再生核の変分へのLoewner的アプローチ

（2010/2/14, by 大沢健夫）

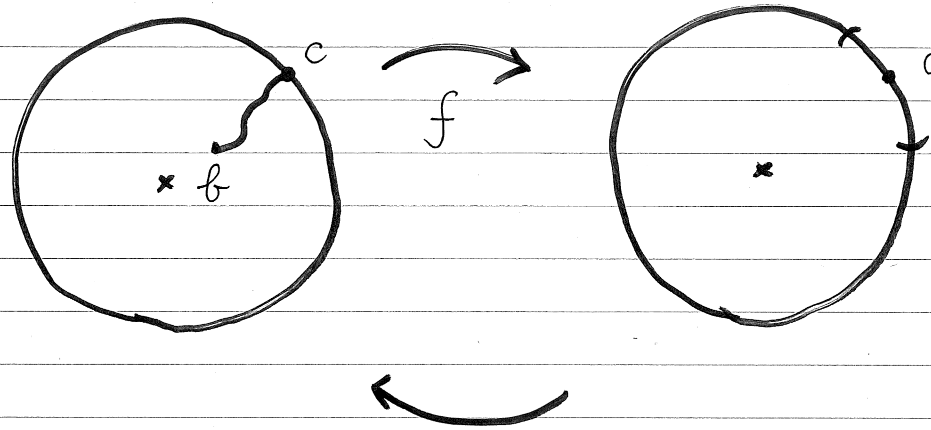
$$z = \frac{1-\sqrt{1-4w}}{2w} - 1$$

$\dfrac{1-\sqrt{1-4w}}{2w}$ はカタラン数の母関数として知られ、ランダム・ウォークの理論で有用である。

（尾畑伸明氏によるコメント）

実はケーベ関数の逆関数！

Riemann写像



単葉関数

a ↓ 駆動点， b ↓ 駆動値， c ↓ 入射点．

- SLEが伊藤の公式と等価になるのは、Riemann写像を通じてである。

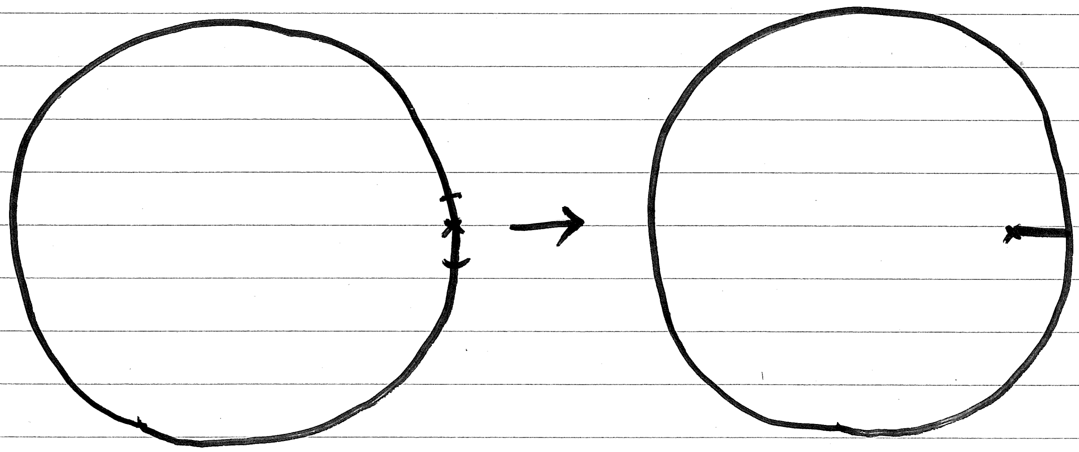
- The Loewner equation can be viewed as a decomposition of a conformal map f into infinitesimal conformal factors.

