第10章　要定理の証明(谷口雅彦)

まずもう一度、要（かなめ）定理を再記する。

定理 4.1(Pivot thoerem) 正数 ϵ, c_1 で、任意の穴あきトーラス群　$\rho(\pi_1(S))$ に対し

1. $\ell(\beta) \leq \epsilon$ なら、β は pivot である。
2. α が pivot なら、

$$\frac{2\pi i}{\lambda(\alpha)} \approx \nu_+(\alpha) - \overline{\nu}_-(\alpha) + i$$

ここで、$\approx$ は両辺の双曲距離が一様に、ある c_1 で押さえられることを意味する。

ここで、pivot 列 P は $\{\alpha_n\}_{n\in J}$ と表され、$\{\alpha_\pm\}$（のいずれか）が存在するときはそれ（ら）を除いた集合が内部 pivot の集合 P_0 であった。特に、各内部 pivot α_n は両隣の pivot $\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}$ を持っている。

定理の証明のため、まず M の「粗モデル」を作る。

粗モデルの構成

補題 8.2 より、すべての P の元は $\mathcal{C}(L_1)$ に含まれる。従って 9.4-9.5 節のように、ブロック $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}}$ と写像

$$H_n : \mathcal{B} \to \widehat{C}(N)$$

が定義できる。

なお、α_- が P に含まれていて α_+ と異なる場合には $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\alpha_-, \alpha_1}$ とおく。逆に α_+ が P に含まれていて α_- と異なる場合には $\mathcal{B}_{p+1} = \mathcal{B}_{\alpha_+, \alpha_p}$ とおく。さらに $\alpha_+ = \alpha_-$ の場合には $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\alpha_\pm}$ が唯一のブロックとなる。いずれの場合も H_n の定義は 9.5 節と同様である。

次に隣り合う境界面 $\partial_1\mathcal{B}_n$ と $\partial_0\mathcal{B}_{n+1}$ との間には、S の恒等写像が誘導する等長写像による自然な同一視があるから、これらすべて（$n \in J$）のブロックを貼り合わせることにより集合

$$M = \bigcup_{n\in J} \mathcal{B}_n$$

と、写像

$$H : M \to \widehat{C}(N); \quad H|_{\mathcal{B}_n} = H_n$$

が得られる。

各 $\mathcal{B}_n$ のカスプ $Q_{\mathcal{B}_n}$ の和集合を Q_M で表し、主カスプと呼ぶ。

注意 今のところ $M^0 = M \setminus \cup_n U_n$ 上にしか計量が定義されていないが、H を M^0 に制限すれば Lipschitz 連続であった。いずれにしろ、M は $\widehat{C}(N)$ と同相である。

また、pivot の長さの上限である L_1 から 9 章の ϵ_2, ϵ_3 が定まっていた。9.3 節での $\widehat{C}(N)$ の定義では、正数 r も決められていた。

この集合 M は次の意味で、N の「粗モデル」である。

補題 10.1. 写像 $H : M \to \widehat{C}(N)$ は *proper* で、*degree* 1 である。

証明： H は境界を境界にうつし、各ブロックの thick-part の像は有界な直径を持っている。また、pivot 測地線 α_n^* は任意のコンパクト集合から逃げてゆく。従って H を $M \setminus Q_M$ に制限した写像は $\widehat{C}(N) \setminus Q_N$ への proper な写像である。各ブロックのカスプ部分 $Q_{\mathcal{B}_n}$ 上では H は元々 proper であるように定義されていた。従って M 全体からの写像 H そのものも $\widehat{C}(N)$ への proper な写像である。

特にその degree が定義できる。$\widehat{C}(N)$ の境界が空でなければ、補題 9.3 の後半から H は境界上 degree 1 だから主張を得る。そうでなければ $M = S \times \mathbf{R}$ で、H は S のある向きを保つ同相写像のホモトピー類に対するホモトピー同値写像と見なせる。一方、pivot 測地線 α_n^* は $n \to \pm\infty$ のとき end $e_\pm$ を通り抜けてゆく。従って M と N の向き付けの仕方から H は end の対応を保つので degree 1 で有ることが分かった。 ■

系 Pivot でなければ長さは ϵ_3 以上である。

証明： $H : M \to \widehat{C}(N)$ は degree 1 だから全射である。すなわち、すべて短い測地線の Margulis tube を覆うはずであるが、定義より ϵ_3-Margulis tube として現れるのは pivot に対応するものしかない。 ■

つぎに、定理の 2. の主張を示そう。

補題 長さが ϵ_3 より長い pivot α_n に対しては

$$\frac{2\pi i}{\lambda(\alpha_n)} \approx \nu_+(\alpha_n) - \overline{\nu}_-(\alpha_n) + i$$

が成り立つ。

証明： そのような α_n を固定する。取り方より α_n の長さは L_1 を超えず、上にも有界である。従って上半平面上で、$\omega(\alpha_n)$ は $2\pi i$ から双曲距離に関して有界な範囲にあるから、

$$\mathrm{Im}\,(\nu_+(\alpha_n)) + \mathrm{Im}\,(\nu_-(\alpha_n)), \quad |\mathrm{Re}\,(\nu_+(\alpha_n)) - \mathrm{Re}\,(\nu_-(\alpha_n))|$$

が上に有界であることを示せば主張を得る。

まず前者は補題 6.4 の後半の主張から明らかである。後者は 4 章で示した基本評価式より $w(n)$ との差が 2 で押さえられる。ここで $w(n)$ とは、α_n が内部 pivot であるとして、

$$\alpha_{n+1} = D_{\alpha_n}^{w(n)} \alpha_{n-1}$$

を満たす整数であった。すなわち、α_n と α_{n-1} を生成元対として A, B で表すとき α_{n+1} は $A^{\pm w(n)} B$ である。従って $\lambda = \lambda(A)$ として、直接計算で

$$\mathrm{tr}_k = \mathrm{tr}\, A^k B = a e^{k\lambda/2} + d e^{-k\lambda/2}$$

の形であることが分かる。ここで長さの有界性から、 pivot のトレースもまた有界である。一方 6 章最後の注意より、

$$|\mathrm{tr}_k| \geq c_2 > 0$$

を満たす c_2 が存在し、仮定より $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \epsilon_3$ であった。したがって $|\mathrm{tr}_k|$ は $|k|$ に関して指数函数的に増加する。以上から $w(n)$ の上界が得られる。

なお、 α_n が内部 pivot でないとき、たとえば $\alpha_n = \alpha_-$ のときは仮定より、ϵ_3 にのみ依存する定数で長さが押さえられる閉曲線が（α_n 以外にも） $\partial_- C(N)$ 上に存在する。これを α_{n-1} の代わりに用いれば同様にして主張が示せる。 ■

そうでない場合は次の補題により、再び「粗モデル」に帰着できる。

補題 10.2. $H|_{\partial U_n}$ は歪曲度が一様有界な擬等角写像にホモトピックである。

証明： まず H の degree が 1 で、対 $(U_n, \partial U_n)$ を $(\mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n), \partial \mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n))$ にうつし、これ以外には $\mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n)$ にうつる部分はないから、

$$H|_{\partial U_n} : \partial U_n \to \mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n)$$

は degree 1 である。

$\mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n)$ の境界を F_0 とおくと、補題 6.3 の (3) より F_0 は Euclidean で面積が A_0 より小さくない。また H は ∂U_n 上でも一様に Lipschitz 連続である。特に α_n が内部 pivot の場合には ∂U_n は正方トーラスに一様に bi-Lipschitz 同値であるから、2.4 節の議論から $H|_{\partial U_n}$ は歪曲度が一様有界な擬等角写像にホモトピックである。

次に α_n が $\alpha_\pm$（のいずれか）である場合には ∂U_n はモジュラスの大きいアニュラス $A_\pm$（のいずれか）を含むが、そこでは H は元々歪曲度が一様有界な擬等角写像であった。残りのアニュラスは有界なモジュラスを持ち、そこでは H は元々 Lipschitz 連続であるから、補題 2.2 により H は歪曲度が一様有界な擬等角写像にホモトピックである。 ■

さて n を固定し、$\mathbf{T}_{\epsilon_0}(\alpha_n)$ を単に $\mathbf{T}$ で表す。その境界を F_0 とし、その Teichmüller パラメーターを $\omega(F_0)$ で表す。このとき、6 章で

$$\omega(F_0) \approx \omega(\alpha_n)$$

であることを示した。一方、上補題で

$$\omega(F_0) \approx \tau(\partial U, \alpha, \mu)$$

であることが分かった。ただし、μ は $\partial U = \partial U_n$ の meridian である。正確には以下のように定義される。

定義 まず、∂U を4つにわけて

$$A_0 \cup A_R \cup A_1 \cup A_L; \quad A_0 = A \times \{t_0\}, A_1 = A \times \{t_1\}$$

とする。ここで、ブロック $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ が内部ブロックか $\mathcal{B}_{\alpha_+,\beta}$ 型のときは $t_0 = 1/4$ で、それ以外の場合には $t_0 = 0$ である。t_1 については、$\mathcal{B}$ が内部ブロックか $\mathcal{B}_{\alpha_-,\beta}$ 型のときは3/4 で、それ以外の場合には 1 である。A_R, A_L は $\partial A \times [t_0, t_1]$ の成分で、 ∂U の側面と呼ぶ。 A_0, A_1 はそれぞれ底面、上面である。(これらはすべてEuclidean な構造をもち、境界が測地的である。従って ∂U は $\mathcal{B}$ に区分的線型に埋め込まれた Euclidean トーラスである。)

さて、$\alpha = \alpha_n$ の隣接元 $\beta \in \mathcal{C}$ を固定し、 β を表す曲線 β_0 を、以下の条件を満たすように取る

1. $B = S - A$ との共通部分が測地弧、
2. A との共通部分が Euclidean 計量 σ_0^e に関する測地弧で、
3. A の境界と σ_0^e に関し直交する。

計量 σ_1^e についても同様の条件を満たし β を表す曲線をとり、β_1 とする。ここで B 上では σ_0^e と σ_1^e とは一致するから、B 上では $\beta_0 = \beta_1$ としてよい。このとき、

$$(\beta_0 \cap B) \times \{t_0\}, \quad (\beta_1 \cap B) \times \{t_1\}$$

の端点を A_R, A_L 内でつなぐ、長さ $t_1 - t_0$ の「鉛直」線分を μ_R, μ_L とする。さらに $\mu_j = (\beta_j \cap A) \times \{t_j\}$ $(j = 0, 1)$ として、

$$\mu = \mu_0 \cup \mu_R \cup \mu_1 \cup \mu_L$$

とおくと、∂U の meridian を与える。

ここで $\tau(\partial U, \alpha, \mu)$ は end invariants から正確に計算でき、次の主張、従って定理の 2. の主張が得られる。

補題 10.3.

$$\tau(\partial U, \alpha, \mu) \approx \nu_+(\alpha) - \overline{\nu}_-(\alpha) + i$$

が成り立つ。

証明：　まず構成法から、2.3 節の等式

$$\tau(\partial U, \alpha, \mu) = \tau(A_0, \mu_0) + \tau(A_R, \mu_R) + \tau(A_1, \mu_1) + \tau(A_L, \mu_L)$$

が成り立ち、さらに、

$$\tau(A_R, \mu_R) = \tau(A_L, \mu_L) = (t_1 - t_0)i$$

である。

A_1 については、まずやはり 2.3 節の等式から

$$\tau(S, \sigma_1, \alpha, \beta) = \tau(A, \mu_1) + \tau(B, \beta_1 \cap B)$$

で、$\tau(B, \beta_1 \cap B) = i/2$ であった。A_0 については、S 上での部分アニュラスとしての向きが ∂U の部分アニュラスとしての向きと反対なので、

$$-\overline{\tau}(S, \sigma_0, \alpha, \beta) = \tau(A, \mu_0) + \tau(B, \beta_0 \cap B)$$

を得る。従って、

$$\tau(S, \sigma_1, \alpha, \beta) - \overline{\tau}(S, \sigma_0, \alpha, \beta) \approx \nu_+(\alpha) - \overline{\nu}_-(\alpha) + i$$

を示せばよい。

さて、$\nu_\pm(\alpha)$ は α を ∞ にうつしたときの（適当な正規化の下での）$\nu_\pm$ であった。しかし、$\nu_+ - \overline{\nu}_-$ は平行移動で不変だから β が 0 にうつされるとしてよい。すなわち、$\nu_\pm(\alpha) = \tau(S, \nu_\pm, \alpha, \beta)$ としてよい。

