タイヒミュラー空間上の幾何

-東京工業大学における集中講義より-

まえがき

このノートは 1997 年 11 月 18 日 (火) から 21 日 (金) の間、東京工業大学理学部で行なった私の集中講義の講義ノートです。

題名は上に掲げた通りですが、もう少し具体的に述べるとコンパクト Riemann 面の Teichmüller 空間上の Weil-Petersson 幾何への入門です。内容は 1 日目が Teichmüller 空間の定義とそれが Bers embedding によって有限次元複素多様体とみなされること、2 日目が、基点における正則接ベクトル空間の記述、3 日目が Weil-Petersson 計量の定義と Maass Calculus を用いたその Kähler 性の証明、4 日目が Weil-Petersson 計量の非完備性でした (実際にはきっちりこのとおりには進みませんでしたが)。4 日目は、いままで上半平面で議論を行なってきたせいで気にしなくてよかった Riemann 面上の局所座標が Jenkins-Strebel 微分の導入後は無視できなくなり、それまでの手法との整合性という点から少し辛いものがありました。

参考文献は §1 - §4 に渡るものとしては [1],[2],[6] です。 §3 の記述では [6] のなかの西村保一郎氏の記事を参考にしました。§3-§5 は Wolpert の論文 [4], [5] の一部の解説です。初めの計画では Weil-Petersson 計量の断面曲率、Ricci 曲率などが負であることも述べようと思ってましたが、すぐさま無謀なことだとわかりました。集中講義を聴いたり、このノートを読まれた方は是非 [4] の §3 以降も勉強してください。ただし最後に曲率テンソルの形 ([4] の Theorem 4.2.(ii)) を仮定して、曲率が負であることの証明の概略を記してあります。

最後に集中講義を聴講してくださった皆さんにお礼申しあげます。中でも特に、集中講義に招いてくださった志賀啓成先生、東工大滞在中、双曲幾何についていろいろご教示くださった小島定吉先生、講義中、不明な点を指摘してくださった小櫃邦夫君、中野英明君、わざわざ遠方から聴講に来てくださった大阪大学の牛島顕君、そして原稿の清書を助けてくれた名古屋大学の安藤克浩君に深く感謝します。

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科　中西敏浩

1. Teichmüller 空間

1.1. Fuchs 群 2 次の実射影特殊線型群

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad \Leftrightarrow bc = 1 \right\}$$

は上半平面 $\mathbb{H} = \{x + iy : y > 0\}$ に次のように作用する。

$$A(z) = \frac{az+b}{cz+b}$$

$\mathbb{H}$ 上の双曲計量 (Poincaré 計量とも言う) $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ に対し、$A \in PSL(2,\mathbb{R})$ は

$$\frac{|A'(z)|^2}{(\mathrm{Im}A(z))^2} = \frac{1}{(\mathrm{Im}\ z)^2} \tag{1.2}$$

をみたす。すなわち $PSL(2,\mathbb{R})$ の各元は双曲平面 $(\mathbb{H}, ds)$ の向きを保つ等長変換である。

（注）後で一箇所、2 次の複素射影特殊線型群

$$PSL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad \Leftrightarrow bc = 1 \right\}$$

の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の作用が現れるところがあるが、作用の仕方は上と同じ形である。

$PSL(2,\mathbb{R})$ の部分群 , が Fuchs 群であるとは、各 $z \in \mathbb{H}$ に対して z の近傍 $U \subset \mathbb{H}$ が存在して $\sharp\{\gamma \in , \ : \ U \cap \gamma(U) \neq \emptyset\} < \infty$ であるときにいう。とくに U を十分小さく取ると $\{\gamma \in , : U \cap \gamma(U) \neq \emptyset\} = \{\pm I\}$, ($I$ は単位行列) となるとき、, は位数有限の元を含まないので、 , は torsion-free であるという。このとき $\mathbb{H}/,$ を , の orbit space ($z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ に対して同値関係 $z_1 \sim z_2$ を、ある $\gamma \in ,$ が存在して $\gamma(z_1) = z_2$ となることで定めるときの商空間 $\mathbb{H}/\sim$ のこと。z の同値類を , (z) で表わす) とすると、標準射影

$$\pi_\Gamma : \mathbb{H} \Leftrightarrow\!\!\to \mathbb{H}/,$$

は不分岐被覆となり、 $\mathbb{H}/,$ に π_Γ が正則写像となる複素構造が入る。これより $\mathbb{H}/,$ を Riemann 面とみる。

以下、, が torsion-free で $\mathbb{H}/,$ が有向閉曲面となる場合のみを考える。$\mathbb{H}/,$ の種数を g とするとき $g \geq 2$ である。さらにこのとき

(1) , の単位元以外の元 $\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は双曲的、すなわち $|a+d| > 2$

(2) 境界まで込めて $\mathbb{H}$ に含まれる , の基本領域が存在する。($\mathbb{H}$ の開部分集合 Δ が , の基本領域であるとは、任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して , $(z) \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset$ かつ、$\sharp($, $(z) \cap \Delta) \leq 1$,

さらに後で頻繁に基本領域上での積分を考えることから、その境界の 2 次元 Lebesgue 測度 0 であることも要請しておく。
(3) 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対し , (z) の集積点集合は $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1.2. Fuchs 群の変形. , を Fuchs 群とする。向きを保つ可微分同相写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ と、中への群同型 $\chi : , \to PSL(2, \mathbb{R})$ が存在して

$$\chi(\gamma)(f(z)) = f(\gamma(z)) \qquad (\gamma \in , , z \in \mathbb{H})$$

をみたすとする。このとき f は , を群 $\chi(,) = f, f^{-1}$ に変形するという。このとき $\mu = \mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ を f の Beltrami 係数と呼ぶことにすると、これは

$$\mu(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z) = \mu(z), (\gamma \in ,) \tag{1.4}$$

をみたす。もし

$$\|\mu\|_\infty = \text{ess.sup}\{|\mu(z)| \ : \ z \in \mathbb{H}\} < 1 \tag{1.5}$$

ならば f は (微分可能な) 擬等角写像であるという。しかし微分可能な写像およびそれらの微分のみを扱うのは理論の展開の上で窮屈であるので、次のような設定をする。$\mathbb{H}$ 上複素数値をとる本質的有界可測関数で (1.4) をみたすもの全体

$$B(,) = \{\mu \in L^\infty(\mathbb{H}) : (\mu \circ \gamma)\overline{\gamma'}/\gamma' = \mu, \ \ (\gamma \in ,)\}$$

を考える。$B(,)$ の元を , に対する Beltrami 微分という。

$$B_1(,) = \{\mu \in B(,) : \|\mu\|_\infty < 1\}$$

とおく。

1.6. 定理 (Beltrami 方程式の解) $\mu \in B_1(,)$ とする。μ を (1.4) をみたし、かつ $\|\mu\|_\infty < 1$ であるような $\mathbb{C}$ 上の可測関数に拡張できたとする (拡張したものも μ と記す)。このとき $\hat{\mathbb{C}}$ 上の自己同相写像 $f = f_\mu$ が存在して
(1) 弱い意味での偏導関数 $f_z, f_{\bar{z}} \in L^2_{loc}$ をもつ。(実際にはある $p > 2$ があって $f_z, f_{\bar{z}} \in L^p_{loc}$).
(2) f は Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ の解,
(3) f, f^{-1} は $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群。
をみたす。このような f は一意的には定まらないが、$PSL(2, \mathbb{C})$ の元の合成の違いしかない。そこで正規化条件
(4) f は $0, 1, \infty$ をそれぞれ固定する
を課す。

さらに $\mu(\epsilon) = \epsilon\mu_0 + o(\epsilon)$, $(\mu_0 \in B(,))$ を $\{\epsilon \in \mathbb{C} : |\epsilon| < \delta\}$ 上の $B_1(,)$ 内の原点を通る正則曲線とすると

$$f_{\mu(\epsilon)}(z) = z + \epsilon\dot{f}[\mu_0](z) + o(\epsilon) \quad \text{(各コンパクト集合上一様な評価)}, \tag{1.7}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{f}[\mu_0](z) &= \Leftrightarrow\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \mu_0(\zeta)R(\zeta,z)d\sigma(\zeta),\\
R(\zeta,z) &= \frac{1}{\zeta \Leftrightarrow z} + \frac{z\Leftrightarrow 1}{\zeta} \Leftrightarrow \frac{z}{\zeta \Leftrightarrow 1}.
\end{aligned}
$$

$\dot{f}[\mu_0]$ は μ_0 のポテンシャルと呼ばれ

(1.8) $$\dot{f}[\mu_0]_{\bar{z}} = \mu_0$$

をみたす。

1.9. Teichmüller 空間の定義. , を $\mathbb{H}/,$ がコンパクト Riemann 面となる torsion-free な Fuchs 群とする。$\mu \in B_1(,\ )$ に対してその定義域を、下半平面 $\mathbb{H}^* = \{x+iy : y<0\}$ の各点で $\mu(z) = \overline{\mu(\bar{z})}$ とおくことによって $\mathbb{C}$ 上に拡張する (測度 0 の集合上の値は気にしなくてよい)。そうして得られる 1.6 における Beltrami 方程式の正規化解 f^μ をとおく。$f^\mu|_{\mathbb{H}}$ は $\mathbb{H}$ 上の向きを保つ自己同相写像となる。

$\mu_1, \mu_2 \in B_1(,\ )$ が

$$f^{\mu_1}\circ\gamma\circ(f^{\mu_1})^{-1} = f^{\mu_2}\circ\gamma\circ(f^{\mu_2})^{-1} \quad (\gamma \in ,\ )$$

をみたすとき μ_1 と μ_2 は同値であるといい、$\mu_1 \sim \mu_2$ で表わす。$\mu_1 \sim \mu_2$ ならば $,^{\mu_1} := f^{\mu_1}, (f^{\mu_1})^{-1} = f^{\mu_2}, (f^{\mu_2})^{-1} =: ,^{\mu_2}$ であるが、逆は一般には成り立たない。μ_1 と μ_2 が同値であることは f^{μ_1} と f^{μ_2} が同じ群への変形を与えるということより強い条件である。(f^{μ_1} と f^{μ_2} はマーキングを込めて同じ群に変形するという言い方をする)。次のことが成り立つ。

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow f^{\mu_1}|_{\mathbb{R}} \text{ と } f^{\mu_2}|_{\mathbb{R}}.$$

$T(,\ ) = B_1(,\ )/\sim$ を , を基点とする Teichmüller 空間と呼ぶ。

1.10. Bers embedding. $\mu \in B_1(,\ )$ に対して今度は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{H}$ で $\mu \equiv 0$ とおいてその定義域を $\mathbb{C}$ 上に拡張する。Beltrami 方程式

$$\begin{cases} f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z) \\ f \text{ は } 0,1,\infty \text{ を固定する} \end{cases}$$

の解 f_μ を考える。f_μ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の同相写像で $\mathbb{H}^*$ 上で単葉正則である。前節で定義した $B_1(,\ )$ の元の同値性と同等な条件を与えよう。

Theorem. $\mu_1, \mu_2 \in B_1(,\ )$ に対して $\mu_1 \sim \mu_2$ であるための必要十分条件は $f_{\mu_1}|_{\mathbb{H}^*} = f_{\mu_2}|_{\mathbb{H}^*}$.

