

第6章 Margulis tubesの構造 (糸健太郎)

6.1 Thick-thin 分解

リーマン多様体 M に対して $M_{thin(\epsilon)} = \{p \in M : (p \text{ における単射半径}) \leq \epsilon/2\}$ を ϵ -thin part とよぶ. また $M_{thick(\epsilon)}$ を $M \setminus M_{thin(\epsilon)}$ の閉包とする.

Margulis の補題. ある正定数 ϵ_0 (*Margulis* 定数) が存在して, 任意の 3次元双曲多様体 M に対して, $M_{thin(\epsilon_0)}$ の各連結成分は次のいずれかとなる:

- 閉測地線の管状近傍,
- $\{(z, t) \in \mathbf{H}^3 : t \geq c\} / \langle z \mapsto z + 1 \rangle$,
- $\{(z, t) \in \mathbf{H}^3 : t \geq c\} / \langle z \mapsto z + 1, z \mapsto z + \omega \rangle$.

$M_{thin(\epsilon_0)}$ の各連結成分を *Margulis tube* という. 2次元双曲多様体に対しても *Margulis* 定数が存在して, 例えば 3次元の ϵ_0 を採用することができる.

$\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ に対して, $N = \mathbf{H}^3 / \Gamma$ における $g \in \Gamma$ (の共役類) に対応する ϵ -*Margulis tube* を $T_\epsilon(g)$ と書く. 特に表現 $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbf{C})$ が定まっているときは, $\alpha \in \pi_1(S)$ に対して $T_\epsilon(\rho(\alpha))$ を $T_\epsilon(\alpha)$ と書く. また $T_{\epsilon_0}(\alpha)$ の半径 (core から境界までの距離) を $r(\alpha)$ で表す. ここで α の complex length を $\lambda(\alpha) = l(\alpha) + i\theta(\alpha)$, $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi]$ と書いていたことを思い出しておく. これらの量に関する基本的な事柄を次に述べる.

補題 6.1. $(0, \epsilon_0]$ 上で定義された関数 $R(\epsilon)$ s.t. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(\epsilon) = \infty$ で次をみたすものが存在する: 任意の 3次元双曲多様体の ϵ_0 -*Margulis tube* $T_{\epsilon_0}(\alpha)$ において $d(\epsilon) \equiv \text{dist}(\partial T_\epsilon(\alpha), \partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ ($\epsilon \in [l(\alpha), \epsilon_0]$) と定めるとき,

$$d(\epsilon) \geq R(\epsilon) \tag{6.1}$$

が成り立つ. 特に $\epsilon = l(\alpha)$ とすると $r(\alpha) \geq R(l(\alpha))$.

証明. α が loxodromic のとき上の主張が成り立つものを $R_1(\epsilon)$, parabolic のとき上の主張が成り立つものを $R_2(\epsilon)$ とすると, $R(\epsilon) \equiv \min\{R_1(\epsilon), R_2(\epsilon)\}$ が求めるもの

となる. $R_2(\epsilon)$ の存在は比較的容易なので, 以下 α は loxodromic とし, $R_1(\epsilon)$ の存在を示す. ここで原論文では Brooks-Matelsky [19], Meyerhoff [67] を引用しているが, そのままでは適用できないと思われるのでより初等的な証明をつける.

まずはじめに $r(\alpha)$ を $l(\alpha)$ のみで下から評価できることをみる (具体的には $r(\alpha) \geq c/\sqrt{l(\alpha)}$ (c は定数) が成り立つことを示す). 以下, 普遍被覆 H^3 に lift して議論を進める. 共役をとることで $\alpha \in PSL_2(\mathbb{C})$ の固定点は $0, \infty$ であるとしてよい. α の軸からの双曲距離が r である点の集合 C_r はコーン型の曲面で, H^3 から誘導される計量はユークリッド計量である. 具体的には図 1 内の図 1 のような座標に関して (l は双曲的長さ)

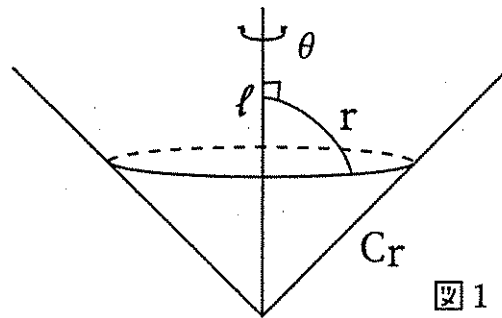


図 1:

$$ds^2 = \cosh^2 r dl^2 + \sinh^2 r d\theta^2$$

と書ける. これを用いて (α の C_r における translation length) $\leq l(\alpha) \cosh r + |\theta(\alpha)| \sinh r \leq |\lambda(\alpha)| e^r$ という評価が成り立つ. いま r_0 として, α の C_{r_0} における translation length が ϵ_0 となるものをとると, 明らかに $r_0 \leq r(\alpha)$ である. よって, 上の評価とあわせて $r(\alpha) \geq \log \frac{\epsilon_0}{|\lambda(\alpha)|}$ を得る. この評価を, $\theta(\alpha)$ に依らない, $l(\alpha)$ のみの評価に書き換えたい (以下 Meyerhoff [67] 参照). ここで, 上の議論を α^k ($k \in \mathbb{N}$) に適用することで $r(\alpha) \geq \max_{k \in \mathbb{N}} \{ \log \frac{\epsilon_0}{|\lambda(\alpha^k)|} \}$ がいえることに注意する. いま任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, ある $k \in \{1, \dots, m-1\}$ が存在して $-\frac{2\pi}{m} \leq k\theta \leq \frac{2\pi}{m} \pmod{2\pi}$ が成り立つ (ハトの巣原理). このとき $|\lambda(\alpha^k)|^2 \leq m^2 l^2 + (\frac{2\pi}{m})^2$ である. よって $l \leq \epsilon_0$ に対して $m = m(l)$ を適切にとることにより $|\lambda(\alpha^k)|^2 \leq c'l$ (c' は定数) とできる. 以上より $r(\alpha) \geq c/\sqrt{l(\alpha)}$ を得る.

さて, 一般に $\epsilon \in [l(\alpha), \epsilon_0]$ に対して, $\partial \bar{T}_\epsilon(\alpha) = C_r$ として r を定めたとき, $d(\epsilon) = r(\alpha) - r$ を ϵ のみで評価したい. これには, 一般の $r_1 < r_2$ に対して, C_{r_1}, C_{r_2} における α の translation length の比が $\sinh r_1 / \cosh r_2$ と比較できることを用いればよい. (C_r の計量に対して $\sinh^2 r (dl^2 + d\theta^2) \leq ds^2 \leq \cosh^2 r (dl^2 + d\theta^2)$ が成り立つことに注意.) ■

6.2 Margulis tubes の Teichmüller パラメーター

Margulis tube $T_{\epsilon_0}(\alpha)$ の形は complex length $\lambda(\alpha)$ によって決定されるが、(特に $l(\alpha)$ が非常に小さいとき) その対応は複雑である。そこで大まかにこの対応を理解するために、

$$\omega(\alpha) = \frac{2\pi i}{\lambda(\alpha)} \quad (6.2)$$

という量を考える。(ここで $\lambda(\alpha)$ は $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi]$ と正規化している。) まず $\omega(\alpha)$ の幾何的意味を説明する。 $\alpha \in PSL_2(\mathbb{C})$ を loxodromic とし、共役をとることで $0, \infty$ が固定点であるとする。このとき $(\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C}^\times) / \langle \alpha \rangle$ (ここで $\mathbb{C}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$) はトーラス F_∞ を境界にもつ solid torus H である。 F_∞ には \mathbb{C}^\times から誘導される等角構造 ν_∞ を入れておく。 F_∞ における閉曲線 m として H の中で可縮なものを取り、閉曲線 α' は H の core α にホモトピックなものとする。ここで、 α' の取り方には m に関する Dehn twist だけの自由度があるが、その中で $(F_\infty$ のユークリッド計量で) 最短なものを選ぶことにする。このとき、Teichmüller パラメータ $\tau(F_\infty, \nu_\infty, \alpha', m)$ が $2\pi i / \lambda(\alpha) = \omega(\alpha)$ と一致する: これは $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を用いて、普遍被覆 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow F_\infty = \mathbb{C}^\times / \langle \alpha \rangle$ を構成すると、被覆変換群は $\langle z \mapsto z + \lambda(\alpha), z \mapsto z + 2\pi i \rangle$ で、線分 $[0, \lambda(\alpha)], [0, 2\pi i]$ がそれぞれ α', m に落ちることからわかる。ここで $\lambda(\alpha)$ の $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi]$ という正規化が、 α' がその neighbors $\{D_m^n(\alpha')\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の中で最短なものになっていることに対応している。 $\omega(\alpha)$ の存在範囲は $\{\omega: |\omega - 1| \geq 1, |\omega + 1| > 1\}$ である。

さて、トーラス $\partial T_{\epsilon_0}(\alpha)$ を F_0 と書く。 F_0 には、多様体から誘導されるユークリッド計量 ν_0 が入っているとみなす。 core α に関する半径方向の射影 (radial projection) を用いて写像 $f: F_0 \rightarrow F_\infty$ を定め、 F_0 には f で引き戻した marking を入れる。この marking に関する F_0 の Teichmüller パラメータ $\tau(F_0, \nu_0, \alpha', m)$ を $\omega(F_0)$ と書く。ここで、 f は $\coth r(\alpha)$ -擬等角写像である。(実際、補題 6.1 の証明の中で用いた座標に関して、 $l + i\theta$ が F_∞ の等温座標となり、 $l' = l \coth r(\alpha)$ とするとき $l' + i\theta$ が F_0 の等温座標となるからである。) 従って、特に $r(\alpha)$ が大きいとき、 $\omega(F_0)$ と $\omega(\alpha)$ の双曲距離は小さくなる。さらに次が成り立つ。

補題 6.2. loxodromic な元 $\alpha_1, \alpha_2 \in PSL_2(\mathbb{C})$ が $l(\alpha_1), l(\alpha_2) \leq \epsilon'$ をみたすとする。さらに $\omega(\alpha_1)$ と $\omega(\alpha_2)$ の双曲距離が D で上からおさえられるとき、 $T_{\epsilon_0}(\alpha_1)$ から $T_{\epsilon_0}(\alpha_2)$ への $K(D, \epsilon')$ -bilipschitz diffeomorphism が存在する。

証明. 上のことを用いて、 $(F_\infty(\alpha_1), F_\infty(\alpha_2))$ を経由することで $\partial T_{\epsilon_0}(\alpha_1)$ から $\partial T_{\epsilon_0}(\alpha_2)$ への $K(D, \epsilon')$ -bilipschitz 写像がつかれる。これを core に関して半径方向に linear に拡張すればよい。 ■

6.3 曲面群内の Margulis tubes

ここでは、曲面にホモトピックな3次元双曲多様体の Margulis tube をさらに調べることにする。有限型曲面 S に対して、離散的で忠実な、型を保つ表現 $\rho: \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ を *marked surface group* とよぶ。 $N = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ と書く。次の結果は補題 6.4 (1) を示すのに用いられる。

補題 6.3. S の位相型 のみに依る定数 ϵ_1, a_0, A_0 で次をみたすものが存在する: 任意の *marked surface group* $\rho: \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ と、任意の原始元 $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ で $\rho(\gamma)$ が *loxodromic* で $l(\rho(\gamma)) \leq \epsilon_1$ をみたすものに対して

1. γ は S の単純閉曲線にホモトピック,
2. γ の $\partial T_{\epsilon_0}(\gamma)$ における *translation length* は a_0 以下,
3. $\text{Area}(\partial T_{\epsilon_0}(\gamma)) \geq A_0$.