まず $\alpha = \alpha_+$ のときは σ_1 は ν_+ の等角類だから

$$\tau(S, \sigma_1, \alpha, \beta) = \nu_+(\alpha)$$

である。$\alpha (= \alpha_n) \neq \alpha_+$ のときは $\sigma_1 = \sigma_{\alpha_n, \alpha_{n+1}}$ で、構成の仕方から Teichmüller パラメーターは $\alpha_{n+1} + i$ で α_{n+1} は整数である。一方、pivot 列の定義から、$\nu_+(\alpha_n)$ は α_{n+1} からの Euclidean 距離が 1 以下である。（すなわち ν_+ は、α_{n+1} に隣接する整数を端点に持つ Farey 辺で $\alpha_n = \infty$ と分離されるか、$\alpha_{n+1} = \alpha_+$ で α_{n+1} での直径 1 の horoball に含まれる。）従って、$\nu_+(\alpha_n) + i$ と $\alpha_{n+1} + i$ との距離は一様有界である。

同様の議論が ν_- についても適用できて、求める評価式を得る。 ■

注意　内部 pivot α_n にたいしては μ_0 と μ_1 の違いは A に沿う $w(n)$ 回の twist で、∂U を構成する 4 個のアニュラスのモジュラスはすべて 1/2 である。したがって

$$\tau(\partial U, \alpha, \mu) = w(n) + 2i$$

である。

第11章　モデル多様体と幾何極限（小森洋平）

要定理とその証明に用いた構成により、穴あきトーラス多様体の完全な描写がみえてきた。それはMargulis tubeを包むブロックの列からなり、その幾何はpivot列で制御される。しかしモデルから双曲多様体への写像はいまのところLipshitzでしかなく、逆向きの評価がない。逆向きの評価は穴あきトーラス群の擬等長類を決める際必要であり、これが次の定理の目標である。

定理 11.1. （モデル多様体）
$\rho : \pi_1(S) \to PSL_2(\mathbf{C})$ を標識付き穴あきトーラス群とし、その商多様体を N とする。このとき ρ の *end invariants*(ν_-, ν_+) は $\hat{C}(N)$ と同相な多様体 M と、普遍被覆への持ち上げ $\tilde{f}$ が擬等長写像になるようなホモトピー同値 $f : M \to \hat{C}(N)$ を定める。擬等長写像の定数は ρ によらない。

距離空間の間の写像 $F : X \to Y$ は擬等長的とは、ある定数 K と δ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対し、

$$\frac{1}{K} d(x,y) - \delta \leq d(F(x), F(y)) \leq K d(x,y) + \delta$$

が成り立つこととする。

11.1　モデルの構成

モデルの構成の大部分は9,10章におけるブロックの構成で終っている。そこでは多様体 M、degree 1でホモトピー同値かつproperな写像 $H : M \to \hat{C}(N)$、そして部分多様体 M^0 上の距離を構成した。この距離に関して $H|_{M^0}$ は一様にLipshitzであった。

M の残りの部分に距離を定義する。つまりソリッドトーラス U_n に距離を定義し、M 全体でLipshitzになるよう H を調節する。各トーラス ∂U_n はユークリッド構造を持ち、$\alpha_n \in \mathcal{C}$ とメリディアン曲線 μ_n で標識を固定した。そのTeichmüllerパラメーターは $\tau_n = \tau(\partial U_n, \alpha_n, \mu_n)$ であり、前節で計算した。特に内部ブロックに対しては、$\tau_n = w(n) + 2i$ である。∂U_n 上の α_n の長さは1であり、境界が ∂U_n と等長

的かつ同じ標識を持つ Margulis tube がただ1つあることがわかる。つまり ∂U_n のユークリッド構造から複素移動距離 λ' と半径 r が決まる。さらにこの tube の無限遠での Teichmüller パラメーター $\omega' = 2\pi i/\lambda'$ は τ_n から双曲距離で有界であり、$w(n)$ が大きくなると距離は短くなる（半径 r は無限大にいく）。境界での移動距離は丁度 ϵ_0 というわけではない。しかし ϵ'-tube ではある。ここで ϵ' は ϵ_0 との比が有界である。

よってこの Margulis tube と等長的になるように U_n に距離を拡張する。ここで要定理から高々長さが ϵ_3 の pivot α_n に対し、この Margulis tube は N 内の pivot α_n に対応する ϵ_0-Margulis tube と一様に bi-Lipshitz 同相である。われわれの $H|_{\partial U_n}$ は degree 1 の Lipshitz 写像でしかないが、ユークリッドトーラスのアフィン同型に有界ホモトピーを持ち、カラー (cullar) でこのホモトピーを実現すると U_n の残りの部分に拡張でき、ソリッドトーラスの境界をとめて H とホモトピックな写像が得られる。（放物的元を持つ境界ブロックの場合と同じ議論で、そのときは τ_n は無限大になる）。∂U_n は角があるため、得られた距離はなめらかではないが以下の議論には影響ない。

長さが下から ϵ_3 で押さえられる pivot α_n に対しては幅 (width)$w(n)$ つまりメリディアン曲線の長さが有界になるので、半径が上下から有界な U_n の距離を得る。よって $H \mid U_n$ は U_n を測地線 α_n^* の近傍におくるような一様な Lipshi tz 写像に境界をとめたホモトピーで変形できる。

f を最終的に得られた写像とする。f は degree 1 の Lipshitz なホモトピー同値であることはわかった。f が普遍被覆に擬等長写像として持ち上がることを示すには、ある一様評価が必要であり、それを幾何極限の議論を用いて示す。われわれの最初のゴールは補題 11.2 でそれは穴あきトーラス群の幾何極限の記述を与える。

11.2 幾何極限

以下、基点付き距離空間 (N, x) の幾何位相 (geometric topology) に修得していることを仮定する（[9,24,51,85] を参照。以下の議論の応用としては [68] も参照のこと）。我々の目的のためには次のような定義を用いる：基点付き距離空間の列 (N_i, x_i) が基点付き距離空間 (N, x) に幾何収束するとは、数列 $R_i \to \infty, K_i \to 1$ と、像と K_i-bi-Lipshitz 写像の列 $h_i : (B(x, R_i), x) \to (N_i, x_i)$ が存在することである（ここで $B(x, R)$ は x の R-近傍とする）。同様に写像の列 $f_i : (M_i, x_i) \to (N_i, y_i)$ が $f : (M, x) \to (N, y)$ に幾何収束するとは、$(M, x), (N, y)$ にそれぞれ幾何収束する列 $(M_i, x_i), (N_i, y_i)$ が存在して（つまり、それぞれに Lipshitz 写像 h_i, k_i が存在して）、任意の R に対し、写像 $h_i^{-1} \circ f_i \circ k_i : B(x, R) \to N$ が（十分大きな i に対し定義されて）C^0 級で f に収束することとする。

双曲幾何学における重要な現象として、基点付きの n 次元双曲多様体で基点にお

ける単射半径が下から正の実数で押さえられているものの全体は幾何位相でコンパクトであるという事実がある。

この節では穴あきトーラス群の幾何極限を、モデル多様体とモデル写像 f の幾何極限を通して理解したい。

組み合わせデータの収束：
モデル多様体は以下のように記述される組み合わせ的データで決まる。pivot 列 P は整数の区間 $J \subset \mathbf{Z}$ で番号付けされ、end invariants(ν_-, ν_+) により、幅列 (width sequence) $W = \{w(n)\}_{n \in J}$ が決まった。さらに P が最初（または最後）の pivot を持てば、$|Rev_\pm| \leq 1$ を満たす複素数 $v_\pm$ を $\nu_\pm(\alpha_\pm)$ $mod 1$ で定義する。4 節の言葉でいえば、$\alpha_- \neq \alpha_+$ ならば v_+ を $w(p+1) + v_+ = \nu_+(\alpha_+) - \alpha_p(\alpha_+)$ で定義し、v_- を $w(0) + v_- = \alpha_1(\alpha_-) - \bar{\nu}_-(\alpha_-)$ で定義する。$\alpha_- = \alpha_+$ ならば $w(0) + v_- + v_+ = \nu_+(\alpha_+) - \bar{\nu}_-(\alpha_+)$ を満たすようにとる。α_- か α_+ が潜伏的放物的元のときは $v_+ = \infty i$ か $v_- = \infty i$ とする。

特に Imv_+ や Imv_- は、(10.3) より対応する境界ブロックのアニュラス A_+ や A_- のモジュラスを決める。$\Sigma = (W, v_+, v_-)$ を組み合わせ的データという（$v_\pm$ が定義されないときはかかないこととする）。

組み合わせ的データには pivot 列 P があらわれないが、$SL_2(\mathrm{Z})$ の作用を除いて幅列から復元できる。これは標識、つまり表現 ρ を忘れて像のクライン群のみを考えることに対応している。

極限を扱うために組み合わせ的データ Σ の定義を少し拡張する。J は $\mathbf{Z}$ の任意の区間とし、$w(n) = \infty$ も許すとする。この定義で組み合わせ的データ全体に位相を以下のようにいれる：列 $\Sigma_i = (W_i, v_+^i, v_-^i)$ は $\Sigma = (W, v_+, v_-)$ に収束するとは、$\mathbf{Z}$ の部分集合として J_i が J に収束し（つまり任意の $q > 0$ に対し、十分大きな i で $J_i \cap [-q, q] = J \cap [-q, q]$）、各 $n \in J$ で $w_i(n) \to w(n)$ か $w(n) = \infty$ かつ $|w_i(n)| \to \infty$ を満たすこととする。最後に Σ において、v_+ が定義されているときは $[-1, 1] + i\mathbf{R}$ に ∞i を添加した自然なコンパクト化において $v_+^i \to v_+$ のこととする。v_- についても同様である。

モデル多様体の収束：
一般化された組み合わせ的データ Σ は一般化されたモデル多様体 M_Σ を定義する。各 $n \in J$ に対し、$w(n)$ が有限ならば以前と同様にブロック B_n を構成する。ただし今回は pivot に名前はついていない：例えば内部ブロック B_n を構成するには α と隣接する pivots β, γ で $\gamma = D_\alpha^{w(n)} \beta$ をみたす $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ を作る。次々ブロックを張り合わせていく時は、$\partial_1 B_n$ 上の α, γ を $\partial_0 B_{n+1}$ 上の β, α に移すただひとつの向きを保つ等長写像で $\partial_1 B_n$ と $\partial_0 B_{n+1}$ とを張り合わせる。$w(n)$ が無限でブロックが内部ブロックならば、まず $B \setminus U$ と等長的なソリッドトーラス U のないブロック B_n^0 を構成する。U がなければブロックの上下の境界に自然な同一視はなく、実際すべての U のない内部ブロックは互いに等長的である。階数 2 の放物的群に対し、境界のトーラ

スが U と等長的な Margulis tube がただひとつ存在するので、この距離を U から芯 (core) を除いた上に定義して U のないブロックにはめ込む。

境界ブロックについては、次の条件をみたしながら上と同様に構成する。(10,3) により A_+, A_- のモジュラスをきめるのに Imv_+, Imv_- を用いる。実部 Rev_+, Rev_- と対応する幅 $w(0), w(p+1)$ はトーラス ∂U と選んだメリディアン曲線の幾何を記述する。$v_+ = \infty i$ のとき以前と同様に $S^1 \times [0,\infty)$ と等長的なアニュラスの対があり、階数1の放物的 Margulis tube がある（たとえ対応する幅が無限大でも）。$v_- = \infty i$ のときも同様である。ただ1つの例外は $\alpha_+ = \alpha_-$ のときで、このときはただ1つの2重境界ブロック B_0 が存在して $v_+ = v_- = \infty i$ となる。このときは U を、アニュラス A_R と A_L で張り合わせた階数1の放物的 Margulis tube の2つのコピーで置き換える。つまりできた多様体は3つ穴あき球面と $[0,1]$ の直積に同相になる。これは話の本筋ではないが（これは Fuchsian な幾何極限に対応する）話を完全にするためいれておく。