$\hat{\mathbb{C}}$ のある部分領域上で定義された局所単葉正則関数 $f(z)$ に対して、その Schwarz 微分を

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \quad (z\in\mathbb{H}^*)$$

で定め、各 $\mu \in B_1(,)$ に対して $\phi[\mu](z) = \{f_\mu, z\}$ $(z \in \mathbb{H}^*)$ とおく。$\mu \in B_1(,)$ に対して

(1) 中への群同型 $\chi_\mu : , \to PSL(2, \mathbb{C})$ が

$$f_\mu(\gamma(z)) = \chi_\mu(\gamma) \circ f_\mu(z), \quad (\gamma \in ,)$$

により定まる。$,_\mu = \chi_\mu(,)$ は擬 (quasi) Fuchs 群と呼ばれる。

$\varphi = \phi[\mu]$ とおくと

(2) $\varphi(\gamma(z))\varphi'(z)^2 = \varphi(z), \quad (z \in \mathbb{H}^*, \gamma \in ,).$

(3) (Kraus-Nehari) $\sup_{\mathbb{H}^*}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)| < 3/2$

(2) をみたす $\mathbb{H}^*$ 上の正則関数全体を $Q(,)^*$ で表わす。これは $\mathbb{H}^*$ 上の , の作用に関する有界正則 2 次微分の空間である。$\mathbb{H}/,$ の種数を $g(\geq 2)$ とすると Riemann-Roch の定理から $\dim_{\mathbb{C}} Q(,)^* = 3g \Leftrightarrow 3.$

(3) に鑑みて $Q(,)^*$ のノルムを

$$\|\varphi\|_* = \sup_{\mathbb{H}^*}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)| = \sup_{\Delta}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)|$$

(Δ は , のある基本領域) で定める。

定理より $\mu_1 \sim \mu_2$ ならば $\phi[\mu_1] = \phi[\mu_2]$ なので次の写像が定まる。

$$b : T(,) \to Q(,)^*, \quad b([\mu]) = \phi[\mu].$$

このとき

(1) b は単射で $b([0]) = 0.$

(2) (Ahlfors-Weill) $\|\varphi\| < 1/2 \Rightarrow \phi[\Leftrightarrow 2(\mathrm{Im}\ z)^2\bar{\varphi}] = \varphi.$ これより $\{\varphi \in Q^*(,) : \|\varphi\| < 1/2\} \subset b(T(,)).$ これは $b(T(,))$ が原点を内部に含むことを示している。基点の取り換えが引き起こす空間の変換を調べることにより、実は $b(T(,))$ の各点は内点であることがわかる。よって $b(T(,))$ は $Q(,)^* \cong \mathbb{C}^n$ の開部分集合である。

(3) $\phi : B_1(,) \to T(,) \to Q^*(,)$ は連続であるので $b(T(,))$ は領域である。

b を $T(,)$ から $Q(,)^*$ への Bers embedding と呼ぶ。

1.11. 正則 2 次微分と調和 Beltrami 微分. , を一般の Fuchs 群とする。$\mathbb{H}$ 上の正則関数 φ が

$$\varphi(\gamma(z))\varphi'(z)^2 = \varphi(z), \quad (z \in \mathbb{H}, \gamma \in ,)$$

をみたすとき φ を の , の作用に対する正則 2 次微分という。Teichmüller 空間の理論では、普通

$$\|\varphi\| = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} |\varphi| d\sigma$$

とおいて

$$Q(,) = \{\varphi \text{ は , に対する正則 2 次微分で } \|\varphi\| < \infty\}$$

となる正則 2 次微分の空間が扱われるが、もし , が $\mathbb{H}/,$ がコンパクト面となるような場合はすべてのノルムは同等である。このときは境界までこめて $\mathbb{H}$ に含まれるような , の基本領域 Δ をとれば $\varphi \in Q(,)$ に対して

$$\sup_{\mathbb{H}}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)| = \sup_{\Delta}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)| < \infty$$

でもあるので

$$\mu(z) = (\mathrm{Im}\ z)^2\overline{\varphi(z)}$$

は , の Beltrami 微分となる。このような形のものを調和 Beltrami 微分といい、それら全体を $HB(,)$ で表わす。$\mathbb{H}/,$ がコンパクト面となる場合は $Q(,)$ 上に Patersson 内積

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{H}/\Gamma}\varphi(z)\overline{\psi(z)}(\mathrm{Im}\ z)^2 d\sigma(z), \quad (\varphi,\psi\in Q(,))$$

を導入することができる。$\|\varphi\|_P = \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle}$ と記す。

1 の内容に関する演習問題とコメント

問題 1.1 $PSL(2,\mathbb{R})$ の作用に関する双曲計量の不変性 (1.2) を確かめること。

$PSL(2,\mathbb{C})$ の恒等変換以外の元 $\gamma = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $|\mathrm{tr}\ \gamma| = |a+d|$ が 2 より大きいか、等しいか、または小さいかによって、それぞれ斜航的 (loxodromic)、放物的 (parabolic), 楕円的 (elliptic) であると呼ばれる。斜航的な元の中で、さらに $\mathrm{tr}\ \gamma \in \mathbb{R}$ をみたすものは双曲的 (hyperbolic) と呼ばれる。

問題 1.2 $PSL(2,\mathbb{R})$ の恒等変換以外の元は、双曲的、楕円的、放物的であるのにしたがって、$PSL(2,\mathbb{R})$ において以下の形の変換にそれぞれ共役であることをしめせ。

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\ (\lambda > 1), \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \Leftrightarrow\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ (\theta \in \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 1.3 式 (1.3) を確かめること。

問題 1.4 (Schwarz 微分) (1) f, g をそれぞれ、ある領域で定義された局所単葉正則関数とし、それらの合成 $f \circ g$ が定義されるとき

$$\{f \circ g, z\} = \{f, g(z)\} g'(z)^2 + \{g, z\}$$

となることをしめせ。

(2) $f(z)$ が Möbius 変換 (すなわち $f \in PSL(2,\mathbb{C})$) であるとき

$$\{f, z\} = 0 \text{ for all } z \in \mathbb{C}$$

をしめせ。

問題 1.5 (調和 Beltrami 微分) $\mathbb{H}$ 上定義された Fuchs 群 , に対する正則２次微分 φ が

$$\sup_{\mathbb{H}} (\mathrm{Im}\ z)^2 |\varphi(z)| < \infty$$

をみたすとき $(\mathrm{Im}\ z)^2 \overline{\varphi(z)}$ は , に対する Beltrami 微分となることを確かめること。

2. 接ベクトル空間の記述

2.1. Bers 埋め込みを定義するときに現れた写像 $\phi : B_1(,\ ) \Leftrightarrow\!\rightarrow T(,\ )\overset{b}{\Leftrightarrow\!\Leftrightarrow\!\rightarrow} Q^*(,\ )$ の複素微分を考える。$\mu(\epsilon) = \epsilon\mu_0 + o(\epsilon)$, $(\mu_0 \in T_0^{1,0}B_1(,\ ) = B(,\ ))$ を原点を通る正則曲線とすると

$$f_{\mu(\epsilon)}(z) = z + \epsilon\dot{f}[\mu_0](z) + 0(\epsilon), \quad \dot{f}[\mu_0](z) = \Leftrightarrow\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{H}} \mu_0 \left(\frac{1}{\zeta \Leftrightarrow z} + \frac{z \Leftrightarrow 1}{\zeta} \Leftrightarrow \frac{z}{\zeta \Leftrightarrow 1}\right) d\sigma(\zeta)$$

これを用いて $\phi[\mu(\epsilon)] = \{f_{\mu(\epsilon)}, z\}$ $(z \in \ \mathbb{H}^*)$, とおいて

$$\dot{\phi}[\mu_0] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\phi[\mu(\epsilon)] \Leftrightarrow \phi[0]\right)$$

を計算すれば

$$\text{(2.2)} \qquad \dot{\phi}[\mu_0] = \frac{\partial^3 \dot{f}[\mu_0]}{\partial z^3}(z) = \Leftrightarrow\frac{12}{\pi}\int_{\mathbb{H}} \frac{\mu_0}{(\zeta \Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta) \in T_0^{1,0}Q^*(,\ ) = Q^*(,\ ).$$

$N(,\ ) = \ker\dot{\phi}$ を特徴づける。$\Delta(\subset \mathbb{H})$ を , の基本領域とすれば

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}[\mu_0](z) &= \int_{\mathbb{H}} \frac{\mu_0}{(\zeta \Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta) \\
&= \sum_{\Gamma}\int_{\gamma(\Delta)} \frac{\mu_0(\zeta)}{(\zeta \Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta) \\
&= \sum_{\Gamma}\int_{\Delta} \frac{\mu_0(\gamma(\zeta))|\gamma'(\zeta)|^2}{\gamma'(\zeta)^2\gamma'(\gamma^{-1}(z))(\zeta \Leftrightarrow \gamma^{-1}(z))^4} d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\Delta} \mu_0(\zeta)\left(\sum_{\Gamma}\frac{\gamma'(z)^2}{(\zeta \Leftrightarrow \gamma(z))^4}\right) d\sigma(\zeta) \quad (\gamma^{-1} \text{ を } \gamma \text{ でおきかえた。}) \\
&= \int_{\Delta} \mu_0(\zeta)\left(\sum_{\Gamma}\frac{\gamma'(\zeta)^2}{(z \Leftrightarrow \gamma(\zeta))^4}\right) d\sigma(\zeta)
\end{aligned}$$

