $0 < t < 1$ なる t と単位ベクトル $v \in \mathbb{S}^1$ に対して $v_t := tv$, $r_t := \sqrt{1-t^2}$ とおく. これに対して, \mathbb{S}^1 上の円弧 $B(v_t^*, r_t) \cap \mathbb{S}^1$ の長さが θ となるように $0 < t < 1$ を定め, $r := r_t$ とおく. 但し, $B(v_t^*, r_t)$ の境界 $S(v_t^*, r_t)$ は \mathbb{S}^1 と直交する円である. そして, 各 $i = 1, 2$ に対して $a_i = a_i(t) := te_i$ とおき, 古典的 Schottky 群 G_θ^1 を $G_\theta^1 := \langle T_{a_1}, T_{a_2} \rangle$ で定める (図 34). これは θ の取り方により, 凸コンパクトな 1 次元 Klein 群である. なお, $a \in \mathbb{B}^2$ に対して T_a は a を 0 に写すような向きと \mathbb{B}^2 を保つ Möbius 変換で, $B(a^*, r)$ を $\widehat{\mathbb{R}^2} \setminus \overline{B(-a^*, r)}$ に写すものである (定理 1.21).

次に前例と同様に, G_θ^1 の極限集合 $\Lambda(G_\theta^1)$ として実現される Cantor 集合の Hausdorff 次元を $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動として求めていく. 古典的 Schottky 群 G_θ^1 と Patterson–Sullivan 測度 μ

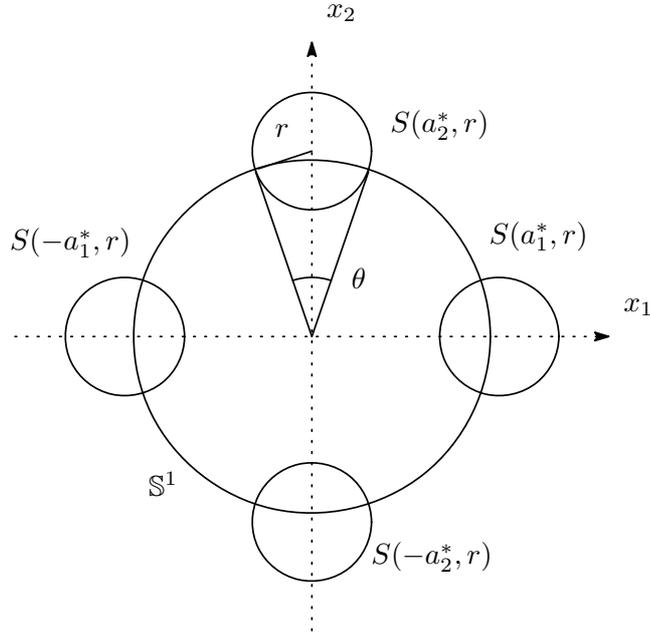


図 34 G_θ^1 の生成元の配置

に対する Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_i, f_i)\}_{i \in I}$ を例 7.3 のときと同様に $I := \{1, 2, 3, 4\}$ とし,

$$\begin{aligned} P_1 &:= \overline{B(a_1^*, r)} \cap \mathbb{S}^1, f_1 := T_{a_1} & P_2 &:= \overline{B(-a_1^*, r)} \cap \mathbb{S}^1, f_2 := T_{a_1}^{-1} = T_{-a_1} \\ P_3 &:= \overline{B(a_2^*, r)} \cap \mathbb{S}^1, f_3 := T_{a_2} & P_4 &:= \overline{B(-a_2^*, r)} \cap \mathbb{S}^1, f_4 := T_{a_2}^{-1} = T_{-a_2} \end{aligned}$$

で定める。以後、固有値アルゴリズムの手順を踏む。まず、各基点 $x_i \in P_i$ を取り、 $i \mapsto j$ なる j に対して $y_{ij} := f_j^{-1}(x_i)$ とおく。なお、関係 $i \mapsto j$ は以下の表の通りとなっている。

i	1	2	3	4
$i \mapsto j$	1, 3, 4	2, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 4
$i \not\mapsto j$	2	1	4	3