これからモデル多様体の幾何極限の記述と、組み合わせ的データ Σ の幾何収束との関係についてのべる。

以下のような表記を用いる。モデル多様体を $M = \cup_{n\in J} B_n$ とする。開ソリッドトーラス U_n を B_n から取り除いたものを B_n^0 とする。B_n からカスプ領域 Q_{B_n} を除いたものを $\check{B}_n$ とし、$\check{B}_n^0$ を $B_n^0 \cap \check{B}_n$ とする。このとき $M^0 = \cup_{n\in J} B_n^0$ とし、$\check{M}, \check{M}^0$ 等も同様に定義する。整数 $q > 0$ に対し、$M[q] = \cup_{|n|\le q} B_n$ とする。$M^0[q] = M^0 \cap M[q]$ とし、$\check{M}[q], \check{M}^0[q]$ 等も同様に定義する。特に $\check{M}^0[q]$ はコンパクトである。

組み合わせ的データ Σ_i をもつ基点付き距離空間の列 (M_i, x_i) を考える。必要ならば J_i をシフトして、任意の i で $0 \in J_i$ かつ $x_i \in B_{i,0}$ と仮定してよい（ここで M_i の n 番目のブロックを $B_{i,n}$ とする）。Σ_i が Σ に収束するとして、$M_\infty = M_\Sigma$ とする。x_i をうまく選ぶと、ある $x \in M$ が存在して (M_∞, x) に幾何収束する (M_i, x_i) の部分列が存在することを以下で示す。

実際 $M_\infty^0[q]$ について考えてみる。これは有限個の U のないブロック B_n^0 からなる。構成より、どの2つの U のない内部ブロックも互いに等長的で、同じ型のどの2つの U のない境界ブロックも、境界上にあるかもしれない長い境界アニュラス $A_\pm$ を除いて互いに一様な定数による bi-Lipshitz 同値である。つまり十分大きい i に対し、自然な埋め込み $k_i : M_\infty^0[q] \to M_i[q]$ が存在して、各 U のない内部ブロックにおいて等長的で（境界ブロックから長いアニュラスを除いたところで bi-Lipshitz で）番号 n を保つ。つまり $x_i \in \check{B}_{i,0}^0$ かつ x_i が長いアニュラスに入らないように取ると、$\check{B}_0^0$ はコンパクトより $k_i^{-1}(x_i) \in \check{B}_0^0$ は収束部分列を持ち、その極限を $x \in \check{B}_0^0$ とする。さらに $v_\pm$ の収束より、長い境界アニュラスも幾何収束し、それらの境界での同一視もコンパクト集合上動く。つまり $q \to \infty$ で部分多様体の列 (M_i^0, x_i) が (M_∞^0, x) に収束するような部分列がとれ、これを全体の列と以下みなす。

ここで微妙なのは写像 k_i がソリッドトーラス U_n にまで拡張するとはかぎらないことである：M_∞ のソリッドトーラスのメリディアン曲線 μ_n は対応する M_i でのトー

ラスのメリディアン曲線と違っていてもかまわない。しかしこの情報は幅 $w_i(n)$ から読み取ることができる。特に内部ブロックにおいて、$w(n) \neq \infty$ ならば、十分大きい i で $w_i(n) = w(n)$ となり、k_i はソリッドトーラス U_n と $U_{i,n}$ の間の等長写像を与える。もし $w(n) = \infty$ ならば $w_i(n) \to \pm\infty$ になり、対応する Margulis tube の半径は無限大に発散して、幾何極限は M_∞ に付け加えた階数 2 の放物的 Marglis tube になる。(これは本質的に巡回群の幾何極限が巡回群にならない Jørgensen の例にあたる。[47,51] を参照。) $v_\pm$ の収束で長いアニュラスの収束をいう以外は、境界ブロックの場合も同様である。さらに Imv_+ か Imv_- が ∞ にいくときは、$w_i(n)$ の振る舞いにかかわらず、階数 2 でなく階数 1 の放物的 Margulis tube にいく。

以上より (M_i, x_i) は (M_∞, x) に幾何収束する。さらに以下のように k_i を $k_i : M^0_\infty \to M_i$ に拡張する : 各 i ごとに $q = q_i$ を $J_i \cap [-q, q] = J_\infty \cap [-q, q]$ となる最大の q とする(このとき $i \to \infty$ で $q_i \to \infty$)。$M^0_\infty[q_i]$ 上では k_i は以前のように定義して、残りの部分には、まず $M^0_\infty[q]$ の外部を $\partial M^0_\infty[q]$ 上につぶしてから k_i で送るように拡張する。このときまた幾何収束 $k_i \to k_\infty : M^0_\infty \to M_\infty$ を得る。ここで k_∞ は包含写像である。

1 つの例外を除けば、thick-part$\check{M}^0$ に基点を持つモデル多様体の幾何極限は $S \times I$ から曲線の列 $\gamma_k \times \{k\}$ を除いた空間と同相である。ここで I は $\mathbf{R}$ の区間、γ_k は S 上の nonperipheral な単純閉曲線で γ_k と γ_{k+1} は互いにホモトピックではない。例外とは各 i に対し、ただ 1 つのブロックがあるのみでこの場合 $\alpha^i_- = \alpha^i_+$ で v^i_-, v^i_+ ともに無限大にいく。このとき極限は上に述べたような例外的な 3 つ穴あき曲面になる。

モデル写像の収束 :
次の補題により、穴あきトーラス群の任意の列の幾何極限をモデルの極限の言葉で表わす。

補題 11.1. N_i を穴あきトーラス多様体とし、そのモデルを M_i、写像を $f_i : (M_i, x_i) \to (\hat{C}(N_i), f_i(x_i))$ とする。x_i は *thick-part* $\check{M}^0_i$ の内部に含まれるとする。これらの写像は幾何学的収束する部分列を持ち、その極限 $f_\infty : (M_\infty, x_\infty) \to (\hat{C}(N_\infty), y_\infty)$ は *proper* な写像で *degree* 1 かつホモトピー同値である。ここで $\hat{C}(N_\infty)$ は N_∞ にホモトピー同値な N_∞ の部分集合で凸核 (*convex core)* を含む。

証明 : 前と同様必要があれば番号を取り直して組み合わせ的データ Σ_i の J_i が 0 を含み $x_i \in \check{B}^0_{i,0}$ としてよい。このとき部分列をとれば Σ_i はある Σ に収束しているとしてよい。前の議論より別の部分列をとれば (M_i, x_i) はある (M_∞, x_∞) に収束しているとしてよい (x_i を内部に保ちつつとは、境界ブロックの長いアニュラス $A_\pm$ に入らないということを意味する)。補題 9.3 より N_i の $f_i(x_i)$ での単射半径は下から一様に ϵ_3 で押さえられているので、$(N_i, f_i(x_i))$ は (N_∞, y_∞) に幾何収束するとしてよく、$\hat{C}(N_i)$ は N_∞ のある部分集合 $\hat{C}(N_\infty)$ に収束する。f_i は一様な Lipshitz 写像なのでさらに部分列をとれば f_∞ に収束するとしてよい。以下部分列をとって全体列とみなすことをしばしばする。

考えている多様体は $K(\pi,1)$ 空間なので、f_∞ がホモトピー同値をいうには誘導する基本群の間の写像 $(f_\infty)_*:\pi_1(M_\infty)\to\pi_1(N_\infty)$ が同型をいえばよい。以下の証明の流れは Thurston[85,84] による。

有限なブロック上で k_i は次の意味でいずれ k_∞ を経由する：$q>0$ を固定し $I>0$ を十分大きくとって、$i>I$ と $n\in J_\infty\cap[-q,q]$ に対し $w_\infty(n)\neq\infty$ ならば $w_i(n)=w_\infty(n)$ となる。$w_\infty(n)=\infty$ ならば U_n は芯がなくなり、その境界にレトラクトする。よって $i>I$ に対し、$k_i|_{M^0_\infty[q]}$ を $k_i=k_i^q\circ k_\infty$ を満たすように埋め込み $k_i^q:M_\infty[q]\to M_i[q]$ に拡張できる。多様体 $M_\infty[q]$ は $S\times[0,1]$ から $w_\infty(n)=\infty$ に対応するレベル曲線を取り除いたものになっている。k_i^q は取り除いたレベル曲線にそのメリディアン曲線が $w_i(n)$ で決まるような Dehn 手術に対応している。$i\to\infty$ で $w_i(n)\to\infty$ なので、k_i^q は π_1 上いずれ単射になるということに正確な意味が次のように与えられる：

補題 11.2. S を有限型の曲面で *Euler* 標数は負とする。M を $S\times[s,t]$ からレベル単純閉曲線 $\gamma_i\times\{n_i\}$ の正則近傍を取り除いたものとする。ここで各 γ_i は *non-peripheral* で S 上 γ_i と γ_{i+1} は真に交わるとする。M_i を M の *Dehn-filling* で得られる多様体の例で各トーラス境界上でのメリディアン曲線の長さが無限大に発散するとする。このとき

1. α の $\pi_1(M_i)$ での像がすべて自明ならば、α は $\pi_1(M)$ で自明。
2. $\alpha\in\pi_1(M)$ が境界トーラス群のどれとも共役でなくその $\pi_1(M_i)$ での像がすべて m-乗ならば、α 自身が m-乗である。

証明は 11.4 節までとっておく。

この補題を適用するために、ブロックのつなぎ方からレベル曲線の列についての条件は自動的に満たされており、またメリディアンの長さの条件も幅が無限大に発散することから満たされていることに注意する。

$(f_\infty)_*$ の単射性を示す。α を M_∞ 内の非自明なループとする。ある $q>0$ があり $\alpha\subset M^0_\infty[q]$ としてよく、補題 11.3 の (1) より十分大きな i に対し、$k_i^q(\alpha)$ は $\pi_1(M_i[q])$ において非自明である。Seifert-van Kampen の定理から $\pi_1(M_i[q])$ は $\pi_1(M_i)$ に単射で入っているので実際は $k_i^q(\alpha)$ は $\pi_1(M_i)$ において非自明である。$f_\infty(\alpha)$ が自明ならば N_∞ 内で円板を張る。十分大きい i でこの円板は N_i に入り、$f_i(k_i^q(\alpha))$ もホモトピーの意味で自明。このことは、構成から f_i はすべて π_1-単射なことに矛盾。よって $(f_\infty)_*$ は単射である。

次に $(f_\infty)_*$ の全射性を示す。$PSL_2(\mathbf{C})$ の部分群として、$\Gamma=(f_\infty)_*(\pi_1(M_\infty))$, $\hat{\Gamma}=\pi_1(N_\infty)$ とおく。$PSL_2(\mathbf{C})$ の適当な共役により多様体の幾何収束と群の Gromov-Hausdorff 位相での幾何収束は同値である（[24] 参照)。つまり $\hat{\Gamma}$ は $(f_i)_*(\pi_1(M_i))$ の幾何極限である。以下 $\Gamma=\hat{\Gamma}$ を示す。

$\pi_1(M^0_\infty)$ から $PSL_2(\mathbf{C})$ への（全射だが単射でない）表現の列 $\varphi_i=(f_i\circ k_i)_*$ と $\varphi_i\to\varphi_\infty$ かつ $\varphi_\infty(\pi_1(M^0{}_{infty}))=\Gamma$ を満たす表現 φ_∞ がある。まず Γ が $\hat{\Gamma}$ の指数有限な部分群のとき $\Gamma=\hat{\Gamma}$ を示す。指数有限ということから任意の $g\in\hat{\Gamma}$ に対し、

ある g^m は Γ に含まれる。つまりある元 $h \in \pi_1(M^0_\infty)$ が存在して $g^m = \varphi_\infty(h)$ を満たす。q を十分大きくとって h の代表元として $M^0_\infty[q]$ のループがとれるようにして $h' = (k_\infty)_*(h)$ が $\pi_1(M_\infty[q])$ に含まれるとしてよい。h' が M_∞ の階数 2 のカスプ群（の共役）に含まれるとすると、f_∞ は階数 2 のカスプを階数 2 のカスプに degree 1 で移すので対応する $\hat{\Gamma}$ の階数 2 のカスプ群は φ_∞ の像に入る。g は $\varphi_\infty(h)$ と可換なので g はこのカスプ群の入り、よってすでに Γ の元である。