ここで $z \in \mathbb{H}^*$ を固定したとき

$$\omega_z(\zeta) = \Theta\left(\frac{1}{z \Leftrightarrow \zeta}\right) = \sum_{\Gamma}\frac{\gamma'(\zeta)^2}{(z \Leftrightarrow \gamma(\zeta))^4}$$

は $\mathbb{H}$ の各コンパクト集合上で一様収束して $Q(,\ )$ に属する関数となる。各 $(\zeta, z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H}^*$ に対して

$$\omega_z(\zeta) = \omega_\zeta(z) \quad \text{ただし} \quad \omega_\zeta(z) = \sum_{\Gamma}\frac{\gamma'(z)^2}{(\zeta \Leftrightarrow \gamma(z))^4}$$

が成り立つ。ω_z 全体のスパン $(\alpha_1\omega_{z_1}+\cdots+\alpha_n\omega_{z_n} \quad (z_i \in \mathbb{H}^*, \alpha_i \in \mathbb{C})$ の形の元全体) は $Q(,\ )$ の dense subspace をはる [3][p. 76]. このことより

Lemma (Teichmüller).

$$N(,\ ) = Q(,\ )^{\perp} = \left\{\mu_0 \in B(,\ )\ :\ \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mu_0\varphi d\sigma = 0 \text{ for all } \varphi \in Q(,\ )\right\}$$

次に $\dot{\phi} : B(,\ ) \to Q^*(,\ )$ が全射であること示そう。それには次の再生公式を用いる。

2.3.(再生公式) $\mathbb{H}$ 上の正則関数 φ が $\sup_{\mathbb{H}}(\mathrm{Im}z)^2|\varphi(z)| < \infty$ をみたすとき

$$\varphi(z) = \frac{12}{\pi}\int_{\mathbb{H}} \frac{\varphi(\zeta)(\mathrm{Im}\zeta)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta) \tag{2.4}$$

Proof. 被積分関数の絶対値は ζ の関数とみたとき連続でかつ $O(|\zeta|^{-4}), (|\zeta| \to \infty)$ なので可積分である。

$$\begin{aligned}\frac{(\mathrm{Im}\zeta)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4} &= \Leftrightarrow\frac{1}{4}\frac{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow\zeta)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4} = \Leftrightarrow\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^2} \Leftrightarrow \frac{2(\zeta\Leftrightarrow z)}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^3} + \frac{(\zeta\Leftrightarrow z)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4}\right] \\ &= \Leftrightarrow\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[\Leftrightarrow\frac{1}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)} + \frac{\zeta\Leftrightarrow z}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^2} + \frac{1}{3}\frac{(\zeta\Leftrightarrow z)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^3}\right]\end{aligned}$$

もし $\varphi(z)$ が $\mathbb{R}$ 上まで有界正則に拡張できれば $D(R) = \{\zeta \in \mathbb{H} : |\zeta| < R\}$ とおくとき

$$\frac{12}{\pi}\int_{\mathbb{H}} \frac{\varphi(\zeta)(\mathrm{Im}\zeta)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta) = \lim_{R\to+\infty} \frac{12}{\pi}\int_{D(R)} \frac{\varphi(\zeta)(\mathrm{Im}\zeta)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^4} d\sigma(\zeta)$$

Stokes の定理より、右辺は

$$\lim_{R\to+\infty} \Leftrightarrow\frac{3}{2\pi i}\int_{\partial D(R)} \varphi(\zeta)\left(\Leftrightarrow\frac{1}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)} + \frac{\zeta\Leftrightarrow z}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^2} + \frac{1}{3}\frac{(\zeta\Leftrightarrow z)^2}{(\bar{\zeta}\Leftrightarrow z)^3}\right) d\zeta$$

$$= \Leftrightarrow\frac{3}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow\frac{1}{3}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta\Leftrightarrow z} d\zeta$$

であり、最後の値は $\varphi(z)$ に等しい。

一般の場合は $\varphi(z+i\epsilon)$, $(\epsilon > 0)$ に適用してから $(|\varphi(x+i\epsilon)| < C\epsilon^{-2})$, $\epsilon \to 0$ とすればよい。

$\varphi \in Q^*(,\ )$ に対して $\psi(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ に上の公式を適用すれば

$$\varphi(z) = \dot{\phi}[\Leftrightarrow(\mathrm{Im}\zeta)^2\varphi(\bar{\zeta})]. \tag{2.5}$$

ここで $\Leftrightarrow(\mathrm{Im}\zeta)^2\varphi(\bar{\zeta}) \in B(\,,\,)$ であるから $\dot{\phi}$ は全射である。以上のことより $\dot{\phi} : T_0^{1,0}B_1(\,,\,) = B(\,,\,) \to T^{1,0}bT(\,,\,) = Q^*(\,,\,)$ はベクトル空間の同型

$$\dot{\phi} : B(\,,\,)/N(\,,\,) \overset{\cong}{\Leftrightarrow\!\!\!\to} Q^*(\,,\,)$$

(同じ記号を用いた) を導く。これより $B(\,,\,)/N(\,,\,)$ は $T(\,,\,)$ の基点 $[0]$ における正則接ベクトル空間 $T_{[0]}^{1,0}(\,,\,)$ と同一視される。

2.6. ($B(\,,\,)$ から $HB(\,,\,)$ への射影作用素 P) $\mu \in B(\,,\,)$ に対して

$$P[\mu](z) = \Leftrightarrow(\mathrm{Im}z)^2\dot{\phi}[\mu](\bar{z}) = \frac{12(\mathrm{Im}z)^2}{\pi}\int_{\mathbb{H}}\frac{\mu(\zeta)}{(\zeta \Leftrightarrow \bar{z})^4}d\sigma(\zeta)$$

とおく。$\overline{\dot{\phi}[\mu_0](\bar{z})} \in Q^*(\,,\,)$ であるから $P : B(\,,\,) \to HB(\,,\,)$ で、これは $\mathbb{C}$-線形写像である。P は次の性質を持つ。

(1) $\mu \in HB(\,,\,)$ ならば $P[\mu] = \mu.$ ((2.5) を用いる)

(2) $P \circ P = P$ ((1) を用いる)

(3) $\ker P = N(\,,\,)$ ((2.2) より)

(3) より $P[\mu]$ は μ を含む $B(\,,\,)/N(\,,\,)$ の類にのみ依存するから P は

$$P : B(\,,\,)/N(\,,\,) \Leftrightarrow\!\!\!\to HB(\,,\,)$$

とみなすことができる。(2) より $P(\mu \Leftrightarrow P[\mu]) = 0.$ よって (3) より $\mu \Leftrightarrow P[\mu] \in N(\,,\,)$ で $B(\,,\,)/N(\,,\,)$ において $[\mu] = [P[\mu]].$ 従って $P^{-1} : HB(\,,\,) \to B(\,,\,)/N(\,,\,)$ が定まる。以上をまとめると

$B(\,,\,)/N(\,,\,)$ の各類 $[\mu]$ は調和微分を一つかつただ一つのみ含み、それは $P[\mu]$ で与えられる。このことより Teichmüller 空間の基点における正則接ベクトル空間を $HB(\,,\,)$ と同一視できる。

2.7. (P の自己共役性) $\mu, \nu \in B(\,,\,)$ に対して

$$\langle \mu, \nu \rangle = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mu\bar{\nu}dA$$

(dA は双曲面積要素 $y^{-2}dxdy$) とおくとき $\langle\ ,\ \rangle$ は $B(\,,\,)$ 上の Hermite 内積を定める。P はこの内積に関して自己共役、すなわち

$$\langle P[\mu], \nu \rangle = \langle \mu, P[\nu] \rangle. \tag{2.8}$$

なぜなら $N(\,,\,)$ の特徴付けのところでみたのと同様の計算で

$$P[\mu] = \frac{12(\mathrm{Im}z)^2}{\pi}\int_{\Delta}\mu(\zeta)\omega_{\bar{z}}(\zeta)d\sigma(\zeta)$$

となるから

$$\langle P[\mu], \nu \rangle = \frac{12}{\pi}\int_{\Delta}\int_{\Delta}\mu(\zeta)\overline{\nu(z)}\omega_{\bar{z}}(\zeta)d\sigma(\zeta)d\sigma(z) = \langle \mu, P[\nu] \rangle.$$

ここで z, ζ を固定するごとに $\omega_{\bar{z}}(\zeta) = \overline{\omega_{\bar{\zeta}(z)}}$ であることを用いた。

2 の内容に関する演習問題とコメント

問題 2.1　式 (2.2) を確かめること。

問題 2.2 (1) $z \in \mathbb{H}^*$ を固定したとき

$$\omega_z(\zeta) = \Theta\left(\frac{1}{z \Leftrightarrow \zeta}\right) = \sum_{\Gamma} \frac{\gamma'(\zeta)^2}{(z \Leftrightarrow \gamma(\zeta))^4}$$

は $\mathbb{H}$ の各コンパクト集合上で一様収束することをしめせ。

(2) 各 $(\zeta, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}^*$ に対して

$$\omega_z(\zeta) = \omega_\zeta(z) \text{ すなわち } \sum_{\Gamma} \frac{\gamma'(\zeta)^2}{(z \Leftrightarrow \gamma(\zeta))^4} = \sum_{\Gamma} \frac{\gamma'(z)^2}{(\zeta \Leftrightarrow \gamma(z))^4}$$

