

Punctured Torus Groups に対する
ending lamination 予想の解決
(Y.N.Minsky の仕事から)

糸健太郎 (東工大理)

小森洋平 (阪市大理)

須川敏幸 (京大 理)

谷口雅彦 (京大 理)

Topics in Complex Analysis 1998

はじめに

この資料は平成10年1月12日(月)ー14日(水)に奈良女子大学理学部情報科学科で行われた小研究集会「The Classification of Punctured-Torus Groups」(Minskyの論文の勉強会)の報告集である。

この勉強会ではMinskyのプレプリント(Yair N. Minsky: The Classification of Punctured-Torus Groups, SUNY-preprint, 1997, Ann. of Math. に掲載予定)を糸健太郎(東工大)、須川敏幸(京大)、谷口雅彦(京大)、小森洋平(大阪市大)の4名が分担して紹介した。Minskyはこの論文で punctured-torus groups といわれる2元生成自由群で生成元の交換子が放物的元であるクライン群全体は end invariants という不変量を用いて分類できることを示した。これは Thurston の ending lamination 予想における最初の完全な解答になっている。手短かに結果を述べる。Once-punctured torus S の基本群 $\pi_1(S)$ から $PSL_2(\mathbb{C})$ への忠実な離散表現で、生成系の交換子が放物的元に移るような表現全体を $PSL_2(\mathbb{C})$ の共役な作用で割った空間を \mathcal{D} とする。以下 punctured-torus group $\rho(\pi_1(S))$ にその end invariants の順序対 (ν_-, ν_+) を対応させる、閉円板の直積 $\bar{\mathbb{D}} \times \bar{\mathbb{D}}$ から単位円の直積 $S^1 \times S^1$ の対角線集合 Δ を除いた集合への \mathcal{D} からの写像

$$\nu: \mathcal{D} \rightarrow (\bar{\mathbb{D}} \times \bar{\mathbb{D}}) \setminus \Delta$$

を定義する。 $N = \mathbb{H}^3 / \rho(\pi_1(S))$ は once-punctured torus と \mathbb{R} の直積 $S \times \mathbb{R}$ に同相になるので2つの ends を持つ。ここで \mathbb{H}^3 から定まる N の向きで N の2つの ends を順序付けして (e_-, e_+) とする。 $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ の不連続領域を Ω とし、境界 Ω/Γ の成分がどちらの end に入るかで分けて、 Ω_s/Γ ($s = \pm$) とする。このとき Ω_s/Γ が once-punctured torus の場合は S の Teichmüller 空間である単位円板の点 $\nu_s \in \mathbb{D}$ とし、 Ω_s/Γ が three-punctured sphere の場合は $S \times (-1, 1)$ の境界から単純閉曲線 γ_s を除くことに対応するが、 S 上の単純閉曲線は有理数 $\hat{\mathbb{Q}}$ でパラメーター付けできるので $\nu_s \in \hat{\mathbb{Q}}$ とし、 Ω_s が空集合の場合は end e_s を通り抜けてゆく単純閉測地線の列 $\{\gamma_n^*\}$ があるのでこの $\{\gamma_n^*\}$ に対応する有理数の $\hat{\mathbb{R}}$ での集積点である無理数 $\nu_s \in \hat{\mathbb{R}}$ とする。

与えられた punctured torus group $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ に対し、 (ν_-, ν_+) をその end invariants (の順序対) と呼ぶ。表現 $\rho \in \mathcal{D}$ に対しその end invariants の順序対を対応させることにより、次の写像が定まる。

$$\nu: \mathcal{D} \rightarrow (\bar{\mathbb{D}} \times \bar{\mathbb{D}}) \setminus \Delta$$

主結果は次の3つである。

1. 定理 A (ending lamination 定理)

Punctured-torus group $\rho: \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ は $PSL_2(\mathbb{C})$ での共役を除いて end invariants (ν_-, ν_+) で決まる。

2. 定理 B (変形空間の位相)

$$\nu^{-1} : \bar{D} \times \bar{D} \setminus \Delta \rightarrow \mathcal{D}(\pi_1(S))$$

は連続かつ全単射。さらに Bers スライス は閉円板と同相で Maskit スライス は閉円板から境界の 1 点を除いた空間と同相である。

3. 定理 C (擬等角剛性)

球面への 2 つの punctured-torus groups の作用が位相共役ならば、その位相写像が向きを保つか逆にするかによって擬等角共役か反擬等角共役になる。

定理 B において ν は連続でない。また不変量の空間の内部 $D \times D$ は丁度構造安定 (特に擬フックス群の) 表現に対応するので、力学系の立場からみればこの定理は punctured torus groups の表現の族について構造安定の稠密性を示したことになる。特にこの結果から、Bers スライスの退化群はすべて擬フックス群の極限であるという Bers の b-予想について、punctured torus groups の場合肯定的な解答を与えたことになる。

このように内容豊かなこの論文を 3 日間で紹介するのはとてもハードなことだった。小森が 1,11,12 節を、糸さんが 2,6,7 節を、谷口さんが 3,4,5 節を、須川さんが 8,9,10 節を担当したが、2 日目の須川さんの講演のところで小森はその後の担当箇所を紹介できなくなり、最終日はいままでの 2 日間で到達したこの論文の要になる要 (pivot) 定理の証明を復習することしかできず、結局上にのべた 3 つの定理までたどり着けなかった。この資料がその時決着できなかった内容を補ってくれることを願う。分担者がそれぞれの節の解説を独立に書いて、宮地秀樹 (大阪市大) さんに構成を手伝っていただいた。

この研究集会で講演をしてくださり、また貴重な時間をさいて資料作成に協力してくださった糸さん、谷口さん、須川さんに感謝する。また集会の最初に「Minsky の仕事のクライン群論における意義について」というタイトルで講演してくださった大鹿健一 (東大) さんにも感謝する。また研究集会に参加してくださった皆様に、結局結論まで到達できなかった研究集会だったにもかかわらず誰 1 人最後まで不満を直接口に出さなかったことに感謝する。また会場であった奈良女子大学理学部情報科学科の和田昌昭さん、山下靖さん、そして作間誠 (大阪大) さんに、研究集会がスムーズに進行するように色々助けて下さったことを感謝する。

最後にこの資料を完成するにあたり、辛抱強く付き合ってくくださった谷口雅彦さんに重ねてお礼を申し上げる。

1998年11月14日
 大阪市立大学 理学部 数学教室
 (編集責任者) 小森 洋平

目次

第1章	Ending lamination 予想とその帰結 (小森洋平)	1
1.1	クライン群の分類	1
1.2	穴あきトーラス群とその変形空間	1
1.3	End invariants	2
1.4	主結果	3
1.5	歴史についてのコメント	4
1.6	一般の場合についての考察	5
1.7	Ending lamination 定理の証明のアイデア	6
1.7.1	証明の大筋	6
1.7.2	モデル多様体の構成	7
1.7.3	要定理とその意味	10
1.7.4	モデル写像の構成	10
1.7.5	幾何極限とその応用	12
第2章	Farey 三角形分割とトーラス (糸健太郎)	15
2.1	The complex of curves	15
2.2	Neighbors と Dehn ツイスト	16
2.3	Teichmüller 空間	16
2.4	擬等角写像に関する補題	20
第3章	幾何学的素直性 (谷口雅彦)	21
第4章	要定理 (谷口雅彦)	23
第5章	単体的双曲面 (谷口雅彦)	27
第6章	Margulis tubes の構造 (糸健太郎)	31
6.1	Thick-thin 分解	31
6.2	Margulis tubes の Teichmüller パラメーター	33
6.3	曲面群内の Margulis tubes	34
第7章	Farey neighbors の幾何 (糸健太郎)	37

第 8 章	連結性と先験的上界 (須川敏幸)	41
8.1	曲線複体の連結性	42
8.2	要に対する上界	43
第 9 章	調節された面とブロックの組立 (須川敏幸)	47
9.1	標準的計量	47
9.2	中間面	48
9.3	境界面	56
9.4	組立に必要なブロック	60
9.5	ブロック写像と 8 の字による議論	62
第 10 章	要定理の証明 (谷口雅彦)	67
第 11 章	モデル多様体と幾何極限 (小森洋平)	73
11.1	モデルの構成	73
11.2	幾何極限	74
11.3	擬等長写像への持ち上げ	81
11.4	補題 11.3 の証明	83
11.5	凸核の外部	84
第 12 章	主定理の証明 (小森洋平)	87
12.1	ending lamination 定理	87
12.2	剛性定理	87
12.3	変形空間の位相	89

第1章 Ending lamination 予想とその帰結（小森洋平）

1.1 クライン群の分類

メビウス変換の離散部分群の一般的な分類問題はまだ解決していない。その予想される解決の形は70年代後半にはでき上がっていてそれは次のようなものである；与えられた群 G から $PSL_2(\mathbb{C})$ への表現の空間の中で忠実な離散表現全体 \mathcal{D} は（自明な場合を除いて）構造安定な表現全体のなす開集合の閉包になっているであろう。 \mathcal{D} の構造安定な成分では全ての表現は互いに擬等角同値であり、よって Teichmüller 空間またはその商空間でパラメーター付けされるであろう。一方 \mathcal{D} の境界上には幾何学的無限群か新たに生じた放物型元を含む群があり、それらは Teichmüller パラメーターと ending lamination といわれる組み合わせ的不変量で記述することができるであろう（Abikoff[1] 参照）。

この論文において、Minsky はこれら予想を非自明な変形空間を持つ最も簡単なクライン群である穴あきトーラス群の場合に確かめた。特に基本となる解答は Thurston の ending lamination 予想の解決である（定理 A）。

1.2 穴あきトーラス群とその変形空間

$PSL_2(\mathbb{C})$ の2元生成自由クライン群で、自由群としての2つの生成元の交換子が放物的元であるものを穴あきトーラス群（punctured torus group）という。（自由群の任意の自己同型は Nielsen 変換でかけることから、任意の2つの生成元の交換子は放物的元になることに注意する。）一方 S を穴あきトーラスとして、その基本群 $\pi_1(S)$ から $PSL_2(\mathbb{C})$ への生成系の交換子が放物的元に移るような表現全体を $PSL_2(\mathbb{C})$ の共役な作用で割った空間を $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\pi_1(S))$ とする。 \mathcal{R} 中の忠実な離散表現全体 \mathcal{D} は \mathcal{R} の自然な位相（いわゆる代数的位相）で閉集合になり（このことは例えば Jørgensen の不等式からわかる）、空でない内部を持ちそれはちょうど擬フックス表現全体になる（このことは例えば構造安定性と擬等角安定性と幾何学的有限性の相互関係についての Marden[57] と Sullivan[83] の定理からわかる）。ここで交換子の条件は S の穴（puncture）の周りを回るループは3次元多様体 \mathbb{H}^3/Γ のカスプを決めることを意味する。つまり \mathcal{D} は穴あきトーラス群の変形空間とみなすことが

できる。(以下しばしば表現のことを標識付き群 (marked group) ともいう)。この論文では穴あきトーラス群の不変量を定義して分類することを考える。以下そのような不変量を \mathcal{D} 上の写像として定義する。

1.3 End invariants

穴あきトーラス群 $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ は自由積への分解に関する Bonahon 条件を満たす。よって Γ は幾何学的素直 (geometrically tame) であり、 \mathbb{H}^3/Γ は穴あきトーラス S と \mathbb{R} の直積 $S \times \mathbb{R}$ に同相になる。生成元の交換子は放物的元で、この元の定める階数 1 のカスプを主カスプ (main cusp) という。主カスプに対応する ϵ_0 -Margulis tube Q_N を N から除いたものを \check{N} とする。穴の周りの開近傍を S から取り除いた面を S_0 とかくと \check{N} は $S_0 \times \mathbb{R}$ に同相になる。以下では \check{N} の end を N の end ということにする。つまり N は 2 つの ends を持つ。