次に h' がカスプ群に入らないとする。群の幾何極限の定義からある元の列 $g_i \in \pi_1(M^0_\infty)$ が存在して $g = \lim \varphi_i(g_i)$. つまり $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(g_i^m) = \varphi_\infty(h)$. $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(h) = \varphi_\infty(h)$ でもあり、極限の群は離散群なので（Jørgensen-Marden の議論 [51] を要約して）十分大きい i で $\varphi_i(g_i)^m = \varphi_i(h)$ が成り立つ。φ_i は単射とは限らないので $g_i^m = h$ とはすぐには結論できない。しかし $(f_i)_*$ は単射なので $(k_i)_*(g_i)^m = (k_i)_*(h)$ は成立する。よって $(k_i^q)_*(h') = (k_i)_*(h)$ はいずれ m 乗となる。また h' がカスプ群に入らないことから補題 11.3 の (2) より h' 自身が m 乗、つまりある元 $g' \in \pi_1(M_\infty)$ が存在して $h' = (g')^m$ とかける。位数有限の元を含まないクライン群では m 乗根は一意的にとれるので（[45] の 6 章参照）、$(f_\infty)_*(g') = g$ が成り立ち $g \in \Gamma$ がわかる。以上から Γ が $\hat{\Gamma}$ の指数有限な部分群のとき $\Gamma = \hat{\Gamma}$ がわかった。

次に Γ が $\hat{\Gamma}$ の指数無限な部分群のときを考える。この場合は Thurston の被覆定理の類似の議論を用いる（[84] での議論の類似である)。

$N_a = \mathbf{H}^3/\Gamma$ とすると被覆写像 $\pi : N_a \to N_\infty$ と $\pi \circ f_a$ をみたす f_∞ の持ち上げ $f_a : M_\infty \to N_a$ がある。$f_\infty(M_\infty) = \hat{C}_\infty$ でこれは $C(N_i)$ の凸核を含む集合の幾何極限なので N_∞ の凸核を含む（Kerckhoff-Thurston[54] 参照)。

$C(N_\infty)$ は N_∞ の変形レトラクトなので N_∞ の全てのループは $f_\infty(M_\infty)$ 内に変形できる。よって逆像 $\pi^{-1}(f_\infty(M_\infty))$ は $f_a(M_\infty)$ に等しく、π が N_a 上で無限対 1 ならばすでに $f_a(M_\infty)$ 上で無限対 1 である。

しかし M_∞ の各階数 2 のカスプに制限するとこの写像は有限対 1 である。よって $|n_j| \to \infty$ なるブロックの列 B_{n_j} が存在して N_∞ での像はコンパクト集合と交わる。f_∞ を $\partial_0 B_{n_j}$ に制限したものは中間面 (halfway surfaces) の列の極限であり、特にブロックの境界から距離をいれた S についての一様 Lipshitz 写像 $h_{n_j} : S \to N_\infty$ になる。これらの曲面は N から主カスプを除いたところのコンパクト集合と交わるのでそのうちの 2 つ h_1 と h_2 はこのコンパクト集合での単射半径より短い軌跡のホモトピーにより N_∞ で結べる。このホモトピーを N_a に持ち上げることで、N_a の有限体積の 3-chain は N_{infty} の closed 3-chain（カスプに対して closed）に移ることがわかる。よって N_∞ は有限体積になるが、これは無限体積の多様体の幾何極限なので矛盾。（被覆定理の議論とその応用については Canary[23] を参照。）以上から Γ は $\hat{\Gamma}$ の指数無限な部分群にならないので f_∞ は全射である。

境界は境界に移り、ブロック B_n 達の像は N_∞ のコンパクト集合内で集積しないことを示したので、f_∞ が proper な写像であることも同様に示すことが出来る。

次に $\deg f = 1$ を示すがこれはもっと厄介である。3 節の向き付けと end の順

序付けから始める。$S_0 \times \mathbf{R}$ の ends (e_-, e_+) は S_0 の向きの選び方で決まった。$\psi : (S_0, \partial S_0) \to (S_0 \times \mathbf{R}, \partial S_0 \times \mathbf{R})$ を $\pi_1(S_0)$ 上恒等的な埋め込みとするとき、end の順序付けを次のように決めることが出来る：$S_0 \times \mathbf{R} \setminus \psi(S_0)$ の非有界成分（つまり閉包がコンパクトではない）はちょうど 2 つあり、それらの順序 (U_-, U_+) を、U_+ から U_- への向き付けられた道と $\psi(S_0)$ が交点数 +1 で交わることで決める。U_-, U_+ はそれぞれ e_-, e_+ の近傍になることがわかる。

いま $h : (S_0 \times \mathbf{R}, \partial S_0 \times \mathbf{R}) \to (S_0 \times \mathbf{R}, \partial S_0 \times \mathbf{R})$ が proper な写像で π_1 に恒等写像を誘導するとすると、もし end の順序を保つ全単射を誘導すれば degree +1、順序を入れ替える全単射を誘導すれば degree −1、そして両方の ends を 1 つの end に移すならば degree 0 となる。

任意のモデル写像 $f : M \to N$ の対し、M から主カスプ Q_M を除いたものを $\check{M}$、N から主カスプ Q_N を除いたものを $\check{N}$ とし、$\hat{C}(\check{N}) = \hat{C}(N) \cap \check{N}$ とする。Q_M の M 内での円柱形境界 (cylindorical frontier) を $\partial' \check{M}$ とし、$\hat{C}(N)$ での $Q_N \cap \hat{C}(N)$ の表面を $\partial' \hat{C}(N) \cap \check{N}$ とする。構成から f は写像対 $f : (\check{M}, \partial' \check{M}) \to (\hat{C}(N) \cap \check{N}, \partial' \hat{C}(N) \cap \check{N})$ を誘導し、幅列が両側無限で $w(n)$ がすべて有限のときそれぞれ $(S_0 \times \mathbf{R})$ と同一視できる。M での $\partial_0 \check{B}_n$ を $S_0(n)$ とする。

$f_i \to f_\infty$ にもどり、まず極限の幅列 w_∞ が両側無限で $w_\infty(n)$ がすべて有限とする。$\deg f_\infty$ が 1 でないならば $\check{M}_\infty$ の少なくとも一方の end は $\check{N}_\infty$ の逆側の end に移る。この状況は [85] の中で一般の種数の場合に Thurston により証明された結果で処理できる。[85] の中で Thurston は極限では end は反転できないことを示した。ここでは少し異なる議論で話をすすめるが、用いるアイデアは同じである。

$\check{N}_\infty \backslash f_\infty(S_0(0))$ の非有界成分に向きから順序付けたものを (U_-, U_+) とする。このとき順序が入れ替わるということは、$j \to +\infty$ で $f_\infty(S_0(j))$ がいずれ U_- にはいってくるということといっても一般性を失わない。そのような j を固定する。$\check{N}_\infty \backslash f_\infty(S_0(0))$ の有界成分の直径の最大を D とする。X_∞ を $f_\infty(S_0(0))$ の $\check{N}_\infty$ の近傍で直径が $D+1$ 以上あり $f_\infty(S_0(j))$ を含むとする。幾何収束の定義からいくらでも 1 に近い K に対し、十分に i を大きくとると $\check{N}i$ の領域 X_i と K-bi-Lipshitz 同相写像 $h_i : X_\infty \to X_i$ が存在する。十分大きな i に対し $|n| \le j$ ならば $w_i(n) = w_\infty(n)$ より、上の議論から埋め込み $k_i : M^0_\infty[j] \to M^0_i[j]$ は等長写像 $k^j_i : M_\infty[j] \to M_i[j]$ に拡張される。さらに十分小さい ϵ に対し、$h_i \circ f_i \circ k^j_i$ は f_∞ と C^∞ 位相で距離が ϵ 以下である。つまり X_i は $f_i(S_0(0))$ の $(D+1-\epsilon)/K$-近傍に含まれることになり（[21] を参照)、よって（1 に十分近い K と 0 に十分近い ϵ で）$\check{N}_i \setminus f_i(S_0(0))$ の非有界成分 $U^i_\pm$ はそれぞれ直径 D 以上の集合内で X_i と交わらなければならない。h_i は向きを保つので、交点数から定まる順序 $+, -$ を保つ。

よって $f_i(S_0(j))$ は U^i_- に含まれる。一方 f_i 自身は end の順序を入れ替えないので、ある $k > j$ で $f_i(S_0(k)) \subset U^i_k$. つまりある $j < m_j < k$ で $f_i(B_{i,m_j})$ は $f_i(S_0(0))$ と交わる。十分大きな j でこのことを繰り返すと $m_j > j$ で N_{i_j} の pivot 列 $\alpha^{i_j}_{mj}$ が存在して、測地線 $(\alpha^{i_j}_{mj})^*$ かその ϵ_0 Margulis tubes は $f_i(S_0(0))$ から一定の距離だけ離れて

いる。各 $(\alpha_{mj}^{i_j})^*$ は要定理から一様に有界な長さを持っているので部分列をとると、h_i^{-1} での像は N_∞ 内の測地線 β に収束しそれらはいずれホモトピックになる。f_∞ はホモトピー同値なので $\pi_1(M_\infty)=\pi_1(S)$ での β の定める共役類はいずれ $(\alpha_{mj}^{i_j})^*$ の定める共役類と一致する。一方 $(\alpha_{mj}^{i_j})^*$ は無理数の ν_+^∞ に収束する（補題 12.1 と比較せよ）ので矛盾。つまり f_∞ は end の順序を入れ替えることはない。（Thurston の議論ではこの最後の矛盾は ending lamination の実現可能性の議論からでる。）

残りの場合に $\deg f=1$ を示すのはやさしい。まず初めに極限の幅列は両側無限列でないとする。このとき十分大きい i で $\hat{C}(N_\infty)$ と $\hat{C}(N_i)$ は空でない境界を持ち、$f_i:\partial M_i\to\partial\hat{C}(N_i)$ は構成から向きを保つ一様 bi-Lipshitz 同相写像であり $f_\infty:\partial M_\infty\to\partial\hat{C}(N_\infty)$ に収束する。よって degree は 1 になる。最後にある n で $w(n)=\infty$ ならば N_∞ は階数 2 の放物的カスプを持ち、それは対応する M_∞ のカスプ U_∞ の像である。構成から f_∞（そして任意の f_i において）はこのカスプ上 degree 1 であり、proper な写像なので全体で degree 1 となる。 ■

11.3 擬等長写像への持ち上げ

この補題 11.2 から、次の結果が系として得られる。この結果は、ホモトピーの意味で写像 f は縮みすぎないことを本質的にいっている。

補題 11.3. 穴あきトーラス群のモデル写像を $f:M\to N$ とする。このとき、任意の $B>0$ に対し $A>0$ が存在して次を満たす；β を長さが B 以下の N 内の $f(x)$ を通るループとすると、M 内に x を通る長さが A 以下のループ α で、$f(\alpha)$ が β と基点 $f(x)$ を止めたままホモトピックなものが存在する。

証明：　各点 $x\in M$ をとめるごとには条件を満たす $A(x,B)$ が存在する。なぜならば f はホモトピー同値であり、また双曲多様体内の与えられた点を通り、与えられた定数以下の長さのループを代表元にもつホモトピー類は有限個しかないからである。もし普遍定数 $A(B)$ がないとすると、M 内の点列 x_i で最良の $A(x_i,B)$ が無限に発散するものが存在する。明らかに x_i はカスプに向かっていかない。なぜならば、カスプ領域では f は一様に bi-Lipshitz だからである。よって $n_i\to\infty$ で $x_i\in\check{B}_{n_i}^0$ としてよい。つまり、基点をずらした多様体の列 (M,x_i) を考えると、補題 11.2 より幾何極限 $f_\infty:(M_\infty,x_\infty)\to(N_\infty,y_\infty)$ が存在し、ホモトピー同値である。よってこの極限で条件をみたす定数 $A=A(x_\infty,B)$ がある。いま x_∞,y_∞ の十分大きな近傍を近似 M,N に引き戻すと、ある $\delta>0$ が存在して $A+\delta$ がその近似でも使えることがわかり、最良の $A(x,B)$ が無限に発散することに矛盾する（[68] の補題 4.5 の同様における議論と比較せよ）。 ■

最後にモデル写像 $f:M\to N$ が擬等長的であることを示す。f を各 Margulis tube に制限すると構成からその像と bi-Lipshitz 同相。各 $\check{B}_n^0$ の直径は有界なので、$\check{N}$ に

おいて２つのブロックの像 $f(\check{B}_n)$ と $f(\check{B}_{n'})$ の離れ具合が、$|n-n'|$ に比例していることを示せばよい。これを示せば、f の制限 $\check{M}\to\check{N}$ が擬等長写像になり、構成から主カスプ近傍への拡張も擬等長写像になる。