が成り立つことをしめせ。

問題 2.3 再生公式 (2.4) の証明の細部を詰めること。($\partial D(R)$ の円弧の部分での積分が $R \to +\infty$ のとき 0 に収束することを確かめる。

$$Q(\zeta, z) = \Leftrightarrow (\bar{\zeta} \Leftrightarrow z)^{-1} + (\zeta \Leftrightarrow z)(\bar{\zeta} \Leftrightarrow z)^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\zeta \Leftrightarrow z)^2(\bar{\zeta} \Leftrightarrow z)^{-3}$$

とおいて

$$\int_{\partial D(R) \cap \mathbb{H}} Q(\zeta, 0)\, d\zeta = 0 \text{ と } \lim_{R \to +\infty} \int_{\partial D(R) \cap \mathbb{H}} (Q(\zeta, z) \Leftrightarrow Q(\zeta, 0))\, d\zeta = 0$$

を見る。)

3. 双曲面積要素の第 1 変分

3.1.(Maass Calculus) 整数 k に対して $C^\infty(\mathbb{H})$ 上の作用素を

$$K_k = (z \Leftrightarrow \bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + k\ ,\ L_k = (\bar{z} \Leftrightarrow z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Leftrightarrow k$$

で定める。$\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ に対して

$$(\gamma_k^* f)(z) = f(\gamma(z))\gamma'(z)^{k/2}\overline{\gamma'(z)^{-k/2}}$$

とおく。(よって $\mu \in B(,)$ とは $\gamma_{-2}^*\mu = \mu$ $(\gamma \in ,)$ をみたすことである。) このとき

(3.2)
$$L_{k+1}K_k = K_{k-1}L_k \Leftrightarrow 2k\ \ \overline{K}_k = L_{-k}\ ,$$

(3.3)
$$K_k\gamma_k^* = \gamma_{k+1}^* K_k\ ,\ L_k\gamma_k^* = \gamma_{k-1}^* L_k$$

が成り立つ。

$$D_k = L_{k+1}K_k + k(k+1) = K_{k-1}L_k + k(k \Leftrightarrow 1)$$

とおくと

(3.4)
$$D_{k+1}K_k = K_kD_k,\ D_kL_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1},\ D_k\gamma^* = \gamma^* D_k \quad (\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}))$$

が成り立つ。特に $D_0 = \Leftrightarrow (z \Leftrightarrow \bar{z})^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ は hyperbolic Laplacian である。

$\mathbb{H}/,$ がコンパクトリーマン面となるような , に対する固有値問題

$$\begin{cases} D_0 f = \lambda f \\ f(\gamma(z)) = f(z) \quad (\gamma \in ,) \end{cases}$$

の固有値は $0 = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ をみたし、かつ各固有値の重複度は有限である。
$\mu \in HB(,)$ を調和 Beltrami 微分とすると $K_{-2}\mu = 0$ である。

3.5.(調和 Beltrami 微分方向の Poincaré 面積要素の変分)
$\mu \in HB(,)$ とし $dA = \dfrac{\Leftrightarrow 4}{(z \Leftrightarrow \bar{z})^2}\dfrac{dz \wedge d\bar{z}}{\Leftrightarrow 2i}$ の $f^{\varepsilon\mu}$ の引き戻しによる変分

(3.6)
$$\frac{d}{d\varepsilon}(f^{\varepsilon\mu})^* dA\Big|_{\varepsilon=0}$$

が 0 になることをしめす。このことは後に Weil-Petersson 計量が Kähler であることの証明に用いられる。

$\gamma \in ,$ に対して $\gamma^*(f^{\varepsilon\mu})^*dA = (f^{\varepsilon\mu}\gamma)^*dA = (\gamma^{\varepsilon\mu}f^{\varepsilon\mu})^*dA = (f^{\varepsilon\mu})^*(\gamma^{\varepsilon\mu})^*dA = (f^{\varepsilon\mu})^*dA$
(但し $\gamma^{\varepsilon\mu} = f^{\varepsilon\mu} \circ \gamma \circ (f^{\varepsilon\mu})^{-1}$) すなわち $(f^{\varepsilon\mu})^*dA$ は , の作用で不変

$$\begin{aligned}(f^{\varepsilon\mu})^*dA &= \frac{|f_z^{\varepsilon\mu}|^2 \Leftrightarrow |f_{\bar z}^{\varepsilon\mu}|^2}{(f^{\varepsilon\mu} \Leftrightarrow \overline{f^{\varepsilon\mu}})^2}\frac{2}{i}dz \wedge d\bar z \\ &= \frac{(z \Leftrightarrow \bar z)^2(|f_z^{\varepsilon\mu}|^2 \Leftrightarrow |f_{\bar z}^{\varepsilon\mu}|^2)}{(f^{\varepsilon\mu} \Leftrightarrow \overline{f^{\varepsilon\mu}})^2}dA = B(\varepsilon\mu, z)dA\end{aligned}$$

ここで dA も , -不変なので $B(\varepsilon\mu, z)$ は , -不変な関数 $(B(\varepsilon\mu, \gamma(z)) = B(\varepsilon\mu, z)(\forall\gamma \in ,))$.
よって $\dot B(\mu, z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(B(\varepsilon\mu, z) \Leftrightarrow B(0, z))$ も , -不変な関数である。$f^0(z) = z$ ゆえ
$f_z^0 = 1$, $f_{\bar z}^0 = 0$
よって

$$\begin{aligned}\dot B(\mu, z) &= 2\mathrm{Re}\left(\dot f[\mu]_z(z) \Leftrightarrow \frac{2}{z \Leftrightarrow \bar z}\dot f[\mu](z)\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right)\end{aligned}$$

(3.6) を示すには $\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right) = 0$ を言えばよい。そのための準備をする。

$$\dot f[\mu](z) = \Leftrightarrow\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\mu(\zeta)R(\zeta, z)d\sigma(\zeta)$$

は μ のポテンシャルと呼ばれ $\dot f[\mu]_{\bar z} = \mu(z)$ をみたす。このことより

$$L_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right) = \Leftrightarrow\mu$$

μ は調和 Beltrami 微分ゆえ $K_{-2}\mu = 0$. 従って

$$\begin{aligned}D_0\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right) &= \mathrm{Re}\,D_0K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right) \qquad (D_0 \text{ は real operator}) \\ &= \mathrm{Re}\left(K_{-1}L_0K_{-1}\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(K_{-2}L_{-1} + 2\right)\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right) = 2\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right)\end{aligned}$$

従って $\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right)$ は固有値 2 に対する $\mathbb{H}/,$ 上の hyperbolic Laplacian D_0 の固有関数ということになるが、D_0 の固有値はすべて非正である。従って $\mathrm{Re}\left(K_{-1}\left(\frac{\dot f[\mu]}{z \Leftrightarrow \bar z}\right)\right) = 0.$
よって (3.6) が示せた。

3 の内容に関する演習問題とコメント

問題 3.1 　式 (3.2), (3.3), (3.4) を確かめること。

問題 3.2 $\mu \in HB(,)$ を調和 Beltrami 微分だとすると $K_{-2}\mu = 0$ であることを確かめること。

元来 $\mu \in B(,)$ が調和 Beltrami 微分であることの定義は、$(D_{-2} \Leftrightarrow 2)\mu = L_{-1}K_{-2}\mu = 0$ を満たすことである。$\mathbb{H}/,$ がコンパクトである場合は $\mathrm{ker}L_{-1} = \{0\}$ なので $K_{-2}\mu = 0$ であること同値となる。

問題 3.3 $\mu \in B(,)$ に対して、以下のことが成り立つことをしめせ。

(1) $F_{\bar{z}} = \mu$ ならば $L_{-1}\left(\dfrac{1}{(z \Leftrightarrow \bar{z})}F\right) = \Leftrightarrow \mu$

(2) 方程式 $F_{\bar{z}} = \mu$ の解は正則関数の差を除いて一意的であることをしめせ。

問題 3.4 (Beltrami 微分のポテンシャル) $\mu \in L^{\infty}(\mathbb{C})$ とするとき、微分方程式 $F_{\bar{z}}(z) = \mu(z)$ の (弱 L^2 微分の意味での) 解で $F(0) = F(1) = 0$ かつ ∞ の近傍で $F(z) = O(|z|^2)$ をみたすものは一意的に

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \mu(\zeta)R(\zeta, z)d\sigma(\zeta)$$

であることをしめせ。

問題 3.4 の解答およびその一般化については

Kra, I., *Automorphic Forms and Kleinian Groups*, Benjamin, 1972

の Chapter IV (とくに Lemma 1.4) をみよ。

4. Weil-Petersson 計量

4.1.($T(\,,\,)$ の基点のまわりの座標近傍 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を $Q(\,,\,)$ の基底とする ($n = 3g \Leftrightarrow 3$). $\mu_i = \Leftrightarrow 2(\mathrm{Im}\, z)^2 \overline{\varphi_i(z)}$ とおくと $\mu_1, \cdots, \mu_n$ は $HB(\,,\,)$ の基底である。$t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して $\mu(t) = t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n$ とおくと $U = \{t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{C}^n : \sup_{z\in\mathbb{H}} |\mu(t)| < \frac{1}{2}\}$ は 0 の近傍である。$\phi : HB(\,,\,) \to T(\,,\,) \xrightarrow{b} Q(\,,\,)^*$ を Bers embedding を定めるのに出てきた写像とすると

$$\phi[\Leftrightarrow 2(\mathrm{Im}\, \bar{z})^2(t_1\overline{\varphi_1(z)} + \cdots + t_n\overline{\varphi_n(z)})] = t_1\overline{\varphi_1(\bar{z})} + \cdots + t_n\overline{\varphi_n(\bar{z})}$$

は $t_1, \cdots, t_n$ について正則である。従って

(4.2) $\quad U \to T(\,,\,)\,,\ t = (t_1, \cdots, t_n) \mapsto [\mu(t)]$ は基点のまわりの座標近傍を定める。

4.3.($T^{1,0}_{[0]}T(\,,\,)$ における Weil-Petersson 計量)

(Bers embedding によって) $T(\,,\,)$ の基点における正則接ベクトル空間 $T^{1,0}_{[0]}T(\,,\,)$ を $B(\,,\,)/N(\,,\,)$ と同一視し $[\mu_1], [\mu_2] \in B(\,,\,)/N(\,,\,)$ の Hermite 内積を