ここで N に \mathbb{H}^3 から定まる向きを定義し、 S の向きを固定する。このとき表現 ρ を誘導する同一視 $N \cong S \times (-1, 1)$ が (ホモトピー同値の意味で) 定まる。 N の 2 つの ends のうち $S \times \{1\}$ の近傍の end を e_+ とし、 $S \times \{-1\}$ の近傍の end を e_- とすることにより、 N の 2 つの ends を順序付けする。

Γ の不連続領域を Ω とし、 $\bar{N} = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega)/\Gamma$ とする。 \bar{N} の境界 Ω/Γ の成分を N のどちらの end に入るかで分けて、 Ω_s/Γ ($s = \pm$) とする。このとき次の 3 つの場合に分かれ、単位閉円板 $\bar{\mathbb{D}}$ に値をとる end e_s の end invariants $\nu_s \in \bar{\mathbb{D}}$ が定義される。

1. Ω_s が位相的円板で、 Ω_s/Γ が穴あきトーラスの場合: このとき S の Teichmüller 空間である単位円板 \mathbb{D} の点 $\nu_s \in \mathbb{D}$ が定まる (以下無限遠点を付け加えた実数直線 $\hat{\mathbb{R}}$ と \mathbb{D} の境界である単位円周 S^1 を同一視する)。
2. Ω_s が円板の可算和で、 Ω_s/Γ が 3 点穴あき球面の場合: このときこれらの面は、対応する $S \times (-1, 1)$ の境界から単純閉曲線 γ_s を除くことに対応するが、 S 上の単純閉曲線は (標識、つまり $\pi_1(S)$ の生成系を固定すると) 有理数 $\hat{\mathbb{Q}}$ でパラメーター付けできるので $\nu_s \in \hat{\mathbb{Q}}$ とする。(つまり Γ の放物的元の共役類が定まる。)
3. Ω_s が空集合の場合: Bonahon の定理より end は単純退化型 (simply degenerate) であり、end e_s を通り抜けてゆく単純閉測地線の列 $\{\gamma_n^*\}$ がある。この $\{\gamma_n^*\}$ に対応する有理数の $\hat{\mathbb{R}}$ での集積点が一意的に定まり無理数になる。その無理数 $\nu_s \in \hat{\mathbb{R}}$ を傾きに持つ測地線で得られる geodesic lamination を ending lamination という。

与えられた標識付き穴あきトーラス群 $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ に対し、上のように定まる (ν_-, ν_+) をその end invariants (の順序対) と呼ぶ。

単位円の直積 $S^1 \times S^1$ の対角線集合を Δ とする。表現 $\rho \in \mathcal{D}$ に対しその end

invariants の順序対を対応させることにより、次の写像が定まる。

$$\nu: \mathcal{D} \rightarrow (\bar{\mathcal{D}} \times \bar{\mathcal{D}}) \setminus \Delta$$

Δ の点は写像 ν の像にはならない：多様体の両方の ends で、同じ元は放物的になれない。より一般に 2 つの ending laminations は必ず相異なる (Thurston[85], Bonahon[14] 参照)。両方の end invariants ν_{\pm} が $\mathcal{D} \cup \hat{\mathcal{Q}}$ に入るとき、群は幾何学的有限になり、これは Ahlfors, Bers, Kra, Marden, Maskit 等により深く研究されてきた。一方の不変量が $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に入るとき群は幾何学的無限になり、この場合の不変量の存在は Thurston と Bonahon による。Thurston の ending lamination 予想とは、これらの不変量が群を等長写像での共役を除いて一意的に決めるという内容である。

1.4 主結果

この論文では次の 3 つ結果を証明する。

定理 A (ending lamination 定理)

標識付き穴あきトーラス群 $\rho: \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ は $PSL_2(\mathbb{C})$ での共役を除いて end invariants (ν_-, ν_+) で決まる。

別の言い方をすれば写像 $\nu: \rho \mapsto (\nu_-, \nu_+)$ は単射である。Bers の同時一意化定理 [10] と Thurston の 2 重極限定理 [84] から全射もいえる。定理 A の証明の核心は定理 4.1 (要定理) で、これは end invariants から群の擬等長類を決定するメインステップになる。特に長い間予想されていたように、end invariants の連分数展開が大きい係数を含むならば、商多様体のなかに十分短い測地線があることがわかる。要定理の主張は円板内の Farey 三角形の組み合わせ (2 章を見よ) の言葉で述べられる (4 章を見よ)。

定理 B (変形空間の位相)

写像

$$\nu^{-1}: \bar{\mathcal{D}} \times \bar{\mathcal{D}} \setminus \Delta \rightarrow \mathcal{D}(\pi_1(S))$$

は連続かつ全単射。さらに Bers スライス は閉円板と同相で Maskit スライス は閉円板から境界の 1 点を除いた空間と同相である。

大切な注意として、この定理 B は ν^{-1} が同相だといっているのではない。実際 ν は不連続である。ある表現 ρ に収束するが、その end invariants の順序対は Δ に向かうような表現の列 ρ_i が実際に構成できる (例えばある $\alpha \in \mathbb{C}$ をとって、相異なるスピードで Dehn ツイストしていく列 $(D_{\alpha}^i \nu_0, D_{\alpha}^{2i} \nu_0)$ を考えればよい)。

しかし不変量の空間の内部 $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ は丁度構造安定 (特に擬フックス群の) 表現に対応するので、力学系の立場からみれば穴あきトーラス群の表現の族について構造安定の稠密性を示したことになる。特にこの結果から、Bers スライスの退化群はす

べて擬フックス群の極限であるという Bers の予想 [11] に穴あきトーラス群の場合肯定的な解答を与えたことになる。ここで Bers スライスとは、我々の記号ではスライス $\{x_0\} \times \bar{D}$ ($x_0 \in D$) の ν^{-1} での像のことである。Bers は一般の曲面 S に対してもこれらのスライスを定義していて、それは不変成分 Ω の下側の標識付き商曲面が S の Teichmüller 空間内の点として固定されるような $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ の表現の集まりである (Gardiner[33] 参照)。Bers はこのようなスライスがコンパクトであることを示し、(S の Teichmüller 空間と同一視される) 内部の閉包になっていると予想した。我々の場合、 ν^{-1} は連続で、 $\{x_0\} \times \bar{D}$ はコンパクトなので、像もやはりコンパクトになり、 ν^{-1} は同相写像を与える。よって Bers の予想は穴あきトーラスの場合に正しいことがわかる。

Maskit スライスも同様な状況で、この場合 x_0 は境界上の有理点である。点 (x_0, x_0) は除かれるので、スライスは $\nu^{-1}(\{x_0\} \times (\bar{D} - \{x_0\}))$ とかける (この場合についても Maskit スライスは高次の種数の場合にも定義される)。Maskit スライスはコンパクトではないので、 ν^{-1} が同相写像を与えることを示すには注意が必要である。そのためには ν^{-1} を $\{x_0\} \times (\bar{D} - \{x_0\})$ に制限すると proper な写像であること、つまり end invariants の列 (x_0, y_i) が $y_i \rightarrow x_0$ を満たすならば対応する表現は発散することを示せば十分である (詳しくは 1.2 章参照)。

最後の応用は次の剛性定理である。

定理 C (擬等角剛性)

球面への 2 つの穴あきトーラス群の作用が位相共役ならば、その位相写像が向きを保つか逆にするかによって擬等角共役か反擬等角共役になる。

1.5 歴史についてのコメント

Ahlfors と Bers が最初に (任意種数の) 擬フックス群の変形空間を研究し、Teichmüller 空間の直積 (いまの場合は $D \times D$) で記述できることを示した ([4,10,11] 参照)。Maskit は不連続領域が pinching されて新しい放物的元が現れる現象に対応する、変形空間の境界の群について研究した [59]。我々の議論ではこれは ν_+ や ν_- が境界 \hat{R} の有理点であることに対応する。Jørgensen は [46] で擬フックス群である穴あきトーラス群について調べ、特にこの論文の定理 4.1 と非常に近い Farey 三角形による組み合わせ的記述を得た。Jørgensen はまた退化群 (degenerate group) についても調べ、特に [50] では Marden とともに Farey 三角形を用いて互いに擬等角同値でない 2 つの退化群を構成した。退化群の存在は最初に Bers によって示された。より一般には Thurston が幾何学的に研究してその end invariant を定義した (3 章)。Bonahon は Thurston の理論が曲面群 (surface group) であるクライン群に適用できることを示した。これらの研究がこの論文の出発点になっている。

ここで考える問題は McMullen によっても研究され、McMullen は Bers スライス

の境界上にはカスプ (ν_+ が有理点に対応する) が稠密にあることを示した [66]。特に彼の方法を用いれば穴あきトーラスの場合境界が Jordan 曲線になることがわかる (12.3 節参照)。Wright は穴あきトーラスの Maskit スライスの境界上の群の極限集合の組み合わせ的性質を詳しく調べ極限集合や Maskit スライスの境界の精密なコンピュータグラフィックスを描いた [88]。それは上記の予想を保証する内容である。Keen-Series は穴あきトーラス群の Maskit スライスの内部の幾何学的座標を与え、Wright の結果に証明を与えた [53]。

最近 Bowditch は代数的方法を用いて、放物的な交換子を持つ $\pi_1(S)$ の (離散とは限らない) 一般の表現から決まる Farey グラフ上のトレース関数を調べた [16]。特に Bowditch はこの論文とはまったく違う方法で補題 8.1 のより強い結果を示した。Alperin と Dicks と Porti は Farey グラフを用いて S^1 上の穴あきトーラス束である Gieseking 多様体の幾何を調べ [5]、特にこの場合に Cannon-Thurston の結果 [25] の別証明を与えた。

1.6 一般の場合についての考察

直接この論文のアイデアを一般化できることがいくつかある。4 つ穴あき球面もほぼ同様に扱うことができる。特に単純閉曲線の組み合わせ論は Farey 三角形で記述でき、補題 9.3 の 8 の字の議論も使える。

さらに (M, P) を指標付き多様体とする。つまり M はコンパクト 3 次元多様体で P は ∂M のトーラスかアニュラスの集まりとする。さらに $\partial M \setminus P$ の成分はすべて M で圧縮不可能な穴あきトーラスか 4 つ穴あき球面とする。 M から双曲 3 次元多様体 N へのホモトピー同値な埋め込みがあって P の各成分を相異なる放物的カスプにおくるとする。このときこの論文のテクニックがこの多様体に使えて、ある制限付きの ending lamination 定理が成立する (このような議論がどのようにうまくいくかについては [69] を参照)。また剛性定理 (C) もこの状況に拡張出来る。大鹿 [74] を参照。

この結果を超えて一般の高次の種数の曲面群の場合にいくには、いくつかの困難がある。Farey グラフを一般化した自然な単体的複体はあるが、その性質を理解するのはむずかしい。Masur-Minsky [63] において、これらのアイデアからこの複体について研究している。Margulis tube の直径の評価も一般には出来ず、これは一般の曲面群の幾何極限がこの論文の 11.2 節で得られる結果に比べ、より複雑であることに関係している。起こりうる現象については Brock [18] を参照。

1.7 Ending lamination 定理の証明のアイデア

2重に退化した (doubly degenerate) 穴あきトーラス群、つまりその end invariants が2つとも無理数の場合に ending lamination 定理 (定理 A) の証明の流れを追ってみることにする。示すべき定理は次である。