再び $\partial_0\check{B}_n$ を $S_0(n)$ とかく。以下次の主張を示す：ある定数 $m_0>0$ が存在して、$n\in J$ かつ $n+m_0\in J$ を満たすならば、ある定数 $0<m\le m_0$ が存在して $\check{N}$ 内で $f(S_0(n+m))$ は $f(S_0(n))$ と e_+ を分離する（m_0 と e_- についても同様の主張が成立する）。背理法で示す。つまり $m_i\to+\infty$ と $n_i\to\pm\infty$ が存在して、任意の $0<m\le m_i$ に対し $\check{N}$ 内で $f(S_0(n_i+m))$ は $f(S_0(n_i))$ と e_+ を分離しないとする。別の言い方をすれば、$\check{N}\setminus f(S_0(n_i))$ の非有界成分を (U^i_-,U^I_+) とすると、任意の $0<m\le m_i$ に対し $f(S_0(n_i+m))$ は U^i_+ に含まれないとする。

B_{n_i} に基点 x_i をとり部分列をとることにより、補題11.2より幾何極限 $f_\infty:M_\infty\to N_\infty$ が存在し、proper な写像で degree 1 でホモトピー同値である。さらに $n_i\to\pm\infty$ より、極限では組み合わせ的データは両側無限、つまり境界ブロックのことを考慮する必要がないことに注意する。

$\check{N}^0_\infty\setminus f_\infty(S_0(0))$ が２つの非有界成分 $U^{\inf ty}_\pm$ を持つことを示す。（$\check{N}_\infty$ は階数２のカスプに対応する end が無限個あるかもしれないことと対照的である。）f_∞ を制限することにより、次の写像の対 $f_\infty:(\check{M}^0_\infty,\partial\check{M}^0_\infty)\to(\check{M}^0_\infty,\partial\check{M}^0_\infty)$ が得られる。$\check{M}^0_\infty$ のトーラス境界に integral Dehn filling をすると、$S_0\times\mathbf{R}$ と同相な多様体が得られる。同じ integral Dehn filling を $\check{N}^0_\infty$ のトーラス境界にすることにより、f_∞ はそれら２つの新たな多様体の間の固有写像で degree 1 でホモトピー同値に拡張される。よって integral Dehn filling された $\check{N}^0_\infty$ も $S_0\times\mathbf{R}$ と同相になり２つの end をもち、拡張された f_∞ はそれら end の順序を保つ。よって $\check{N}^0_\infty$ も２つの end をもち、$\check{N}^0_\infty\setminus f_\infty(S_0(0))$ の成分でこれら end の近傍を $U^\infty_\pm$ とする。

このとき、$m_\infty>0$ が存在して $f_\infty(S_0(m_\infty))\subset U^{\in fty}_+$. $\check{N}^0_\infty$ に補題11.2の証明の議論を適用すると、$\check{N}^0_\infty$ 内に $f_\infty(S_0(0))$ の十分大きな近傍 X_∞ と、等長写像に近い写像の列 $h_i:X_\infty\to X_i$ が存在して（ここで X_i は N における $f(S_0(n_i))$ の近傍）、$h_i(U^\infty_i\cap X_\infty)\subset U^i_+$ を満たす（ここで以前と同様 $\check{N}^0_\infty\setminus f_\infty(S_0(0))$ の有界成分をすべて含むように十分大きな近傍 X_∞ をとっておく）。さらに X_∞ を十分大きくとっておくと、$h_i(f_\infty(S_0(m_\infty)))\subset X_i$ とできて、$f(S_0(n_i+m_\infty))\subset U^i_+$. しかし十分大きな i に対し、$m_\infty<m_i$ となり矛盾。

以上より m_0 の存在がわかった。よってモデル写像 $f:M\to N$ に対し、数列 $s=(\cdots<n_1<n_2<\cdots)$ で $n_{i+1}-n_i\le m_0$ かつ $\inf s=\inf J,\sup s=\sup J$ を満たし、任意の $i<j<k$ に対して $f(S_0(n_j))$ が $\check{N}_\infty$ 内で $f(S_0(n_i))$ と $f(S_0(n_k))$ を分離するものがとれる。これらの埋め込まれた曲面は互いに交わらなく、隣接するもの同士は一定距離離れている（これも幾何極限の議論からわかる）。このことからある定数 $a_1>0,a_2>0$ が存在して、$f(S_0(n))$ と $f(S_0(n'))$ の離れ具合は少なくとも $a_1|n-n'|-a_2$ となる。一方 f は Lipshitz より、$f(S_0(n))$ と $f(S_0(n'))$ の離れ具合は $|n-n'|$ の別の線形写像で上から押さえられるのでモデル写像 $f:M\to N$ は擬等長

的である。

以上から f は全射、ホモトピー同値、持ち上げ可能な Lipshitz、擬等長的かつ補題 11.4 をみたすので、[69] の補題 3.1 から f の普遍被覆への持ち上げは擬等長的であり、定理 11.1 の証明が（補題 11.3 の証明を除いて）終わる。

11.4 補題 11.3 の証明

この補題に類することは Thurston により [84] で証明なしで主張されている。補題の主張は純位相幾何的な内容であるが、ここで与える証明では双曲幾何を本質的に使う。（Gordon-Litherland や Gordon-Luecke 等 [35,36,28] の boundary-slope のテクニックを用いて示そうとしたがうまくいかなかった。）

次のようなもう少し一般的な状況を考える。M をコンパクト 3 次元多様体 $\bar{M}$ の内部とし、M が完備な双曲距離 σ を持つとする。$\partial\bar{M}$ のトーラス成分の集まりを F とし、F の各成分にソリッドトーラスをはめ込んで F の各成分のメリディアン曲線の長さが $i \to \infty$ で無限大になるような $\bar{M}$ の Dehn filling の列を M_i とする。

完備で曲率が正でない多様体では長さが K の 0-ホモトピックな曲線は直径が $K/2$ 以下の円板を囲む（例えば ruled disk を用いる）。α を M 内の曲線で無限個の M_i で 0 ホモトピックとする。K を α の長さとし、α の $K/2$-近傍を除外する F の各成分のカスプの horoball 近傍の和集合を H とする。このとき M_i は $M \setminus H$ に H のトーラス境界にソリッドトーラス H_i の和集合をはり合わせて得られる。H_i のメリディアン曲線の長さが $i \to \infty$ で無限大になるので、Gromov-Thurston の "2π 定理"（[37] 参照。詳しい証明は Bleiler-Hodgson[13] か Moriah-Rubinstein[71] を参照のこと）より十分大きな i で $M \setminus H$ 上最初の双曲距離 σ に等しく、断面曲率が上下から負の定数で押さえられるような距離 σ_i を M_i 上に定義することができる。α が M_i で 0-ホモトピックならば距離 σ_i で直径 $K/2$ の円板を囲むがそれは $M \setminus H$ に含まれるので、α はすでに M で 0-ホモトピックである。以上で 補題 11.3 の (1) が示せた。

次に (2) を示す。断面曲率が上から $-\kappa < 0$ で押さえられている多様体を考える。$A : S^1 \times [0,1] \to N$ を ruled annulus とする。つまり各 $\theta \in S^1$ に対して、$A|_{\{\theta\}\times[0,1]}$ が測地線になるとする。このときアニュラス上に誘導される距離も断面曲率が上から $-\kappa < 0$ で押さえられている。標準的な比較定理より $Area(A) \leq C(\kappa)l(\partial A)$. さらに与えられた $K, \epsilon > 0$ に対し $D(\kappa, \epsilon, K)$ が存在し、∂A の長さが K 以下で A の直径が D 以上ならば境界成分とホモトープな A の最短曲線の長さは ϵ 以下である。

$-\kappa$ を距離 σ_i の断面曲率の上界とする（実際 $i \to \infty$ で K はいくらでも 1 に近くとれる）。ϵ を M の noncuspidal 曲線の σ 距離に関する最短の長さ以下とする。α をカスプとホモトピックでなく、$\pi_1(M_i)$ への像が無限個の i で m-乗である曲線とする。α の σ での長さを K とし、horoball 近傍 H を α の $D(\kappa, \epsilon, 2K)$-近傍にさわらないようにとる。

α_i^* を M_i での α の σ_i での測地線とし、A を境界の一方が α に、もう一方が α_i^* に移る ruled annulus とする。少し変形して A は ∂H と横断的に交わるとしてよく、$A^{-1}(\partial H)$ をアニュラス内で考える。ある成分がアニュラス内で 0-ホモトープで像が H_i のメリディアン曲線のベキならばこの曲線で囲まれる面積は H_i のメリディアン円板の面積以上かつ $i \to \infty$ で無限大にいく（Moriah-Rubinstein[71] 参照)。$Area(A)$ の上界からいずれ H_i から押し出すことができる円板はすべてのそのような成分に囲まれる。

さらに A と H が交わればその直径は D 以上であり長さが ϵ 以下の非自明な曲線を含む。この曲線は cuspidal になり、よって A と ∂H は非自明な曲線で交わる。よって前の議論と組み合わせて α は $M \setminus H$ 内で ∂H に変形でき、α のとり方に矛盾する。

よって A と H は交わらないので α は α_i^* に $M \setminus H$ 内でホモトピックである。つまり α_i^* はすでに距離 σ について M での α の測地線になっている。α は M_i で m 重より、α_i^* は M で m 重である。以上で 補題 11.3 の (2) が示せた。

この結果を我々のケースに適用する。γ_i と γ_{i+1} が交わるという条件から $S \times [s,t]$ から $\gamma_i \times \{n_i\}$ を引いたものは acylindrical、よって Thurston の幾何学化定理より双曲的である（実際穴あきトーラスの場合は Klein-Maskit の組み合わせ定理を用いて、全測地的 3 つ穴あき曲面の境界で潜伏的放物型元を持つ穴あきトーラス群を張合せることで実現できる)。

11.5　凸核の外部

最後にもう１つ片付けることがある：degree 1 の proper な写像 $f : M \to \hat{C}(N)$ は 2 つの退化した end を持つときは $f : M \to N$ とかくことができ、その持ち上げは $\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbf{H}^3$ とかける。しかし幾何学的有限な end がある場合は $\hat{C}(N) \neq N$ なので、この場合は N への全射な写像を以下のように構成する。

$\hat{C}(N)$ は凸核 $C(N)$ の r-近傍と $C(N)$ の内部にない短い曲線の Margulis tubes の和集合である。M にも $C(N)$ に対応する部分多様体 $C(M)$ を以下のように構成できる。B をソリッドトーラスの入った境界ブロックとする。このとき１０節でみたように ∂U は 4 つのアニュラス A_0, A_1, A_L, A_R からなり、A_1 か A_0（または両方）は ∂M にある（放物的なブロックの場合 A_1 か A_0 の一方は実際は 2 つのアニュラスからなる)。よって $Y = \partial U \setminus \partial M$ は 1 つか 2 つのアニュラスからなる。U は Margulis tube の距離が入っているので、$C(Y)$ をこの距離に関する Y の U での凸包とする。M の境界ブロックの U を $C(Y)$ で置き換えて出来る部分多様体を $C(M)$ とする。

$\partial C(M)$ の距離を ds^2 とし、$t \in [0,\infty)$ とするとき、$\partial C(M) \times [0,\infty)$ 上の距離を $ds^2 \cosh^2 t + dt^2$ で与える。$C(M)$ にこの距離を持ったカラー $\partial C(M) \times [0,\infty)$ を付け加えたものを $\bar{M}$ とする。

以下 f をこのカラーに拡張して写像 $\bar{f} : \bar{M} \to N$ を作る：N では U に対応する

Margulis tube $\mathbf{T}$ の境界は $C(N)$ と 1 つか 2 つのアニュラスで交わっていて、それの r-近傍は $f(Y)$ の像である。普遍被覆空間では $\mathbf{T}$ と $C(N)$ の持ち上げはともに凸なので、$C(N) \cap \mathbf{T}$ は $\mathbf{T}$ での $C(N) \cap \partial\mathbf{T}$ の凸包である。

Epstein-Marden の方法 [30] を適用することにより f の $\partial C(Y)$ への制限は $\partial C(Y)$ から $C(N) \cap \mathbf{T}$ への bi-Lipshitz 写像に境界を止めてホモトピックである。(Lipshitz 定数は群によらないこともわかる。)