(4.4) $$\langle[\mu_1], [\mu_2]\rangle_{\mathrm{WP}} = \langle P[\mu_1], P[\mu_2]\rangle = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} P[\mu_1]\overline{P[\mu_2]}\, dA \qquad (dA = \frac{dx\, dy}{(\mathrm{Im}\, z)^2})$$

で定める。$P[\mu_1] = (\mathrm{Im}\, z)^2\overline{\varphi_1(z)}, P[\mu_2] = (\mathrm{Im}\, z)^2\overline{\varphi_2(z)}$ とすると

$$\langle[\mu_1], [\mu_2]\rangle_{\mathrm{WP}} = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \overline{\varphi_1(z)}\varphi_2(z)(\mathrm{Im} z)^2\, d\sigma(z)$$

で右辺は φ_1 と φ_2 との Petersson 内積である。$(\ ,\ ) : B(\,,\,) \times Q(\,,\,) \to \mathbb{C}$ を

$$(\mu, \varphi) = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \mu\varphi\, d\sigma$$

で定める。$P[\mu] = (\mathrm{Im}\, z)^2\overline{\psi}$ とおくと

$$\frac{\sup|\mathrm{Re}(\mu,\varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathrm{P}}} = \frac{\sup|\mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{H}} \varphi(z)\overline{\psi(z)}(\mathrm{Im}\, z)^2\, d\sigma(z)|}{\|\varphi\|_{\mathrm{P}}} \le \|\psi\|_{\mathrm{P}} \quad \text{(Schwarz の不等式)}$$

従って $\sup|\mathrm{Re}(\mu,\varphi)|/\|\varphi\|_{\mathrm{P}} = \|\psi\|_{\mathrm{P}} = \langle P[\mu], P[\mu]\rangle^{1/2}_{\mathrm{WP}}$ すなわち

(4.5) $$\|[\mu]\|_{\mathrm{WP}} := \langle[\mu], [\mu]\rangle^{1/2} = \sup_{\varphi\in Q(\Gamma)} \frac{|\mathrm{Re}(\mu,\varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathrm{P}}}$$

(4.2) の座標系の下で基点での計量テンソル $ds^2 = 2\sum g_{\alpha\beta}\, dt_\alpha\, \overline{dt_\beta}$ を

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(0) = \langle P[\mu_\alpha], P[\mu_\beta]\rangle_{\mathrm{WP}}$$

で定める。

4.6.(他の点における Weil-Petersson 計量テンソル)

$t = (t_1, \cdots, t_n) \in U$ として t における計量テンソルを求めよう。一般に $\mu, \nu \in B(\,,\,)$ に対して次の図式を考える。

$$f^\rho \circ f^\mu = f^\nu$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f^\rho"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "f^\mu"] \arrow[ur, "f^\nu"'] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial \bar z} = \frac{\partial f^\rho}{\partial z}(f^\mu(z))\frac{\partial f^\mu}{\partial \bar z}(z) + \frac{\partial f^\rho}{\partial \bar z}(f^\mu(z))\frac{\partial \overline{f^\mu}}{\partial \bar z}(z)$$
$$\frac{\partial f^\nu}{\partial z} = \frac{\partial f^\rho}{\partial z}(f^\mu(z))\frac{\partial f^\mu}{\partial z}(z) + \frac{\partial f^\rho}{\partial \bar z}(f^\mu(z))\frac{\partial \overline{f^\mu}}{\partial z}(z)$$

よって

$$\nu(z) = \frac{\mu(z) + \rho(f^\mu(z))\overline{(\partial f^\mu/\partial z)}/(\partial f^\mu/\partial z)}{1 + \rho(f^\mu(z))\overline{\mu(z)}\,\overline{(\partial f^\mu/\partial z)}/(\partial f^\mu/\partial z)}$$

これから

$$\rho(z) = (\frac{\nu \Leftrightarrow \mu}{1 \Leftrightarrow \overline{\mu}\nu}\frac{f^\mu_z}{\overline{f^\mu_z}}) \circ (f^\mu)^{-1}(z)$$

ν の代りに $\mu + \varepsilon\nu$ を代入し、対応する ρ を $\rho(\varepsilon)$ とおけば

$$\text{(4.7)} \qquad R(\nu, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\rho(\varepsilon) \Leftrightarrow \rho(0)) = (\frac{\nu}{1 \Leftrightarrow |\mu|^2} \cdot \frac{f^\mu_z}{\overline{(f^\mu_z)}}) \circ (f^\mu)^{-1}(z)$$

以上のことを $\mu = \mu(t)$, $\nu = \mu_\alpha$ に適用すると $\mu(t)$ における μ_α 方向の微分は $R(\mu_\alpha, \mu(t)) \in T^{1,0}_{[\mu(t)]}T(,\ )$

このことより $[\mu(t)]$ における Weil-Petersson 計量テンソル $ds^2 = 2\sum g_{\alpha\bar\beta}\, dt_\alpha\, \overline{dt_\beta}$ は (4.4) を鑑みて

$$\text{(4.8)} \qquad g_{\alpha\bar\beta}(t) = \langle P \circ R(\mu_\alpha, \mu(t)), P \circ R(\mu_\beta, \mu(t))\rangle_{\mathrm{WP}}$$

但し、積分域は $\mathbb{H}/, {}^{\mu(t)}, , {}^{\mu(t)} = f^{\mu(t)}, (f^{\mu(t)})^{-1}, P : B(, {}^{\mu(t)}) \to HB(, {}^{\mu(t)})$ である。P の自己共役性と $P^2 = 1$ より

$$\text{(4.9)} \qquad g_{\alpha\bar\beta}(t) = \langle P \circ R(\mu_\alpha, \mu(t)), R(\mu_\beta, \mu(t))\rangle_{\mathrm{WP}}$$

積分域を $\mathbb{H}/,$ にしたいので $f^{\mu(t)}$ での引き戻しを考える。一般に $P[R(\nu, \mu)] \in HB(, {}^\mu)$ の f^μ での引き戻しを

$$Q(\nu, \mu)(z) = (f^\mu)^* P[R(\nu, \mu)](z) = P[R(\nu, \mu)](f^\mu(z))\frac{\overline{f^\mu_z}}{f^\mu_z}$$

とおくと (4.8),(4.9) はそれぞれ

$$\text{(4.10)} \qquad g_{\alpha\overline{\beta}}(t) = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} Q(\mu_\alpha, \mu(t))\overline{Q(\mu_\beta, \mu(t))}(f^{\mu(t)})^*\, dA$$

$$(4.11) \qquad g_{\alpha\overline{\beta}}(t) = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} Q(\mu_\alpha, \mu(t)) \frac{\overline{\mu_\beta}}{1 \Leftrightarrow |\mu(t)|^2} (f^{\mu(t)})^* \; dA$$

上の式を t_γ で微分する。(4.10) より $t = (0, \cdots, 0, t_\gamma, 0, \cdots, 0)$ として

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma}(0) &= \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \frac{\partial}{\partial t_\gamma} Q(\mu_\alpha, \mu(t))\Big|_{t_\gamma=0} \overline{Q(\mu_\beta, 0)} (f^0)^* \, dA \\ &+ \int_{\mathbb{H}/\Gamma} Q(\mu_\alpha, 0) \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \overline{Q(\mu_\beta, \mu(t))}\Big|_{t_\gamma=0} (f^0)^* \, dA \\ &+ \int_{\mathbb{H}/\Gamma} Q(\mu_\alpha, 0) \overline{Q(\mu_\beta, 0)} \frac{\partial}{\partial t_\gamma} (f^{\mu(t)})^* \, dA\Big|_{t_\gamma=0} \end{aligned}$$

(3.6) より $\frac{\partial}{\partial t_\gamma}(f^{\mu(t)})^* \, dA\Big|_{t_\gamma} = 0$ ゆえ

$$\frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma}(0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t_\gamma} Q(\mu_\alpha, \mu(t))\Big|_{t_\gamma=0}, \mu_\beta \right\rangle + \left\langle \mu_\alpha, \frac{\partial}{\partial t_\gamma} Q(\mu_\beta, \mu(t))\Big|_{t_\gamma=0} \right\rangle$$

一方 (4.11) より

$$(4.12) \qquad \frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t_\gamma} Q(\mu_\alpha, \mu(t))\Big|_{t_\gamma=0}, \mu_\beta \right\rangle_{\mathrm{WP}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\gamma} \frac{1}{1 \Leftrightarrow |\mu(t)|^2}\Big|_{t_\gamma=0} = \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \left(\frac{1}{1 \Leftrightarrow |t_\gamma|^2 |\mu_\gamma|^2} \right) \Big|_{t_\gamma=0} = 0 \text{ と } (3.6$$

２つの式より $\left\langle \mu_\alpha, \frac{\partial}{\partial t_\gamma} Q(\mu_\beta, \mu(t))\Big|_{t_\gamma=0} \right\rangle_{\mathrm{WP}} = 0.$ (4.12) の形をみると、これは

$$\frac{\partial g_{\beta\overline{\alpha}}}{\partial t_\gamma}(0) = 0 \qquad (\beta, \alpha = 1, \cdots, n)$$

を意味している。同様にして

$$\frac{\partial g_{\beta\overline{\alpha}}}{\partial \bar{t}_\gamma}(0) = 0 \qquad (\beta, \alpha = 1, \cdots, n)$$

も言える。(これらは基点のとりかえで $T(,)$ のすべての点で成立する)

一般に Hermite 計量の虚部 $\mathrm{Im}(2 \sum g_{\alpha\overline{\beta}} \, dt_\alpha \, \overline{dt_\beta})$ の定める 2-形式が閉形式であるとき、計量は Kähler であるという。

$$\frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} + \overline{\left(\frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} \right)} = \frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\overline{\alpha}}}{\partial \bar{t}_\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} \right)} = \frac{\partial g_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial t_\gamma} \Leftrightarrow \frac{\partial g_{\beta\overline{\alpha}}}{\partial \bar{t}_\gamma} = 0$$