定理 標識付き穴あきトーラス群 Γ_1 と Γ_2 が等しい end invariants (ν_-, ν_+) をもち、 ν_{\pm} はともに無理数とする。このとき Γ_1 と Γ_2 は $PSL_2(\mathbb{C})$ での共役を除いて等しい。

1.7.1 証明の大筋

次の Sullivan の剛性定理より Γ_1 と Γ_2 の \hat{C} への作用が擬等角同値であることを言えば十分であることがわかる。

定理 ([82]) 2つの有限生成クライン群 Γ_1 と Γ_2 が \hat{C} に作用しているとする。いま擬等角写像 $\mathcal{F}: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ が存在して Γ_1 の不連続領域では等角で $\Gamma_2 = \mathcal{F} \circ \Gamma_1 \circ \mathcal{F}^{-1}$ とすると、 \mathcal{F} はメビウス変換である。

Γ_1 と Γ_2 が擬等角同値をいうには、次の定理より2つの群の \mathbb{H}^3 への作用が擬等長同値であればよいことがわかる。

定理 ([72,34,27]) 任意の擬等長写像 $F: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ は擬等角写像 $\partial F: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ に拡張される。

ここで距離空間の間の写像 $F: X \rightarrow Y$ は擬等長的とは、ある定数 K と δ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対し、

$$\frac{1}{K}d(x, y) - \delta \leq d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y) + \delta$$

が成り立つこととする。また $F(X)$ が Y の任意の点から有界であるような擬等長写像 $F: X \rightarrow Y$ に対して、 $G(Y)$ が X の任意の点から有界であるような擬等長写像 $G: Y \rightarrow X$ が F の擬逆写像 (quasi inverse) F^{-1} であるとは、任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対し、 $d_X(x, G(F(x)))$ と $d_Y(y, F(G(y)))$ が共に有界であることとする。

一般に擬等長写像 $f: X \rightarrow Y$ の普遍被覆空間への持ち上げ $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ は擬等長写像ではない (擬等長写像より弱い擬 Lipschitz 写像でも同様のことがいえる: [69] pp549-550 の例を参照)。そこで普遍被覆空間への持ち上げで擬等長写像になるものがとれるような擬等長写像を持ち上げ可能な (liftable) 擬等長写像ということにする。

つまり Γ_1 と Γ_2 に対応する双曲3次元多様体 $N_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $N_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ の間に持ち上げ可能な擬等長写像があればよい。

次の定理はそのための十分条件を与える。

定理 ([69] の補題 3.1. と系 3.2. 参照)

局所コンパクト連結道距離空間 X と Y の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、普遍被覆空間への持ち上げを $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ とする。 f が以下を満たすとき f は持ち上げ可能な擬等長写像である。

Q1. f は全射かつホモトピー同値である。

Q2. f は擬等長写像である。

Q3. f は持ち上げ可能な擬 Lipschitz 写像である。

Q4. 任意の $B > 0$ に対し、 $A > 0$ が存在して、任意の被覆変換 $\alpha: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ と $\xi \in \tilde{X}$ に対し、 $d_{\tilde{Y}}(\tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\alpha(\xi))) \leq B$ ならば $d_{\tilde{X}}(\xi, \alpha(\xi)) \leq A$ である。

そこで Γ_1 と Γ_2 の end invariants の順序対 (ν_-, ν_+) のみからモデル多様体 M とモデル写像 $f_1: N_1 \rightarrow M$ と $f_2: N_2 \rightarrow M$ を構成し、 f_1 と f_2 がそれぞれ上の定理の 4 つの条件をみたすことを確かめる。その結果 $f_2^{-1} \circ f_1: N_1 \rightarrow N_2$ は持ち上げ可能な擬等長写像となり、以上の考察から Γ_1 と Γ_2 は $PSL_2(\mathbb{C})$ で共役になる。

1.7.2 モデル多様体の構成

Farey 三角形分割:

S の基本群 $\pi_1(S)$ の生成元の順序対 α, β (つまり S の標識) を 1 つ固定すると 1 次元ホモロジー群 $H_1(S)$ から \mathbb{Z}^2 への写像が定まる。 S 上の単純閉曲線が定めるホモロジー類が $p[\alpha] + q[\beta]$ とかけているとき有理数 $-p/q$ を対応させることにより、 S 上の単純閉曲線の向きを忘れた自由ホモトピー類全体 \mathcal{C} と有理数 $\hat{\mathbb{Q}}$ 全体との間に自然な対応が定まる。2 つの有理数 $p/q, r/s \in \hat{\mathbb{Q}}$ が隣接するとは、 $|ps - qr| = 1$ を満たすこととする。これを上の対応で S 上の単純閉曲線でみると、単純閉曲線 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ が隣接することは α, β が $\pi_1(S)$ の生成系となることと同値である。 $\mathbb{D} \cup \hat{\mathbb{Q}}$ 内で隣接する有理数同士を双曲直線でむすんでできる $\mathbb{D} \cup \hat{\mathbb{Q}}$ の三角形分割を Farey 三角形分割といい、2 つの頂点を結ぶ辺を Farey 辺ということにする。 $\alpha \in \mathcal{C}$ の隣接する有理数全体に $S^1 \setminus \{\alpha\}$ 上で左向きに向きをいれ $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ としておく。このとき正の Dehn ツイスト D_α を $D_\alpha(\beta_i) = \beta_{i+1}$ で定義する。

pivot 列と幅列:

2 つの相異なる無理数 (ν_-, ν_+) に対し、 ν_- と ν_+ を分離する Farey 辺全体を $E(\nu_-, \nu_+)$ とする。そして $E(\nu_-, \nu_+)$ に含まれる 2 本以上の Farey 辺の頂点になる \mathcal{C} の元を要(かなめ, pivot) といい、その全体を P とかいて pivot 列という。 $E(\nu_-, \nu_+)$ に含まれる 2 つの Farey 辺 e, f に対し、 e が ν_- と f (の内部) を \mathbb{D} 内で分離するとき $e < f$ とすると、 $(P, <)$ は順序集合 $\{\alpha_n\}$ になる。この順序による 3 つ組 $(\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ に対し、ある整数 $w(n)$ が存在して $\alpha_{n+1} = D_{\alpha_n}^{w(n)} \alpha_{n-1}$ を満たす。この整数の列 $W = \{w(n)\}$ を幅列 (width sequence) という。pivot 列 P の $SL_2(\mathbb{Z})$ での軌道全体が幅列 W に対応することに注意する。

Teichmüller パラメーター :

S の Teichmüller 空間として D または H^2 がとれる。 S 上の等角構造 ν と交点数 $i(\alpha, \beta)$ が $+1$ になるような S の基本群 $\pi_1(S)$ の生成系 $\{\alpha, \beta\}$ に対し、 (S, ν, α, β) の Teichmüller パラメーター $\tau(S, \nu, \alpha, \beta)$ が $\tau \in H^2$ であるとは $C/Z \cdot 1 + Z \cdot \tau$ から 1 点除いた穴あきトーラスが標識込みで (S, ν, α, β) と同型なことをいう。

Margulis tubes :

双曲 3 次元多様体 $N = H^3/\Gamma$ の ϵ -thin part とは、単射半径が $\epsilon/2$ 未満の点全体のこととする。このとき普遍定数 (Margulis 定数) $\epsilon_0 > 0$ が存在して、 N の ϵ_0 -thin part は閉測地線の tube 近傍かカस्प円柱かカस्पトーラスになる。これらを ϵ_0 -Margulis tube $T_{\epsilon_0}(g)$ ($g \in \Gamma$) という。表現 $\rho \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ と単純閉曲線 $\alpha \in \mathcal{C}$ に対し、 $T_{\epsilon_0}(\alpha) = T_{\epsilon_0}(\rho(\alpha))$ とする。 $\rho \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ に対し、 $g = \rho(\alpha)$ が放物的元でないとする。 $H = H^3 \cup (\hat{C} \setminus \text{Fix}(g))/\langle g \rangle$ はソリッドトーラスでその境界を F_∞ とする。 $m \subset F_\infty$ を H のメリディアン曲線、 $\alpha' \subset F_\infty$ を中心曲線 α とホモトピックで (m による Dehn ツイストの自由度あり) 長さ最小の曲線とする。このとき F_∞ に \hat{C} から等角構造 ν をいれた標識付きトーラス $(F_\infty, \nu, \alpha', m)$ の Teichmüller パラメーター $\omega(\alpha)$ は $2\pi i/\lambda(\alpha)$ となる。ここで $\lambda(\alpha)$ は $\rho(\alpha)$ の複素移動距離とする。

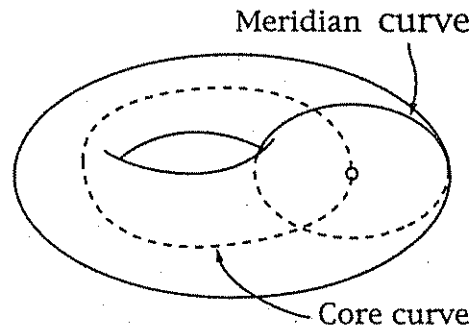


図 1:

一方 $F_0 = \partial T_\epsilon(\alpha)$ とすると g の軸からの半径方向の射影で F_0 と F_∞ は同一視でき F_0 にも標識が定まる。ここで N での α に対する測地線 α^* の双曲的長さ $l(\alpha)$ が十分小さいと $T_\epsilon(\alpha)$ の半径 $r(\alpha)$ が十分大きくなり半径方向の射影は一様な擬等角写像になる。特に F_0 の Teichmüller パラメーターは $(F_\infty, \nu, \alpha', m)$ の Teichmüller パラメーターである $\omega(\alpha)$ に H^2 での双曲距離で一様に近い。つまり $l(\alpha)$ が十分小さいならば、 $\omega(\alpha)$ は $T_\epsilon(\alpha)$ を制御している。

要定理より end invariants から定まる pivot 列 $P = \{\alpha_n\}$ と幅列 $W = \{w(n)\}$ において $\omega(\alpha_n)$ と $w(n) + i$ は H^2 での双曲距離で一様に近いので、上のことから end invariants が α_n に対応する単純閉測地線の周りの Margulis tube を制御していることがわかる。

距離空間としてのモデル多様体 :

$\alpha, \beta \in C$ が隣接しているとし、曲面 S 上の等角構造 $\nu_{\alpha, \beta}$ を $\tau(S, \nu_{\alpha, \beta}, \alpha, \beta) = i$ で定義する。つまり 1 と i で生成される正方格子群で複素平面を割ってできるトーラスから一点ぬいた標識付き穴あきトーラスである。特に等角類 $\nu_{\alpha, \beta}$ のユークリッド距離 $\sigma_{\alpha, \beta}^e$ では α, β とも長さ 1 である。いま座標 $(1/2, 1/2)$ に穴が空いているとし、 $[0, 1] \times [1/4, 3/4]$ を B 、残りを A とする。特に等角類 $\nu_{\alpha, \beta}$ の双曲距離を $\sigma_{\alpha, \beta}^h$ とする。いまカusp $(1/2, 1/2)$ の $1/8$ -近傍では $\sigma_{\alpha, \beta}^h$ 、 $1/4$ -近傍の外では $\sigma_{\alpha, \beta}^e$ 、その間のアニュラスでは $\sigma_{\alpha, \beta}^h$ と $\sigma_{\alpha, \beta}^e$ から有界な距離でつなぎ、出来上がった S 上の距離を $\sigma_{\alpha, \beta}^m$ とする。さらに ϵ_0 を ϵ_0 -Margulis tube Q がカusp の $1/8$ -近傍に入るよう取っておく。