まず、補題 6.3 の証明で必要になる次の補題を準備する。

補題 S を有限型双曲曲面とする。 S の位相型 のみに依る定数 d, D が存在して次が成り立つ。

1. $S_{\text{thin}(\epsilon_0)}$ の任意の連結成分 X に対して、 $\text{diam}(X) \leq d$.
2. γ を S の ϵ_0 -Margulis tube T の core となる閉測地線とする。 γ に両端点をもつ geodesic arc β で $\beta \cap (S \setminus T)$ の長さが D 以下のものがある。

補題の証明. (1) $\text{diam}(X) = \text{dist}(a, b)$ となる $a, b \in X$ をとる。 a, b を最短 geodesic arc α で結び、 α を半径 $\epsilon_0/2$ の円板で数珠つなぎに覆う。このとき各円板は互いに交わらない(交わったとすると、より短い geodesic arc があることになる)。よって、(円板の面積) $\times \frac{l(\alpha)}{\epsilon_0} \leq \text{Area}(S)$ 。これより $\text{diam}(X) = l(\alpha)$ の評価を得る。

(2) $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ とし、 \mathbb{H}^2 に γ の lift $\tilde{\gamma}$ と、その近傍となる T の lift \tilde{T} をとる。 $D \equiv \min_{g \in \Gamma} \{\text{dist}(\tilde{T}, g\tilde{T})\}$ を上から評価すればよい。 $N_{\frac{D}{2}}(\tilde{T})$ を \tilde{T} の $\frac{D}{2}$ -近傍とすると、これは $(\Gamma, \text{Stab}(\tilde{\gamma}))$ -不変であり、円環 $(N_{\frac{D}{2}}(\tilde{T}) \setminus \tilde{T})/\text{Stab}(\tilde{\gamma})$ は S に埋め込まれているので、やはり S の面積を用いて D が評価できる。 ■

補題 6.3 の証明. Bonahon と Thurston の仕事により、ある定数 d' が存在して、任意の convex core $C(N)$ の点 p に対して、 ρ にホモトピー同値な pleated surface $f: S \rightarrow N$ で $\text{dist}(p, f(S)) \leq d'$ を満たすものがある。いま、 $\epsilon_1 (\leq \epsilon_0)$ として、 $\text{dist}(\partial T_{\epsilon_0}, \partial T_{\epsilon_1}) \geq d + d'$ (d は上の補題のもの) なるものを補題 6.1 によってとるとき、この ϵ_1 が求めるものであることを示す。

(1) $N_{d'}(T_{\epsilon_1}(\gamma))$ を $T_{\epsilon_1}(\gamma)$ の d' -近傍とすると、 $\rho(\gamma)$ の axis が $C(N)$ に含まれることと、上の Bonahon-Thurston の結果より、 ρ にホモトピー同値な pleated surface $f: S \rightarrow N$ で $f(S) \cap N_{d'}(T_{\epsilon_1}(\gamma)) \neq \emptyset$ となるものがある。以下、この pleated surface を固定し、 S には f より誘導される双曲計量を入れておく。いま X を $S_{\text{thick}(\epsilon_0)}$ の任

意の連結成分とすると, $\pi_1(X)$ は non-abelian で f は π_1 -injective なので, $f(X)$ が T_{ϵ_0} に含まれることはない. よって, 上の補題 (1) より, $f(X) \cap N_{d'}(T_{\epsilon_1}(\gamma)) = \emptyset$ である. 従って $S_{thin(\epsilon_0)} \neq \emptyset$ がわかり, $S_{thin(\epsilon_0)}$ の連結成分 Y で $f(Y) \cap N_{d'}(T_{\epsilon_1}(\gamma)) \neq \emptyset$ となるものがある. また一般に, f が縮小写像であることから $f(S_{thin(\epsilon_0)}) \subset N_{thin(\epsilon_0)}$ が成り立つので, $Y \subset T_{\epsilon_0}$ もいえる. 再び f の π_1 -injectivity より, 成分 Y の一意性がわかり, Y の π_1 を生成する単純閉曲線が γ とホモトピックとなる.

(2) まず Y の境界は f によって T_{ϵ_1} の外にうつされていることに注意する. この曲線は $\rho(\gamma)$ の axis にホモトピックで長さは ϵ_0 以下なので, γ の $\partial T_{\epsilon_1}(\gamma)$ における translation length は ϵ_0 以下である. いま $\text{dist}(\partial T_{\epsilon_0}(\gamma), \partial T_{\epsilon_1}(\gamma))$ は上から一様におさえられるので, $\partial T_{\epsilon_0}(\gamma)$ における translation length の評価を得る.

(3) Y の geodesic core を γ' と書き, γ' に両端点をもつ geodesic arc β で $S \setminus Y$ における長さが D 以下のものをとる (上の補題 (2)). β は rel. boundary で γ' の中にホモトピーで移せないので, $f(\beta)$ も N の中で $T_{\epsilon_0}(\gamma)$ の内部にホモトピーで移せない. よって H^3 に lift して考えると, $T_{\epsilon_0}(\gamma)$ の (1つの) lift \tilde{T} に対して, 別の lift \tilde{T}' で $\text{dist}(\tilde{T}, \tilde{T}') \leq D$ となるものがある. $\text{Stab}(\tilde{T})$ の元で \tilde{T}' を動かすと互いに交わらず, より強く $\partial \tilde{T}$ への radial projection の像も互いに交わらないことがわかる. ここで tube \tilde{T} の半径は ϵ_1 により下からおさえられているので, radial projection の像の面積も $A(D, \epsilon_1)$ で下からおさえられる. ■

以上のことを用いて, $\omega(\alpha)$ に関する次の結果を得る.

補題 6.4. (1) ρ を surface group とし, α を $l(\alpha) \leq \epsilon_1$ なる 閉曲線とする. このとき

$$\text{Im} \omega(\alpha) \geq c_1 \quad (6.3)$$

が成り立つ. ここで c_1 は S の 位相型 のみに依る定数.

(2) ρ を punctured torus group とし, $\nu_+(\alpha), \nu_-(\alpha)$ を ($\alpha = \infty$ と正規化した) ρ の end invariants とする. このとき 任意の $\alpha \in \mathcal{C}$ に対して

$$\text{Im} \omega(\alpha) \geq \text{Im} \nu_+(\alpha) + \text{Im} \nu_-(\alpha). \quad (6.4)$$

注意 (6.4) は, 一般の surface group について成り立つ Bers の不等式 [11] $1/l(\alpha) \geq \frac{1}{2}(1/l_+(\alpha), 1/l_-(\alpha))$ の一つの variation となっている.

$\text{Im} \omega(\alpha)$ は F_∞ を ユークリッド 測地線 α' で切り開いた円環の modulus と一致する. また同じことであるが, F_∞ における α' の extremal length $E_{F_\infty}(\alpha')$ を用いて $\text{Im} \omega(\alpha) = 1/E_{F_\infty}(\alpha')$ とあらわせる.

8 章と 10 章において, $T_{\epsilon_0} \subset C(N)$ の場合には, (6.3) の逆の評価も成り立つことを示す予定である.

α が parabolic のときは, $\lambda(\alpha) = 0$ と定義する. (この正当性は $\text{tr}^2 = \cosh^2 \lambda/2$ より.) このとき $\omega(\alpha) = \infty$ である.

補題 6.4 の証明. (1) $l(\alpha) \leq \epsilon_1$ とする. F_0 における α の Euclidean translation length は ϵ_0 により下からおさえられ (定義より明らか), a_0 により上からおさえられる (補題 6.3 (2)). F_0 の閉曲線 α' は α とホモトピックなものの中で最短となるものをとっているので, $\epsilon_0 \leq l_{F_0}(\alpha') \leq a_0$. 一方で, 上の注より $\text{Im } \omega(F_0) = \text{Area}(F_0)/l_{F_0}^2(\alpha')$ である. よって $\epsilon_0^2 \leq \text{Area}(F_0)/\text{Im } \omega(F_0) \leq a_0^2$. ところで, $\omega(F_0)$ と $\omega(\alpha)$ の双曲距離は ϵ_1 を用いて上から評価できるので, 定数 b_1, b_2 があって $b_1 \leq \text{Im } \omega(F_0)/\text{Im } \omega(\alpha) \leq b_2$ が成り立つ. 従って $b_1 \epsilon_0^2 \leq \text{Area}(F_0)/\text{Im } \omega(\alpha) \leq b_2 a_0^2$ がいえて, $\text{Area}(F_0) \geq A_0$ を用いると $\text{Im } \omega(\alpha) \geq A_0/b_2 a_0^2$ となる.

(2) $\text{Im } \nu_+(\alpha) = \text{Im } \nu_-(\alpha) = 0$ なら何もいうことはない. いま $\text{Im } \nu_+(\alpha) > 0$ とすると Ω_+ は空でなく, $\Omega_+/\langle \alpha \rangle$ は円環で F_∞ に埋め込まれている. ここで $\text{Im } \nu_+(\alpha)$ は $\Omega_+/\rho(\pi_1(S))$ における α にホモトピックな円環の modulus の上限で, これらの円環は $\Omega_+/\langle \alpha \rangle$ に埋め込まれることより, $\Omega_+/\langle \alpha \rangle$ の modulus は $\text{Im } \nu_+(\alpha)$ 以上である. $\text{Im } \nu_-(\alpha) > 0$ のときも同様で, modulus の単調性より $\text{Im } \omega(\alpha) \geq \text{Im } \nu_+(\alpha) + \text{Im } \nu_-(\alpha)$ がいえる. α が Ω_+ または Ω_- で parabolic のとき, すなわち $\text{Im } \nu_+(\alpha) + \text{Im } \nu_-(\alpha) = \infty$ のとき, $\rho(\alpha)$ も parabolic となり $\omega(\alpha) = \infty$ で成り立つ. ■

最後に, 補題 6.4 (1) の系として

$$|\text{tr}(\alpha)| \geq c_2 \quad (6.5)$$

が成り立つ. ここで c_2 は S の位相型のみによる定数. これは, $\text{tr} \rightarrow 0$ とすると $\lambda \rightarrow \pm \pi i$ で, よって $\omega \rightarrow \pm 2$ なので, ここで $\text{Im } \omega \geq c_1$ を用いることで示せる.

第7章 Farey neighborsの幾何（糸健太郎）

この節において, punctured torus group の生成元の組に対して, ある幾何的制約があることを示す. より具体的にいうと, 2つの生成元の translation length が共に上からおさえられているとき, \mathbb{H}^3 の点で, 2つの元の作用 (による動き) が同時に上からおさえられるものがあることを, Lemma 7.1 において示す.

C の元の組 α, β で $\alpha \cdot \beta = 1$ をみたすもの (Farey neighbors) は, punctured torus group $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ の生成元 A, B を共役と逆元を除いて定める: α と β を1点 x で交わる閉曲線として実現し, 適当に向きを入れることで $\pi_1(S, x)$ の元とみなして, A, B を ρ によるそれぞれの像とする. このとき $[A, B]$ は parabolic であることに注意. 正定数 D を固定し, $\text{core}_D(A) = \{p \in \mathbb{H}^3 : \text{dist}(p, Ap) \leq l(A) + D\}$ と定める ($\text{core}_D(B)$ も同様).

補題 7.1. *punctured torus group* ρ に依らない正定数 D_2 が存在して, 任意の生成元の組 A, B で $[A, B]$ が parabolic となるものに対して $\text{core}_{D_2}(A) \cap \text{core}_{D_2}(B) \neq \emptyset$ が成り立つ.

証明. 以下の議論は Paker-Series [77] が参考になる. まず A, B が共に loxodromic の場合を考える. P, Q をそれぞれ A, B の軸とし, M を P, Q の共通垂線とする. M を M に関する half-turn (180° 回転) とする. いま, P, Q にそれぞれ直交する測地線 N, L で (対応する half-turn を N, L と書くとき) $A = NM, B = ML$ となるものが一意的に定まる (ここで A の作用の順番は, M の次に N とする. このとき $AB = NL$ となり, その軸 R は L と N の共通垂線となる (図 1 参照)).

双曲直角6角形 (1つの totally geodesic な平面にのっているとは限らないことに注意) を囲むこれらの測地線には, 6角形を一回りするような向きを入れておく. このとき, M と N の complex distance μ が $\text{mod } 2\pi i$ で定まる (cf. [77]). 同様に L と M, L と N, P と Q の complex distance τ, σ, δ を定める. すると, この双曲直角6角形に対して次が成り立つ (cf. [32], [55], [77]).

$$\cosh \sigma = \cosh \mu \cosh \tau + \sinh \mu \sinh \tau \cosh \delta. \quad (7.1)$$

さて, A の translation length $\lambda(A)$ は $\text{mod } 2\pi i$ で定まっていたが, $\lambda(A) = 2\mu$ をみたすものが (μ が $\text{mod } 2\pi i$ で定まっていたので) $\text{mod } 4\pi i$ で定まる. そこで

さて, N の各点から M に垂線をおろし, 垂線の足から成る集合と G の共通部分を G_1 , 足が G_1 にあるような N の点全体を N^+ と書くと, N^+ は P からのびる半直線である (図 2 参照). N^+ の ∂H^3 に含まれる端点から G_1 の端点へおろした垂線を Z_1 とし, P と Z_1 の complex distance を δ_1 と書く. このとき, P, G_1, Z_1, N^+ に囲まれた双曲 4 角形 X_1 に対して,

$$\sinh^2 \delta_1 \sinh^2 \mu = 1, \sinh^2 \delta_2 \sinh^2 \tau = 1 \quad (7.5)$$

が成り立つ (cf. [32], [55], [77]). (G_2, δ_2 は \mathcal{Q} と \mathcal{L} に関して同様に定めておく.)

ここで, $D = 4 \sinh^{-1}(1)$ とするとき

$$G_1 \subset \text{core}_D(A), G_2 \subset \text{core}_D(B) \quad (7.6)$$

となることを示す. はじめに双曲 3 角形に関する簡単な事実を復習する.