次に、正方行列 $T = (T_{ij})$ の成分を $\theta \searrow 0$ において漸近的に計算する。 $i \not\mapsto j$ なる関係のときは $T_{ij} = 0$ なので、 $i \mapsto j$ のときを計算すれば良い。例えば、 T_{11} や T_{13} は

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{|f_1'(y_{11})|} = |(f_1^{-1})'(x_1)| = |T_{-a_1}'(x_1)| = \frac{r^2}{\|x_1 - (-a_1^*)\|^2} \\ &\sim \frac{(\theta/2)^2}{2^2} = \frac{\theta^2}{16} =: p \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$T_{13} = \frac{r^2}{\|x_1 - (-a_2^*)\|^2} \sim \frac{(\theta/2)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\theta^2}{8} =: q \quad (8.3)$$

のようになる。 $i \mapsto j$ なる残りの成分もほぼ同様である。ここで、 $a > 0$ に対して正方行列 $T^a = (T_{ij}^a)$ のスペクトル半径 $\lambda(T^a)$ を $\theta \searrow 0$ において漸近的に求める。正方行列 T^a の固有多項

式は

$$\begin{aligned} \det(xE_4 - T^a) &\sim \det \begin{pmatrix} x - p^a & 0 & -q^a & -q^a \\ 0 & x - p^a & -q^a & -q^a \\ -q^a & -q^a & x - p^a & 0 \\ -q^a & -q^a & 0 & x - p^a \end{pmatrix} \\ &= (x - p^a - 2q^a)(x - p^a)^2(x - p^a + 2q^a) \end{aligned}$$

となることから,

$$\lambda(T^a) \sim p^a + 2q^a = \left(\frac{\theta^2}{16}\right)^a + 2\left(\frac{\theta^2}{8}\right)^a = \left(\frac{1}{16^a} + \frac{2}{8^a}\right)\theta^{2a}$$

となる. 従って, Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^1)$ の Hausdorff 次元 $D_1 = D_1(\theta) := \dim_{\mathcal{H}} \Lambda(G_\theta^1)$ の $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動の式は, 次で与えられる.

定理 8.3 (Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^1)$ の Hausdorff 次元).

Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^1)$ の Hausdorff 次元 $D_1 = D_1(\theta)$ の $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動は陰関数表示

$$\left(\frac{1}{16^{D_1}} + \frac{2}{8^{D_1}}\right)\theta^{2D_1} = 1 \quad (8.4)$$

で与えられる.

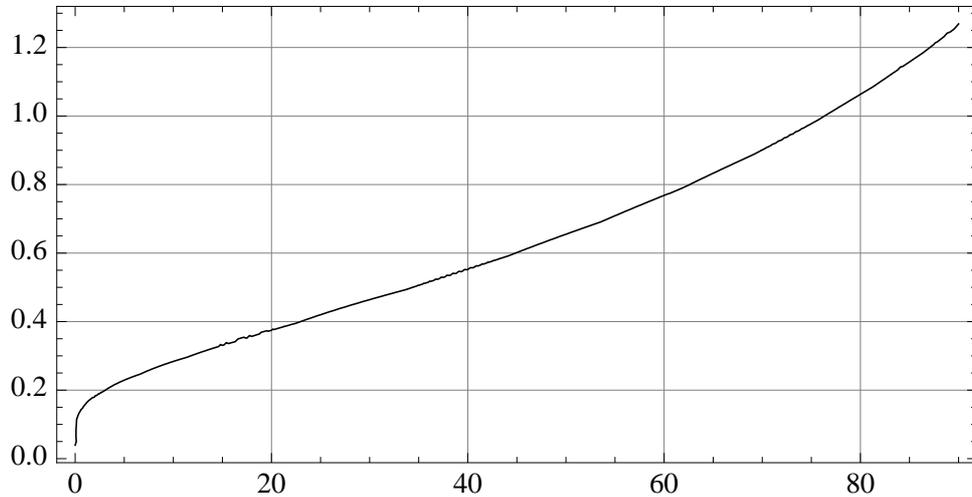


図 35 式 (8.4) のグラフ (横方向: θ 軸, 縦方向: D_1 軸)