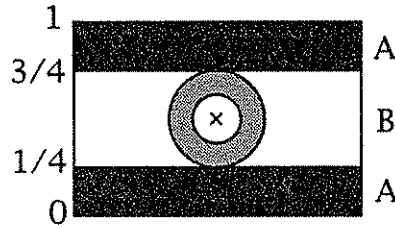


図 2:

$\alpha, \beta, \gamma \in C$ を、 α, β と α, γ がそれぞれ隣接するとする。以下のように $S \times [0, 1]$ の各部分に距離を定義してブロック $B_{\alpha, \beta, \gamma}$ を構成する。まず上面 $\partial_0 B = S \times \{0\}$ は $\tau(S, \nu_{\alpha, \beta}, \alpha, \beta) = i$ となる等角構造を入れて距離 $\sigma_0 = \sigma_{\alpha, \beta}^m$ とする。同様に下面 $\partial_1 B = S \times \{1\}$ は $\tau(S, \nu_{\alpha, \gamma}, \alpha, \gamma) = i$ となる等角構造を入れて距離 $\sigma_1 = \sigma_{\alpha, \gamma}^m$ とする。さらにイソトピーで上下面共通の A をとり B 上の距離は等しくとっておく。 Q を S の ϵ_0 -Margulis tube とし、 $S_0 = S \setminus Q$ 、 $B_0 = B \setminus Q$ 、 $Q_B = Q \times [0, 1]$ とする。また A の $1/8$ -近傍を A' とし、 $U' = A' \times (0, 1)$ 、 $U = A \times [1/4, 3/4]$ とする。このとき $B_0 = B \setminus U$ に以下のような距離をいれる。 $S_0 \times [0, 1/4]$ 上 $\sigma_0 \times dt^2$ 、 $S_0 \times [3/4, 1]$ 上 $\sigma_1 \times dt^2$ 、 $B_0 \times [1/4, 3/4]$ 上 $\sigma_0 \times dt^2 = \sigma_0 \times dt^2$ 、 Q_B 上階数 1 の放物型 ϵ_0 -Margulis tube の構造をいれる。この段階では U に距離は定義されていないことに注意する。

2つの相異なる無理数 (ν_-, ν_+) から pivot 列 $P = \{\alpha_n\}$ が定まり両側無限列になる。その3つ組の pivots $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}$ に対し、ブロック $B_n = B_{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}}$ を定義する。 $\partial_1 B_n$ と $\partial_0 B_{n+1}$ は S 上の恒等写像で等長的より自然な同一視ができる。よってこの同一視でブロックの上下面をはって構成したもの $M = \cup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ をモデル多様体 (model manifold) といい、 $Q_M = \cup_{n \in \mathbb{Z}} Q_{B_n}$ を M の主カusp (main cusp) という。 M のなかのトーラスの列 $\{U_n\}$ にはまだ距離が定義されていないことに注意する。このトーラスの列 $\{U_n\}$ に幅列 $W = \{w(n)\}$ のデータから Margulis tube の列を対応させることが要定理の主な目的である。

1.7.3 要定理とその意味

表現 $\rho \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ と単純閉曲線 $\alpha \in \mathcal{C}$ に対し、双曲3次元多様体 $N = \mathbf{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ での α に対する測地線 α^* の双曲的長さを $l_\rho(\alpha) = l(\alpha)$ とする。また $\rho(\alpha)$ の複素移動距離を $\lambda(\alpha)$ とする。

定理 4.1. (要定理)

ある普遍定数 $L_1, c_1, \epsilon_3 > 0$ が存在して、任意の表現 $\rho \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ に対しその pivot 列 $P = \{\alpha_n\}$ と幅列 $W = \{w(n)\}$ において

1. (補題 8.2.) α_n が pivot ならば $l(\alpha_n) < L_1$.
2. $l(\beta) \leq \epsilon_3$ ならば β は pivot である。
3. α_n が pivot ならば $\omega(\alpha_n) := 2\pi i/\lambda(\alpha_n) \in \mathbf{H}^2$ となり、 $d_{\mathbf{H}^2}(\omega(\alpha_n), w(n)+i) < c_1$.
ここで $d_{\mathbf{H}^2}$ は \mathbf{H}^2 での双曲距離とする。

この定理から、与えられた end invariants から end を出ていく単純閉曲線の列 (それは連分数展開にほかならない) が決まり、考えている双曲3次元多様体をプリーツ面 (ここでは単体的双曲面) の列で切っていってブロックを作ることができる。さらに各ブロックの中に入っている短い単純閉測地線の周りの Margulis tube を幅 $w(n)$ で一様に制御できるので、単射半径が下から押さえられていなくてもモデル多様体とそこから双曲3次元多様体へのモデル写像 (model map) が end invariants のみから構成できる。この2つが要定理の重要な意味である。

1.7.4 モデル写像の構成

写像 $H_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} : B_{\alpha,\beta,\gamma} \rightarrow N$ の構成:

7章の議論から α, β の移動距離が一様に有界である。さらに補題 9.1. より隣接する $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(L)$ ($L \geq L_0$) に対し、 ρ とホモトピー同値な単体的双曲面 (5章参照) $f_{\alpha,\beta} : S \rightarrow N$ が存在して、距離 $\sigma_{\alpha,\beta}^m$ について $L'(L)$ -Lipshitz かつ 主カスプを除いて $\epsilon_2(L)$ -Margulis tube と交わらない。

そこで $f_{\alpha,\beta} : \partial_0 B \rightarrow N$, $f_{\alpha,\gamma} : \partial_1 B \rightarrow N$ を上の条件をみたす単体的双曲面とする。それらを N 内の測地線からなるホモトピーで結んで写像 $H_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} : B_{\alpha,\beta,\gamma} \rightarrow N$ を定義する。このとき補題 9.3. より H_B は B^0 上一様に Lipshitz で $l(\alpha) \leq \epsilon_3$ のとき $H_B : (U, \partial U) \rightarrow (T_{\epsilon_0}(\alpha), \partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ かつ $H_B(B^0)$ は主カスプ以外の ϵ_3 -Margulis tube と交わらない。

写像 $H : M \rightarrow N$ の構成:

H_B の構成から $l(\alpha) \leq \epsilon_3$ のとき $H_B : (U, \partial U) \rightarrow (T_{\epsilon_0}(\alpha), \partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ となる。 $l(\alpha) \geq \epsilon_3$ のときは α^* の近傍に像がいくが、半径方向への射影で α^* におくように修正する。

$H : M = \cup_n B_n \rightarrow N$ を H_{B_n} と $H_{B_{n+1}}$ が境界 $\partial_1 B_n$ と $\partial_0 B_{n+1}$ で単体的双曲面

$f_{\alpha_n, \alpha_{n+1}}$ を共有しているので張り合わすことができる。補題 10.1 より $H : M \rightarrow N$ は proper な写像、degree 1、 ρ とホモトピー同値かつ H_{B^0} は一様に Lipshitz である。

要定理を使うところ：

U_n に距離を定めて、 $H : M \rightarrow N$ をホモトピーで変形して M 全体で Lipshitz にする。その写像 $f : M \rightarrow N$ をモデル写像という。以下がその構成である。

1. ($l(\alpha_n) > \epsilon_3$ の場合) 要定理より $l(\alpha_n) \leq c_3/w(n)^2$ より $|w(n)| \leq \sqrt{c_3/\epsilon_3}$. 一方 $\tau(\partial U_n, \alpha_n, \mu_n) = w(n) + 2i$ より メリディアン曲線の長さも有界。よって U_n 上に直径が上下から有界な距離が定義できる。そこで H をホモトピーで変形して U_n が α_n^* の近傍に一様に Lipshitz に移るようである。
2. ($l(\alpha_n) \leq \epsilon_3$ の場合) 要定理の証明と同様にして $\tau(\partial U_n, \alpha_n, \mu_n)$ と半径方向の射影で F_∞ の標識から定まる $F_0 = \partial T_{\epsilon_0}(\alpha_n)$ の Teichmüller パラメーターは \mathbf{H}^2 での双曲距離で一様に近い。一方 ∂U_n と等長的な境界を持つ Margulis tube が一意的に定まるのでこの Margulis tube と $T_{\epsilon_0}(\alpha_n)$ は境界が一様に擬等角なので一様に Lipshitz (補題 6.2. による)。よって U_n にこの Margulis tube の距離をいれると U_n 上 H は一様に Lipshitz になる。

以上からモデル写像 $f : M \rightarrow N$ は proper な写像で degree 1 より全射で、ホモトピー同値かつ持ち上げ可能な Lipshitz 写像なので、 f が持ち上げ可能な擬等長写像であるための条件のうち $Q1, Q3$ がみたされた。残りの条件 $Q2, Q4$ を確かめるためには、モデル写像の幾何極限の議論を用いる。

要定理の証明の流れ：

$H : M \rightarrow N$ から $f : M \rightarrow N$ を定義する際要定理を用いたが、要定理の証明そのものにも $H : M \rightarrow N$ を用いる点はおもしろい。以下がその証明のアイデアである。

1. まず $H : M \rightarrow N$ は補題 10.1. より proper な写像で degree 1。よって全射になり $l(\alpha) < \epsilon_3$ となる α についての $T_{\alpha_0}(\alpha)$ にやってくる M の元がある。一方補題 9.3.2. より $H(M^0) \cap T_{\alpha_0}(\alpha) = \emptyset$ かつ、ある $n \in \mathbf{Z}$ があって $(U_n, \partial U_n) \rightarrow (T_{\epsilon_0}(\alpha), \partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ より $\alpha = \alpha_n$ は pivot である。
2. α_n が pivot ならば $\omega(\alpha_n)$ と $w(n) + i$ は \mathbf{H}^2 での双曲距離でみて近いことを示す。
 - (a) ($l(\alpha_n) > \epsilon_3$ の場合) 補題 8.2. より普遍定数 L_1 が存在して $\epsilon_3 \leq l(\alpha_n) \leq L_1$. よって $\lambda(\alpha_n)$ は右半平面で 1 から双曲距離でみて一様に有界。よって \mathbf{H}^2 で $\omega(\alpha_n)$ と $2\pi i$ は一様に有界。よって $|w(n)|$ が一様に有界をいえば十分である。
 - (b) ($l(\alpha_n) \leq \epsilon_3$ の場合)
 - i. $w(n) + 2i$ と $\omega(\partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ は一様に近い。
 - ii. $\omega(\alpha_n) = 2\pi i / \lambda(\alpha_n) = \omega(F_\infty)$.
 - iii. $\omega(F_\infty)$ と $\omega(\partial T_{\epsilon_0}(\alpha))$ は一様に近い。
 以上 3 つより $\omega(\alpha_n)$ と $w(n) + i$ は \mathbf{H}^2 での双曲距離でみて近い。

1.7.5 幾何極限とその応用

まず幾何極限 (geometric limit) の定義を思い出す。基点付き距離空間の列 (N_i, x_i) が基点付き距離空間 (N, x) に幾何収束するとは、数列 $R_i \rightarrow \infty, K_i \rightarrow 1$ と、像と K_i -bi-Lipshitz 写像の列 $h_i : (B(x, R_i), x) \rightarrow (N_i, x_i)$ が存在することである (ここで $B(x, R)$ は x の R -近傍とする)。同様に写像の列 $f_i : (M_i, x_i) \rightarrow (N_i, y_i)$ が $f : (M, x) \rightarrow (N, y)$ に幾何収束するとは、 $(M, x), (N, y)$ にそれぞれ幾何収束する列 $(M_i, x_i), (N_i, y_i)$ が存在して (つまり、それぞれに Lipshitz 写像 h_i, k_i が存在して)、任意の R に対し、写像 $h_i^{-1} \circ f_i \circ k_i : B(x, R) \rightarrow N$ が (十分大きな i に対し定義され) C^0 級で f に収束することとする。