[30] において Epstein-Marden は $N \setminus C(N)$ は距離 $ds^2 \cosh^2 t + dt^2$ (ここで ds^2 は $\partial C(N)$ 上の距離) に bi-Lipshitz 同値であることも示している。よってカラー $\partial C(M) \times [0,1]$ を適当に調節して、$\bar{f}$ は $\bar{M}$ から N への degree 1 の proper な写像にでき、$\partial C(M) \times [1,\infty)$ で bi-Lipshitz であり、擬等長写像 $\tilde{\bar{f}} : \tilde{\bar{M}} \to \mathbf{H}^3$ に持ち上がる。

第12章　主定理の証明（小森洋平）

以上の準備の下で主結果の３つの定理を示す。

12.1　ending lamination 定理

定理 A　(ending lamination 定理)
標識付き穴あきトーラス群 $\rho : \pi_1(S) \to PSL_2(\mathbf{C})$ は $PSL_2(\mathbf{C})$ での共役を除いて end invariants (ν_-, ν_+) で決まる。

証明：　[69] と同じ議論で証明する。N_1 と N_2 が同じ end invariants を持てば、N_1 と N_2 から同じモデル多様体 $\tilde{M}$ への持ち上げ可能な擬等長写像 f_1 と f_2 が構成できる。つまり $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2^{-1}$（ここで $\tilde{f}_2^{-1}$ は $\tilde{f}_2$ の擬逆写像 (quasi-inverse)）は N_1 と N_2 の被覆変換群の $\mathbf{H}^3$ への作用の擬等長的共役を与える。これは $\mathbf{H}^3$ の境界である $\hat{\mathbf{C}}$ の擬等角写像に拡張され、$\hat{\mathbf{C}}$ 上の２つの群の作用の擬等角共役を与える（Mostow[72]、より一般的な枠組みでは [34,27] 参照）。さらに不連続領域が空でないときは、end invariants が同じことよりこの擬等長写像は Ω_1 から Ω_2 への等角写像になっていると仮定してよい（商曲面上で等角写像に有界なホモトピーが存在し、これが極限集合を固定するホモトピーに持ち上がる）。よって Sullivan の定理 [82] により、不連続領域で等角な擬等角写像が２つの有限生成クライン群の共役を与えているならば実は $PSL_2(\mathbf{C})$ の元なので定理 A が証明された。■

12.2　剛性定理

定理 C（擬等角剛性）
球面への２つの穴あきトーラス群の作用が位相共役ならば、その位相写像が向きを保つか逆にするかによって擬等角共役か反擬等角共役になる。

証明：　球面への作用が位相共役な２つの穴あきトーラス群 Γ_1, Γ_2 を考える。つまり同相写像 $\psi : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ が存在して、$\Gamma_2 = \psi\Gamma_1\psi^{-1}$ が成り立つ。以下 ψ が擬等角写像または反擬等角写像で置き換えられることを示す。

まず向きを保つ ψ について考える。つまりある擬等角写像 Ψ が存在して $\Gamma_2 = \Psi \circ \Gamma_1 \circ \Psi^{-1}$ を示す。位相共役により標識付き群として Γ_1 と Γ_2 を同一視できるので、この2つを $\pi_1(S)$ の表現 ρ_1, ρ_2 とみなすことができる。$i = 1, 2$ に対し、ρ_i の end invariants の順序対を (ν_-^i, ν_+^i) とする。

α_j を C の元の列とし、$N_i = \mathbf{H}^3/\Gamma_i$ での対応する測地線を α_j^i とする。このとき α_j^i が N_i の任意のコンパクト集合をでていくための特徴付けが次のように得られる：

補題 α_j が定める Γ_i の共役類の元の $\hat{\mathbf{C}}$ での固定点の対全体を $F_i(\alpha_j)$ とする。このとき N_i の任意のコンパクト集合 K に対し、ある自然数 j_K が存在して、任意の $j > j_K$ に対して $\alpha_j^i \cap K = \emptyset$ となる必要十分条件は $d_j^i := \sup\{d(x, y) : (x, y) \in F_i(\alpha_j)\}$ が $j \to \infty$ で0に向かうことである（ここで $d(\cdot, \cdot)$ は球面距離をあらわす）。

証明： 対偶を示す。すなわち N_i のあるコンパクト集合 K が存在して、任意の自然数 l に対し、ある $j > l$ が存在して $\alpha_j^i \cap K \neq \emptyset$ とする。このとき、$\mathbf{H}^3$ を球モデルで考えて半径が1に近づいていく球モデル内のコンパクト球の列を考えるとその N_i への像はいずれ K を覆う。よってある $\epsilon > 0$ が存在して任意の l に対し、$j > l$ が存在して $d_j^i > \epsilon$ がわかる。逆にある $\epsilon > 0$ が存在して任意の l に対し、$j > l$ が存在して $d_j^i > \epsilon$ とすると、半径が1に近づいていく球モデル内のコンパクト球の列を考えると α_j^i の $\mathbf{H}^3$ への任意の持ち上げと交わるコンパクト球が存在するので、その N_i への像を K とすると、任意の自然数 l に対し、ある $j > l$ が存在して $\alpha_j^i \cap K \neq \emptyset$ となる。 ■

定理Cの証明に戻る。この性質は同相写像で保たれる（大鹿 [74] と比較せよ）ので、ある列が Γ_1 の ending lamination に収束することと Γ_2 の ending lamination に収束することは同値である。よって Γ_1 の irrational end invariant は Γ_2 にも現われる。また ψ は放物的元を放物的元に移すことから、Γ_1 の rational end invariant は Γ_2 にも現われる。

まず $\nu_+^1 \in \hat{\mathbf{R}}$ の場合を考える。$\nu_+^1 = \nu_+^2$ ならば、$\nu_-^1 \in \hat{\mathbf{R}}$ とすると $\nu_-^1 = \nu_-^2$ となり ending lamination 定理より Γ_1 と Γ_2 は $PSL_2(\mathbf{C})$ で共役になる。$\nu_-^1 \in \mathbf{D}$ とすると $\nu_-^2 \in \mathbf{D}$ となり、擬等角写像で共役をとって $\nu_-^1 = \nu_-^2$ にできるので ending laminaiton 定理より Γ_1 と Γ_2 は $PSL_2(\mathbf{C})$ で共役になる。

次に $\nu_+^1 = \nu_-^2$（このとき $\nu_-^1 \in \hat{\mathbf{R}}$ ならば $\nu_-^1 = \nu_+^2$）とし矛盾を導く。R をメビウス反転とすると表現 $\rho_2'(g) = R\rho_2(g)R^{-1}$ は end invariants の順序対 (ν_+^2, ν_-^2) を持つ（3節で向き付けが end invariants の順序を決めたことに注意する）。ending laminaiton 定理を ρ_1 と ρ_2' に適用すると擬等角写像 F が存在して、Γ_1 と $\Gamma_2' := \rho_2'(\pi_1(S))$ の間に $R \circ \psi$ と同じ共役を誘導する。つまり $\Phi := F^{-1} \circ R \circ \psi$ は向きを逆にする同相写像であり共役で Γ_1 自身に恒等的に作用する：実際 Γ_1 が擬フックス群で Φ が Ω_{Γ_1} の2つの成分を入れ替える写像ならば、このようなことが起こる。実はこの場合に限ることを以下に示す。共役で群に恒等的に作用するので、固定点全体の閉包である極限集合 Λ_{Γ_1} 上 Φ は恒等写像になる。よって $\Lambda_{\Gamma_1} = \hat{\mathbf{C}}$ ならば Φ は向きを逆にする

ことに矛盾する。

Ω_{Γ_1} が空でないとする。Ω_{Γ_1} の任意の成分 O に対し、∂O 上 Φ は恒等的より $\Phi(O) = O$ または $\Phi(O) = \hat{\mathbf{C}} - \bar{O}$. 仮定 $\nu_+^1 \in \hat{\mathbf{R}}$ より Γ_1 が擬フックス群でないので $\hat{\mathbf{C}} - \bar{O}$ は空か極限集合の一部を含み $\Phi(O) = \hat{\mathbf{C}} - \bar{O}$ ではない。一方 $\Phi(O) = O$ ならば商曲面 Φ は O/Γ_1 上の向きを逆にする同相写像を誘導し、かつその基本群には自明に作用するので矛盾。以上から $\nu_+^1 = \nu_-^2$ は起こらないことがわかった。

$\nu_+^1 \in \hat{\mathbf{R}}$ の場合も同様である。

$\nu_\pm^1$ が両方とも $\mathbf{D}$ か $\hat{\mathbf{Q}}$ の場合、$\nu_\pm^2$ も同様になりこの場合は（幾何学的有限になり）Marden の同型定理 [57] から定理が導かれる。

最後に向きを逆にする ψ について考える。R をメビウス反転として $\psi' = R \circ \psi$ とおくと、Γ_1 と $\Gamma_2' = R\Gamma_2R^{-1}$ は向きを保つ ψ' で位相共役なので上の議論より、ある擬等角写像 Ψ が存在して $\Gamma_2' = \Psi \circ \Gamma_1 \circ \Psi^{-1}$ となる。よって Γ_1 と Γ_2 は反擬等角写像 $R \circ \Psi$ で共役になる。 ■

12.3 変形空間の位相

定理 B（変形空間の位相）
写像

$$\nu^{-1} : \bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}} \setminus \Delta \to \mathcal{D}(\pi_1(S))$$

は連続かつ全単射。さらに Bers スライスは閉円板と同相で Maskit スライスは閉円板から境界の 1 点を除いた空間と同相である。

証明：　$\pi_1(S)$ から $PSL_2(\mathbf{C})$ への生成系の交換子が放物的元に移るような表現全体を $PSL_2(\mathbf{C})$ の共役な作用で割った空間を $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\pi_1(S))$ とする。忠実な離散表現全体 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{R}$ の自然な位相（いわゆる代数的位相）で閉集合になり（Chuckrow の定理による。[49] 参照）、空でない内部を持つ（Marden[57] と Sullivan[83] の定理により、内部は丁度擬フックス表現全体になる）。$S^1 \times S^1$ の対角線集合を Δ とする。表現 $\rho \in \mathcal{D}$ に対しその end invariants の順序対を対応させることにより、次の写像が定まる。

$$\nu : \mathcal{D} \to (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}}) \setminus \Delta$$

Δ の点は写像 ν の像にはならない：多様体の両方の ends で、同じ元は同時に放物的になれない。より一般に 2 つの ending laminaitons は必ず相異なる（Thurston[85], Bonahon[14] 参照）。ν は連続でない。ある表現 ρ に収束するが、その end invariants の順序対は Δ に向かうような表現の列 ρ_i が構成できる（例えばある $\alpha \in C$ をとって、Dehn ツイストしていく列 $(D_\alpha^i \nu_0, D_\alpha^{2i} \nu_0)$ を考えればよい）。その構成は [54] にある Kerckhoff-Thurston の例と関係があり Anderson-Canary[6] にでている。この現象のさらなる研究については McMullen[65] を参照。

以上の結果にもかかわらず、次が成り立つ。

補題 12.1. $\{\rho_i\}$ を標識付き穴あきトーラス群の列とし、その *end invariants* $\nu(\rho_i) = (\nu_-^i, \nu_+^i)$ は $(\nu_-^\infty, \nu_+^\infty) \in (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{D}}) \setminus \Delta$ に収束するとする。このとき $\mathcal{D}$ において ρ_i は $\nu(\rho) = (\nu_-^\infty, \nu_+^\infty)$ を *end invariants* にもつ表現 ρ に代数的収束する。

注意　この結果は我々の方法から示されることだが、($PSL_2(\mathbf{C})$ の共役を除いて) 収束部分列が存在する事実は Thurston の二重極限定理の特別な場合である (Thurston[84],Otal[76] を参照)。ここでの我々の真の関心は、極限表現の end invariants が期待する値になっているということにある。

まず $\nu_-^\infty, \nu_+^\infty \in \mathbf{D}$ の時を考える。このとき十分大きい i で $\nu_\pm^i \in \mathbf{D}$ より、擬フックス群の空間内での収束になる。この結果は Ahlfors-Bers 理論によりよくわかっている。