- 任意の双曲 3 角形 $\triangle(xyz)$ と, 辺 (xy) の任意の点 p に対して $\text{dist}(p, (yz) \cup (zx)) \leq \sinh^{-1}(1)$.
- 任意の双曲直角 3 角形 $\triangle(xyz)$ ($\angle y = 90^\circ$) と, 辺 (xy) の任意の点 p に対して $\text{dist}(p, (xz)) \leq \sinh^{-1}(1)$.

いま N^+ の ∂H^3 に含まれる端点と G_1, P の交点を結ぶ測地線でもって, 双曲 4 角形 X_1 を 2 つの双曲 3 角形に分割する. このとき, 上のことを用いて, 任意の $p \in G_1$ に対して $\text{dist}(p, P \cup N) \leq 2 \sinh^{-1}(1)$ が成り立つ. この評価が P に対して成り立つときは, 明らかに $\text{dist}(p, Ap) \leq 4 \sinh^{-1}(1) + l(A)$ である. N に対して成り立つときは, $A = NM$ で M が p を固定することから $\text{dist}(p, Ap) \leq 4 \sinh^{-1}(1)$. 従って, いずれにしても $p \in \text{core}_D(A)$ であり, $G_1 \subset \text{core}_D(A)$ がいえる. $G_2 \subset \text{core}_D(B)$ も同様である.

最後に, 線分 $G \setminus (G_1 \cup G_2)$ の長さを (もし空でないのなら) 上から評価する. まず (7.4), (7.5) より

$$\sinh^2 \delta = -\sinh^2 \delta_1 \sinh^2 \delta_2. \quad (7.7)$$

ここで G の長さを $|G|$ などと書くと, $|G| = \text{Re } \delta$, $|G_1| = \text{Re } \delta_1$, $|G_2| = \text{Re } \delta_2$ で, 不等式 $\frac{1}{2}(e^{|\text{Re } z|} - 1) \leq |\sinh z| \leq e^{|\text{Re } z|}$ を用いると

$$\frac{1}{2}(e^{|\text{Re } \delta|} - 1) \leq |\sinh \delta| = |\sinh \delta_1| |\sinh \delta_2| \leq e^{|\text{Re } \delta_1|} e^{|\text{Re } \delta_2|}.$$

よって $e^{|G|} \leq 2e^{|G_1|+|G_2|} + 1 \leq 3e^{|G_1|+|G_2|}$. 従って

$$|G| \leq |G_1| + |G_2| + \log 3 \quad (7.8)$$

を得る. ゆえに G_1, G_2 の $\frac{1}{2} \log 3$ -近傍は交わるので, $D_2 = 4 \sinh^{-1}(1) + \log 3$ とおけば $\text{core}_{D_2}(A) \cap \text{core}_{D_2}(B) = \emptyset$ がいえる.

A, B の一方, もしくは両方が parabolic の場合, ∂H^3 における固定点を軸とみなすことで (complex distance はともかく) 共通垂線や half-turn が同様に考えられ, (7.6) の証明はそのまま通用する. ここで, G_1 または G_2 は半直線になっている. $G \setminus (G_1 \cup G_2)$ の長さが $\log 3$ 以下であることを示すには, 極限操作を用いればよい.

■

第8章 連結性と先験的上界(須川敏幸)

本稿は他の執筆者とは独立に書かれたので用語の不統一や参照の際の不整合性など、読者に何かとご不便をおかけすることと思われるが、その点は平にご容赦いただきたい。また、証明を付けるにあたって、必要以上に丁寧に説明を試みたところがある。筆者とは違って幾何学的直観によって証明を理解出来る方にはくどいと思われるのでうざったいとお感じになる読者の方にはそのような箇所は適宜飛ばして読んで頂いた方が良くであろう。あるいは、原論文を読みながら分かりにくい箇所に出会った時のみこの解説を参考にして頂くというのがこの解説の最も良い利用法かもしれない。本稿がそのような時に真に役に立つ解説であることを祈るばかりである。

なお、筆者の判断により原論文の構成を一部修正した箇所がいくつかある。それによって何か問題が発生していないかとおそれている。お気づきの点があればご教示頂ければ幸いである。

まず少し記号の復習をしておく。 S を $(1,1)$ 型のリーマン面として基本群 $\pi_1(S) = \pi_1(S, x_0)$ の標準生成系 α, β を一つ固定しておく。 S を一意化するFuchs群 Γ_0 とすると x_0 の原像を一つ固定することにより $\pi_1(S, x_0)$ は Γ_0 と同一視することができる。従って特に $\pi_1(S)$ の元に関して放物的、双曲的という言葉が意味を持つ。 $(S$ の複素構造やFuchs群の取り方にはよらないことに注意せよ。)

この節では放物的元を放物的元に写す忠実な離散表現 $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ を固定して議論を進める。この像を Γ と書くことにするとこれは仮定よりKlein群となる。標準射影 $\mathbb{H}^3 \rightarrow N := \mathbb{H}^3/\Gamma$ は3次元多様体 N の普遍被覆であるから \mathbb{H}^3 に基点 x_0 を決めればそれに対して自然な写像 $\Gamma \rightarrow \pi_1(N, z_0)$ が定まる。ここに z_0 は x_0 の射影とする。これによってさらに Γ は N の基本群と同一視することができる。つまり、 $g \in \Gamma$ に対して \mathbb{H}^3 において x_0 と $g(x_0)$ をつなぐ(任意の)曲線の標準射影による像のホモトピー類を対応させることにより同一視が得られる。このようにして得られる曲線のことを g が被覆する曲線と呼ぶ。以下、基点の取り方によらないような量を考える際にはしばしばこの同一視を行うので留意されたい。

なお、3次元多様体 N は \mathbb{H}^3 から双曲計量を受け継いでいるが、それを σ_N と表すことにする。

S 内の(向きを持たない)単純閉曲線の自由ホモトピー類全体を \mathcal{C} と書いたが、この定義だと少し取り扱いが不便なので各 $\alpha \in \mathcal{C}$ を代表元としてその中に含まれる S における閉測地線を取るにより実際の曲線と同一視することにする。もちろん、実際には S の計量的性質は以下の定式化には関係ないので、あくまでも便宜的

なものである。

C の各元 γ に対して $l(\gamma)$ を $\tilde{g} = \rho^{-1}(\gamma)$ の被覆する曲線と自由ホモトピックな測地線の双曲計量に関する長さとする。すなわち、 λ を g の乗数(multiplier)として

$$l(\gamma) = |\operatorname{Re} \log |\lambda|| = \operatorname{Re} \cosh(2(\operatorname{tr}^2 \tilde{\gamma} - 2)) \geq 0$$

とする。ただし、ここに $\tilde{\gamma}$ は γ を表す基本群の元とする。この定義はもちろん $\tilde{\gamma}$ の向きや $\pi_1(S)$ における共役によらないことに注意せよ。

8.1 曲線複体の連結性

L_0 を補題2.1に出てくる定数(≈ 1.9248)とする。つまり α, β が S の双曲計量 τ に対して $l_\tau(\alpha), l_\tau(\beta) \leq L_0$ を満たすならば α, β はFarey隣接しているとする。 $L \geq L_0$ に対して

$$C(L) = \{\alpha \in C; l(\alpha) \leq L\}$$

と定める。

さて、 C はFareyグラフと呼ばれる自然な(無向)平面グラフの構造を持っていたことを思い出そう。するとこの任意の部分集合は自然に部分グラフの構造を持つ。この構造について次のことが成り立つ。

Lemma 8.1.1. C は連結グラフである。

Remark. Bowditch [16]は同様の結果をより一般的な状況で証明している。

Proof. まず $\alpha_{-1}, \alpha_1 \in C(L_0)$ とする。 $g_i : S \rightarrow N$ ($i = -1, 1$)を α_i に順応する ρ とホモトピー同変な単体的双曲面とする(第5節参照)。ここで g_i によって誘導される(角度が 2π 以上の錐特異性を持った)計量 $\tau_i = g_i^*(\sigma_N)$ とすると、 g_i の取り方から $l_{\tau_i}(\alpha_i) = l(\alpha_i)$ である。次に $i = \pm 1$ として測地線 α_i に沿って頂点を一定速度で移動させて得られる初等的移動によって得られる単体的双曲面の連続な族 $g_{\pm t}$ ($1 \leq t < \infty$)を考えてその極限として得られるプリーツ面を $g_{\pm\infty} : S \rightarrow N$ とする。一方 g_{-1}, g_1 はホモトピックな単体的双曲面であったから補題5.2から単体的双曲面の連続族 g_x ($-1 \leq x \leq 1$)が取れる。 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma_x = g_x^*(\sigma_N)$ を引き戻して得られる特異計量として、作り方から $l_{\sigma_x}(\alpha) = l(\alpha)$ ($\pm x \in [1, \infty)$)でありさらに連続性からこれは $x = \pm\infty$ でも成り立つことに注意する。

ここで τ_x を特異計量 σ_x から定まる双曲計量としよう。(すなわち、 σ_x はグラフの頂点以外では特異性のない定曲率 -1 を持つリーマン計量だから S からその頂点を除いた部分に等角構造が入るが、グラフの頂点は除去可能な特異点となるのでこれによって S 全体に等角構造が定まる。すると一意化定理により S には曲率 -1 の完備双曲計量が入ることが分かるが、これを τ_x とするわけである。) Ahlforsの補題に

より $\sigma_x \leq \tau_x$ であることに注意しておく。また $h_{\pm\infty}$ はプリーツ面だから $\sigma_{\pm\infty} = \tau_{\pm\infty}$ であることに注意しておく。

さてここで $\text{Syst}(\tau)$ で (S, τ) の systole 全体の集合とする。ここで双曲リーマン面 (S, τ) の systole とはその面の双曲的長さが最小（従って単純）となる閉測地線のことを言う。従って C の有限部分集合とみなせる。今、systole の族 $\text{Syst}(\tau_x)$ を見ていくと、 $x \mapsto (S, \tau_x, \alpha, \beta)$ はコンパクト区間 $[-\infty, \infty]$ から Teichmüller 空間への連続写像となっているから、現れる単純閉曲線の種類は有限個である。また、 $\alpha \in \text{Syst}(\tau_x)$ とすれば α^* を $g_x(\alpha)$ と自由ホモトピックな σ_N に関する測地線として

$$\ell(\alpha) = \ell_{\sigma_N}(\alpha^*) \leq \ell_{\sigma_N}(g_x(\alpha)) = \ell_{\sigma_x}(\alpha) \leq \ell_{\tau_x}(\alpha) \leq L_0$$

を得る。最後の不等式は補題 2.1 から従う。このことから特に $\text{Syst}(\tau_x) \subset C(L_0)$ を得る。

systole として現れる単純閉曲線は generic には 1 個であるが、別の曲線に乗り換えが起こるときは必ず乗り換えの瞬間にその両方の曲線が systole 集合に含まれることになる。従って特に $C(L_0)$ の定める部分グラフの辺でその 2 点が結ばれることになり、このことから最終的に $\text{Syst}(\tau_{-\infty})$ の元と $\text{Syst}(\tau_{\infty})$ の元が $C(L_0)$ の辺で結ばれることがわかった。一方、 $\ell_{\tau_{\pm\infty}}(\alpha_{\pm 1}) = \ell(\alpha_{\pm 1})$ だったから再び補題 2.1 より $\alpha_{\pm 1}$ は $\text{Syst}(\tau_{\pm\infty})$ の元と隣接していることが分かる。よって、 α_{-1} と α_1 は $C(L_0)$ の定める部分グラフの辺によって結ばれることが証明された。 ■

8.2 要に対する上界

先の補題から次の結論を得る。

Lemma 8.2.1. ある定数 L_1 が存在して任意の要 α_n に対して $\ell(\alpha_n) \leq L_1$ が成り立つ。

Proof. E を α_+ と α_- を分離するグラフ C の辺全体の集合として e をその元とする。 $\alpha_- = \nu_-$ が非有理境界点である場合には補題 5.1 からある $\gamma_- \in C(L_0)$ が e から見て ν_- と同じ側に存在する。 α_- が有理境界点の場合には既に $\ell(\alpha_-) \leq L_0$ だから $\gamma_- = \alpha_-$ とすればよい。同様に γ_+ も定める。すると e は γ_- と γ_+ を分離していることになるが、先の補題 8.1 より部分グラフ $C(L_0)$ において γ_- と γ_+ をつなぐ道が取れる。これより e の端点のうち一方は $C(L_0)$ に属することが分かる (図 1)。

α_n は内部の要であるから定義から (4 節の (3) に当たる例外的な場合を除き) 少なくとも 2 本の上記のような辺 e_0, e_1 の共通の端点になっている。従って、もし $\ell(\alpha_n) > L_0$ であるならば、 e_0, e_1 の他方の端点 β_0, β_1 は $C(L_0)$ に属しているはずである。そこで今、 α_n, β_0 を行列 A, B で表したとするとこれは Γ の標準生成系となっており、 $[A, B]$ は放物的で β_1 は $A^{\pm 1}B$ と表される。必要なら e_0, e_1 を交換して AB が β_1 を表現す