また, のちの一般化のために円弧の長さを表す変数 θ から円の Euclid 半径 $r \rightarrow$ 変数変換した形も書いておく. このとき, 円弧 $B(v_t^*, r) \cap \mathbb{S}^1$ の長さ θ とその円弧の半径 r には $\theta \searrow 0$ に対して $\theta \sim 2r$ の関係がある. 変数を r としたときの群を G_θ^1 の代わりに $G_{2,2}^r$ と書くと, 次が成り立つ.

定理 8.4 (Cantor 集合 $\Lambda(G_{2,2}^r)$ の Hausdorff 次元).

Cantor 集合 $\Lambda(G_{2,2}^r)$ の Hausdorff 次元 $d = d(r)$ の $r \searrow 0$ に対する漸近挙動は陰関数表示

$$\left(\frac{1}{4^d} + \frac{2}{2^d}\right) r^{2d} = 1 \quad (8.5)$$

で与えられる.

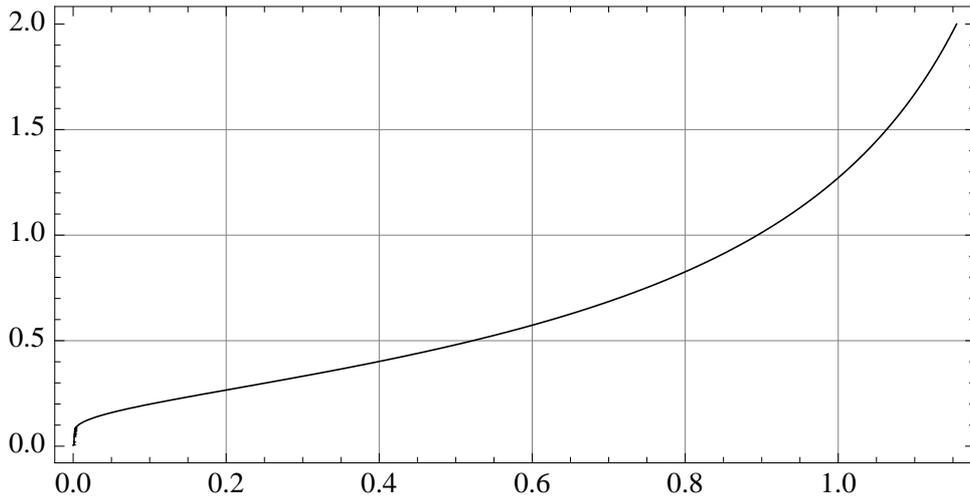


図 36 式 (8.5) のグラフ (横方向: r 軸, 縦方向: d の軸)

なお, 2 つの “2” は $\|e_1 - e_2\|^2$ と $\|e_1 + e_2\|^2$ を意味している.