これは基点の取り換えの下で基点以外の点でも成り立つので Weil-Petersson 計量は Kähler である。

4 の内容に関するコメントは第５章の後にある。

5. Weil-Petersson 計量の非完備性

5.1. K を $\gamma(z) = e^R z$, $(R > 1)$ で生成される巡回群とすると $z/\bar{z} \in B(K)$ である。$Q_*(K)$ を K に対する正則 2 次微分 φ で $\sup_{\mathbb{H}}(\mathrm{Im}\ z)^2|\varphi(z)| < \infty$ をみたすもの全体とする。$D = \{z \in \mathbb{H} :\ 1 < |z| < e^R\}$ を K の基本領域とするとき

$$M = \sup_{Q_*(K)} \frac{\left|\mathrm{Re} \int_D \frac{z}{\bar{z}} \varphi(z) d\sigma(z)\right|}{\left(\int_D |\varphi(z)|^2 (\mathrm{Im}\ z)^2 d\sigma(z)\right)^{1/2}}$$

の値を求めよう。(sup をとるとき $\varphi = 0$ は除く。以下同様。) $\varphi \in Q_*(K)$ とすると再生公式 (2.4) より $\lambda = e^R$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{z}{\bar{z}} \varphi(z) d\sigma(z) &= \int_D \frac{z}{\bar{z}} \left(\frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{\varphi(\zeta)(\mathrm{Im}\ \zeta)^2}{(\bar{\zeta} - z)^4} d\sigma(\zeta) \right) d\sigma(z) \\
&= \int_D \frac{z}{\bar{z}} \left(\frac{12}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_D \frac{\varphi(\lambda^n \zeta)\lambda^{2n}(\mathrm{Im}\ \zeta)^2}{(\lambda^n \bar{\zeta} - z)^4} \lambda^{2n} d\sigma(\zeta) \right) d\sigma(z) \\
&= \int_D \frac{z}{\bar{z}} \left(\frac{12}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_D \frac{\varphi(\zeta)\lambda^{2n}(\mathrm{Im}\ \zeta)^2}{\lambda^{2n}(\bar{\zeta} - \lambda^{-n} z)^4} d\sigma(\zeta) \right) d\sigma(z) \\
&= \int_D \varphi(\zeta)(\mathrm{Im}\ \zeta)^2 \left(\frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{z}{\bar{z}} \frac{d\sigma(z)}{(\bar{\zeta} - z)^4} \right) d\sigma(\zeta).
\end{aligned}$$

ここで

$$F(w) = \frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{z}{\bar{z}} \frac{d\sigma(z)}{(w - z)^4}$$

は $\mathbb{H}^*$ で正則であり、任意の $\alpha > 0$ に対して

$$F(\alpha w)\alpha^2 = \frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{z}{\bar{z}} \frac{\alpha^2 d\sigma(z)}{(\alpha w - z)^4} = \frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{z}{\bar{z}} \frac{d\sigma(z)}{(w - z)^4} = F(w).$$

これより $G(w) = w^2 F(w)$ とおくと $G(w)$ は $\mathbb{H}^*$ で正則で $G(\alpha w) = G(w)$. $\alpha > 0$ は任意ゆえ $G(w) = c$ (定数). よって $F(w) = cw^{-2}$. ここで

$$c = -F(-i) = \frac{12}{\pi} \int_{\mathbb{H}} \frac{z}{\bar{z}} \frac{d\sigma(z)}{(z + i)^4} = -2.$$

よって

$$\left|\mathrm{Re} \int_D \frac{z}{\bar{z}} \varphi(z) d\sigma(z)\right| \le \int_D |\varphi(\zeta)|(\mathrm{Im}\ \zeta)^2 \cdot \left|\frac{2}{\bar{\zeta}^2}\right| d\sigma(\zeta).$$

Cauchy-Schwarz の不等式より $M \le \sqrt{2\pi R}$. 等号が $\varphi(z) = z^{-2}$ の時に成り立つので $M = \sqrt{2\pi R}$ である。

5.2. $0 \le k < 1$ とし $f_k(z) = |z|^{-2k/(1+k)} z$ とおく。

$$\mu_k(z) = \frac{(f_k)_{\bar{z}}(z)}{(f_k)_z(z)} = -k \frac{z}{\bar{z}}$$

は K についての Beltrami 微分となる。$K^k = f_k K f_k^{-1}$ は $\gamma = k(z) = \exp\left(\dfrac{1 \Leftrightarrow k}{1+k}R\right) z$ で生成される巡回群で、$D_k = \{z \in \mathbb{H} :\ 1 < |z| < \exp\left(\dfrac{1 \Leftrightarrow k}{1+k}R\right)\}$ はその基本領域である。$\mu_k(z) = \Leftrightarrow k z/\bar{z}$ に対して 4.6 の計算を当てはめる。$f^{\rho(\epsilon)} \circ f^{\mu_k} = f^{\mu_{k+\epsilon}}$ とおくと (4.7) より

$$\dot{\mu}_k := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(\rho(\epsilon) \Leftrightarrow \rho(0)) = \left(\frac{\Leftrightarrow 1}{1 \Leftrightarrow k^2} \frac{z f_z^{\mu_k}}{\overline{z f^{\mu_k}}}\right) \circ (f^{\mu_k})^{-1}(z).$$

ここで $f^{\mu_k} = f_k$ だから $\dot{\mu}_k$ は具体的に書けて

$$\dot{\mu}_k(z) = \Leftrightarrow \frac{1}{1 \Leftrightarrow k^2} \frac{z}{\bar{z}}$$

と表される。5.1 より

$$\text{(5.3)} \qquad \sup_{Q_*(K)} \frac{\left|\mathrm{Re} \int_{D_k} \dot{\mu}_k(z)\varphi(z) d\sigma(z)\right|}{\left(\int_{D_k} |\varphi(z)|^2 (\mathrm{Im}\ z)^2 d\sigma(z)\right)^{1/2}} \leq \frac{1}{1 \Leftrightarrow k^2}\sqrt{2\pi R \frac{1 \Leftrightarrow k}{1+k}} < \frac{C(R)}{(1 \Leftrightarrow k)^{1/2}}.$$

$C(R)$ は k には依存しない定数である。

5.4. (Jenkins-Strebel 微分) , は $\mathbb{H}/,$ がコンパクト Riemann 面となる torsion-free な Fuchs 群とする。$\varphi \in Q(,)$ は $X = \mathbb{H}/,$ 上の正則 2 次微分とみなすことができる。X から φ の zero 点を除いたものを X' とおく。$p_0 \in X'$ を含む座標近傍 (U, z) と、そこでの φ の表現 $\varphi_U(z)dz^2$ に対して

$$\zeta(p) = \int_{z(p_0)}^{z(p)} \sqrt{\varphi_U} dz \ :\ U \Leftrightarrow\!\to \mathbb{C}$$

を定めるとき、$\zeta^{-1}(\{\mathrm{Re}\,\zeta = 0\})$ の p_0 を通る成分を φ-垂直線分という。X' 上の curve で、それがその上の各点の近傍で φ-垂直線分になっているようなものを考える。そうしたもので極大になっているものを (φ-)trajectory という。φ の zero 点を端点にもつ trajectory は critical であるという。

次のような特徴をもつ正則 2 次微分 φ は Jenkins-Strebel 微分と呼ばれる。φ の critical trajectories の補集合が有限個の成分 $X_0, X_1, ..., X_n$ からなり、各成分 X_i が位相的に annulus で、等角写像

$$\text{(5.5)} \qquad z_i : X_i \Leftrightarrow\!\to A_i = \left\{1 < |z_i| < \exp\left(\frac{\log r_i}{c_i}\right)\right\} \quad (c_i > 0),$$

に対して $\varphi|_{X_i}$ の z_i による push forward が $c_i z_i^{-2} dz_i^2$ で表わせる。Jenkins-Strebel 微分は $Q(,)$ において dense に存在する (Douady-Hubbard)。

5.6. 以下、簡単のため φ の critical trajectories の補集合がただ一つの annulus X_0 からなる Jenkins-Strebel 微分を考える。さらに (5.5) における定数 c_0 を 1 とす

る。(Jenkins-Strebel 微分であるという性質は正の実数倍によって不変であるから)。
$p_0 \in X'$ の座標近傍 (U, z) と、そこでの φ の表現 $\varphi_U(z)dz^2$ に対して

$$\zeta(p) = \int_{z(p_0)}^{z(p)} \sqrt{\varphi_U} dz \ : \ U \Leftrightarrow\!\!\rightarrow \mathbb{C}$$

とおくと (U, ζ) も Riemann 面 X が許容する座標近傍となる。$0 \le k < 1$ に対して

$$\zeta_k(p) = \frac{\zeta(p) + k\overline{\zeta(p)}}{1 \Leftrightarrow k}$$

とおく。X を可微分多様体とみたものを X_b とすると、(U, ζ_k) の形の座標近傍系は X_b に新たな Riemann 面を定義する (注: 実際には $X_b \backslash \{\varphi$ の zero 点$\}$ に Riemann 面の構造を与えるのだが、それは X_b にまで拡張できる)。これを X^k とかく。$\pi_\Gamma : \mathbb{H} \ \rightarrow \mathbb{H}/,$ を標準射影とし、各 U 上で $\zeta_k \circ \pi_\Gamma : \pi_\Gamma^{-1}U \rightarrow \mathbb{C}$ の Beltrami 係数となる Beltrami 微分を ν_k, $,^k = f^{\nu_k}, (f^{\nu_k})^{-1}$ とおく。$C : k \rightarrow [\nu_k]$ は Teichmüller 空間 $T(,)$ 上の曲線で, $k \rightarrow 1$ のとき $T(,)$ の境界に延びることが知られている (Teichmüller 計量に関して無限大の長さをもつ測地線になる)。Weil-Petersson 計量の非完備性をこの曲線の Weil-Petersson 計量での長さが有限になることを示すことによって証明する。