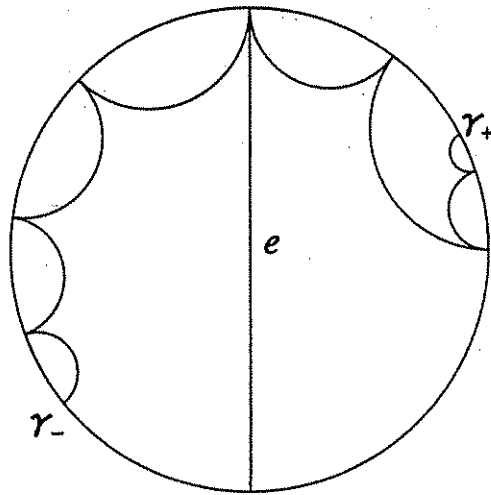


図 1:

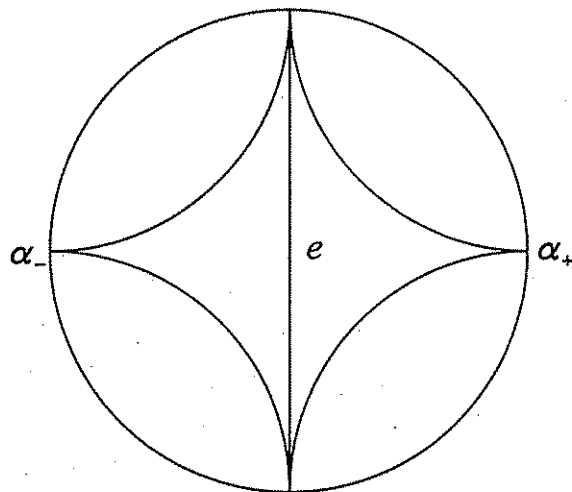


図 2:

るとしてよい。そこで7節で出てきた次の等式

$$\operatorname{tr}^2 A + \operatorname{tr}^2 B + \operatorname{tr}^2 AB - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB = 2 + \operatorname{tr}[A, B]$$

において $\operatorname{tr}[A, B] = -2$ が成り立っていることを用いる。今 $x = |\operatorname{tr} A|$ とおけば $|\operatorname{tr} B|, |\operatorname{tr} AB| \leq 2 \cosh(L_0/2)$ だから

$$x^2 = |\operatorname{tr}^2 B + \operatorname{tr}^2 AB - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB| \leq 4(2+x) \cosh^2 \frac{L_0}{2}$$

より

$$|\operatorname{tr} A| = x \leq 2 \cosh \frac{L_0}{2} \left(\cosh \frac{L_0}{2} + \sqrt{2 + \cosh^2 \frac{L_0}{2}} \right)$$

が従う。よって L_0 のみに依存する定数 $L_1 \geq L_0$ が存在して $l(\alpha_n) \leq L_1$ が成り立つ。

最後に例外的な場合を考える。このときは $E = \{e\}$ であり e に沿って隣り合った2つの Farey 三角形の e 以外の頂点が α_-, α_+ となっている (図 2)。

従って先ほどと同様の計算により同じ評価を得る。

第9章 調節された面とブロックの組立 (須川敏幸)

この節では穴あきトーラス群の商多様体に対する幾何学的モデルの構成について説明する。9.2, 9.3 節においては長さに関する上界と end-invariant data のみに依存する、ある目的に対してうまく調節された面を構成する。9.4, 9.5 節ではこのような面を使ってブロックの組立を行う。これは Margulis 柱部の形を調節するのに有効である。以下の構成において本質的なのは内部の要に対応するブロックの構成であり、境界の要に対応するブロックの組立には多少技術的な困難が伴うので早く先に読み進みたい読者は境界ブロックについては読み飛ばしても良いだろう。

なお、以下で Lipschitz とか有界という場合には特に断らない限り穴あきトーラス群 Γ によらない一様な定数で評価出来るような状況を表すものとする。

9.1 標準的計量

ν を穴あきトーラス S の等角構造として α, β をその標準生成系で α が長さ最小となるようなものとする。すると 2.3 節から $\text{Im}(\tau(S, \nu, \alpha, \beta)) \geq \sqrt{3}/2$ となることが分かる。 σ^e を ν と同じ共形類に入る S 上のユークリッド計量で α を測地線に取ったときその長さが 1 となるものとする。(つまり、 (S, ν) の穿孔 (puncture) を埋めて得られるトーラス \hat{S} の普遍被覆は複素平面となりその被覆変換群は $1, \tau = \tau(S, \nu, \alpha, \beta)$ で生成された格子に取れる。その時の普遍被覆面のユークリッド計量を標準射影 $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \hat{S}$ によって射影したものが σ^e で線分 $[0, 1]$ の像が α であると思ってよい。) そこで S を境界が α と平行であるような S 内の開円環 A と穿孔が中心線に乗っているような幅 $1/2$ の穴あき閉円環 B とに分割する。上の注意から A の幅は $(\sqrt{3}-1)/2$ 以上はあることになる。

次に σ^h を ν が自然に定め完備双曲計量 (Poincaré 計量) とする。すると標準的議論により B の近傍から穿孔の近傍を除いた部分 (例えば σ^e に関する B の $1/8$ -近傍から穿孔の $1/8$ 近傍を除いた部分 B') において σ^e と σ^h は (一様に) 比較可能になる。これを示すには例えば次のようにすればよい。 $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \hat{S}$ を上記のような標準射影として $a = \pi(0)$ が穿孔であるとする。すると $\pi^*(\sigma^e)$ は通常ユークリッド計量 $|dz|$ であり、 $\pi^*(\sigma^h)$ は双曲計量の定義から $D := \mathbb{C} \setminus A$ の双曲計量 $\lambda(z)|dz|$ に他ならない。

ただしここに Λ は格子点集合 $\{m + n\tau; m, n \in \mathbb{Z}\}$ とする。今 $\delta(z) = \text{dist}(z, \Lambda)$ とすると (ここで dist はユークリッド距離によるものとする)、Beardon-Pommerenke の結果 [BP78] から $\varepsilon(z) = \inf\{|\log |\frac{z-a}{b-a}||; a, b \in \partial D, |z-a| = \delta(z)\}$ としたときにある絶対定数 $c > 0$ が存在して

$$\frac{c}{1 + \varepsilon(z)} \leq \lambda(z)\delta(z) \leq 2$$

という評価が成り立つことが分かる。今 $|\text{Im}z| \leq 3/4$ かつ $|z| \geq 1/8$ なる点 z に対して $(2\sqrt{3}-3)/4 \leq \delta(z) \leq |3/4 + i/2| = \sqrt{13}/4$ かつ $\varepsilon(z) \leq -\log \delta(z)$ だから $\lambda(z)$ は 1 と比較可能である。このような z の射影全体が B' となるから、これで上記の主張が示されたことになる。

そこで両者を混合した計量 σ^m を考えることにする。まず $\nu = i$ の場合の Euclid 計量 σ_0^e , 双曲計量 σ_0^h とする。このとき、 σ_0^m を穿孔を中心とする (σ_0^e に関して) 半径 $1/4$ の円板の外側では σ_0^e で半径 $1/8$ の円板の内部では σ_0^h に等しくそれらを除いた部分の円環においては σ_0^e, σ_0^h の両者とも一様に比較可能な連続な計量とする。(このような計量が取れることは先の考察から分かる。もちろん具体的に構成することも可能であるが詳細は省略する。)

次に一般の ν に対しては A においては σ^e を取り、 B においては σ_0^m を取ったものを σ^m として定義する。

※ 原論文では σ^m としてはカスプの近傍では σ^h に一致するように定めているが、9.4 節の「境界ブロック」の構成においては上記の定義の方が都合がよいと思われる。実際には上で用いた Beardon-Pommerenke による評価からも分かるように上記で定めた計量 σ^m と原論文の定義における計量とは比較可能である。

正数 ε_0 を十分小さく取り上記の $1/8$ -円板が ε_0 -Margulis 柱部を含むようにしておく。もちろんこの ε_0 も絶対定数として取ることが出来る。

9.2 中間面

ここでは Canary による“初等的移動”を使って 3次元多様体 N をブロックに切り分ける時に使う面を構成する。うまく切り分けるためには元から存在するカスプ (主カスプ) の周りの Margulis 柱部以外には (列が無縁部に発散していく) Margulis 柱部を切ってしまうようにする必要がある。なぜならそのような Margulis 柱部においてはある種の pinching が起こっており色々な意味での一様な解析的評価が困難となるからである。以下では具体的な構成法について見ていこう。

まず α, β を C において隣接している組として、これに対して $\tau(S, \nu_{\alpha, \beta}, \alpha, \beta) = i$ となるような等角構造 $\nu_{\alpha, \beta}$ を考える。 $\sigma_{\alpha, \beta}^e, \sigma_{\alpha, \beta}^h, \sigma_{\alpha, \beta}^m$ をそれぞれ $\nu_{\alpha, \beta}$ に対して上で考えたような計量とする。この場合は格子点集合が $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ となり従って特に $\sigma_{\alpha, \beta}^h$ と $\sigma_{\alpha, \beta}^m$ とは比較可能となる。

Lemma 9.2.1. $L \geq L_0$ なる L を固定し、 α, β を $\mathcal{C}(L)$ に含まれる Farey 隣接する組とする。このとき L にのみ依存する定数 L' があつて、 S 上の計量 $\sigma_{\alpha, \beta}^m, \sigma_{\alpha, \beta}^h$ に関して L' -Lipschitz 連続な ρ とホモトピー同変な単体的双曲面 $f_{\alpha, \beta} : S \rightarrow N$ が存在する。特にある $\epsilon_2 = \epsilon_2(L) > 0$ が存在して $f_{\alpha, \beta}(S)$ は主カスプ以外の ϵ_2 -Margulis 柱部とは交わらない。

Proof. Γ を \mathbb{H}^3 の等長変換群の部分群とみなして、 α, β に対応する Γ の標準生成系を A, B で表す。必要なら正規化して $[A, B]$ が平行移動 $z \mapsto z + 1$ の Poincaré 拡張として得られる元としてよい。(以後は \mathbb{H}^3 としては Hamilton の四元数体の部分空間を用いたモデルを考えることによって $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}^3$ と考へて写像 $z \mapsto z + 1$ もそのまま意味を持つとしてよい。)

また、 \mathcal{T} を α, β と穿孔によって定まる S の三角形分割とし (7節参照)、 α, β に付随する \mathcal{T} に関する単体的双曲面をそれぞれ $f_0, f_1 : S \rightarrow N$ とキる。(従つて $f_0(\alpha), f_1(\beta)$ はそれぞれ A, B が被覆する N の測地線となっている。)そこで5節で説明されたような3番目のタイプの初等的移動によって f_0 を f_1 に動かすことを考へるが、説明や以下の構成の都合上しばらく普遍被覆空間に持ち上げて議論を進めることにする。まず標識付きリーマン面 $(S, \nu_{\alpha, \beta}, \alpha, \beta)$ の Fuchs 群模型 $\Gamma_{\alpha, \beta} = \langle A, B \rangle$ は対称性から $A(z) = 7/8 - 1/32(z - 3/8), B(z) = 1/8 - 1/32(z - 5/8)$ のように選べる。このとき確かに $[A, B](z) = ABA^{-1}B^{-1}(z) = z + 1$ となっている。また基本領域は例えば

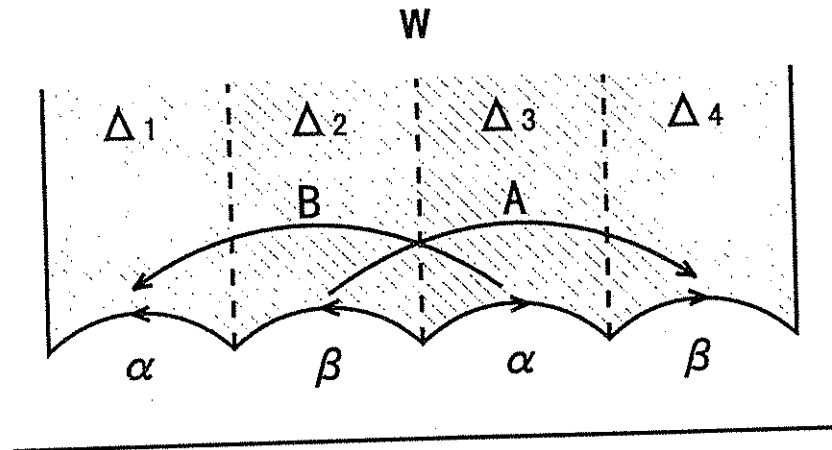


図 1:

$$W = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < 1, |z - j/8| > 1/4\sqrt{2} \text{ for } j = 1, 3, 5, 7\}$$