双曲幾何学における重要な現象として、基点付きの n 次元双曲多様体で基点における単射半径が下から正の実数で押さえられているものの全体は幾何位相 (geometric topology) でコンパクトであるという事実がある。

以下モデル写像の幾何極限を定義するため、幅列の定義を拡張してモデル多様体の概念もそれにあわせて拡張し、その拡張された枠組みのなかで幾何極限を考える。まず end invariants (ν_-, ν_+) により pivot 列 P が定まり幅列 $W = \{w(n)\}$ が決まった。以下幅列の概念を拡張して $w(n) = \infty$ も許すとする。

この定義で幅列全体に位相を以下のようにいれる: 列 $W_i = \{w_i(n)\}$ は $W = \{w(n)\}$ に収束するとは、各 $n \in \mathbb{Z}$ で十分大きい i で $w_i(n) = w(n)$ か $w(n) = \infty$ かつ $|w_i(n)| \rightarrow \infty$ を満たすこととする。一般化された幅列 $W = \{w(n)\}$ は一般化されたモデル多様体 M_W を定義する。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し、 $w(n)$ が有限ならば以前と同様にブロック B_n を構成する。ただし今回は pivot に名前はない: 例えばブロック B_n を構成するには α と隣接する β, γ で $\gamma = D_\alpha^{w(n)}\beta$ をみたす $B_{\alpha, \beta, \gamma}$ を作る。次々ブロックを張り合わせていく時は、 $\partial_1 B_n$ 上の α, γ を $\partial_0 B_{n+1}$ 上の β, α に移すただひとつの向きを保つ等長写像で $\partial_1 B_n$ と $\partial_0 B_{n+1}$ とを張り合わせる。 $w(n)$ が無限ならば、まず $B \setminus U$ と等長的な U のないブロック B_n^0 を構成する。 U がなければブロックの上下の境界に自然な同一視はなく、実際すべての U のないブロックは互いに等長的である。階数 2 の放物的群に対し、境界のトーラスが U と等長的な Margulis tube がただひとつ存在するので、この距離を U から芯 (core) を除いた上に定義して U のないブロックにはめ込む。

これからモデル多様体の幾何極限の記述と、幅列の収束との関係についてのべる。以下のような表記を用いる。モデル多様体を $M = \cup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ とする。開ソリッドトーラス U_n を B_n から取り除いたものを B_n^0 とする。 B_n からカスプ領域 Q_{B_n} を除いたものを \check{B}_n とし、 \check{B}_n^0 を $B_n^0 \cap \check{B}_n$ とする。このとき $M^0 = \cup_{n \in \mathbb{Z}} B_n^0$ とし、 \check{M}, \check{M}^0 等も同様に定義する。整数 $q > 0$ に対し、 $M[q] = \cup_{|n| \leq q} B_n$ とする。 $M^0[q] = M^0 \cap M[q]$ とし、 $\check{M}[q], \check{M}^0[q]$ 等も同様に定義する。特に $M^0[q]$ はコンパクトである。

一般化された幅列 W_i をもつ基点付き距離空間の列 (M_i, x_i) を考える。必要ならばシフトして $x_i \in B_{i,0}$ と仮定してよい (ここで M_i の n 番目のブロックを $B_{i,n}$ と

する)。 W_i が W に収束するとして、 $M_\infty = M_W$ とする。 x_i をうまく選ぶと、ある $x \in M$ が存在して (M_∞, x) に幾何収束する (M_i, x_i) の部分列が存在する。Thick part \check{M}_i^0 に基点を持つモデル多様体の幾何極限は $S \times I$ から曲線の列 $\gamma_k \times \{k\}$ を除いた空間と同相である。ここで I は \mathbb{R} の区間、 γ_k は S 上の non-peripheral な単純閉曲線で γ_k と γ_{k+1} は互いにホモトピックではない。

以上の準備の下でモデル写像の幾何極限が定義できる。いま N_i を穴あきトーラス多様体とし、そのモデルを M_i 、写像を $f_i : (M_i, x_i) \rightarrow (N_i, f_i(x_i))$ とする。 x_i はthick part \check{M}_i^0 の内部に含まれるとする。必要があれば番号を取り直して $x_i \in \check{B}_{i,0}^0$ としてよい。このとき部分列をとれば W_i はある W に収束しているとしてよい。さらに上の議論より別の部分列をとれば (M_i, x_i) はある (M_∞, x_∞) に収束しているとしてよい。補題 9.3より N_i の $f_i(x_i)$ での単射半径は下から一様に ϵ_3 で押さえられているので、双曲多様体の性質から $(N_i, f_i(x_i))$ は (N_∞, y_∞) に幾何収束するとしてよい。 f_i は一様なLipshitz写像なのでさらに部分列をとれば $f_\infty : (M_\infty, x_\infty) \rightarrow (N_\infty, y_\infty)$ に収束するとしてよい。これが求める幾何極限になる。さらに極限 f_∞ はproperな写像でdegree 1かつホモトピー同値であることがわかる(詳しくは11章参照)。

幾何極限の存在の応用として、モデル写像 $f : M \rightarrow N$ が持ち上げ可能な擬等長写像であるための条件のうちQ4に対応する次の結果が示される。すなわち穴あきトーラス群のモデル写像を $f : M \rightarrow N$ とすると、任意の $B > 0$ に対し $A > 0$ が存在して次を満たす; β を長さが B 以下の N 内の $f(x)$ を通るループとすると、 M 内に x を通る長さが A 以下のループ α で、 $f(\alpha)$ が β と基点 $f(x)$ を止めたままホモトピックなものが存在する。証明のアイデアは次の通りである。双曲幾何より各点 $x \in M$ をとめるごとには条件を満たす $A(x, B)$ が存在する。 M 内の点列 x_i で最良の $A(x_i, B)$ が無限に発散するものが存在すると仮定すると、 $x_i \in \check{B}_{n_i}^0$ としてよく、幾何極限 $f_\infty : (M_\infty, x_\infty) \rightarrow (N_\infty, y_\infty)$ が存在しホモトピー同値である。そこで条件をみたす定数 $A = A(x_\infty, B)$ を極限に十分近い $f : (M, x_i) \rightarrow (N, f(x_i))$ に適用すると $A(x_i, B)$ が無限に発散することに矛盾する。

また幾何極限の存在のもう1つの応用として、モデル写像 $f : M \rightarrow N$ が擬等長的であることも示される。 f を各Margulis tubeに制限すると、 f の構成からその像とbi-Lipshitz同相。各 \check{B}_n^0 の直径は有界なので、 \check{N} において2つのブロックの像 $f(\check{B}_n)$ と $f(\check{B}_{n'})$ の離れ具合が、 $|n - n'|$ に比例していることを示せばよい。これを示せば、 f の制限 $\check{M} \rightarrow \check{N}$ が擬等長写像になり、構成から主カスプ近傍への拡張も擬等長写像になる。これも背理法により幾何極限をとって矛盾を導く方法で示す(詳しくは11章参照)。

以上のように幾何極限の方法から f が持ち上げ可能な擬等長写像であるための条件のうち残りのQ2, Q4もみたまされたので、ending lamination 予想は解決した。その他、幾何極限の議論は定理Bの写像 ν^{-1} の連続性やMaskitスライスの位相を決める際にも用いられることを注意しておく。

第2章 Farey 三角形分割とトーラス (糸健太郎)

H^2 を上半平面とし, $\hat{R} \equiv R \cup \{\infty\}$ をその境界とみなす. $\hat{Q} \equiv Q \cup \{\infty\}$ の2つの元が neighbors であるとは, それぞれの既約表示 $p/q, r/s$ が $|ps - qr| = 1$ をみたすときをいう. ここで ∞ の既約表示は $1/0$ とする. すべての neighbors を双曲測地線で結んで得られる H^2 の三角形分割を *Farey triangulation* という. 図1は H^2 を単位円板 D と同一視したときの Farey triangulation の様子を表している.

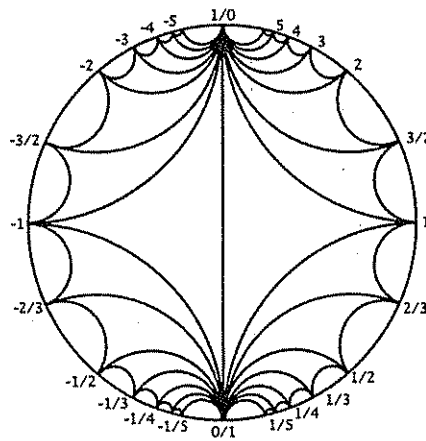


図 1:

2.1 The complex of curves

once punctured torus S 上の単純閉曲線のホモトピー類全体を \mathcal{C} と書く. (ここで単純閉曲線は向き付けられていない, 非自明で, puncture にホモトピックでないものを考えている.) $H_1(S)$ の ordered basis を1つ定めるごとに, \mathcal{C} と \hat{Q} は1対1対応がつく: まず S の向きを1つ定め, $H_1(S)$ の ordered basis (α, β) として S の向きに整合するものとする. この基底に関して, 任意の $H_1(S)$ の元は $p\alpha + q\beta$ の形に書ける. いま \mathcal{C} の元 γ に1つ向きを入れると, $H_1(S)$ の (primitive な) 元 $p\alpha + q\beta$ とみなせる. これに対して $-p/q \in \hat{Q}$ を対応させることで $\mathcal{C} \rightarrow \hat{Q}$ が well-defined に

定まり, この写像は全単射である. (実際, 全射は容易にわかる. 単射をいうには, 2つの単純閉曲線が puncture を埋めてホモトピックならば, puncture があってもホモトピックであることを示せばよい.) いま $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ に対して交点数を $\alpha \cdot \beta$ と書くと, \mathcal{C} と $\hat{\mathcal{Q}}$ の同一視のもとで $\alpha \cdot \beta = |ps - qr|$ が (同一視に依らずに) 成り立つ. $\alpha \cdot \beta = 1$ のとき, α と β は neighbors であるという.

2.2 Neighbors と Dehn ツイスト

$\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ を neighbors (つまり $\alpha \cdot \beta = 1$) とする. このとき β の α に関する Dehn twist $D_\alpha(\beta)$ を図 2 のように定める. このとき α と $D_\alpha(\beta)$ は neighbors である. 一般に α の neighbors β_0 を一つとったとき, α の neighbors 全体は $\{D_\alpha^n(\beta_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と書ける.

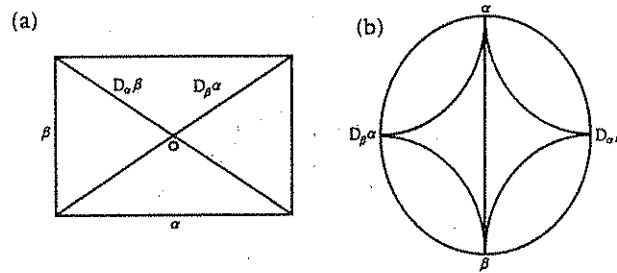


図 2:

2.3 Teichmüller 空間

punctured torus S の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(S)$ はトーラスの場合と同様, 上半平面 \mathbb{H}^2 で parametrize される: S の marking (α, β) を以前のように 1 つとり固定する. $z \in \mathbb{H}^2$ に $\mathcal{T}(S)$ の元 $[(X, f)]$ を次のように対応させる. 格子群 $\langle w \mapsto w + 1, w \mapsto w + z \rangle$ を Γ と書き, 平行四辺形 $(0, 1, z, z + 1)$ の辺上にない点 p を任意にとる. このとき $X = (\mathbb{C} \setminus \Gamma p) / \Gamma$ は punctured torus であり, 向きを保つ同相写像 $f: S \rightarrow X$ として, α を $[0, 1]$ の像, β を $[0, z]$ の像, puncture を puncture にそれぞれうつすものとればよい. ここで $[(X, f)]$ が点 p の取り方に依らないことは, トーラス \mathbb{C} / Γ の任意の 2 点に対して, p_1 を p_2 にうつす等角自己同型があることから明らか.