8.4 G_θ^1 の一般化 ~ 高次元化 ~

一般化の 1 つとして, 高次元で同じようなもの G_θ^d を構成し, その極限集合の Hausdorff 次元を調べる. まず, Euclid 空間 \mathbb{R}^{d+1} に標準的な正規直交座標 $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ を入れる. $1 \leq n \leq d+1$ なる自然数 n に対して e_n を x_n 方向の単位ベクトルとし, $0 < \theta < \pi/2$ なる θ を取る. また, $0 < t < 1$ なる t と単位ベクトル $v \in \mathbb{S}^d$ に対して $v_t := tv$, $r_t = \sqrt{1-t^2}$ とおく. これに対して, \mathbb{S}^d 上の球 $B(v_t^*, r_t) \cap \mathbb{S}^d$ の直径 $\text{diam}_\sigma[B(v_t^*, r_t) \cap \mathbb{S}^d]$ が θ となるように $0 < t < 1$ を定め, $r := r_t$ とおく. このとき, $d = 1$ のときと同様に $B(v_t^*, r_t)$ の境界 $S(v_t^*, r_t)$ は \mathbb{S}^d と直交する球面であることに注意する. そして, 各 n に対して $a_n = a_n(t) := te_n$ とおき, 古典的 Schottky 群 G_θ^d を $G_\theta^d := \langle T_{a_n} \rangle_{1 \leq n \leq d+1}$ で定める (図 37). これは θ の取り方により凸コンパクトな d 次元 Klein 群である. 次に $d = 1$ のときと同様に, G_θ^d の極限集合 $\Lambda(G_\theta^d)$ の Hausdorff 次元を $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動として求めていく. 以下の手順は, McMullen の例 [8] を高次元化したときのように行列の大きさが変わるだけなので, 次の命題に注意すれば同様に計算が行える.

命題 8.5.

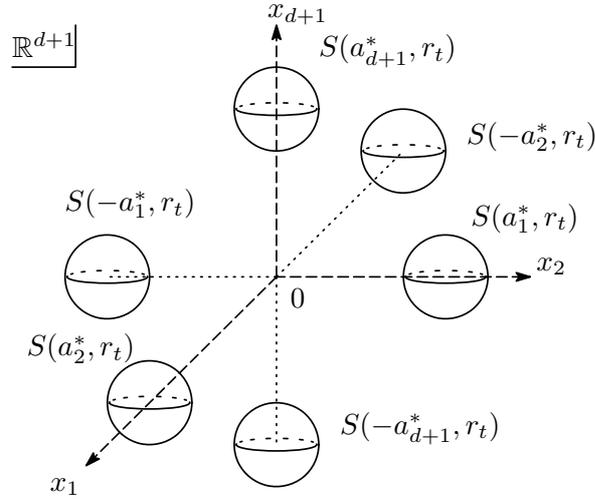


図 37 G_θ^d の生成元の配置

自然数 n と $x, y \in \mathbb{C}$ に対して, $2(n+1)$ 次正方行列

$$M(2(n+1); x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & y & y & \cdots & y & y \\ 0 & x & y & y & \cdots & y & y \\ y & y & x & 0 & \cdots & y & y \\ y & y & 0 & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & y & \cdots & x & 0 \\ y & y & y & y & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

の行列式は, $\det M(2(n+1); x, y) = x^{n+1}(x-2y)^n(x+2ny)$ で与えられる.

Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^d)$ の Hausdorff 次元 $D_d = D_d(\theta) := \dim_{\mathcal{H}} \Lambda(G_\theta^1)$ の $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動の式は, 次で与えられることが分かる.

定理 8.6 (Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^d)$ の Hausdorff 次元).

Cantor 集合 $\Lambda(G_\theta^d)$ の Hausdorff 次元 $D_d = D_d(\theta)$ の $\theta \searrow 0$ に対する漸近挙動は陰関数表示

$$\left(\frac{1}{16^{D_d}} + \frac{2d}{8^{D_d}} \right) \theta^{2D_d} = 1 \quad (8.6)$$

で与えられる. なお, 図 38 は下から $d = 10, 100, 1000$ のものである.

8.5 $G_{2,2}^r$ の一般化 ~ 長方形 ~

2 つ目の一般化として, 生成元に対応する球の中心が長方形をなすように生成元を置いたもの $G_{s,t}^r$ を構成し, その極限集合として実現される Cantor 集合の Hausdorff 次元を調べる. ここで, s, t は長方形の一边の長さを表す変数で, r は球の半径を表す変数である. 以後, 2 次元単位球面 \mathbb{S}^2 を