に取ることが出来る (図 1)。これを図のように双曲三角形 Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$)にしておく。(基本領域の取り方によって、以下に述べる構成法が若干変わってくる生成元の取り方の問題だけで本質的に影響はない。)

一方、標識 A, B に関するグラフ Γ の単体的双曲面の“基本領域”は \mathbb{H}^3 内の任意の1点 p_0 を始点に選べば次のように定まる。すなわち、 p_0 と $p_1 = BA^{-1}B^{-1}(p_0)$ を結ぶ双曲線分及び各端点と無限遠点を結ぶ双曲半直線で囲まれる双曲面を Δ'_1 とする。同様に p_1 と $p_2 = B^{-1}(p_1)$, p_2 と $p_3 = A(p_2)$, p_3 と $p_4 = ABA^{-1}(p_3) = p_0 + 1$ によって同様に得られる双曲面をそれぞれ $\Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4$ とする (図 2)。これらを N に

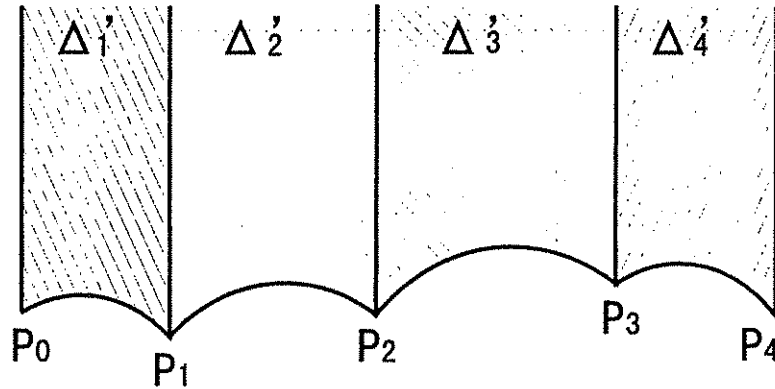


図 2:

射影して得られる面が元々の単体的双曲面 (の像) であるが、ここではこれらを \mathbb{H}^3 に持ち上げて得られる上記の“基本領域”によって考える。なお、 p_0 の射影がもちろん与えられたグラフの頂点に対応することになる。 p_0 の取り方はグラフの頂点に対応する点の持ち上げをどこに取るかということに対応している。

持ち上げ (“基本領域”) の取り方を適当に変えれば f_0 に対する最初の頂点 $p_0 = p_0(0)$ は軸 $T_{BA^{-1}B^{-1}} = B(T_A) = BA(T_A)$ に乗っているとしてよい。一方、 f_1 に対する最初の頂点 $p_0 = p_0(1)$ は軸 $(BA^{-1}B^{-1})^{-1}(T_{B^{-1}}) = BA(T_B)$ に乗っているとしてよい。そこで測地線 $B(T_A)$ と $BA(T_B)$ の共通垂線を取る。初等的移動は、まず p_0 を $p_0(0)$ から軸 $B(T_A)$ に沿って垂線の足にまで移動し、そこから垂線に沿って他方の軸 $BA(T_B)$ にまで移動し、最後に $p_0(1)$ まで移動することによって始点のパラメトリゼーション $p_0(t)$ が得られるが、それによって得られる単体的双曲面の族である。そこで補題 7.1 を用いると $BA(\text{core}_{D_2}(A) \cap \text{core}_{D_2}(B)) \neq \emptyset$ であることが分かる (証明から分かるように共通部分は共通垂線の上を取れる)。そこで、 $p_0(t)$ をこの上を取ってその点を始点とした単体的双曲面を考える。なお、単体的双曲面 $f: S \rightarrow N$ は S に双曲構造をあらかじめ入れずに考えたものであるから、今の場合そのような写像 f が計量的に良い性質を持つとは期待できないので適当に取り替える必要がある。そこで今からそのようなパラメータを考える。まず基本領域の各ピース毎に考えればよいので、 $f: \Delta_j \rightarrow \Delta'_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を境界がうまく貼り合うように Lipschitz 連続に定めればよい。 Δ'_j は \mathbb{H}^3 の全測地面に含まれるので、最初から $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2$ に含まれる三角形であるとしてよい。そこで Δ をそのような三角形としてこれに対して標準的なパラメトリゼーションを与えることを考える。(原論文では「まず境界上で等速

になるように写像を定めて、それを適当に拡張すれば Lipschitz 連続に出来る」と書かれているが、筆者の計算によれば Δ_j が二等辺三角形でない限り決して Lipschitz 連続には拡張出来ないようである。これはカスプの近くで結局大きなずれが生じてしまうからで、これを修正する必要があるものと思われる。しかし、以下で述べる方法はあまり要領が良いと言えるものではない。やや面倒な計算を必要とするので、「当然だ」と思われる方は飛ばして先に進んで頂きたい。

パラメータ空間として $T = [0, 1] \times [0, +\infty)$ を考えて、これには $(s, t) \in T$ に対して (共形ではない) 計量 $e^{-2t} ds^2 + dt^2$ を入れておく。この計量から自然に定まる距離を d_T で表すことにすると、簡単な計算から分かるように

$$\begin{aligned} e^{-\max\{t, t'\}} |s - s'| + |t - t'| &\geq d_T((s, t), (s', t')) \\ &\geq \min\{e^{-\max\{t, t'\}} |s - s'|, |t - t'|\} \geq \frac{1}{2}(e^{-\max\{t, t'\}} |s - s'| + |t - t'|) \end{aligned} \quad (9.1)$$

である。

Δ の無限遠点以外の 2 つの頂点を a, b とする。まず函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の式で定義する:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (t \leq 0), \\ 1 - t/2 & (0 < t < 2), \\ 0 & (2 \leq t). \end{cases}$$

これを用いてさらに $t \geq 0, y > 0$ に対して

$$h_y(t) = h(t, y) = t + g\left(\frac{t}{|\log y| + 1}\right) \log y$$

と定める。これは区分的に滑らかな写像になっている。また

$$\frac{1}{2} \leq h'_y(t) \leq \frac{3}{2} \quad (9.2)$$

であるから、 t に関して狭義単調増加な bi-Lipschitz 連続函数である。定数 $m > 0$ を一つ固定して a, b を始点として無限遠点に向かう測地半直線に対するパラメトリゼーションをそれぞれ $\xi_t = \text{Re}a + ime^{h(t, \text{Im}a/m)}$, $\eta_t = \text{Re}b + ime^{h(t, \text{Im}b/m)}$ によって定める。

そこで標準パラメトリゼーション $\varphi_{\Delta, m}(s, t)$ を ξ_t, η_t を $s: 1 - s$ に双曲的に内分する点とすることにより定める。すると $\varphi_{\Delta, m}: T \rightarrow \Delta$ は Lipschitz 連続となっていることを以下で確認していこう。まず次のことに注意する。

$$d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t) \leq d_{\mathbb{H}}(a, b). \quad (9.3)$$

これを示すにはまず $p = \text{Im}a/m, q = \text{Im}b/m$, $K_p(t) = e^{h(t, p)}$, $K_q(t) = e^{h(t, q)}$, $c = |\text{Re}a - \text{Re}b|/m$ とおいた時、

$$\tanh^2(d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t)) = \left| \frac{\xi_t - \eta_t}{1 - \bar{\eta}_t \xi_t} \right|^2 = \frac{c^2 + (K_p(t) - K_q(t))^2}{c^2 + (K_p(t) + K_q(t))^2}$$

となるので主張(9.3)は計算すると

$$c^2(K_p K_q - pq) + pq(pK_p - qK_q)\left(\frac{K_q}{q} - \frac{K_p}{p}\right) \geq 0.$$

と同値になることが分かる。第1項は明らかに非負だから第2項が非負であることが言えればよい。これを言うには p, q に関する式の対称性に注意すれば t を固定した時に pK_p が p について単調増加であり、 K_p/p が単調増加であることが言えれば十分である。 $k_{\pm}(p) = \log(p^{\pm 1} K_p) = \pm \log p + h(t, p)$ とおけば、これは次のように確かめられる。 χ を条件 $0 < t/(|\log p| + 1) < 2$ に対する定義関数とすれば

$$k'_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{p} + g(t/(|\log p| + 1)) \frac{1}{p} - \chi \frac{t|\log p|}{2(|\log p| + 1)^2 p}$$

である。ここで χ が 1 であるのは $0 < t < 2(|\log p| + 1)$ である場合だけだから $0 \leq \chi \frac{t|\log p|}{2(|\log p| + 1)^2} \leq |\log p|/(|\log p| + 1) \leq 1$ となることが分かる。これより $k'_+(p) \geq 0, k'_-(p) < 0$ であることが分かるので、確かに上の主張が示された。

次に ξ_t, η_t ともに t が十分大きくなれば同じ虚部を持つことから次の評価が出来ることに注意する。任意の $t \geq 1 + \max\{|\log \text{Im} a/m|, |\log \text{Im} b/m|\}$ に対して

$$d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t) = d_{\mathbb{H}}(\text{Re} a + ime^t, \text{Re} b + ime^t) = \tanh^{-1} \left(1/\sqrt{1 + (2e^t/c)^2} \right), \quad (9.4)$$

ここに c は上で定義したものと同一である。

さて、ここで次の仮定を設ける。

仮定：定数 $M > 0$ が存在して次が成り立つ：

$$d_{\mathbb{H}}(a, b) \leq M, |\log \text{Im} a/m| \leq M, |\log \text{Im} b/m| \leq M. \quad (9.5)$$

するとまず第1の不等式から先と同様に

$$\frac{(cm)^2 + (\text{Im} a - \text{Im} b)^2}{(cm)^2 + (\text{Im} a + \text{Im} b)^2} \leq \tanh^2(M)$$

が成り立つ。これを用いると評価式

$$\frac{\text{Im} a + \text{Im} b}{cm} \geq \sqrt{\coth^2(M) - 1}$$

を得る。(9.5)の他方の不等式から $(\text{Im} a + \text{Im} b)/m \leq 2e^M$ を得るので、これらを合わせて

$$c \leq \frac{2e^M}{\sqrt{\coth^2(M) - 1}}$$

が得られる。従って評価式(9.3), (9.4) 及び仮定(9.5) を用いれば、定数 M にのみ依存する定数 $K > 1, K' > 3$ が存在して

$$\frac{ce^{-t}}{K} \leq d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t) \leq Kce^{-t} \leq K'e^{-t} \quad (9.6)$$

が任意の $t \geq 0$ について成り立つ。

次に一般の 2 点の距離の評価を行おう。まず $\varphi = \varphi_{\Delta, m}$ の定義からただちに分かるように $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t)) = |s - s'|d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t)$ である。一方、(9.2) から分かるように $s = 0, 1$ に対しては $|t - t'|/2 \leq d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s, t')) \leq 3|t - t'|/2$ が成り立つ。この種の評価式を一般の s についても示したい。そこでまず次の主張を示すことにする。

主張: $z_0, z_1, z'_1 \in \mathbb{H}$ に対して z, z' を z_0, z_1 及び z_0, z'_1 をそれぞれ $s : 1 - s$ に内分する点とする。このとき $d_{\mathbb{H}}(z, z') \leq d_{\mathbb{H}}(z_1, z'_1)$ が成り立つ。

これを示すには双曲三角法を用いればよい。双曲線分 $[z_0, z_1]$ 及び $[z_0, z'_1]$ のなす角を θ とし、 $u = d_{\mathbb{H}}(z_0, z_1), u' = d_{\mathbb{H}}(z_0, z'_1)$ とすれば、平面三角法の余弦定理に対応する定理から

$$F(s) := \cosh d_{\mathbb{H}}(z, z') = \cosh(tu) \cosh(tu') - \cos \theta \sinh(tu) \sinh(tu')$$

となる (例えば谷口・奥村 [TO:hyp] 参照)。そこでこれを微分してみると

$$\begin{aligned} F'(s) &= \cosh(tu) \cosh(tu') [(u' - u \cos \theta) \tanh(tu') + (u - u' \cos \theta) \tanh(tu)] \\ &\geq \cosh(tu) \cosh(tu') [(u' - u) \tanh(tu') + (u - u') \tanh(tu)] \\ &= \cosh(tu) \cosh(tu') (u' - u) (\tanh(tu') - \tanh(tu)) \geq 0 \end{aligned}$$

となってこれが単調増加であることが分かる。よって主張が従う。

この主張を用いれば満足すべき評価式が得られることを説明しよう。まず、補助的に ξ_t と $\eta_{t'}$ を $s : 1 - s$ に内分する点を取ってそれを z とする (図 3)。すると上の主張から、 $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), z) \leq d_{\mathbb{H}}(\eta_t, \eta_{t'})$, $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t'), z) \leq d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \xi_{t'})$ であることが分かる。よって、