(D. Marshall and S. Rhode, The Loewner differential equation and slit mappings より)

$$w = \frac{z}{(1+z)^2} = K(z)$$

$$E_t(z) = K^{-1}\left[e^{-t}K(z)\right]$$

$t > 0$



$$E_t(z)$$

$$= K^{-1}[(1-t)K(z)] + O(t^2)$$

$$= z - \frac{K(z)}{K'(z)}t + O(t^2)$$

$$= z - \frac{z(1+z)}{1-z}t + O(t^2)$$

L. Ahlfors著 'Conformal Invariants' より

もう少し詳しく

$$f^*(z) := f\left[e^{-i\gamma}E(t)(e^{i\gamma}z)\right]$$

$$= f(z) - zf'(z)\frac{1+e^{i\gamma}z}{1-e^{i\gamma}z}t + O(t^2)$$

$$E_t(z) = K^{-1}\left[\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)K(z)\right] + O(t^3)$$

$$= z - \frac{K(z)}{K'(z)}t + \frac{K(z)}{2K'(z)}\left(-1+\frac{K''(z)K(z)}{K'(z)^2}\right)t^2 + O(t^3)$$

2次変分に興味がある.

(∵ 最大値の原理)

変分公式 → 不等式

Loewner eq.　　　歪曲定理

⋮　　　(Bieberbach予想)

de Brangesの定理

⋮

?　····>　吹田予想

(共形幾何の深い問題と
位置付けている)

$$\pi K_\Omega(z,z) \geq c_\beta{}^2(z)$$

$$\left(c_\beta = c_{\beta,\Omega} \right)$$

Ωは$\mathbb{C}$の有界領域

K_Ω : $A^2(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$は$\Omega$上$L^2$正則$\}$

$\cup$ CONB

$\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$

$K_\Omega(z,w) := \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$ (Ωのベルグマン核)

c_β : $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow [-\infty, 0)$

$g(z,w) - \log|z-w| \in L^\infty$

$\lim_{z \to \partial\Omega} g(z,w) = 0$ a.e.

$\gamma(z) = \lim_{z \to w} \left(g(z,w) - \log|z-w| \right)$

$c_\beta(z) := e^{\gamma(z)}$ (Ωの対数容量(関数))

Loewner 変動（最も単純な例）

$$\mathcal{D} = \left\{ (\zeta, z) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{D} \;\middle|\; \frac{z}{\zeta} \notin [|\zeta|, 1) \right\}$$

$\downarrow$

$\mathcal{D}$ は擬凸である.

$\left(\because \partial\mathcal{D} = \coprod \text{cx curves} \right)$

Levi 平坦

擬凸 (= ψc) $:\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\Omega \subset \mathbb{C}^n,\ \partial\Omega \in C^2$$

$$\overset{\shortparallel}{\{\rho < 0\}}$$

$$\partial\bar{\partial}\rho \,|\, \mathrm{Ker}\,\partial\rho \geq 0$$

on $\partial\Omega$.

より一般には

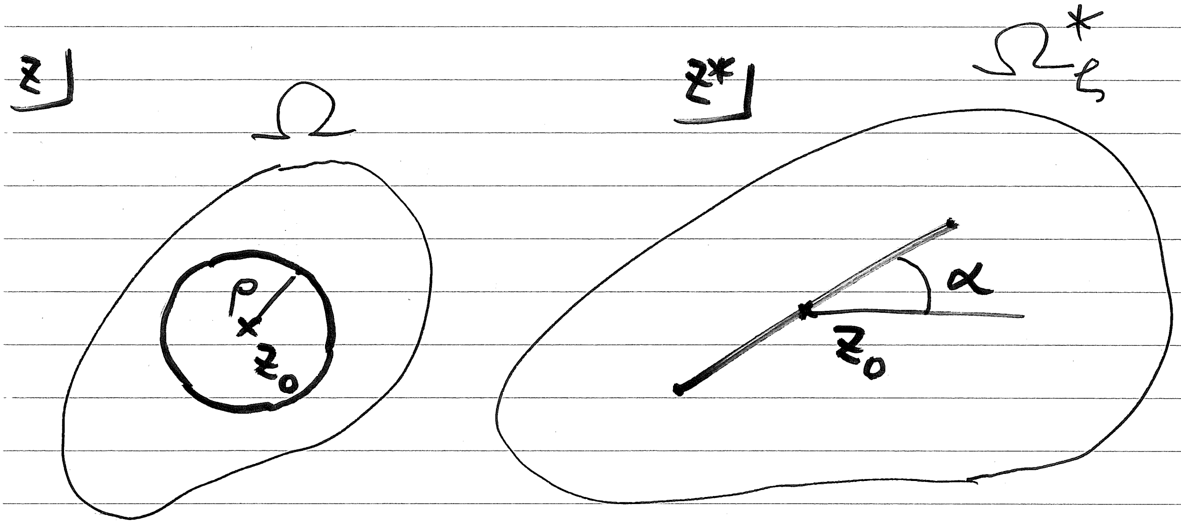
$$\delta(z) := \inf_{w \in \Omega^c} |z - w|$$