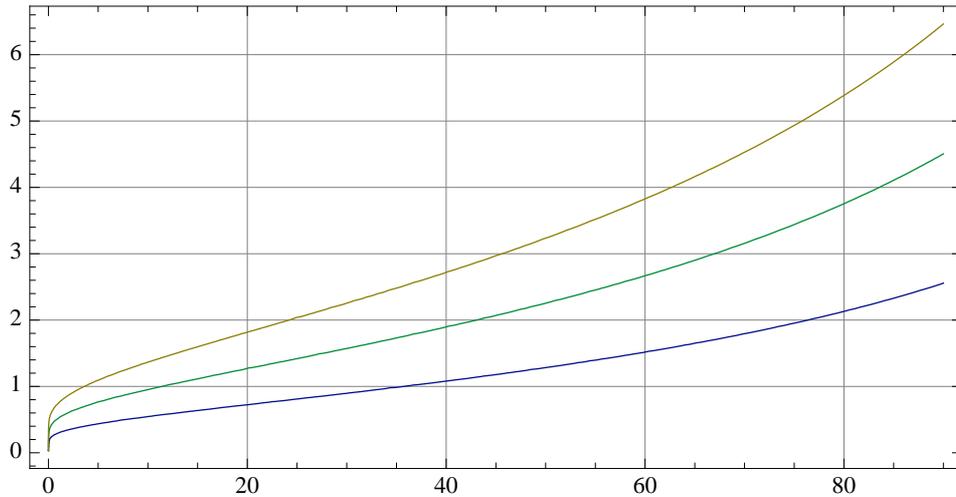


図 38 式 (8.6) のグラフ (横方向: θ 軸, 縦方向: D_d 軸)

Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視する. なお, $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ と $r_1, r_2 > 0$ に対して, 複素円盤 $B(a_1, r_1)$ を複素円盤 $B(a_2, r_2)$ の外側 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(a_2, r_2)$ に自然に写す Möbius 変換は, 一次分変換で

$$f(z) := \frac{r_1 r_2}{z - a_1} + a_2 \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}})$$

と表示できることに注意する.

さて, 一般化を構成していく. まず, 各 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して $a_j \in \mathbb{C}$ を凸包 $\text{ch}(a_1, a_3, a_2, a_4)$ が“長方形”となるように取る. 即ち, 2 辺 $a_3 a_1, a_2 a_4$ が平行且つ長さが等しく, 更に 2 辺 $a_4 a_1, a_3 a_1$ が直交するように取る (図 39). これに対して, $s := |a_3 - a_1|^2, t := |a_4 - a_1|^2$ とおく. このとき, $|a_2 - a_1|^2 = s + t$ である. 次に, $j = 1, 2, 3, 4$ に対して, $P_j := \overline{B(a_j, r)}$ とおき, 対応する Möbius 変換を

$$f_1(z) := \frac{r^2}{z - a_1} + a_2, \quad f_2 := f_1^{-1}, \quad f_3(z) := \frac{r^2}{z - a_3} + a_4, \quad f_4 := f_3^{-1}$$

で定める. これらを用いて, Schottky 群 $G_{s,t}^r$ を $G_{s,t}^r := \langle f_1, f_3 \rangle$ で定め (図 39), $G_{s,t}^r$ の極限集合 $\Lambda(G_{s,t}^r)$ として実現される Cantor 集合の Hausdorff 次元を $r \searrow 0$ に対する漸近挙動として求めていく. なお, 古典的 Schottky 群 $G_{s,t}^r$ と Patterson–Sullivan 測度 μ に対する Markov 分割 $\mathcal{P} = \{(P_j, f_j)\}_{j \in \{1,2,3,4\}}$ は既に構成した.