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s, t')) &\leq d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), z) + d_{\mathbb{H}}(z, \varphi(s, t')) \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(\eta_t, \eta_{t'}) + d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \xi_{t'}) \leq 3|t - t'| \end{aligned}$$

を得る。

以上を合わせると一般の 2 点の距離の評価が得られる。簡単のために $t \leq t'$ とすると

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) &\leq d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s, t')) + d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t'), \varphi(s', t')) \\ &\leq 3|t - t'| + K'e^{-t}|s - s'| \end{aligned}$$

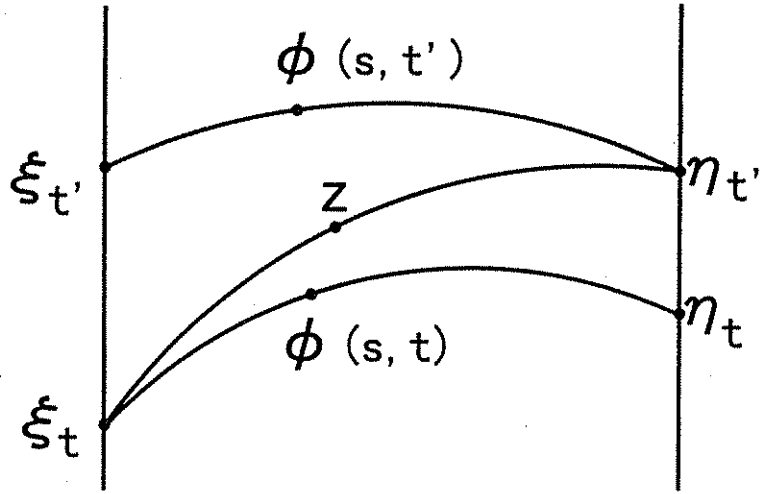


図 3:

が得られる。よって(9.1)から、

$$d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \leq 2K' d_T((s, t), (s', t'))$$

であることが分かる。特に $\varphi_{\Delta, m} : T \rightarrow \Delta$ は仮定(9.5)における定数 M にのみ依存する定数を持つ Lipschitz 連続函数となっている。

さらに、特に Δ が最初に与えた標準 Fuchs 群 Γ_0 の基本領域の一つのピース Δ_j であるときは標準パラメトリゼーション φ がもっと良い性質を持つことを示しておこう。この場合は三角形の2頂点 a, b が $\text{Im}a = \text{Im}b = 1/8$ かつ $\text{Re}b - \text{Re}a = 1/4$ を満たしているとしてよい。このとき、 $m = 1/8$ に取れば $\varphi = \varphi_{\Delta, m}$ が bi-Lipschitz 連続になっていることを示しておこう。まず適当に平行移動して $a = m(1-i), b = m(1+i)$ としてよい。この場合は $\xi_t = -m + ime^t, \eta_t = m + ime^t$ と非常に単純な形になることにまず注意する。特に(9.4)は t に関する条件なしに常に成立し、 $d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \xi_{t'}) = |t - t'|$ などが成り立つ。従って $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s, t')) \leq 2|t - t'|$ が成り立つことに注意しておく。

$0 \leq t < t' < \infty$ とする。 ξ_t, η_t を通る測地線 λ はその対称性から虚軸と直交するので、原点を中心とする半径 $|\xi_t| = m| -1 + ie^t | = m\sqrt{1 + e^{2t}}$ の半円周である。 $\xi_{t'}, \eta_{t'}$ を通る測地線 λ' も同様である。特にこの2測地線の共通垂線は虚軸になっている。従って $S = e^{t'-t} > 1$ とおけば

$$\text{dist}_{\mathbb{H}}(\lambda, \lambda') = d_{\mathbb{H}}(|\xi_t|, |\xi_{t'}|) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{2t'}}{1 + e^{2t}} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + S^2 e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

となっている。この最右辺は S を固定したとき t について単調増加だから、特に

$$\text{dist}_{\mathbb{H}}(\lambda, \lambda') \geq \frac{1}{2} \log \frac{1 + S^2}{2} \geq \frac{1}{2} \log S = |t' - t|/2$$

となっている。一方、 $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \geq \text{dist}_{\mathbb{H}}(\lambda, \lambda')$ であるから、これより任意の2点 $(s, t), (s', t') \in T$ に対して

$$d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \geq |t' - t|/2$$

を得る。また、先に示されたことから、ある絶対定数 $K_0 > 1$ が存在して $d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t))$ $|s - s'|d_{\mathbb{H}}(\xi_t, \eta_t) \geq |s - s'|e^{-t}/K_0$ が成り立っている。よって、 $|t - t'| \leq |s - s'|e^{-t}/4K_0$ ならば

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) &\geq d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s, t')) - d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t'), \varphi(s', t')) \\ &\geq \frac{|s - s'|}{K_0 e^t} - 2|t - t'| \geq \frac{|s - s'|}{2K_0 e^t} \end{aligned}$$

が成り立つ。一方、 $|t - t'| \geq |s - s'|e^{-t}/4K_0$ ならば

$$d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \geq \frac{1}{2}|t - t'| \geq \frac{|s - s'|}{8K_0 e^t}$$

が成り立ち、いずれの場合にせよつねに

$$d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \geq \max \left\{ \frac{|t' - t|}{2}, \frac{|s - s'|}{8K_0 e^t} \right\}$$

が成り立つことが分かる。従って

$$d_{\mathbb{H}}(\varphi(s, t), \varphi(s', t')) \geq \frac{1}{16K_0} d_T((s, t), (s', t'))$$

を得る。これは $\varphi^{-1} : T \rightarrow \Delta$ が $16K_0$ -Lipschitz であることを意味する。

さて、最後に元々の状況に戻ろう。まず、始点 p_0 の取り方と core_D の定義及び A, B の移動距離が L で押さえられていることから、各 Δ'_j の下辺の長さ $d_{\mathbb{H}}(p_j, p_{j-1})$ が $L + D_2$ で押さえられることが分かる。故に \mathbb{H} の中で考えた時 $d_{\mathbb{H}}(a_j, b_j) \leq L + D_2$ であることが従う。特にこれより $|\log \text{Im} a_j / \text{Im} b_j| = d_{\mathbb{H}}(i \text{Im} a_j, i \text{Im} b_j) \leq d_{\mathbb{H}}(a_j, b_j) \leq L + D_2$ であるから、 $m = \text{Im} a_1$ に取っておけば $\text{Im} b_j = \text{Im} a_{j-1}$ であることに注意すれば $|\log \text{Im} a_j / m| \leq 3(L + D_2)$ かつ $|\log \text{Im} b_j / m| \leq 3(L + D_2)$ が各 j に対して言える。よって $M = 3(L + D_2)$ に取っておけば仮定(9.5)の条件が全て満たされる。よって、各 Δ_j 上で写像 $f : \Delta_j \rightarrow \Delta'_j$ を $f = \varphi_{\Delta'_j, m} \circ \varphi_{\Delta_j, 1/8}^{-1}$ として定めればこれは M のみに依存する定数で評価できる Lipschitz 連続な同相写像となっており各辺において境界値が一致しているのでうまく貼り合わせることが出来て、これにより写像 $f : S \rightarrow N$ を定めることが出来る。これが求める“中間面” $f_{\alpha, \beta}$ を与えている。

最後にこの単体的双曲面が十分小さい ε_2 を取れば主カスプの Margulis 柱部以外の ε_2 -Margulis 柱部とは交わらないことを示しておこう。まず、(3次元双曲空間に対する) Margulis 定数 ε_0 に対して $\eta_0 > 0$ を $d_{\mathbb{H}}(i\eta_0, i\eta_0 + 1) = \varepsilon_0$ なるものとする。

すると上で構成した基本領域 $W' = \cup_{j=1}^4 \overline{\Delta_j}$ で高さが η_0 以下の部分 W'_0 の双曲直径が L のみに依存する定数で押さえられることにまず注意しておこう。これは Δ_j の下辺の任意の点 p に対して $d_{\mathbb{H}^3}(p, p+1) \leq 4(L + D_2)$ だから p の高さを $H(p)$ で表せば上でやったような簡単な計算から $H(p) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\coth^2(4L) - 1}$ となることが分かる。一方、各三角形 Δ_j の下辺の長さが $L + D_2$ 以下なのだから、これらの三角形の高さが η_0 以下の部分の双曲直径は L のみに依存する定数で押さえられることが分かり、従って主張が従う。この事実と $p_2 \in W'_0$ における A, B の移動距離は $L + D_2$ 以下なのだから、任意の点 $p \in W'_0$ に対しては

$$d_{\mathbb{H}^3}(p, Ap), d_{\mathbb{H}^3}(p, Bp) \leq 2\text{diam}(W'_0) + L + D_2 \leq K(L) \quad (9.7)$$

が成り立つ。ここに $K(L)$ は L のみに依存する定数である。そこで $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$ を補題 6.1 における記号を用いて $2R(\varepsilon_2) > K(L)$ を満たすように十分小さく取っておく。すると $f_{\alpha, \beta}(S)$ は主カスプ以外の ε_2 -Margulis 柱部とは交わらない。実際、もし主カスプ以外のある $T_{\varepsilon_2}(\gamma)$ と $f_{\alpha, \beta}$ の像が交わったとしよう。すると γ を表現する適当な $C \in \Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を取ればある点 q が $W' \cap T_{\varepsilon_2}(C)$ に含まれるようにできる (つまり、 $d_{\mathbb{H}^3}(q, Cq) \leq \varepsilon_2$)。 C は仮定より放物型元ではない。従って特に $q \in W'_0$ でなければならない。 C は A, B いずれかの生成する巡回群に含まれないから、例えば A がそうだとしてみよう。もし $Aq \in T_{\varepsilon_2}(C)$ だとすると Margulis の補題から C は A の何乗かで書けることになり、取り方に反する。よって $q \notin T_{\varepsilon_2}(C)$, つまり q は他の柱部の成分に属することになる。すると補題 6.1 から $d_{\mathbb{H}^3}(q, Aq) \geq 2\text{dist}(\partial T_{\varepsilon_0}(C), \partial T_{\varepsilon_2}(C)) \geq 2R(\varepsilon_2) > K(L)$ となる。これは (9.7) に反することになる。

9.3 境界面

N の凸核に含まれないような Margulis 柱部の形を制御するためには、中間面の構成と同様の議論を行う必要がある。もちろんこのようなことは N が位相的有限な縁部 (end) を持つ場合に限るので、ある意味で “generic” な対象については不必要であるとも言える。以下では e^+ が幾何学的有限縁部である場合について考察するがもちろん同様のことが e^- の場合にも成り立つ。

e^+ が幾何学的有限縁部と仮定しよう。 S_+ を対応するリーマン面 $\Omega_+/\rho(\pi_1(S))$ とする。もし α_+ が放物的でない限り S_+ はリーマン面 (S, ν_+) と同一視出来る注意しておく。このとき α_+ はこの面の長さ最小の単純閉曲線を表している。そこで適当に β_+ を取って 9.1 節と同 | にして計量 $\sigma_+^h, \sigma_+^e, \sigma_+^m$ を構成しておく。また、 A_+, B_+ も同様にして構成された S_+ 内の円環及び穿孔閉円環とする。

α_+ が放物的 (すなわち $\alpha_+ = \nu_+$) の時は S_+ は 3 穿孔球面となっている。このときは (S_+, σ_+^e) は 1 つの穿孔を持つ無限シリンダー $\mathbb{C}^* \setminus \{1 \text{ 点}\}$ とみなせる (このとき

計量は $|dz|/|z|$ のように書ける)。この場合は A_+ は穿孔円板と等角同値な 2 つの円環の直和になっていることに注意する。

$C_r(N)$ を N の凸核の r -近傍とする (r -近傍を考えるのは、Fuchs 群のように凸核が次元の落ちた部分空間に含まれてしまう場合に統一的に扱えるようにするためである)。 $r > 0$ を固定して、 $\hat{C}(N)$ を $C_r(N)$ と主カスプ以外の全ての ε_0 -Margulis 柱部との和集合を表すものとする。閉測地線は全て凸核に含まれるから、少なくとも Margulis 柱部は凸核と共通部分を持つが、凸核の境界はプリーツ面の構造を持ち (例えば [30] 参照) 従って自然な双曲計量を N から誘導されることに注意すると、collar lemma からこのような境界の各成分は高々一つの Margulis 柱部としか交わらない。よって、実際には $\hat{C}(N)$ と $C_r(N)$ との差は高々 2 つの Margulis 柱部のみで、 α_+, α_- に対応するものしか可能性はない (と書かれているが、実際にそうであるかどうかは筆者には理解出来なかった。少なくとも、Margulis 定数 ε_0 を十分小さく取っておけば正しい)。 $\partial_+ \hat{C}(N), \partial_+ C_r(N)$ をそれぞれ $\partial \hat{C}(N), \partial C_r(N)$ の e_+ の側にある境界とすると、これらは一致するかあるいは $\partial_+ \hat{C}(N) = U_+ \cup \mathcal{R}_+$ の形に書ける。ここで、 U_+ は Margulis 柱部 $T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ の境界に含まれる円環で、 \mathcal{R}_+ は $S \setminus \alpha_+$ にアイソトピックな穿孔円環である (図 4)。