この対応のもとで, Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(S)$ の Thurston コンパクト化の境界 (projective measured lamination) と \mathbb{H}^2 の境界 $\hat{\mathbb{R}}$ が対応する. この対応は, 以前とった \mathcal{C} と $\hat{\mathcal{Q}}$ の対応と compatible である.

S 上の等角構造 ν と marking (α, β) に対して定まる Teichmüller パラメータを

$$z = \tau(S, \nu, \alpha, \beta) \quad (2.1)$$

という記号であらわす。(等角構造が明らかなきときは、 $z = \tau(S, \alpha, \beta)$ と書くこともある.)

$\mathcal{T}(S)$ における Teichmüller 距離は、 \mathbb{H}^2 における双曲距離と一致することを注意しておく。

Shortest curves. 等角構造をもつ円環 A が $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq c\}$ と等角同値であるとき、 A の modulus を $\text{Mod}(A) = \frac{1}{2\pi} \log c$ で定める。リーマン面 R における単純閉曲線 α の extremal length は $E_R(\alpha) = 1/\sup\{\text{Mod}(A)\}$ で定められる(幾何的定義); ここで \sup は α にホモトピックな円環 A すべてをばしらせる。等角構造をもつ (punctured または regular) トーラス S における単純閉曲線 α の extremal length $E_S(\alpha)$ は、その解析的定義 (cf. [3]) より、 $l_S^2(\alpha)/\text{Area}(S)$ で求められることがわかる。ここで $l_S(\alpha)$ は、対応するユークリッド計量に関する α にホモトピックな測地線の長さ、 $\text{Area}(S)$ はこの計量に関する S の面積である。特に、 $\alpha = \infty$ と正規化したとき、パラメータ $z \in \mathbb{H}^2$ に対応するトーラスにおける α の extremal length は $1/\text{Im}z$ となる。双曲曲面 S において、extremal length $E_S(\alpha)$ と hyperbolic length $l_S(\alpha)$ の間には密接に関係があり、例えば $\frac{l_S(\alpha)}{\pi} \leq E_S(\alpha) \leq \frac{l_S(\alpha)}{\pi} \exp(\frac{l_S(\alpha)}{2})$ などが成り立つ。従って、特に $l_S(\alpha)$ が小さいとき、 $E_S(\alpha)$ は $l_S(\alpha)$ のよい評価を与える。

以下しばらくの目標は、Teichmüller パラメータ $\tau \in \mathbb{H}^2$ とリーマン面 τ における最短測地線との対応を明らかにすることにある。はじめに、hyperbolic punctured torus S において、neighbors $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ で $l(\alpha) = l(\beta)$ となるものがあれば、向きを反転させる S の等長写像で α と β を入れ換えるものがあることをみる。(後に、同様の議論で最短測地線の長さの上限が求まることも示す。)

hyperbolic punctured torus S において、単純閉測地線 α をとり、その長さを l と書く。 S を α で切り開くことで punctured cylinder $S \setminus \{\alpha\}$ を得る。 $S \setminus \{\alpha\}$ は位数 2 の向きを反転させる等長写像をもち、その固定点集合は、puncture から境界に下ろした垂線 2 本と、2つの境界を結ぶ共通垂線 γ から成る。 γ の長さを h と書く。いま閉測地線 β で $\alpha \cdot \beta = 1$ となるものを考えると、 β は γ の中点で γ と交わることに注意する。ここで $S \setminus \{\alpha\}$ を図 3 内の図 1 のように (γ 以外の固定点集合で) 切り開く。 β の長さを l' とするとき、以下で必要なのは l' が l よりそれほど大きくない場合だけなので、 β は 6 角形の α に対応する辺以外とは交わらないとしてよい。このとき、双曲多角形の公式から

$$\cosh h/2 = 1/\tanh l/2 \quad (2.2)$$

$$\cosh l'/2 = \cosh h/2 \cosh t/2 \quad (2.3)$$

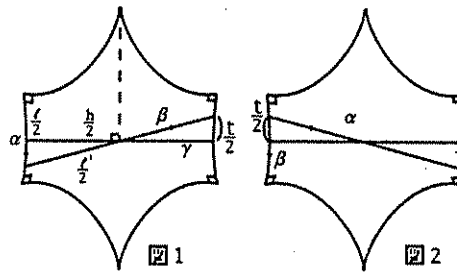


図 3:

を得る. これより t が l と l' の関数であることがわかる. 特に $l = l'$ のとき, S をはじめに β で切り開いて得られる六角形も同様の絵になる (図 3 内の図 2). 図 3 内の図 1 の六角形を図 3 内の図 2 の六角形にうつす, 向きを反転させる等長写像は, もともと S において貼り合わさっていた所を, 貼り合わさっていた所へうつしていることに注意する. 以上より, hyperbolic punctured torus S において, $l(\alpha) = l(\beta)$ をみたす neighbors $\alpha, \beta \in C$ があるときは, 向きを反転させる S の等長写像で α と β を入れ換えるものがあることがわかった. また この逆は明らかに成り立つ.

話を \mathbb{H}^2 に戻す. ここで \mathbb{H}^2 は $\alpha = \infty, \beta = 0$ と正規化したパラメータ空間 とみなす. 上のことを言い替えると, $\tau \in \mathbb{H}^2$ において $l(\alpha) = l(\beta)$ となる必要十分条件は, punctured torus τ が α と β を入れ換える anti-conformal map をもつことである. ここで一般の $\tau \in \mathbb{H}^2$ に対して, 向きを反転させたものの, marking (β, α) に関する Teichmüller パラメータは $1/\bar{\tau} \in \mathbb{H}^2$ で与えられるので, $l(\alpha) = l(\beta)$ となるパラメータ $\tau \in \mathbb{H}^2$ は $\tau = 1/\bar{\tau}$, すなわち $|\tau| = 1$ で特徴付けられることがわかる. ここで $\text{Im } \tau$ が十分大きいとき α が最短測地線となるので, $l(\alpha) < l(\beta)$ をみたすパラメータの領域は $\{\tau : |\tau| > 1\}$ である. さらに α の任意の neighbors $n = \beta_n$ に関して, $l(\alpha) < l(\beta_n)$ となるパラメータの領域は $\{\tau : |\tau - n| > 1\}$ となる. これは, marking のとりかえに関して $\tau(S, \alpha, \beta_n) = \tau(S, \alpha, \beta) - n$ が成り立つことからわかる. 以上より, α が自分自身の neighbors の中で最短となるパラメータの領域は $H(\alpha) = \{\tau : \forall n \in \mathbb{Z}, |\tau - n| > 1\}$ と書けることがわかった. さらに $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を用いて他の $\gamma \in \hat{Q}$ に対しても $H(\gamma)$ を定義すると, $H(\gamma)$ は互いに disjoint なので, $H(\alpha)$ は全ての測地線の中で α が最短となる領域を表している. このことから特に, $\alpha, \beta \in C$ がある punctured torus S において同時に最短測地線となっているとき, これらは neighbors であることがわかる. また任意の Farey 3 角形 Δ において, この 3 角形を対称軸で 6 つの領域に分けると, 頂点 u に接する 2 つの領域が, u が最短となる領域を表している. ここで hyperbolic punctured torus の最短測地線の長さの上限となる定数 L_0 を具体的に求める. hyperbolic punctured torus S の最短測地線を α , その長さを l とする. 以前とった γ に対して, S における γ の端点のずれの小さいほうを $t (\leq l/2)$ とする (図 4 内の図 3). 以前と同様に S を六角形に切り開き, 図 4 内の図 4 のように 双曲 3 角形 Δ_1, Δ_2 をとる. このとき Δ_1, Δ_2 は合同なので,

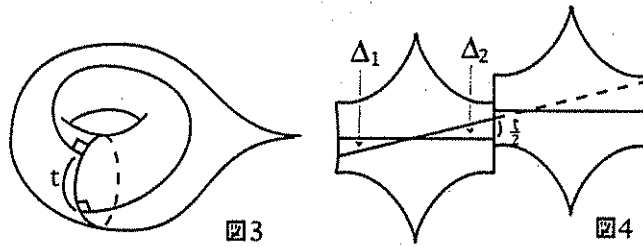


図 4:

Δ_1 と Δ_2 の斜辺をつないだ arc は S において閉測地線となる. この長さを l' とすると, 仮定より $l \leq l'$ である. 他の長さを以前と同様に定めると, 今の場合も (2.1), (2.2) が成り立つ. これらより h を消去して, $t \leq l/2, l \leq l'$ を用いると $\sinh \frac{l}{2} \leq \cosh \frac{l}{4}$ を得る. ここで $\sinh \frac{l}{2} = 2 \sinh \frac{l}{4} \cosh \frac{l}{4}$ より $l \leq 4 \sinh^{-1}(1/2) \approx 1.9248$. この数を L_0 とすればよい. また $l \leq L_0$ とすると, (2.1) より $h \geq h_0 \approx 1.609$. よって α に 2 回以上交わる任意の閉曲線の長さは $2h_0 \approx 3.218$ 以上であり, これは L_0 よりも長い. 従って α と β の長さが共に L_0 より短いとき, $\alpha \cdot \beta = 1$, すなわち neighbors であることがわかる. 以上でわかったことを次にまとめておく.

補題 2.1. S を *hyperbolic punctured torus* とする. S の最短測地線の長さは $L_0 \approx 1.9248$ 以下である. また α, β が S において同時に最短となるとき, これらは *neighbors* である. より一般に α, β の長さが共に L_0 より短いとき, これらは *neighbors* である.

注意 Ahlfors の補題 [2] により, 補題 2.1 における L_0 は *simplicial hyperbolic surface* における最短測地線の長さの上限にもなっている.

Teichmüller parameters for annuli. 円環 A と, A の境界を結ぶ arc β の組 (A, β) を *marked annulus* という. A に等角構造が与えられたとき, (A, β) に対して, Teichmüller パラメータ $\tau(A, \beta) \in \mathbb{H}^2$ を次のように対応させる: A をユークリッド円環として実現し, β の端点をつなぐように A の境界をはり合わせてトーラスを作り, このトーラスの marking を A の core α と β の組 (α, β) とする.

円環 A_1, \dots, A_k をつなげて作ったトーラス T を考える. 各 A_j の境界は T のユークリッド計量に関して測地線であるとする. α を円環の境界にホモトピックな単純閉曲線とし, μ を単純閉曲線で各 A_j と 1 つの arc μ_j で交わるものとする. この (α, μ) を T の marking とするとき

$$\tau(T, \alpha, \mu) = \sum_{i=1}^k \tau(A_i, \mu_i) \tag{2.4}$$

が成り立つ. これは T の普遍被覆に持ち上げて考えれば容易にわかる.