より一般に一方の不変量、例えば ν_+^∞ が $\mathbf{D}$ に含まれる場合を考える。これは本質的には Bers スライスでの収束である。ν_+^∞ が表す S 上の距離を σ とし、$f_i : (S, \sigma) \to \Omega_+(\rho_i)/\rho_i(\pi_1(S))$ を ρ_i が誘導する極値擬等角写像とする。$\nu_+^i \to \nu_+^\infty$ より、f_i の歪曲度 K_i は 1 に収束する。つまり擬等角写像のコンパクト性定理の一般論 (Lehto-Virtanen[56] 参照) により、適当な正規化の後、持ち上げ $\tilde{f}_i : \tilde{S} \to \Omega_+(\rho_i)$ は等角写像 $f_\infty : \tilde{S} \to \hat{\mathbf{C}}$ にコンパクト集合上一様収束する。そしてこの極限写像 f_∞ は極限の表現 ρ を誘導する。よって $f_\infty(\tilde{S}) = \Omega_+(\rho)$ となり、ρ の上側の end の不変量は ν_+^∞ となる。

次に内部から逃げていくような不変量の極限的振る舞いについて考える。4 節の議論により、各 $i = 1, 2, \cdots, \infty$ に対し、(ν_-^i, ν_+^i) から円周上の点の対 $\alpha_\pm^i \in \partial\mathbf{D}$、辺の集合 $E^i = E(\alpha_-^i, \alpha_+^i)$ と pivot 列 P^i 及び内部 pivot 部分列 P_0^i が定まる。以下当分の間、$\nu_\pm^\infty$ の一方が内部に入るならば $\alpha_\pm^{\in fty}$ が一意的に定まると仮定する (これを「一般的」とよぶことにする)。よって十分大きい i に対し、$\nu_\pm^i$ についても「一般的」である。

十分大きい i に対し、P^∞ に含まれる pivot は P^i に含まれることを示す。まず P^∞ に含まれる内部 pivot はいずれ P^i に含まれることを示す。辺 $e \in E^\infty$ を考えると、それは α_-^∞ と α_+^∞ を分離する。もし $\nu_+^\infty \in \partial\mathbf{D}$ ならば、$\nu_+^\infty = \alpha_+^\infty$ となり、$\nu_+^i \to \alpha_+^\infty$. よって $\alpha_+^i \to \alpha_+^\infty$ となる。もし $\nu_+^\infty \in \mathbf{D}$ ならば、(「一般的」という仮定をしたので) $\nu_+^i \to \nu_+^\infty$ より、いずれ $\alpha_+^i = \alpha_+^\infty$ になる。α_-^∞ にも同様の議論をすればよい。どちら場合にしろ、e はいずれ α_-^i と α_+^i を分離するので $e \in E^i$. よって P^∞ に含まれる内部 pivot はいずれ P^i に含まれることがわかった。

α_+^∞ が $\mathcal{C}$ に含まれる、つまり P^∞ の最後の内部でない pivot とする。もし $\nu_+^\infty \in \mathbf{D}$ ならば、上の議論と同様にいずれ $\alpha_+^i = \alpha_+^\infty$ となり、特に α_+^∞ は P^i の最後の pivot となる。もし $\nu_+^\infty = \alpha_+^\infty$ ならば以下のような興味深いことがおこる：$\alpha_+^\infty = \infty$ となるように $\mathbf{D}$ と $\mathbf{H}^2$ を同一視する。この同一視の下で、$|\nu_+^i| \to \infty$. もし $\mathrm{Im}\ \nu_+^i \to \infty$

ならば、いずれ $\alpha_+^i = \infty = \alpha_+^\infty$. そうでないならば $|Re\nu_+^i| \to \infty$ となり、また ν_-^i は $\nu_-^\infty \neq \infty$ に収束するのでいずれ任意個の垂直な Farey 辺たちが α_-^i と α_+^i を分離するので、α_+^∞ は P^i の内部 pivot となる。同様の議論を α_-^∞ に適用して主張が示される。

いま P^∞ が少なくとも 2 つの pivots を持つとする（別の言い方をすれば、$\alpha_-^\infty \neq \alpha_+^\infty$）。それらを α_0, α_1 として、上のことから十分大きい i に対し $\alpha_0, \alpha_1 \in P^i$. よってモデル M_i での対応するブロックを B_0^i, B_1^i とおく。曲面 $S^i(1) = \partial_0 B_1^i = \partial_1 B_0^i$ は α_0, α_1 を最短とする距離を持つので、すべての i でこれらの曲面を S と同一視してよい。写像 $f_i|_{S(1)}$ は表現 ρ_i を誘導する。つまり像の群の共役をとることにより、別の言い方をすれば固定した基点を原点に移すように $f_i|_{S(1)}$ の $\mathbf{H}^3$ への持ち上げをとることにより、α_0, α_1 に附随する群の生成系は有界な移動距離 (translation length) を持つので（Chuckrow の定理より）ある表現 ρ_∞ に収束する部分列がとれる。この部分列を全体列になるように取り直す。

さらに部分列をとることにより、定理 11.2 から幾何極限 $f_\infty : M_\infty \to N_\infty$ が存在して $S(1)$ は M_∞ の 2 つのブロックの間に埋め込まれていて $f_\infty|_{S(1)}$ は表現 ρ_∞ を誘導する。以下この表現 ρ_∞ の end invariants を調べる。

P^∞ の幅列は以上の議論から丁度 M_∞ の幅列の部分列として再現され、P^∞ の最後の pivot α_+^∞ は（もしあれば）M_∞ 内の $S(1)$ より上の最初のカスプになる。同様に P^∞ の最初の pivot α_-^∞ は（もしあれば）M_∞ 内の $S(1)$ より下の最後のカスプになる。

$S(1)$ に対応する M_∞ の被覆を $\tilde{M}_\infty$ とし N_∞ の対応する被覆を $\tilde{N}_\infty$ とする。f_∞ の持ち上げで $\tilde{M}_\infty$ から $\tilde{N}_\infty$ への写像を $\tilde{f}_\infty$ とする。この写像 $\tilde{f}_\infty$ が誘導する $\pi_1(S) = \pi_1(\tilde{M}_\infty)$ から $\pi_1(\tilde{N}_\infty)$ への表現は ρ_∞ になる。α_+ に対応する M_∞ 内の $S(1)$ より上の最初のカスプがあれば、それは $\tilde{M}_\infty$ の上半分内の階数 1 のカスプ $\tilde{T}$ になる。ここで向きの規約に従って $\tilde{M}_\infty \setminus S(1)$ の非有界成分に順序をつけていることに注意する。$\tilde{f}_\infty$ は $S \times \mathbf{R}$ と同相な 2 つの多様体の間の degree 1 の proper な写像なので、$\tilde{f}_\infty(\tilde{T})$ は $\tilde{N}_\infty \setminus \tilde{f}_\infty(S(1))$ の非有界成分に入り、この非有界成分は end e_+ の近傍である。よって end invariant e_+ はこの場合丁度 $\alpha_+^\infty = \nu_+^\infty$ となる。

もし ν_+^∞ が無理数ならば前方向に P^∞ は無限より、M_∞ もそうなる。よって M_∞ の pivot は（α_0, α_1 で決まる正規化の下で）ν_+^∞ に収束する。このとき M_∞ の $S(1)$ より上の部分は $\tilde{M}_\infty$ に同相で持ち上がるので、$\tilde{N}_\infty$ の end e_+ にいく。よってまたもや ρ_∞ の end invariant e_+ は ν_+^∞ となる。

ν_-^∞ が境界点のときも、e_- に同様の議論を当てはめればよい。

以上から最初の表現の列 ρ_i の適当な部分列はある表現に収束し、どの部分列の極限の end invariants も $\nu_\pm^\infty$ である。よって ending laminaiton 定理（定理 A）からすべての極限の表現は等しくなり、よって最初の表現の列 ρ_i がこの極限に収束する（しかし幾何極限は、いままで見てきたようにたくさんあり得ることに注意する）。

$\alpha_-^\infty = \alpha_+^\infty$ のとき、ν_+^∞ と ν_-^∞ は仮定より相異なるので、この場合がおこるのは、どちらか一方が少なくとも $\mathbf{D}$ 内の点である場合である。この場合は証明の最初の部分

で述べた Bers 型の議論により収束部分列がみつかり、後の議論はいままでと同じである。

最後に ν_+^∞ や ν_-^∞ が「一般的」という仮定をはずすことを考える。一般的でないとすると、2つまたは3つの選択があり、どれをとってもよい。ただ列 $\nu_+^i \to \nu_+$ で各 i において α_+^i が異なるかも知れないが、それでも有限個の部分列をとれば、いずれ $\alpha_\pm^i$ は一定になり、上の議論同様極限はみな一致する。

ν の全射性はすでに知られている：Bers の同時一意化定理により、$\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ の全ての元は写像 ν の像として現れ、実際 ν は擬フックス群全体と $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ の間の同相を与える。$(\bar{\mathbf{D}}\times\bar{\mathbf{D}})\setminus\Delta$ の境界の点については、有理点に関しては Maskit[60] の仕事から、無理点については Thurston[84,76] の仕事から全射性がわかる。一般の場合については大鹿 [73] を参照。Thurston の定理を我々の状況で再現したこの補題 12.1 からも ν の全射性はわかる。ending lamination 定理から ν は単射がわかるので、よって

$$\nu^{-1} : (\bar{\mathbf{D}}\times\bar{\mathbf{D}})\setminus\Delta \to \mathcal{D}(\pi_1(S))$$

が定義される。ν は同相ではないが（実際上でみたように不連続）、上の補題より ν^{-1} は連続である。

以上より、定理 B の前半と、$\mathcal{D}$ 内のすべての表現は擬フックス表現の極限になることがわかった。次に Bers スライスと Maskit スライスについて考える。

我々の記号では Bers スライスとは、スライス $\{x_0\}\times\bar{\mathbf{D}}$ $(x_0\in\mathbf{D})$ の ν^{-1} での像のことである。Bers は一般の曲面 S に対してもこれらのスライスを定義していて、それは不変成分 Ω の下側の標識付き商曲面が S の Teichmüller 空間内で固定されるような $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ の表現の集まりである（Gardiner[33] 参照）。Bers はこのようなスライスがコンパクトであることを示し、（S の Teichmüller 空間と同一視される）内部の閉包になっていると予想した。我々の場合、ν^{-1} は連続で、$\{x_0\}\times\bar{\mathbf{D}}$ はコンパクトなので、像もやはりコンパクトになり、ν^{-1} は同相写像を与える。よって Bers の予想は穴あきトーラスの場合に正しいことがわかる。

Maskit スライスも同様な状況で、この場合 x_0 は境界上の有理点である。点 (x_0,x_0) は除かれるので、スライスは $\nu^{-1}(\{x_0\}\times(\bar{\mathbf{D}}-\{x_0\}))$ とかける（この場合についても Maskit スライスは高次の種数の場合にも定義される）。Maskit スライスはコンパクトではないので、ν^{-1} が同相写像を与えることを示すには注意が必要である。そのためには ν^{-1} を $\{x_0\}\times(\bar{\mathbf{D}}-\{x_0\})$ に制限すると proper な写像であること、つまり end invariants の列 (x_0,y_i) が $y_i\to x_0$ を満たすならば対応する表現は発散することを示せば十分である。ふたたび end invariants(x_0,y_i) に対応する pivot 列を考える。x_0 を ∞ に送る $\mathbf{H}^2$ の固定された正規化での y_i の像を $y_i(x_0)$ で表したことを思い出そう。まず初めに $\mathrm{Im}\, y_i(x_0)\to\infty$ の場合を考える。このとき x_0 は、各表現 ρ_i の凸核の両側でとても短い曲線を表す。よってそれらの曲線を結ぶアニュラスは凸核を3つ穴あき球面と区間の直積に切り取り、x_0 と交わる S 上の任意の曲線はこのアニュラスと交わるような測地線をもつ。一方 $i\to\infty$ でこのアニュラスは Margulis tube

に入っていくようにとれるので、それと交わるような測地線の長さは無限大になる。よって任意の生成元のペアに対し、少なくとも一方の移動距離は発散するので収束する生成系を選ぶことが出来ない。実際これは上で述べた例外的な幾何収束であり、モデル内に1つの両側境界ブロックがあり、幾何極限は3つ穴あき球面群になる。次に $\mathrm{Im}\, y_i(x_0)$ が有界の場合、よって $\mathrm{Re}\, y_i(x_0) \to \pm\infty$ の場合を考える。この場合、$\mathcal{C}$ における x_0 の隣接する整数の列 $\beta_i \to \pm\infty$ で $l_{\rho_i}(\beta_i)$ が有界であるものが存在することを pivot の議論を用いて示す。まず、もし y_i が x_0 を頂点とする三角形 T_i に含まれていれば、β_i を残りの2つの頂点の一方とすればよい。そうでないときは、β_i を ρ_i の pivot の最初の内部 pivot とすればよい（より具体的には、$\mathrm{Re}\, y_i(x_0)$ の整数部分 ± 1 とすればよい）。n で番号付けされた x_0 に隣接する pivot の、表現 ρ_i でのトレースを tr_n^i とする。7節 (7.2) のトレースの等式と交換子が放物的ということから $tr_n^i = tr_0^i + cn$ とかける（ここで $c = \pm 2\sqrt{-1}$）。ここで仮定から $tr_{\beta_i}^i$ は有界より、$tr_0^i \to \infty$. よって収束する生成系を選ぶことがまたも出来ない。以上により、Maskit スライスは閉円版から境界の1点除いた空間と同相になる。 ■

埋め込みの境界について：Bers スライスも Maskit スライスもよく知られた有限次元ベクトル空間への埋め込みがある。穴あきトーラスの場合は、ベクトル空間の次元は1次元となる（Maskit スライスの埋め込みに関する研究とグラフィックについては Wright[8] と Keen-Series[53] を参照)。特に我々の結果からこれらの埋め込みの像の境界はジョルダン曲線になる。McMullen の結果 [66] からもこのことがわかる（担当者には [65] からと思うが)。

関連図書

[1] W.Abikoff, *Kleinian groups - geometrically finite and geometrically perverse,* Geometry and Group Representation, AMS Contemporary Math. no.74, 1988, pp.11-50.