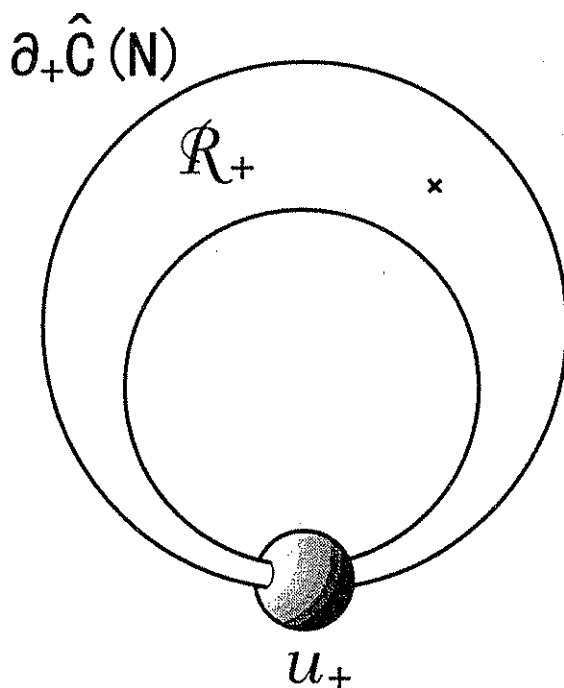


図 4:

Lemma 9.3.1. e_+ が幾何学的有限な縁部とすると、表現 ρ とホモトピー同変な位相同型写像 $\Pi_+ : S_+ \rightarrow \partial_+ \hat{C}(N)$ で次の性質を持つものが存在する: $\Pi_+(A_+) = U_+, \Pi_+(B_+) = \mathcal{R}_+$ であり、 Π_+ は S_+ の計量 σ_+^{ρ} 及び \mathbb{H}^3 の双曲計量から $\partial_+ \hat{C}$ に誘導

される計量に関して $\Pi_+ : B_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$ は K -biLipschitz かつ $\Pi_+ : A_+ \rightarrow U_+$ は K -擬等角である。ここに $K > 1$ は表現 ρ には依存しない定数である。同様のことが e_- に対しても成立する。

Remark. 原論文では Π_+ 自身が全体で K -biLipschitz であると述べられているが、biLipschitz ならば擬等角であるので後半の主張は余計ということになってしまうので、このように解釈すべきであろう。実際にこのことしか証明されていない。また、計量 σ_+^m と σ_+^h は B_+ 上では比較可能であるから、この補題は σ_+^h に関して示してもよいことになる。

Proof. まず $\Pi_r : S_+ \rightarrow \partial_+ C_r(N)$ を直交射影とする。すなわち、 $C_r(\Lambda(\Gamma))$ を \mathbb{H}^3 への $C_r(N)$ の逆像とするとこれは双曲的に凸だから (実際には強凸になっている。[30] Lemma 1.4.7 参照) 任意の $z \in \Omega_+$ に対してその点を頂点とする閉接球を考えると $C_r(\Lambda(\Gamma))$ と交わる最小のものが取れて、そのとき交点は唯一であるからそれを $\tilde{\Pi}_r(z)$ と表すことにする。すると $\tilde{\Pi}_r : \Omega_+ \rightarrow C_r(\Lambda(\Gamma))$ は Γ -同変な写像となるからこの写像は下に落ちる。それが Π_r である。この構成法について詳しくは Epstein-Marden [30] を参照されたい。

[30] の定理 2.3.1 から $\Pi_r : (S_+, \sigma_+^h) \rightarrow \partial_+ C_r(N)$ は biLipschitz 同相写像であり、その定数は r にしか依存しない。

ただ、このままだと像が主カスプ以外の Margulis 柱部とぶつかってしまうおそれがある。そのために像が $T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ と重なってしまう部分を $\partial T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ に逃がしてやる必要がある。そうすると S_+ の計量も替えないといけない。それが σ_+^m を導入した理由であった。この点に留意してさらに以下のように写像を修正していく。

$x \in S_+$ と $y = \Pi_r(x)$ を結ぶ測地線 m_x を考えると、これが $T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ と交わるための必要十分条件は $y \notin \text{Int}(\mathcal{R}_+)$ であるが、この場合には z を m_x と $\partial T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ との唯一の交点とすると $z \in U_+$ となるので $\hat{\Pi}_r(x) = z$ と定義し、そうでない場合は $\hat{\Pi}_r(x) = y$ と定める。すると、 z が $\partial_+ C_r(N)$ との距離が r 以上であるならば、 z における $\partial T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ の接平面と m_x とのなす角は r にのみ依存する正の定数で下から押さえられることが分かる。これは例えば m_x の α_+ とのなす角が $\pi/2$ である場合は次のように計算出来る。(一般の場合は $l(\alpha_+)$ が小さければこのなす角は $\pi/2$ に近いので、だいたい同じ状況であることが想像して頂けるであろう。) 考えやすくするために、さらに \mathbb{H}^3 に持ち上げて考えるが、面倒なので記号はそのまま流用する。 m_x を含み、 α_+ に垂直な全測地面 Δ を取り、それを α_+ との交点が原点となるような単位円板モデルで表す。以下はこの円板内でのみ考える。 y を通って m_x に垂直な双曲直線 l を考えると $C_r(N) \cap \Delta$ は凸だからこの直線を境界とする閉半平面に含まれる。特に α_+ の軸の交点である原点はこちら側に含まれることになり、 z と原点は l によって分離されることになる。従って原点と z を結ぶ線分は l と交わるのでその交点を w とする (図 5)。角 yzw を θ とすると、 z において m_x と $\partial_+ T_{\varepsilon_0}(\alpha_+)$ とのなす角はちょうど $\pi/2 - \theta$ となるから、例えば $\sin \theta$ を 1 より小さい定数で上から評価

定するホモトピーによってホモトピックな擬等角写像 $\Pi: A_+ \rightarrow U_+$ に取り直すことが出来る。そこで、 A_+ の上でこれに取り替えた写像を Π_+ とすれば、求めていた写像が構成できたことになる。

9.4 組立に必要なブロック

この節では以下の構成に必要なブロックについて説明する。ブロックとは具体的には $S \times [0, 1]$ に (主カスプを除く Margulis 柱部の近傍を除いて) 計量を与えたものである。後の節において要の列に応じてこれらをつないで3次元多様体 N を近似することを考える。

★内部ブロック

α, β, γ を $\mathcal{C}(L)$ の相異なる頂点で β, γ がともに α に隣接しているものとする (従って、 γ は α の周りに何回か Dehn twist を行ったものとなっている)。これらに対して内部ブロック $B = B_{\alpha, \beta, \gamma}$ を次のように構成する。9.1, 9.2 節におけるように S に計量 $\sigma_1 = \sigma_{\alpha, \beta}^m, \sigma_2 = \sigma_{\alpha, \gamma}^m$ を定めておく。ただし、このような計量の定め方は S 上の自己同相写像で恒等写像にアイソトピックなものによる合成の自由度を持っている。従って、実際に計量を定めるにはその辺まで含めてきっちりと定めてやる必要がある。例えば $(S, \nu_{\alpha, \beta})$ を基準にして考えれば γ を表す格子の元は $i+n$ の形で書ける。そこで写像 $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を基本領域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上では

$$\varphi(x+iy) = \begin{cases} x+iy & (0 \leq y \leq 1/2), \\ x+2n(y-1/2)+iy & (1/2 < y \leq 1) \end{cases}$$

によって定め、それを格子群 $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ の作用で不変になるように自然に拡張することによって定める。ただし、ここで S の穿孔は点 $i/4$ (及びそれを格子でばらまいた点) に乗っているような普遍被覆面を考えている。すると、 φ は $(S, \nu_{\alpha, \beta})$ の上の擬等角写像を誘導し、 (α, β) を (α, γ) に写す。よってこれによって新たに S 上に計量を誘導したものが $\sigma_2 = \sigma_{\alpha, \gamma}^m$ であると理解すればよいであろう。そうすれば、作り方からこれらの計量に関して9.1節で導入された開円環 A は一致して、しかもその補集合 B の上で $\sigma_1 = \sigma_2$ となっている。 A の両計量に関する $1/8$ -近傍を A' としておく。

一方が他方を essential に含む (nest する) トーラス体となるような $B = S \times [0, 1]$ の部分集合 $U = A \times (1/4, 3/4)$ 及び $U' = A' \times (0, 1)$ を考え、 $B^0 = B \setminus U$ と定める (図6参照)。また、 $\partial_0 B, \partial_1 B$ をそれぞれ $S \times \{0\}, S \times \{1\}$ を表すものとする。

これらの境界 $\partial_j B = S \times \{j\}$ に計量 σ_j を定め、さらにそれを B^0 にまで次のように拡張する: Q を S の (両計量に関する) ε_0 -カスプ近傍として、 $S_0 = S \setminus Q, B_0 = B \setminus Q, Q_B = Q \times [0, 1]$ と定める。 $S_0 \times [0, 1/4]$ 上では直積計量 $\sigma_0 \times dt^2 := \sigma_0 + dt^2$ を置く (ここに $t \in [0, 4]$)。同様に $S_0 \times [3/4, 1]$ には直積計量 $\sigma_1 \times dt^2$ を置く。 B_0 上では元々 $\sigma_0 = \sigma_1$ だったから $B_0 \times [1/4, 3/4]$ 上では先に定義した直積計量をそのまま

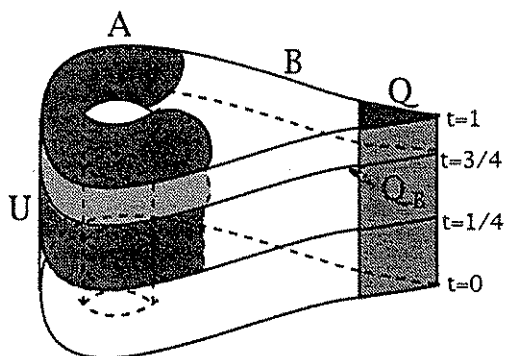


図 6:

自然に拡張しておく。この計量を境界 $\partial S_0 \times [0, 1]$ に制限すれば自然なシリンダー上の Euclid 計量となっているから、 Q_B には 3次元多様体の (rank 1) 放物的カスプの計量を与えることが出来る。具体的には計量の境界値が一致するように rank 1 のカスプ $C/\langle z \mapsto z+1 \rangle$ を高さ 1 かつ幅が単射半径 ε_0 となるように切り取ったものと同視してやればよい。

(B^0 以外の部分には当面は計量を定義しない。)

★境界ブロック

e_+ を幾何学的有限とし、 $\alpha_+ \in C$ を複素構造 ν_+ において最短である単純閉曲線とする。また、 β を $C(L)$ に属する Farey 隣接するものとしておく。このとき、境界ブロック $B = B_{\alpha_+, \beta}$ を次のように定める。

まず α_+ は放物的でないとする。先と同様に $\sigma_0 = \sigma_{\alpha_+, \beta}^m$ とする。一方、 σ_1 としては $\beta_+ = \beta$ とした時の 9.3 節における σ_+^m を採用する。先と同様にして φ を基本領域の $0 \leq y \leq 1/2$ の範囲で恒等的になるように適当に定めて、両計量に関する開円環 A が一致し、さらに我々の σ^m の定義の仕方から、 B 上で $\sigma_0 = \sigma_1$ としてよい。(原論文では B 上での計量は必ずしも一致しないと書かれているが、我々の構成法からはこの点についての心配は不要であろう。もし必要なら、以下の記述は多少の修正を要する。その場合は原論文を参照して頂きたい。)

A の $1/4$ 近傍 A' 及びカスプ Q およびトーラス体 U' も先と同様に定義する。ただし、 U は $A \times (1/4, 1)$ として定める。 $B \setminus U$ 上の計量も先と全く同様に定める。

次に α_+ が放物的であるとする (すなわち $\nu_+ = \alpha_+ \in C$)。このときは $B_{\alpha_+, \beta}$ の定義は $S \times [0, 1] \setminus (a \times \{1\})$ に変える必要がある。ここで a は α を表す曲線である。この場合は $S_+ \cong S \setminus a$ は Euclid 面積が有限でないシリンダーとなるが、他の構成は先と同様である。このような場合は $B_{\alpha_+, \beta}$ を放物元を持つ境界ブロックと呼ぶことにする。