2.4 擬等角写像に関する補題

ここでは、後に Margulis tube を制御するために必要な2つの補題を準備する。

補題 T_1, T_2 をユークリッドトーラスとする。ここで T_1 は正方トーラス (つまり, \mathbb{R}^2 を正方格子で割ったもの) で面積が1であるとし, T_2 の面積は A_0 以上であるとする。このとき写像度1の L -Lipschitz 写像 $h: T_1 \rightarrow T_2$ は K -擬等角写像 $g: T_1 \rightarrow T_2$ にホモトピックで, K は L と A_0 のみに依る。

証明. \mathbb{C} と \mathbb{R}^2 を同一視する。普遍被覆 $\mathbb{C} \rightarrow T_1, \mathbb{C} \rightarrow T_2$ の被覆変換群をそれぞれ $\Gamma_1 = \langle z \mapsto z+1, z \mapsto z+i \rangle, \Gamma_2 = \langle z \mapsto z+\alpha, z \mapsto z+\beta \rangle$ とし, h の lift で $0, 1, i$ をそれぞれ $0, \alpha, \beta$ に写すものを $\tilde{h}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ とする。いま \tilde{h} は L -Lipschitz なので $|\alpha|, |\beta| < L$ であり, $\text{Area}(T_2) \geq A_0$ より $\text{Im}(\bar{\alpha}\beta) \geq A_0$ である。まず $0, 1, i$ を $0, \alpha, \beta$ に写すアフィン写像 $\tilde{g}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ の dilatation が A_0, L を用いて評価できることをみる。そのためには, β/α と i の双曲距離を A_0, L で評価すればよいが, これは $\text{Im}(\beta/\alpha) \geq A_0/L^2$ と $\text{Im}(\bar{\alpha}/\beta) \geq A_0/L^2$ が成り立つことからわかる。次に \tilde{h} と \tilde{g} を結ぶホモトピー $\{\tilde{f}_t = (1-t)\tilde{h} + t\tilde{g}\}_{t \in [0,1]}$ は h と g (\tilde{g} をおとしたもの) を結ぶホモトピーにおちるので主張を得る。 ■

補題 2.2. A_1, A_2 を底円の長さが1のユークリッド円環とする。さらに A_0 は modulus が M_0 以上のユークリッド円環 C を含み, $A_1 \setminus C$ の2つの成分 B_1, B_2 の modulus はそれぞれ M_0 以下であるとする。いま次の条件をみたす proper map $h: A_1 \rightarrow A_2$ を考える:

- $h|_C$ は K -擬等角写像,
- $h|_{B_i}$ は L -Lipschitz 写像 ($i = 1, 2$),
- h は ∂A_1 の各連結成分で L -bilipschitz.

このとき, h は K' -擬等角写像 $h': A_1 \rightarrow A_2$ にホモトピック。ここで K' は L, K, M_0 のみに依り, ホモトピーは ∂A_1 において固定されている。

証明. 原論文参照。 ■

第3章 幾何学的素直性（谷口雅彦）

穴あきトーラス群の end invariants 対 $(\nu_-, \nu_+) \in \bar{H}$ を定義する。

そのため、穴あきトーラス S の基本群の忠実な離散表現

$$\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

で放物元を放物元にうつすものを固定し、 $N = \mathbb{H}^3 / \rho(\pi_1(S))$ とする。生成元の交換子は放物元だが、これを主 cusp という。主 cusp に対応する ϵ_0 -Margulis tube Q_N を N から除いたものを \check{N} とするとき、一般に end と言うときは、 \check{N} の end のことを言うのが普通であるが、ここでは「 N の end」を考えることにする。

定義 \check{N} の non-compact な部分多様体 e でその相対境界 ∂e が compact なものを \check{N} の end という。 \check{N} の end を自然に主 cusp まで伸ばしたものを N の end という。 N の end が *incompressible* であるとは、end の相対境界が N 内で *incompressible* であることをいう。

定義 N の *incompressible* な end e が *simply degenerate* であるとは、 S 上の単純閉曲線の列 $\{\gamma_n\}$ で、 ρ に対応する元 N 内での測地線表現の列 $\{\gamma_n^*\}$ が「end e を通り抜けてゆく」ものが存在することである。

ここで、 $\{\gamma_n^*\}$ が end e を通り抜けてゆくとは、 $\{\gamma_n^*\} \subset e$ かつ、任意のコンパクト集合と交わる元が有限個しかない時をいう。

定理 [Bonahon] N の任意の *incompressible* な end は *simply degenerate* である。従って、特に幾何学的素直である。すなわち、境界とホモトピックな *pleated surfaces* の列で end を通り抜けてゆくものが存在する。

系 N は $S \times \mathbb{R}$ と同相である。 \check{N} は $S_0 \times \mathbb{R}$ と同相である。ただし S_0 は S から *puncture* の開近傍を除いたものである。

証明: たとえば、cusp から cusp に至る3本の測地線を適当に取れば、 N 内に *incompressible* で S と同相な面 S_* が作れ、 $N - S_*$ は2つの成分に分かれる。それぞれは幾何学的素直な end だから、位相的に直積構造をもつ。従って、主張を得る。 ■

定義 境界付き多様体 M の境界 ∂M の向きは、 ∂M の向きを与える2つのベクトルに、内法線ベクトルを加えたものが M の正の向きを与えるように取る。

N と S の向きを固定すると、 N は、 ρ を導きかつ $S \times \{1\}$ の向きが S の向きであるように、 $S \times (-1, 1)$ と同一視できる。このとき、 $S \times \{1\}$ に対応する end を e_+ 、他方を e_- と書く。

$\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ の不連続領域を Ω とし、 $\bar{N} = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega)/\Gamma$ とする。境界 Ω/Γ の成分をどちらの end に入るかで分けて、 $\{\Omega_s/\Gamma : s = \pm\}$ とすればこのとき、次の3つの場合に分かれる。

1. Ω_s が位相的円板で、 Ω_s/Γ が穴あきトーラスの場合：このとき S の Teichmüller 空間の点 ν_s が定まる。
2. Ω_s が円板の可算和で、 Ω_s/Γ が3つ穴あき球面の場合：このときこれらの面は、対応する $S \times (-1, 1)$ の境界から単純閉曲線 γ_s を除くことに対応するが、 γ_s の傾きを $\nu_s \in \hat{\mathbb{Q}}$ とする。(Γ の放物元の共役類が定まる)
3. Ω_s が空集合の場合：このときは以下に述べるような $\nu_s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ が対応する。

定義 与えられた穴あきトーラス群 $\rho(\pi_1(S))$ に対し、 (ν_-, ν_+) をその *end invariants 対* と呼ぶ。

さて、1) でも 2) でも無ければ、end は幾何学的有限ではないが、Bonahon の定理より、*simply degenerate* である。

定義 End e_s を通り抜けてゆく $\{\gamma_n^*\}$ の傾きの集積点を ν_s とし、その無理数を傾きに持つ測地線で得られる *geodesic lamination* を *ending lamination* という。

このような ν_s は一意に定まることも知られている。また、5章も参照せよ。

注意 Convex core との関係について説明しておく。

まず、 Γ の極限集合 Λ の凸包 $CH(\Lambda)$ の Γ による商を N の *convex core* といい、 $C(N)$ で表す。このとき、 $C(N)$ の相対境界 $\partial C(N)$ は、凸な *pleated surfaces* からなり、 Ω/Γ と (擬等角的に) 同じであることが知られている。

従って $\partial C(N)$ は2つの end に対応する部分 $\partial_{\pm} C(N)$ に分かれる。

特に2) の場合には、 Ω_s の成分は本当の円板であるから、 $\partial_s C(N)$ は *totally geodesic* である。

第4章 要定理 (谷口雅彦)

前節の end invariants 対 (ν_-, ν_+) に対し、要列 (pivot sequence) を定義し、基本定理を述べる (証明は10章で与える)。

やはり + か - のいずれかを s で表す。

定義 $\nu_s \in \hat{\mathbb{R}}$ の時は、 $\alpha_s = \nu_s$ とおく。

$\nu_s \in \mathbb{D}$ の時は、 ν_s の表す双曲構造での最短の単純閉測地線 ($\in \mathcal{C}$) を α_s とする。

すなわち、 α_s を $\hat{\mathbb{R}}$ の点と見なせば、 ν_s が含まれる Farey 三角形の頂点である。この意味で α_s は ν_s に「最も近い」。なお、 α_s は一意に決まらない事があるが、このときは、任意に一つ選び固定する。また、長さは、補題 2.1 の L_0 で押さえられる。

定義 Farey 三角形の辺のうちで、 α_- と α_+ を分離するもの全体を

$$E = E(\alpha_-, \alpha_+)$$

とおく。

E の複数の辺に属する \mathcal{C} 内の点の集合を P_0 で表す (ただし、 E が一つの元からなるときは、以下で定義し直す)。 P_0 に属する頂点を内部 pivot (internal pivot) と呼ぶ

E には自然に順序が入る。すなわち、 E の2元 e, f に対し

$$e < f$$

であるとは、 e が α_- と f を分離する事である。

この順序により、 P_0 は $\{\alpha_n\}_{n=l}^p$ と書ける。ただし、 $\nu_- \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ なら $l = -\infty$ で、そうでなければ $l = 1$ とする。さらに、 $\nu_+ \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ なら $p = +\infty$ で、そうでなければ p は正整数である。

定義 全 pivot 列 P を、 P_0 に

$\alpha_- \in \mathcal{C}$ ($l = 1$) なら、最初に $\alpha_0 = \alpha_-$ を加え、

$\alpha_+ \in \mathcal{C}$ ($p < +\infty$) なら、最後に $\alpha_{p+1} = \alpha_+$ を加えたもので定義する。(幾何学的有限な end を持つ場合には、 $P \neq P_0$ である。)

注意 (と P_0 の再定義):

1. $E, P = P_0$ がともに両側無限の時は、 ν_{\pm} は境界の無理数に対応する。

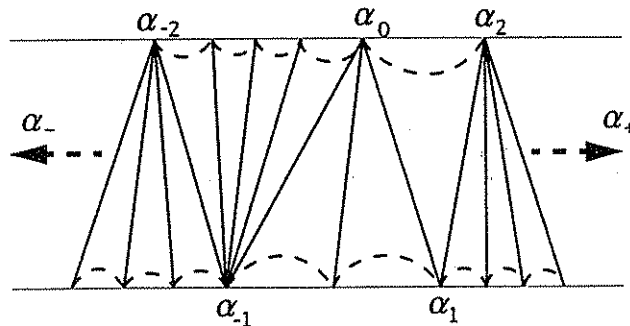


図 1:

2. $E = \emptyset, P_0 = \emptyset$ の時は ν_{\pm} は同じ Farey 三角形の閉包に含まれる (α_- と α_+ が等しいとは限らない)。
3. E が一個の元 e からなる時は ν_{\pm} は隣接する Farey 三角形の閉包に含まれる。このときは、 P_0 を e の 2 頂点からどちらかを選び、それを α_1 として

$$P_0 = \{\alpha_1\}$$

と定義し直す。

注意 1) は最も「標準的」な (doubly degenerate な) 場合である。2), 3) は単純な場合ではあるが事態を複雑にしている。

定義 任意の $n \in \{1, \dots, p\}$ に対し、整数 $w(n)$ を

$$\alpha_{n+1} = D_{\alpha_n}^{w(n)} \alpha_{n-1}$$

により定義し (2.2 参照)、これらの $w(n)$ をこの pivot 列の幅 (widths) とよぶ。

$w(n)$ の表現: 各 $\beta \in \mathcal{C}$ に対し、メビウス変換で、

1. β が ∞ になり、かつ
2. その neighbors が \mathbb{Z} となるように

D を \mathbb{H}^2 にうつす (整数だけの平行移動による自由度は問題にならない)。

このとき、 ν_{\pm} に対応する $\bar{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \hat{\mathbb{R}}$ の 2 点を $\nu_+(\beta), \nu_-(\beta)$ とする。同様に、 α_i に対応する点を $\alpha_i(\beta)$ とする (ただし $i = \pm, \in \mathbb{Z}$ である)。

注意 3) の場合をのぞき、 $\beta \in P_0$ は $\alpha_+(\beta)$ と $\alpha_-(\beta)$ の間に少なくとも 2 個の整数があることは同値である。