以後, 固有値アルゴリズムの手順を踏む. まず, 各基点 $x_j \in P_j$ を取り, $j \mapsto k$ なる k に対して $y_{jk} := f_k^{-1}(x_j)$ とおく. 次に, 正方形行列 $T = (T_{jk})$ の成分を $r \searrow 0$ において漸近的に計算する. $j \not\mapsto k$ なる関係のときは $T_{jk} = 0$ なので, $j \mapsto k$ のときを計算すれば良い. 例えば, T_{11} や T_{13}, T_{14}

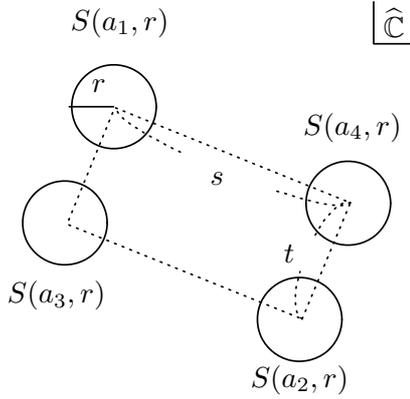


図 39 $G_{s,t}^r$ の生成元の配置

は

$$T_{11} = \frac{1}{|f_1'(y_{11})|} = |(f_1^{-1})'(x_1)| = \frac{r^2}{|x_1 - a_2|^2} \sim \frac{r^2}{s+t}$$

$$T_{13} = \frac{1}{|f_1'(y_{13})|} = |(f_3^{-1})'(x_1)| = \frac{r^2}{|x_1 - a_3|^2} \sim \frac{r^2}{s}$$

$$T_{14} = \frac{1}{|f_1'(y_{14})|} = |(f_4^{-1})'(x_1)| = \frac{r^2}{|x_1 - a_4|^2} \sim \frac{r^2}{t}$$

のようになる. $j \mapsto k$ なる残りの成分もほぼ同様である. 後のために, $\phi(x) := r^2/x$ とおく. ここで, $a > 0$ に対して正方行列 $T^a = (T_{jk}^a)$ のスペクトル半径 $\lambda(T^a)$ を $r \searrow 0$ において漸近的に求めるために, 次の命題を用意する.

命題 8.7.

自然数 n と $x, y, z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & y & z \\ 0 & x & z & y \\ y & z & x & 0 \\ z & y & 0 & x \end{pmatrix} = (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$

が成り立つ.

証明. 初等的な計算による. □

これより, 正方行列 T^a の固有多項式は, $r \searrow 0$ において漸近的に

$$\det(xE_4 - T^a) \sim \det \begin{pmatrix} x - \phi(s+t)^a & 0 & -\phi(s)^a & -\phi(s)^a \\ 0 & x - \phi(s+t)^a & -\phi(s)^a & -\phi(s)^a \\ -\phi(s)^a & -\phi(s)^a & x - \phi(s+t)^a & 0 \\ -\phi(s)^a & -\phi(s)^a & 0 & x - \phi(s+t)^a \end{pmatrix}$$

$$= (x - \phi(s+t)^a - \phi(s)^a - \phi(t)^a)(x - \phi(s+t)^a + \phi(s)^a - \phi(t)^a)$$

$$(x - \phi(s+t)^a - \phi(s)^a + \phi(t)^a)(x - \phi(s+t)^a + \phi(s)^a + \phi(t)^a)$$

となることから,

$$\begin{aligned}\lambda(T^a) &\sim \phi(s+t)^a + \phi(s)^a + \phi(t)^a = \left(\frac{r^2}{s+t}\right)^a + \left(\frac{r^2}{s}\right)^a + \left(\frac{r^2}{t}\right)^a \\ &= \left(\frac{1}{(s+t)^a} + \frac{1}{s^a} + \frac{1}{t^a}\right) r^{2a}\end{aligned}$$

となる. 従って, Cantor 集合 $\Lambda(G_{2,2}^r)$ の Hausdorff 次元 $d = d(r) := \dim_{\mathcal{H}} \Lambda(G_{2,2}^r)$ の $r \searrow 0$ に対する漸近挙動は, 次で与えられる.

定理 8.8 (Cantor 集合 $\Lambda(G_{s,t}^r)$ の Hausdorff 次元).

Cantor 集合 $\Lambda(G_{s,t}^r)$ の Hausdorff 次元 $d = d(r)$ の $r \searrow 0$ に対する漸近挙動は陰関数表示

$$\left(\frac{1}{(s+t)^d} + \frac{1}{s^d} + \frac{1}{t^d}\right) r^{2d} = 1 \quad (8.7)$$

で与えられる. なお, 図 40 は上から $(s, t) = (10, 10), (10, 100), (10, 1000)$ のものである.