反対側の縁部 e_- についても上記と同様に定義する。ただし、この場合は 0 と 1 は入れ替えて考える必要があることに注意しておく。

最後に $\alpha_+ = \alpha_-$ の場合、つまり同じ曲線が両縁部で最短になっているときは、両

側境界ブロック $B = B_{\alpha_{\pm}}$ を以下のように定義する。まず σ_0, σ_1 はそれぞれ σ_-^m, σ_+^m によって定義し、同様に共通の A, B を持つようにして B 上では $\sigma_0 = \sigma_1$ となるようにしておく。この場合は $U = A \times (0, 1)$ として、それ以外は先と同様にして記号を定めておく。この場合も α_+, α_- のいずれかが放物的になることがあるが、両方同時にはそうならないことに注意しておく。

9.5 ブロック写像と8の字による議論

Lemma 9.5.1. B を前節で定義されたブロックとする。すなわち、ある $\alpha, \beta, \gamma \in C(L)$ で β, γ がともに α に隣接しているものに対する $B_{\alpha, \beta, \gamma}$ であるか、または境界ブロック $B_{\alpha_+, \beta}, B_{\alpha_-, \beta}, B_{\alpha_{\pm}}$ のいずれかとする。後者の場合、 α_{\pm} を単に α で表しておくことにする。

このとき次のような性質を持つ写像 $H_B : B \rightarrow \hat{C}$ が存在する。

1. H_B は B^0 の上で Lipschitz 連続であり、その定数 K は一様に取れる。
2. H_B は Margulis 構造を保つ。すなわち、もし $l(\alpha) \leq \varepsilon_3$ ならば H_B は $(U, \partial U)$ を $(T_{\varepsilon_0}(\alpha), \partial T_{\varepsilon_0}(\alpha))$ に写す。さらに、主カスプ以外の ε_0 -Margulis 柱部で芯の長さが ε_3 以下のものと $H_B(B)$ とは交わらない。
3. 境界ブロックに対しては H_B はその境界を保つ。すなわち、 $\alpha = \alpha_+$ ならば H_B は $\partial_1 B$ を $\partial_+ \hat{C}$ に写し、 $\alpha = \alpha_-$ ならば $\partial_0 B$ を $\partial_- \hat{C}$ に写す。
4. H_B は主カスプ構造も保つ。すなわち、 H_B は $(Q_B, \partial Q_B)$ を $(Q_N, \partial Q_N)$ を proper に写し、しかも $B \setminus Q_B$ を $N \setminus Q$ に写す。ただし、ここに Q_N は N の主カスプの ε_0 -柱部であるとする。

ここで定数 K, δ, ε_3 は L にのみ依存する定数である。

Proof. 以下では単に $H = H_B$ と書くことにする。まず内部ブロック B に対してその境界での写像を定めることにする。便利のため、 $\beta_0 = \beta, \beta_1 = \gamma$ と書くことにする。 B の計量が $\partial_j B$ に誘導する計量は $\sigma_j = \sigma_{\alpha, \beta_j}^m$ だったことを思い出しておく。そこで Lemma 9.1 によって得られる写像を $h_j = f_{\alpha, \beta_j}$ としておくと、これらは σ_j に関して Lipschitz であり ε_2 -Margulis 柱部を避けるようなものであった。今 $\pi_1(B, *)$ は非可換で h_j は π_1 -単射 (つまり incompressible) だから $h_0|_B$ と $h_1|_B$ の間の正規化された測地的ホモトピー $H_1 : B \times [0, 1] \rightarrow N$ が一意的に存在する。つまり各点 x に対して $H_1(x, t)$ は定速度で $h_0(x)$ と $h_1(x)$ を結ぶ測地線をパラメトライズしたものである (\mathbb{H}^3 に持ち上げて考えれば、これはいわゆる Ahlfors ホモトピーと呼ばれる構成法により得られる。詳細は例えば [69], [Lemma 4.1] を参照のこと)。

そこでまず補助的な拡張 $H_2 : B \setminus U' \rightarrow N$ を $B' \times [0, 1]$ 上には H_1 で (ここに $B' = S \setminus A'$)、 $S \times \{j\}$ 上では h_j で定義することによって定義する。

同様のことは境界ブロックについても行える。例えば $B = B_{\alpha_+, \beta}$ の時を考えてみる。 h_0 については上と同様に $f_{\alpha_+, \beta}$ とすればよく、 h_1 は9.3節で構成された $\Pi_+ : S \rightarrow \partial_+ \hat{C}$ を取ればよい。放物元を持つ場合も同様である。

さらに $\alpha = \alpha_+ = \alpha_-$ の場合は $h_0 = \Pi_-$, $h_1 = \Pi_+$ とすればよい。いずれの場合も H_1 は上と同様に測地的ホモトピーを取っておく。

さて、以上のように定義された $H_2 : B \setminus U' \rightarrow N$ が Lipschitz であることを示しておこう。

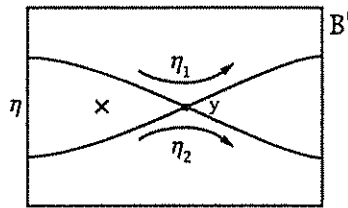


図 7:

η を図 7 のように B' の中に入る (従って、例えば $\alpha\beta\alpha\beta^{-1}$ のような word で書ける基本群の元である)。 η の (向き付けを考えない) ホモトピー類は α にしか依存せず、 σ_j に関する長さは一様に有界である。そこで η の代表元としては σ_0, σ_1 いずれに関する長さも l_1 以下であるようなものを選んでおくことにする。 η は図のように単純閉曲線 η_1, η_2 が 1 点 y で交わって出来た曲線と見なすことが出来る。 η_1, η_2 は $\pi_1(S, y)$ においては相異なる元で、ともに α の共役類になっている。 $H_2(y, 0)$ の \mathbb{H}^3 への持ち上げ \hat{y}_0 を適当に選んで、それを基点とする $(h_0)_*(\eta_j)$ の持ち上げにより、 $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の元 A_j を定める。つまり $(h_0)_*(\eta_j)$ の持ち上げの終点が $A_j(\hat{y}_0)$ であるとする。(従って、 $A_1 \neq A_2$ である。)

一方測地線 $H_2(y, t), 0 \leq t \leq 1$ の \hat{y}_0 を始点とする持ち上げの終点を \hat{y}_1 としておく。すると h_j は L' -Lipschitz だったから

$$d_{\mathbb{H}^3}(\hat{y}_j, A_k(\hat{y}_j)) \leq l_{\mathbb{H}^3}((h_j)_*(\eta_k)) \leq L' l_{\sigma_j}(\eta_k) \leq L' l_1 =: D$$

という評価を得る。これは \hat{y}_0, \hat{y}_1 がともに $\text{core}_D(A_1) \cap \text{core}_D(A_2)$ に属することを意味する。一方、 A_1, A_2 は互いに共役だったから同じ移動距離 (translation length) を持ち可換ではないことから、Jørgensen の不等式 (あるいは collar lemma) から容易に分かるように $\text{core}_D(A_1) \cap \text{core}_D(A_2)$ の双曲直径は D のみに依存する定数で上から押さえられる。特に $d_{\mathbb{H}^3}(\hat{y}_0, \hat{y}_1)$ は有界である。

さて、 B' のうちでこの点 y と距離が有界な点 z については測地線 $H_2(z, t)$ の長さは (y を挟んで考えれば容易に分かるように) やはり有界である。一方、 B' の主カスプの近傍 Q では h_0, h_1 はそれぞれ標準的な埋め込みとなっていたのだから (Lemma 9.1 の証明参照)、 Q_B における Lipschitz 性は直接証明できる。

次に H_2 を B の他の部分に拡張することを考える。最初にまず内部ブロックの場合について考える。 V' を U' の境界のトーラスとする。つまり $V' = A' \times \{0, 1\} \cup \partial A' \times [0, 1]$ である。そこで A を α を表す Γ の元の一つとして、 A に関する N のトーラス体被覆 (これはリーマン面論でよく使われる円環被覆の3次元版である) を $\tilde{N} = \mathbb{H} / \langle \rho(\alpha) \rangle$ としてその測地的芯曲線を $\tilde{\alpha}$ とする。すると $h_j = H_2|_{A' \times \{j\}}$ は α について協調的で A に関する移動距離も有界だから、写像 $H_2|_{V'}$ は $\tilde{H}_2: V' \rightarrow \tilde{N}$ に持ち上げることが出来、しかもその像が $\tilde{\alpha}$ の ε_0 -Margulis 柱部 (すなわち $T_{\varepsilon_0}(\alpha)$ の一意的なコンパクトな持ち上げ) \tilde{T} の境界トーラス $F_0 = \partial \tilde{T}$ の有界な近傍に入るように出来る。つまり、ある定数 K が存在して任意の点 $p \in \tilde{H}_2(V')$ が $\text{dist}(p, F_0) \leq K$ となるように出来る。一方、Lemma 6.1 から $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば、 $\ell(\alpha) \leq \varepsilon$ に対して α の ε -Margulis 柱部の“半径”が $K+1$ 以上に出来る。従って $\tilde{H}_2(V')$ は芯 $\tilde{\alpha}$ か廻りなくとも距離が1以上あることになる。よって半径方向への射影 $\pi: \tilde{N} \setminus \tilde{\alpha} \rightarrow F_0$ は $\tilde{H}_2(V')$ 上では一様に Lipschitz 連続となっている。

さて $\tilde{N} \setminus \tilde{\alpha}$ を F_0 への半径方向への射影を用いて次のように積空間に分解する：

$$\tilde{N} \setminus \tilde{\alpha} \cong F_0 \times (0, \infty).$$

この同一視を用いて \tilde{H}_2 を $V' \times [0, 1] \rightarrow \tilde{N}$ にレトラクションとして次のように拡張することが出来る：

$$(y, t) \mapsto (\pi(y), t \text{dist}(\tilde{H}_2(y), \tilde{\alpha}) + (1-t)\rho),$$

ただしここで ρ は \tilde{T} の半径とする。一方、 $U' \setminus U$ は $V' \setminus [0, 1]$ と biLipschitz だからこれによって \tilde{H}_2 を $U' \setminus U$ にも Lipschitz 連続に拡張することが出来る。さらにこれを $\tilde{N} \rightarrow N$ によって射影して H_2 の $U' \setminus U$ への拡張を得る。さらにこの ∂U への制限は $\partial T_{\varepsilon_0}(\alpha)$ への写像となっているが、例えば U を先ほどの $U' \setminus U \cong V' \times [0, 1]$ に同期するように $U \cong S^1 \times \Delta$ (ここに $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$) と見なすことによってこれをさらに $U \rightarrow T_{\varepsilon_0}(\alpha)$ の写像に拡張することが出来る。(U 上には元々計量は定義されていなかったから Lipschitz 連続性についてはこだわらなくてよい。) 以上により得られた写像を $H_3: B \rightarrow N$ としておく。

次に $\ell(\alpha) \geq \varepsilon$ の場合は、先ほどの $\tilde{H}_2: V' \rightarrow \tilde{N}$ が芯の有界な近傍に入ることから、この場合は \tilde{H}_2 を $V' \times [0, 1] \rightarrow \tilde{N}$ に

$$(y, t) \mapsto (\pi(y), t \text{dist}(\tilde{H}_2(y), \tilde{\alpha})),$$

によって拡張してそれを H_2 に射影して H_2 の $U' \setminus U$ への拡張を得る。この拡張の ∂U の像は測地線 α^* そのものになっておりこれを先と同様に $U \cong S^1 \times \Delta$ とみなして Δ 方向には定値に拡張する。最終的に得られた写像を同様に H_3 と書くことにする。

境界ブロックの場合もほぼ同様であるがやや注意すべき点もある。この場合は部分的に \hat{C} から像がはみ出してしまうおそれがあるが、そのような場合にはその部分

の境界のところは動かさずに像を $\partial T_{\varepsilon_0}(\alpha)$ に押しつけてしまえばよい。この場合も同様に一様に Lipschitz にできる。

以上のような構成により H_3 は $B \setminus U$ をある $\varepsilon_3 > 0$ に対して (主カスプ以外の) $2\varepsilon_3$ -Margulis 柱部とは交わらないように写像している。これは H_3 の Lipschitz 性と $B \setminus U$ の距離 σ_j に関する有界性から (Lemma 6.1 に注意すれば) 容易に従う。従って、たとえば $T_{\varepsilon_0}(\gamma) \setminus T_{2\varepsilon_3}(\gamma)$ を $\partial T_{\varepsilon_0}(\gamma)$ にレトラクトさせることでさらに一様に Lipschitz という性質を保って写像 H_3 を H_4 に変形することができる。これによって条件 (2) が満たされることになる。同様に主カスプに対してもレトラクションを行って条件 (4) を満足するようにできる。これを最終的に $H = H_B$ に選べばよい。条件 (3) は Lemma 9.2 と元々の向き付けの定義から従う。

Remark. 上記の構成で $H|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \partial T_{\varepsilon_0}(\alpha)$ は同相写像にはホモトピックとは限らないことに注意しておく。実際、この次数が 1 にならないような場合も起こりうる。