[2] L.Ahlfors, *An extension of Schwartz's lemma,* Trans. Amer. Math. Sci. 43 (1938), 359-364.

[3] L.Ahlfors, *Conformal Invariants: topics in geometric function theory,* McGraw-Hill, 1973.

[4] L.Ahlfors and L.Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics,* Ann. of Math. 72 (1960), 385-404.

[5] R.C.Alperin, W.Dicks, and J.Porti, *The boundary of the Gieseking tree in hyperbolic three-space,* Centre de Recerca Mathematica Preprint num 330, April 1996.

[6] J.Anderson and R.Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book,* Invent. Math. 126 (1996), 205-214.

[7] W.Ballmann, M.Gromov, and V.Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature,* Birkhäuser, 1985.

[8] A.F.Beadon, *The geometry of discrete groups,* Springer-Verlag, 1983.

[9] R.Benedetti and C.Petronio, *Lecture on hyperbolic geometry,* Springer-Verlag Universitext, 1992.

[10] L.Bers, *Simultaneous uniformization,* Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 94-97.

[11] L.Bers, *On the boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I,* Ann. of Math. 91 (1970), 570-600.

[12] L.Bers, *Spaces of Kleinian groups,* Maryland conference in Several Complex Variables I, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. No.155, 1970. pp.9-34.

[13] S.Bleiler and C.Hodgson, *Spherical space forms and Dehn filling,* Topology 35 (1996), 809-833.

[14] F.Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3,* Ann. of Math. 124 (1986), 71-158.

[15] F.Bonahon and J.P.Otal, *Varietes hyperboliques a geodesiques arbitrairement courtes,* Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 255-261.

[16] B.Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups,* University of Southampton Preprint no. 249, 1995.

[17] B.Bowditch and D.B.A.Epstein, *Natural triangulations associated to a surface,* Topology 27 (1988), 91-117.

[18] J.Brock, *Iteration of mapping classes on a Bers slice,* Ph.D. thesis, UC Berkeley, 1997.

[19] R.Brooks and J.P.Matelski, *Collars in Kleinian groups,* Duke Math. J. 49 (1982), no.1, 163-182.

[20] P.Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces,* Birkhäuser, 1992.

[21] R.Canary and Y.Minsky, *On limits of tame hyperbolic 3-manifolds,* J. Differential Geom. 43 (1996), 1-41.

[22] R.D.Canary, *Ends of hyperbolic 3-manifolds,* J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 1-35.

[23] R.D.Canary, *A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications,* Topology 35 (1996), 751-778.

[24] R.D.Canary, D.B.A.Epstein, and P.Green, *Notes on notes of Thurston,* Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, Cambridge University Press, 1987, London Math. Soc. Lecture Notes Series no.111, pp 3-92.

[25] J.Cannon and W.Thurston, *Group invariant peano curves,* preprint, 1989.

[26] L.Carleson and T.W.Gamelin, *Complex dynamics,* Springer-Verlag, New York, 1993.

[27] M.Coornaert, T.Delzant, and A.Papadopoulos, *Géométrie et theorie de groupes: les groups hyperboliques de Gromov,* Springer-Verlag, 1990.

[28] M.Culler, C.McA.Gordon, J.Luecke, and P.Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. 125 (1987), 237-300.

[29] A.Douady and C.J.Earle, *Conformally natural extension of homeomorphism of the circle*, Acta Math. 157 (1986), 23-48.

[30] D.B.A.Epstein and A.Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, Cambridge University Press, 1987, London Math. Soc. Lecture Notes Series no.111, pp 113-254.

[31] A.Fathi, F.Laudenbach, and V.Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, vol.66-67, Asterisque, 1979.

[32] W.Fenchel, *Elementary geometry in hyperbolic space*, de Gruyter, 1989.

[33] F.Gardiner *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Wiley Interscience, 1987.

[34] E.Ghys and P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'aprés Mikhael Gromov*, Birkhäuser, 1990.

[35] G.McA.Gordon and R.A.Litherland, *Incompressible planar surfaces in 3-manifolds*, Topology Appl. 18 (1984), 121-144.

[36] G.McA.Gordon and J.Luecke, *knots are determined by their complements*, Bull. Amer. Math. Soc. 20 (1989), 83-87.

[37] M.Gromov and W.Thurston, *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, Invent. Math. 89 (1987), 1-12.

[38] J.Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of an orientable surfaces*, Ann. of Math. 121 (1985), 215-249.

[39] J.Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class groups of an orientable surfaces*, Invent. Math. 84 (1986), 157-176.

[40] W.Harvey, *Boundary structure of the modular group*, Riemann surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (I.Ka and B.Maskit, eds.) Ann. of Math. Stud. 97, Princeton, 1981.

[41] A.E.Hatcher and W.P.Thurston, *A presentation of the mapping class groups*, Topology 19 (1980), 221-237.

[42] N.V.Ivanov, *Automorphism of complexes of curves and Teichmüller spaces,* Preprint.

[43] N.V.Ivanov, *Complexes of curves and the Teichmüller modular group,* Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), 55-107.

[44] N.V.Ivanov, *Complexes of curves and Teichmüller spaces,* Math. Notes 49 (1991), 479-484.

[45] W.H.Jaco and P.B.Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds,* vol.21, Memoirs of the Amer. Math. Soc. no.220, A.M.S., 1979.

[46] T.Jørgensen, *On pairs of once-punctured tori,* Unpublished manuscript.

[47] T.Jørgensen, *On cyclic groups of Möbius transformations,* Math. Scand. 33 (1973), 250-260.

[48] T.Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations,* Amer. J. of Math. 98 (1976), 739-749.

[49] T.Jørgensen and P.Klein, *Algebraic convergence of finitely generated Kleinian groups,* The Quarterly Journal of Mathematics 33 (1982), 325-332.

[50] T.Jørgensen and A.Marden, *Two doubly degenerate groups,* Quart. J. Math. Oxford 30 (1979), 143-156.

[51] T.Jørgensen and A.Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups,* Math. Scand. 66 (1990), 47-72.

[52] D.Kazhdan and G.Margulis, *A proof of Selberg's conjecture,* Math. USSR Sb. 4 (1968), 147-152.

[53] L.Keen and C.Series, *Pleating coordinates for the Maskit slice of Teichmüller space,* Topology 32 (1993), 719-749.

[54] S.Kerckhoff and W.P.Thurston, *Noncontinuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space,* Invent. Math. 100 (1990), 25-47.

[55] C.Kourouniosis, *The geometry of bending quasi-Fuchsian groups,* Discrete Groups and Geometry (W.J.Harvey and C.Maclachlan, eds.), Cambridge University Press, 1992, London Math. Soc. Lecture Notes no.173, pp.148-164.

[56] O.Lehto and K.I.Virtanen, *Quasiconformal mapping,* Springer-Verlag, 1965.

[57] A.Marden, *The geometry of finitely generated Kleinian groups,* Ann. of Math. 99 (1974), 383-462.

[58] B.Maskit, *On the boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II,* Ann. of Math. 91 (1970), 607-639..

[59] B.Maskit, *Moduli of marked Riemann surfaces,* Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 773-777.

[60] B.Maskit, *Parabolic elements on Kleinian groups,* Ann. of Math. 117 (1983), 659-668..

[61] B.Maskit, *Comparison of hyperbolic and extremal lengths,* Ann. Acad. Sci. Fenn. 10 (1985), 381-386.

[62] B.Maskit, *The canonical splitting of a Kleinian group,* IHES preprint, 1992.

[63] H.A.Masur and Y.Minsky, *Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity,* Stony Brook IMS Preprint 1996/11.

[64] D.McCullough, *Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary,* Quart. J. Math. Oxford 37 (1986), 299-306.

[65] C.McMullen, *Complex earthquakes and Teichmüller theory,* Preprint available at http:// math.berkeley.edu/ ctm/papers.html.

[66] C.McMullen, *Cusps are dense,* Ann. of Math. 133 (1991), 217-247.

[67] R.Meyerhoff, *A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds,* Canad. J. Math. 39 (1987), 1038-1056.

[68] Y.Minsky, *Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds,* Topology 32 (1993), 625-647.

[69] Y.Minsky, *On rigidity, limit sets and end invariants of hyperbolic 3-manifolds,* J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 539-588.

[70] Y.Minsky, *On Thurston's ending lamination conjecture,* Proceedings of Low-Dimensional Topology, May 18-23, 1992, International Press, 1994.

[71] Y.Moriah and H.Rubinstein, *Heegard structures of negatively curved 3-manifolds,* To appear in Comm. Anal. and Geom.

[72] G.D.Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces,* Ann. of Math. Stud. no.78, Princeton University Press, 1973.

[73] K.Ohshika, *Ending laminations and boundaries for deformation spaces of Kleinian groups,* J. London Math. Soc. 42 (1990), 111-121.

[74] K.Ohshika, *Topologically conjugate Kleinian groups,* Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 739-743.

[75] J.P.Otal, *Sur le nouage des geodesiques dans les varietes hyperboliques,* C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math. 320 (1995), no.7, 847-852.

[76] J.P.Otal, *Le théorèm d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension trois,* Astérisque No.235, 1996.

[77] J.Parker and C.Series, *Bending formulae for convex hull boundaries,* J. Anal. Math. 67 (1995), 165-198.

[78] R.Penner and J.Harer, *Combinatorics of train tracks,* Ann. of Math. Stud. no.125, Princeton University Press, 1992.

[79] G.P.Scott, *Compact submanifolds of 3-manifolds,* J. London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.

[80] C.Series, *The geometry of Markoff numbers,* Math. Intelligencer 7 (1985), 20-29.

[81] C.Series, *The modular surface and continued fractions,* J. London Math. Soc. 31 (1985), 69-80.

[82] D.Sullivan, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions,* Riemann surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference Ann. of Math. Stud. 97, Princeton, 1981.

[83] D.Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups,* Acta Math. 155 (1985), 243-260.

[84] W.Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds II: surface groups and manifolds which fiber over the circle,* preprint.

[85] W.Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds,* Princeton University Lecture Notes, 1982.

[86] W.Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds I: deformation of acylindrical manifolds,* Ann. of Math. 124 (1986), 203-246.

[87] W.Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology,* Princeton University Press, 1997, (S.Levy, ed.).

[88] D.Wright, *The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once-punctured tori,* Preprint, 1990.

第8章，9章での関連図書の追加

[BP78] BEARDON, A. F. and POMMERENKE, C. The Poincaré metric of plane domains, *J. London Math. Soc. (2)*, **18** (1978), 475–483.

[TO:hyp] 谷口雅彦, 奥村善英 双曲幾何学への招待, 培風館 (1997).