この章の最初の設定に話を持ち込むために $A_0 = \{1 < |z| < \exp(2\pi^2/r)\}$ とし、巡回 Fuchs 群 $K = \langle\gamma\rangle$, $\gamma(z) = e^r z$ を　A_0 が $\mathbb{H}/K$ と等角同値になるように定めておく。実際 $g : \mathbb{H} \rightarrow A_0$, $g(z) = \exp(\frac{\Leftrightarrow 2\pi i}{r} \log z)$ が $\mathbb{H}$ と A_0 との間の等角写像を誘導する。同様に $K^k = \langle\gamma_k\rangle$, $\gamma_k(z) = \exp(\frac{1 \Leftrightarrow k}{1+k} r)z$, を定めると

$$g^k : \mathbb{H} \Leftrightarrow\!\!\rightarrow A_0^k = \{1 < |z| < \exp(\frac{2\pi^2(1+k)}{(1 \Leftrightarrow k)r})\}$$

は $\mathbb{H}/K^k$ と A_0^k の間の等角写像を誘導する。

A_0 を X の一つの座標近傍とみなすと、そこでの Jenkins-Strebel 微分 φ の表現が $\varphi_{A_0} = dz^2/z^2$ であった ($c_0 = 1$ としたから)。

$$\zeta = \int_1^z \sqrt{\varphi_{A_0}} = \log z$$

は A_0 から strip $S_0 = \{0 < \mathrm{Re}\ z < 2\pi^2 r^{-1}\}$ への多価正則関数である。5.6 においてでてきた $\zeta_k = (\zeta + k\bar{\zeta})/(1 \Leftrightarrow k)$ は S_0 を strip $S_0^k = \{0 < \mathrm{Re}\ z < \frac{1+k}{1 \Leftrightarrow k}\frac{2\pi^2}{r}\}$ に写すが、$\mathrm{Im}\ \zeta = \mathrm{Im}\ \zeta_k$ なので ζ_k に exp 写像を合成したものは写像 $h^k : A_0 \rightarrow A_0^k$ を導く。具体的に $h^k(z) = |z|^{2k/(1-k)}z$ となる。図式による h^k の持ち上げがちょうど $f_k(z) = f^{\mu_k}(z) = |z|^{-2k/(1-k)}z$ となることを確認すること。

$\tilde{X}_0$ を $\pi_\Gamma^{-1}(X_0)$ の一つの成分とすると g と $z_0 \circ (\pi_\Gamma|_{\tilde{X}_0})$ とはともに A_0 の普遍被覆面だから、等角写像 $F : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{X}_0$ が存在する。$h^k \circ g \circ F = h^k \circ z_0 \circ (\pi_\Gamma|_{\tilde{X}_0})$ で μ_k が $h^k \circ g$ の Beltrami 係数、定義より $\nu_k|_{\tilde{X}_0}$ が $h^k \circ z_0 \circ (\pi_\Gamma|_{\tilde{X}_0})$ の Beltrami 係数だから

$$\mu_k(z) = (F^*\nu_k)(z) = \nu_k(F(z))\overline{F'(z)}/F'(z).$$

また
$$F^k = f^{\nu_k}|_{\tilde{X}_0} \circ F \circ (f^{\mu_k})^{-1} : \mathbb{H} \Leftrightarrow\!\!\rightarrow \tilde{X}_0^k =: f^{\nu_k}(\tilde{X}_0)$$
は等角写像となる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[ddd, "f_k"'] & & \tilde{X}_0 \arrow[dl, "z_0(\pi_\Gamma|_{\tilde{X}_0})"] \arrow[ddd, "f^{\nu_k}"] \\
& A_0 \arrow[d, "h^k"'] & \\
& A_0^k & \\
\mathbb{H} \arrow[rr, "F^k"] \arrow[ur, "g^k"] & & \tilde{X}_0^k \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

ν_k の k についての微分を $\dot{\nu}_k \in B(, ^k)$ とする。すなわち 4.6 と同様、$f^{\rho(\epsilon)} \circ f^{\nu_k} = f^{\nu_{k+\epsilon}}$ とおいたとき
$$\dot{\nu}_k = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(\rho(\epsilon) \Leftrightarrow \rho(0))$$
ここで $f^{\mu_k} \circ F^k = (f^{\nu_k}|_{\tilde{X}_0}) \circ F$ を使うと
$$(F^k)^* \rho(\epsilon) = \left(\frac{\mu_{k+\epsilon} \Leftrightarrow \mu_k}{1 \Leftrightarrow \overline{\mu_k} \mu_{k+\epsilon}} \; frac f_z^{\mu_k} \overline{f_z^{\mu_k}} \right) \circ (f^{\mu_k})^{-1}$$
が言えるので $(F^k)^* \dot{\nu}_k = \dot{\mu}_k$ となる。

$\dot{\nu}_k + N(, ^k)$ の Weil-Petersson ノルムは、$, ^k$ の基本領域として $F^k(D_k)$ を選べば
$$\begin{aligned}
\|\dot{\nu}_k\|_{WP} &= \sup_{Q(\Gamma_k)} \left| \mathrm{Re} \int_{F^k(D_k)} \dot{\nu}_k \varphi d\sigma \right| \Big/ \left(\int_{F^k(D_k)} |\varphi|^2 (\mathrm{Im}\ z)^2 d\sigma \right)^{1/2} \\
&= \sup_{Q(\Gamma_k)} \left| \mathrm{Re} \int_{D_k} (F^k)^* \dot{\nu}_k \cdot (F^k)^* \varphi d\sigma \right| \Big/ \left(\int_{D_k} |(F^k)^* \varphi|^2 \frac{(\mathrm{Im}\ F^k(z))^2}{|(F^k)'(z)|^2} d\sigma \right)^{1/2}
\end{aligned}$$
ここで F は正則写像ゆえ Schwarz-Pick の定理 (正則写像による双曲計量の縮小性) より
$$\frac{|(F^k)'(z)|^2}{(\mathrm{Im}\ F^k(z))^2} \leq \frac{1}{(\mathrm{Im}\ z)^2}.$$
よって
$$\int_{D_k} |(F^k)^* \varphi|^2 (\mathrm{Im}\ z)^2 d\sigma \leq \int_{D_k} |(F^k)^* \varphi|^2 \frac{(\mathrm{Im}\ F^k(z))^2}{|(F^k)'(z)|^2} d\sigma.$$
したがって $(F^k)^* \varphi \in Q(K^k)$ で、$(F^k)^* \dot{\nu}_k = \dot{\mu}_k = \Leftrightarrow\!k(1 \Leftrightarrow k^2)^{-1} z/\bar{z}$ だから (5.3) より $\|\dot{\nu}_k\| < C(R)(1 \Leftrightarrow k)^{-1/2}$. すると曲線 $C : k \to [\nu_k]$ の Weil-Petersson 計量での長さは
$$\int_0^1 \|\dot{\nu}_k\|_{WP} dk < C(R) \int_0^1 \frac{1}{(1 \Leftrightarrow k)^{1/2}} dt < +\infty$$
すなわち有限である。

5 の内容に関する演習問題とコメント

この章の内容は [5] を参考にしたが、Weil-Petersson 計量の非完備性は以下の論文でもしめされている。

Chu, T., The Weil-Petersson metric in moduli space, Chinese J. Math., **4** (1976), 29–51.

Weil-Petersson 計量に関する Moduli 空間の体積の有限性についても上の論文によって証明されているが、この事実については Wolpert, Penner, Zograf, Kaufmann-Manin-Zagier らによって具体的な体積の値まで計算されている。Moduli 空間が Weil-Petersson 計量に関して有界であることは

Wolpert, S., The finite Weil-Petersson diameter of Riemann space, Pacific J. Math. **70** (1977) 281–288.

にその記述が見られる。

Jenkins-Strebel 微分の例　$X = \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ を４点穴あき球面とする。(したがって X はコンパクトではなく、これまで扱ってこなかったケースであるが) この上で定義される Jenkins-Strebel 微分を与えよう。

$\wp(z)$ を 2 と $2i$ を周期にもつ Weierstrass の $\wp$ 関数とする:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - 2m + 2ni)^2} - \frac{1}{(2m + 2ni)^2} \right).$$

この形より $\wp(iz) = -\wp(z)$ がわかる。

$$F(z) = \wp(z)/\wp(1)$$

とおくと $F(i) = -F(1) = -1$. $F(1+i) = -F(i-1) = -F(i+1)$ より $F(1+i) = 0$. よって F は $F(0) = \infty, F(1) = 1, F(1+i) = 0, F(i) = -1$ 上で分岐する球面上の正則被覆写像である。$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ とし $\tilde{X} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,[i]$ とおく。F の $\tilde{X}$ への制限も F で表わすと $F : \tilde{X} \to X$ は不分岐被覆である。

$F(\bar{z}) = F(\bar{z} + 2i) = \overline{F(z)}$ と $F(iz) = -F(z)$ より F は垂直区間 $\{iy : 0 < y < 1\}$ (したがって $\{iy : 1 < y < 2\}$) を実軸上の区間 $J_1 = ((-)\infty, -1)$ に、また垂直区間 $\{1 + iy : 0 < y < 1\}$ (したがって $\{1 + iy : 1 < y < 2\}$) を実軸上の区間 $J_2 = (0, 1)$ に写すことがわかる。

さて X 上の正則２次微分 φ を $dz^2 = F^*\varphi$ となるように定める。すると F を十分小さい領域に制限した X の局所パラメータを考えれば、φ-(垂直)trajectory は dz^2 の垂直 trajectory (すなわち虚軸と平行な直線) の像であることがわかる。critical なものは J_1 と J_2 であり、その補空間は annulus である。普通の trajectory は J_1 を J_2 から分離する単純閉曲線である。よって　φ は Jenkins-Strebel 微分である。

X 上の正則２次微分 ψ で

$$\|\psi\| = \int_X |\psi| < +\infty$$

をみたすもの全体 $Q(X)$ は複素１次元の線形空間であることが知られている。

演習問題 5.1 (1) $\psi_0 = d\zeta^2/\zeta(\zeta \Leftrightarrow 1)^2 \in Q(X)$ をしめせ。(注: ノルムを比べることにより上の Jenkins-Strebel 微分の例 φ は $\varphi = 2\psi_0/\|\psi_0\|$ となる。)

(2) $\mathbb{C}$ 上の Euclidean motions $A(z) = z + 2, B(z) = z + 2i, C(z) = \Leftrightarrow z$ が生成する群，を考えると $\tilde{X}/,$ は X と等角同値であることを証明せよ。

以上の記述は

Earle, C. J. and F. Gardiner,Teichmüller disks and Veech's F-structure, in *Extremal Riemann Surfaes*, Contemporary Math. **201** (J. Quine and P. Sarnak eds.), 1996, 165–189.