また、幅は

$$w(n) = \alpha_{n+1}(\alpha_n) - \alpha_{n-1}(\alpha_n)$$

で与えられる。

定義 間に整数を含む2数 $x \neq y \in \mathbb{R}$ に対し、 x, y で挟まれた区間を I とする。
 I 内の整数で x, y にそれぞれ最も近いものを j, k とするとき

$$[x, y] = k - j$$

とおく。

このとき、 $[x, y]$ の符号は $y - x$ の符号に等しく、

$$|y - x| - 2 < |[x, y]| \leq |y - x|$$

であり、さらに

$$(4.1) \quad w(n) = [\alpha_-(\alpha_n), \alpha_+(\alpha_n)]$$

が成り立つ。これから

補題 4.1.

$$(4.2) \quad |w(n) - (\operatorname{Re} \nu_+(\alpha_n) - \operatorname{Re} \nu_-(\alpha_n))| \leq 2$$

注意 $P \neq P_0$ の場合、さらに $\alpha_+ \neq \alpha_-$ とする。

$\alpha_+ = \alpha_{p+1}$, $\nu_+ \neq \alpha_+$ の時、

$$w(p+1) = [\alpha_-(\alpha_{p+1}), \operatorname{Re} \nu_+(\alpha_{p+1})],$$

$\alpha_- = \alpha_0$, $\nu_- \neq \alpha_-$ の時、

$$w(0) = [\operatorname{Re} \nu_-(\alpha_0), \alpha_+(\alpha_0)]$$

と置く。 $\alpha_+ = \alpha_-$ の時は、

$$w(0) = [\operatorname{Re} \nu_-(\alpha_0), \operatorname{Re} \nu_+(\alpha_0)]$$

と置く。これらの場合にも (4.2) が適用できる。

注意 $\nu_- = \infty, \nu_+ \in \mathbb{R}$ の時は、 $|w(n)|$ は ν_+ の分数部分の連分数係数に他ならない。

定義 メビウス変換 $\gamma \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ の複素移動距離 (complex translation length)

$$\lambda(\gamma) = l + i\theta \quad ; l \geq 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

は

$$\operatorname{tr}^2 \gamma = 4 \cosh^2 \lambda / 2$$

で定められる (6.2 節参照)。

複素移動距離はその共役や逆元でも同じで、 l は移動距離を、 θ は回転角を表している。

また、忠実な離散表現 $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ で放物元を放物元にうつすものを固定すると \mathbb{C} 上の函数

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\rho(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

が得られるが、次の一様評価を得る (証明は 10 章)。

定理 4.1 (Pivot theorem). 正数 ϵ, c_1 で、任意の穴あきトーラス群 $\rho(\pi_1(S))$ に対し

1. $l(\beta) \leq \epsilon$ なら、 β は *pivot* である。
2. α が *pivot* なら、

$$\frac{2\pi i}{\lambda(\alpha)} \approx \nu_+(\alpha) - \bar{\nu}_-(\alpha) + i$$

ここで、 \approx は両辺の双曲距離が一様に、ある c_1 で押さえられることを意味する。

注意

1. 定理の

$$\omega(\alpha) = \frac{2\pi i}{\lambda(\alpha)}$$

の評価はマルグリス・トーラスの制御に使える。実際、 ω の双曲距離による評価は双曲空間での α の作用の bi-Lipschitz 評価を与える (補題 6.2 参照)。

2. 定理の 2) より、 $|\omega(\alpha)|$ の逆数は有界である。従って、*pivot* の長さは上に有界である。
3. 実部を取ると、(4.2) より、 $w(n)$ の評価を得る。更に、内部 *pivot* に対しては、 $\mathrm{Im} \nu_{\pm}(\alpha_n) \leq 1$ (2.3 節) より、2) は

$$(4.3) \quad \omega(\alpha_n) \approx w(n) + i$$

と同値である： l, θ の評価式で書けば、これは

$$(4.4) \quad \frac{c_2}{w(n)^2} \leq l(\alpha_n) \leq \frac{c_3}{w(n)^2}$$

$$(4.5) \quad \left| w(n) - \frac{2\pi}{\theta(\alpha_n)} \right| \leq c_4$$

の 2 式と同値である。ただし c_j は ρ や α_n に依らない。

4. 両端の α_{\pm} に対しては $\nu_{\pm}(\alpha_{\pm})$ の虚部は小さくない。従って、2) の一方の不等式は「Bers の不等式」タイプの評価式である。補題 6.4 を見よ。

第5章 単体的双曲面（谷口雅彦）

定義 面 S から 3次元双曲多様体 N への proper map f が *simplicial hyperbolic surface* とは以下の条件を満たすことである。

1. S の cusp は N の cusp にうつる。
2. S の三角形分割 \mathcal{T} で、各 cusp (ideal vertex) に至る辺を含み、 f で各辺は測地線にうつり、各面は f で全測地的にうつるものがある。
3. S 内の頂点での $f(S)$ の内角の総和は 2π より小さくない。

特に、 f は S 上に、*singular hyperbolic metric* を与える。(頂点のみで、曲率が -1 より真に小さくなり得る。)

定義 二つの *simplicial hyperbolic surface* が、identity にホモトピックな S の同相写像の precomposition でうつりあうときは同じものと見なす。

S が穴あきトーラスのとき、単純閉曲線 $\alpha \in \mathcal{C}$ に順応した *simplicial hyperbolic surface* f とは：

α と一点 x でのみ transversal に交わる $\beta \in \mathcal{C}$ を適当に固定して、 S を 1 点抜け 4 辺形に分け、更に ideal vertex で 4 つの三角形に分けた分割 \mathcal{T} を作る時、 \mathcal{T} に対する *simplicial hyperbolic surface* で、 $\alpha^* = f(\alpha)$ が N の測地線であるものを言う。

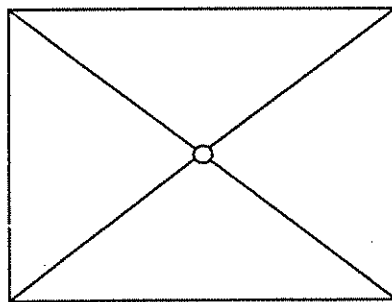


図 1:

以前と同様の表現

$$\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

を固定し、 $N = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ とする時は、このような単純閉曲線 $\alpha \in \mathcal{C}$ に順応した simplicial hyperbolic surface は常に存在し、ホモトピックな分割に対しては α^* 上で頂点を移動させる自由度をもつ。(以下の移動2))

定義 特に、特異点のない simplicial hyperbolic surface $f : S \rightarrow N$ を *pleated surface* という。

Pleated surface は、ある geodesic lamination の外で全測地的で、lamination の各 leaf を測地線にうつす。(たとえば、 x を α に沿って、無限回まわせばよい。この時、singular hyperbolic metric は pleated surface の双曲計量に収束する。)

補題 5.1. 次の性質をもつ定数 $L_0 > 0$ が存在する:

ρ の ending laminaiton ν_s ($s = \pm$) が irrational なとき、 ν_s に収束する列 $\gamma_n \in \mathcal{C}$ で、その ρ による測地線表現 γ_n^* が $\text{end } e_s$ を出てゆき、かつ

$$\ell(\gamma_n^*) \leq L_0$$

となるものが存在する。

証明: 1 点抜け双曲トーラス面の最短閉曲線を押さえる定数を L_0 とする (Ahlfors の比較定理により補題 2.1 は今の場合でも正しい: 2.3 節の注意参照。)

幾何学的素直性より、 $\text{end } e_s$ を通り抜けてゆく単純閉測地線の列 $\{\delta_n^*\}$ が存在するが、対応する各 δ_n に順応する simplicial hyperbolic surface $f_n : S \rightarrow N$ を取る。このとき、 f_n による metric での最短曲線を $\gamma_n \in \mathcal{C}$ とし、その $f_n(S)$ 上での表現を γ_n^* とする。 $\ell(\gamma_n^*) \leq L_0$ より、 $\ell(\gamma_n^*) \leq L_0$ である。

従って、 γ_n^* が $\text{end } e_s$ を通り抜けてゆくことを示せばよい。もしそうでないと、適当にコンパクト集合 E を取ると、無限個の相異なる γ_n^* が $E \cup (N - e_s)$ に留まるとして良い。そこで incompressible pleated surface S^* を適当にとって、任意の単純閉曲線の S^* 上での最短の長さ l と N 内での最短の長さの差が有界であるようにできる。このとき、各 γ_n^* と γ_n^* を測地線でつなぐホモトピーと S^* との共通部分を考えればそれらも有界な長さを持つとして良いが、これは離散性に反する。 ■

定義 α_0 に順応する simplicial hyperbolic surface $f_0 : S \rightarrow N$ を固定し、対応する三角形分割を \mathcal{T}_0 、頂点を v とする。この初期データ $(f_0, \mathcal{T}_0, v, \alpha_0)$ を他のデータ $(f_1, \mathcal{T}_1, v, \alpha_1)$ にうつす elementary move とは各 f_t が simplicial hyperbolic surface であるようなホモトピー $f_t : S \rightarrow N$ ($t \in [0, 1]$) で次の3種のいずれかとする。

1. Diagonal switch: \mathcal{T}_0 の一つの4辺形 Q の対角辺 d をとり、 \mathcal{T}_1 では、 d を逆の対角辺 d' に取り替える移動。このとき、各 f_t は Q の内部以外では動かず、 $(0, 1)$ の間の simplicial hyperbolic surface f_t では、三角形分割はこれら2本の対角線とその交点、頂点として増える。(図2参照: α_0 は垂直線)
2. Vertex slide: 頂点 v を α_0 に沿って、1回まわす移動。三角形分割はもとのものとホモトピック。

3. Geodesic switch: T_0 と T_1 は同じだが、順応する曲線が違う辺からなる閉曲線になる移動。(図 3 参照)

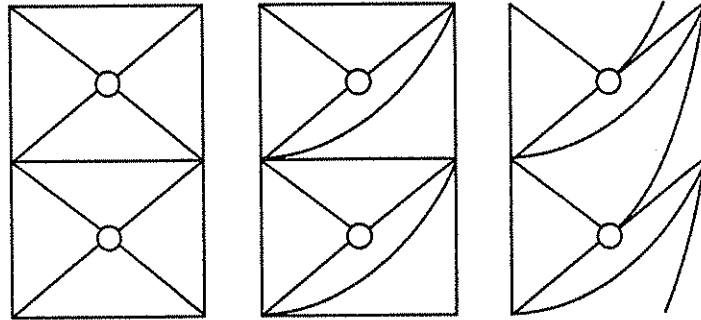


図 2:

3) についてももう少し説明する。 $f_0(v)$ を H^3 にリフトし、 ξ とする。三角形分割内の 2 つの閉曲線 α_0, α_1 の ξ からのリフトは群の元 A, B を定める。その軸を T_A, T_B とする。(それらが交わらないとして良いが) それらの共通垂線を P とする。このとき、 f_t はリフトで考えれば、まず ξ を T_A に沿って、 P まで動かし、次に P に沿って T_B に動かし、最後に T_B に沿って動かす。残りの分割はそれに伴い simplicial hyperbolic surface になるよう適当に動かす。

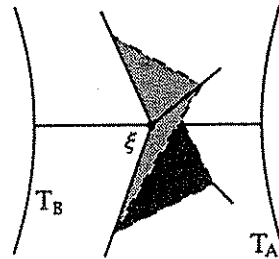


図 3:

このような elementary moves により、任意の三角形分割をつなぐことができる。

定理 5.1 (Canary). 二つのホモトピックな simplicial hyperbolic surfaces f_0, f_1 は各 f_t が simplicial hyperbolic surface であるような連続的に動く族 $\{f_t \mid t \in [0, 1]\}$ でつなぐことができる。