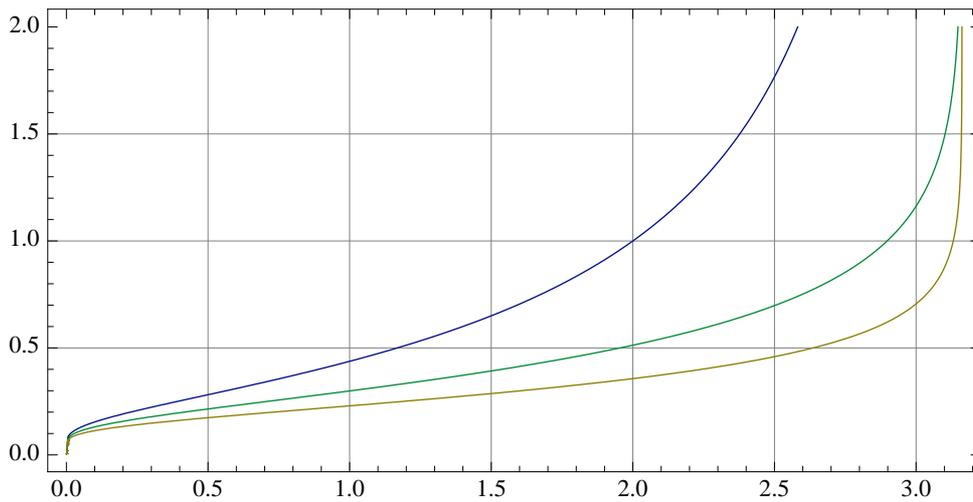


図 40 式 (8.7) のグラフ (横方向: r 軸, 縦方向: d の軸)

参考文献

- [1] L. Ahlfors, *Möbius transformations in several dimensions*, Ordway Professorship Lectures in Mathematics. University of Minnesota, School of Mathematics, Minneapolis, Minn., 1981.
- [2] A. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] C. Bishop; P. Jones, Hausdorff dimension and Kleinian groups, *Acta Math.* 179 (1997), no. 1, 1–39.
- [4] H. Federer, *Geometric measure theory*, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969 .
- [5] M.Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*. Progress in Mathematics, 183. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [6] L. Keen; N. Lakic, *Hyperbolic geometry from a local viewpoint*, London Mathematical Society Student Texts, 68.
- [7] B. Maskit, *Kleinian groups*, 287. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [8] C. McMullen, Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension. *Amer. J. Math.* 120 (1998), no. 4, 691–721.
- [9] P. J. Nicholls, Garnett points for Fuchsian groups, *Bull. London Math. Soc.* 12 (1980), no. 3, 216–218.
- [10] P. J. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 143. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [11] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.* 153 (1984), no. 3-4, 259–277.
- [12] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd Ed, Oxford University Press, Oxford 1939.
- [13] 新井仁之, ルベーク積分講義 –ルベーク積分と面積 0 の不思議な図形たち–, 日本評論社, 2003.
- [14] 伊藤清三, ルベーク積分入門, 裳華房, 1963.
- [15] 小谷眞一, 岩波講座 現代数学の基礎 測度と確率 1, 岩波書店, 1997.
- [16] 酒井隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1992.
- [17] 須川敏幸, ハウスドルフ次元計算のアルゴリズム「ハウスドルフ次元計算へのアプローチ」, 研究集会報告集 (1997), 167–178.
- [18] 谷口雅彦・松崎克彦, 双曲的多様体とクライン群, 日本評論社, 1993.
- [19] K. Falconer 著, 服部久美子・村井浄信 訳, 新しい解析学の流れ フラクタル幾何学, 共立出版, 2006.
- [20] 深谷賢治, 現代数学への入門 双曲幾何, 岩波書店, 2004.