を参考にした。Jenkins-Strebel 微分については

Strebel, K., *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, 1984.

Gardiner, F., *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience, 1987

に詳しい記述がある。5.4 で述べた Jenkins-Strebel 微分の稠密性については

Douady, A., and J. Hubbard, On the density of Strebel forms, Invent. Math., **30** (1975), 175–179.

Masur, H., The Jenkins-Strebel differentials with one cylinder are dense, Comment. Math. Helvet., **54** (1979), 179–184.

を読むこと。

付録 (4 に関するコメント)

前文でも述べたが、この章の内容と以下の記述に対しては [6] 所蔵の西村保一郎氏の記事を多いに参考にした。

Weil-Petersson 計量は負の断面曲率、Ricci 曲率をもつ。このことを得るためには、計量テンソルの 2 階微分まで計算しないといけない。それには Poincaré 面積の 2 階変分が関わってくる。論文 [4] の第 3 章でその計算が遂行されていて、$\nu, \mu \in HB(,)$ に対して

$$\frac{d}{d\epsilon_1}\frac{d}{d\epsilon_2}(f^{\epsilon_1\nu+\epsilon_2\mu})^* dA|_{\epsilon_1=\epsilon_2=0} = \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(\mu\bar{\nu} + 2(D_0 \Leftrightarrow 2)^{-1}(\mu\bar{\nu}))dA$$

が成り立つ。ただし dA は Poincaré 面積要素である。 4.1 と同じ設定の下で、

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial t_\gamma \partial t_\delta}(0) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \overline{t_\gamma} \partial \overline{t_\delta}}(0) = 0$$

が成り立つ。また原点における Riemann 曲率テンソル

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial t_\gamma \partial \overline{t_\delta}} \Leftrightarrow \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\bar{\nu}} \frac{\partial g_{\bar{\mu}\beta}}{\partial \overline{t_\delta}} \frac{\partial g_{\bar{\nu}\alpha}}{\partial t_\gamma}$$

を求めると、原点において $\partial g_{\alpha\overline{\beta}}/\partial t_\gamma = \partial g_{\alpha\overline{\beta}}/\partial \overline{t_\gamma} = 0$ だったので

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial t_\gamma \partial \overline{t_\delta}}.$$

Weil-Petersson 計量の場合、これは

$$\Delta = \Leftrightarrow 2(D_0 \Leftrightarrow 2)^{-1}$$

とおくと、次のように表示される。

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} &= \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \Delta(\mu_\alpha \overline{\mu_\beta}) \cdot \mu_\gamma \overline{\mu_\delta}\ dA + \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \Delta(\mu_\alpha \overline{\mu_\delta}) \cdot \mu_\gamma \overline{\mu_\beta}\ dA \\ &= \langle \Delta(\mu_\alpha \overline{\mu_\beta}), \overline{\mu_\gamma} \mu_\delta \rangle + \langle \Delta(\mu_\alpha \overline{\mu_\delta}), \overline{\mu_\gamma} \mu_\beta \rangle. \end{aligned}$$

上のことをもちいて断面曲率の計算を見てみよう。原点における一次独立な実接ベクトル $v_1, v_2 \in T_{\mathbb{R}}T(,)$ をとる。ある $\partial/\partial t_1, \partial/\partial t_2 \in T^{1,0}T(,)$ が存在して、それぞれ

$$v_1 = 2\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial t_1}, \quad v_2 = 2\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial t_2}$$

の形に書ける。v_1 と v_2 の張る 2 次元部分空間 P の断面曲率は

$$K(P) = \frac{\langle \tilde{R}(v_1, v_2)v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle^2} = \frac{R_{1\bar{2}1\bar{2}} \Leftrightarrow R_{1\bar{2}2\bar{1}} \Leftrightarrow R_{2\bar{1}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}2\bar{1}}}{4g_{1\bar{1}}g_{2\bar{2}} \Leftrightarrow 2|g_{1\bar{2}}|^2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(g_{1\bar{2}})^2},$$

ただし $\tilde{R}$ は Weil-Petersson 計量の実部が定める Riemann 計量に対する曲率テンソルである。ここで分母は Cauchy-Schwarz の不等式より正だから、$K(P)$ の符号は

$$R = R_{1\bar{2}1\bar{2}} \Leftrightarrow R_{1\bar{2}2\bar{1}} \Leftrightarrow R_{2\bar{1}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}2\bar{1}}$$

のそれと一致する。今、基底を取り換えて t_1, t_2 は μ_1, μ_2 の係数であるとする。まず μ_1, μ_2 は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立とすると, Δ は自己共役となるので

$$R = 2(\mathrm{Re}\langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \overline{\mu_1}\mu_2\rangle \Leftrightarrow \langle \Delta|\mu_1|^2, |\mu_2|^2\rangle) + 2(\mathrm{Re}\langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \overline{\mu_1}\mu_2\rangle \Leftrightarrow \langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \overline{\mu_2}\mu_1\rangle).$$

ここで

$$|\Delta(\mu_1\overline{\mu_2})| \le (\Delta|\mu_1|^2)^{1/2}(\Delta|\mu_2|^2)^{1/2} \quad \text{[4] の Lemma 4.3}$$

が成り立つ (作用素 Δ を正値 Green 核 G による積分作用素で表わし、G が正の平方根を持つことをもちいて Cauchy-Schwarz の不等式を適用する。) よって、Δ の自己共役性と Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\mathrm{Re}\langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \overline{\mu_1}\mu_2\rangle \le \langle \Delta|\mu_1|^2, |\mu_2|^2\rangle.$$

一方、$\mu_1\overline{\mu_2} = f + ig$, ($f$, g は実関数) とおくと Δ の自己共役性と正作用素であることから

$$\mathrm{Re}\langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \overline{\mu_1}\mu_2\rangle = \langle \Delta f, f\rangle \Leftrightarrow \langle \Delta g, g\rangle \le \langle \Delta f, f\rangle + \langle \Delta g, g\rangle \le \langle \Delta(\mu_1\overline{\mu_2}), \mu_1\overline{\mu_2}\rangle.$$

したがって $R \le 0$ である。もし $R = 0$ ならば Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件より $|\mu_1|$ は $|\mu_2|$ のスカラー倍であるが $\overline{\mu_1}/\overline{\mu_2}$ は $\mathbb{H}/,$ 上の有理関数をあたえるから、これは μ_1 が μ_2 のスカラー倍であることを意味し、μ_1 と μ_2 が 1 次独立であることに矛盾する。よって $R < 0$ となる。

μ_1, μ_2 が $\mathbb{C}$ 上 1 次従属の場合は P は $\mathrm{Re}\ \partial/\partial t_1, \mathrm{Re}(i\partial/\partial t_1)$ で張られる平面となる。このとき $g_{1\bar{1}} = \langle \mu_1, \mu_1\rangle = 1$ と正規化しておくと

$$K(P) = \Leftrightarrow R_{1\bar{1}1\bar{1}} = \Leftrightarrow 2\langle \Delta|\mu_1|^2, |\mu_1|^2\rangle.$$

D_0 (hyperbolic Laplacian) の固有値を $0 = \lambda_0 > \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots$, 対応する固有関数を $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$, ($\langle \psi_i, \psi_i\rangle = 1$) とすると

$$\Delta\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Leftrightarrow 2a_i}{\lambda_i \Leftrightarrow 2}\psi_i$$

である。ψ_0 は定数関数であり、$\psi_0 > 0$ としておく。$\mathbb{H}\ /,$ の種数を g とすると

$$1 = \langle \psi_0, \psi_0\rangle = \psi_0^2 \cdot 4\pi(g \Leftrightarrow 1).$$

今 $|\mu_1|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i$ とすると $1 = \langle \mu_1, \mu_1\rangle = \langle |\mu_1|^2, 1\rangle = \langle a_0\psi_0, 1\rangle$ だから

$$a_0 = \frac{1}{\langle \psi_0, 1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(g \Leftrightarrow 1)}}.$$

$\lambda_i < 0$ $(i \geq 1)$ より

$$K(P) = \Leftrightarrow 2\langle \Delta |\mu_1|^2, |\mu_1|^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i \Leftrightarrow 2} |a_i|^2 \leq \Leftrightarrow 2|a_0|^2 = \frac{\Leftrightarrow 1}{2\pi(g \Leftrightarrow 1)}.$$

これは Weil-Petersson 計量の正則断面曲率が $\leq \Leftrightarrow 1/2\pi(g \Leftrightarrow 1)$ であることを意味している。$\mu_1, ..., \mu_n$ を正規直交基底として選んでおくと、同様の計算によって

$$\text{Ricci 曲率 } R(\partial/\partial t_1) = \Leftrightarrow R_{1\bar{1}} = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} R_{k\bar{k}1\bar{1}} \leq \Leftrightarrow \sum_{k} R_{1\bar{1}1\bar{1}} \leq \Leftrightarrow 1/2\pi(g \Leftrightarrow 1)$$

および

$$\text{スカラー 曲率 } S = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} R_{k\bar{k}} \leq \Leftrightarrow n/2\pi(g \Leftrightarrow 1) = \Leftrightarrow 3/2\pi$$

がしめせる。

References

[1] Ahlfors, L. V., *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, 1966.

[2] 今吉洋一・谷口雅彦, タイヒミュラー空間論, 日本評論社, 1989.

[3] Nag, S., *The complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces.* John Wiley and Sons, 1988

[4] Wolpert, S., Chern forms and the Riemann tensor for the moduli of curves, Invent. Math, **85** (1986), 119–145.

[5] Wolpert, S., Noncompleteness of the Weil-Petersson metric for Teichmüller space, Pacific J. Math., **61** (1975), 573–577.

[6] Teichmüller 空間の Weil-Petersson 幾何とその応用 (科研費による研究集会資料), 1987.