に対し

plurisubharmonic （多重劣調和）

$$-\log\delta \in PSH$$

Schiffer 変分



$$z^* = z + \rho^2 e^{2i\alpha}(z - z_0)^{-1}$$

$$\zeta = \rho e^{i\alpha}$$

$$\downarrow$$

$\bigcup_{|\zeta|<\varepsilon} \partial\Omega^*_\zeta$ は Levi平坦

再生核　　X：集合

$$\mathbb{C}^X \supset A(X) \quad \text{Hilbert sp.}$$

条件：$\forall x \in X$,

$$\begin{array}{cccc} x^* : & A(X) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$\Rightarrow \exists 1\ K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$　s.t.

$\forall f \in A(X)$

$$\langle f, K(\cdot, x) \rangle = f(x)$$

吹田の公式

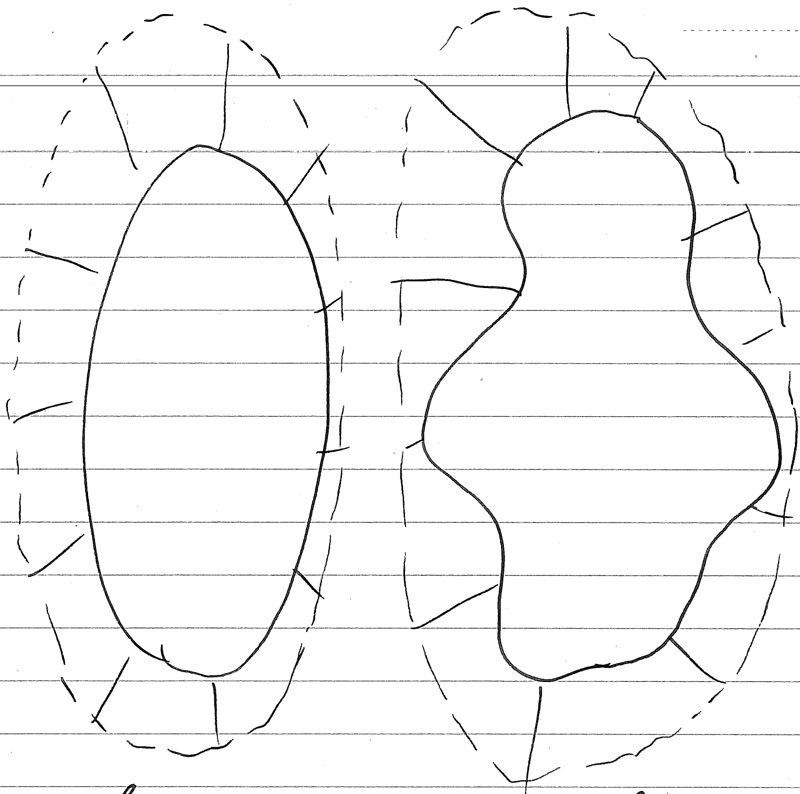
$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}} g = K_\Omega$$

米谷・山口：

(2004, Math. Ann.)

$$\partial\bar{\partial} \log K_{\Omega_\zeta^*}(z, z) \geq 0$$

$$\left(\partial = \partial_{(\zeta, z)} \right)$$



Schiffer変動を

(多重) Loewner変動で近似

↓

面白い結果を期待