# Chapter 6

# Mandelbrot 集合に関する結果 —Theorem B, D の証明

５章では Julia 集合に関する結果を証明した．この章ではこれらの結果を用いて parameter space における局所連結性 (Theorem B) と測度に関する結果 (Theorem D) を証明する．そのために §6.1 では $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合の Theorem B の証明に必要な Comparison Theorem を予め証明しておく．これは $c = c_0$ に対する dynamical plane の partition から定義される $z = c_0$ の周りの annuli の列と，後に定義する，parameter plane に対する partition から定義される $c = c_0$ の周りの annuli の列について，それらの modulus の比が一様に有界であることを主張する．$c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合の Theorem B の証明はこの定理からただちに従う．Theorem B のすべての証明は §6.2 で述べる．また §6.3 では Theorem D を証明する．

## 6.1 Comparison Theorem ($z$-plane $\longleftrightarrow$ $c$-plane)

$c_0 \in \mathcal{M}$ で $f_{c_0}$ は (１回も) くりこみ可能でなく，(APR) を満たす (即ち，すべての周期点は反発的である) とする．そこで $f_{c_0}$ に対応する $\mathcal{M}$ の Yoccoz partition を構成し，$c_0$ を含む puzzle piece の列 $\{P_n^{\mathcal{M}}(c_0)\}_{n=0}^{\infty}$ を構成する．ただし，厳密には $\mathcal{M}$ の partition ではなく $c_0 \in W_{\frac{p}{q}}$ となる $\frac{p}{q}$-wake と呼ばれる，parameter space の部分集合 $W_{\frac{p}{q}}$ をとり，これに対して partition を構成する．

$f_{c_0}$ の $\alpha$-不動点の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$ とする．なお以後，$z$-plane における external ray $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ を $\mathcal{R}^c(\theta)$，また parameter space における external ray $\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M})$ を $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\theta)$ と書くことにする．

**Lemma 6.1.1 [Mi3, p.3, Theorem 1.1, 1.2].** $\frac{p}{q} \in (0,1)$ とする．
(1) $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{q-1}, \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で

$$2\theta_i \equiv \theta_{i+1} \mod 1, \quad (\theta_q = \theta_0)$$

を満たし，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{q-1}$ の配置が rotation number $\frac{p}{q}$ を持つものが存在する．

この軌道は一意的であり，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\setminus\{\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_{q-1}\}$ は最小の長さの区間をただ 1 つ持つ．それを $(\theta_-,\theta_+)$ とする．

(2)

$$W_{\frac{p}{q}} := \left\{ c\in\mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{R}^c(\theta_-) \text{ と } \mathcal{R}^c(\theta_+) \text{ が途中で break up せず potential 0} \\ \text{まで存在し，共通の repelling fixed point } \alpha_c \text{ に land する} \end{array} \right\}$$

とする．$c\in W_{\frac{p}{q}}$ のとき $z=c$ は $\mathcal{R}^c(\theta_-)$ と $\mathcal{R}^c(\theta_+)$ で区切られる sector に含まれる (Figure 6.1 (i))．また

$$\partial W_{\frac{p}{q}} = \mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\theta_-)\cup\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\theta_+)\cup\{c_{\frac{p}{q}}\}$$

が成立する (Figure 6.1 (ii))．ただし $c_{\frac{p}{q}}$ は $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\theta_-)$ と $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\theta_+)$ の共通の landing point であり，$\mathcal{R}^{c_{\frac{p}{q}}}(\theta_-)$ と $\mathcal{R}^{c_{\frac{p}{q}}}(\theta_+)$ は共通の parabolic fixed point に land する．更に $\mathcal{R}^{c_{\frac{p}{q}}}(\theta_-)$ と $\mathcal{R}^{c_{\frac{p}{q}}}(\theta_+)$ は $c_{\frac{p}{q}}$ を含む parabolic basin に隣接している (Figure 6.1 (iii))． □

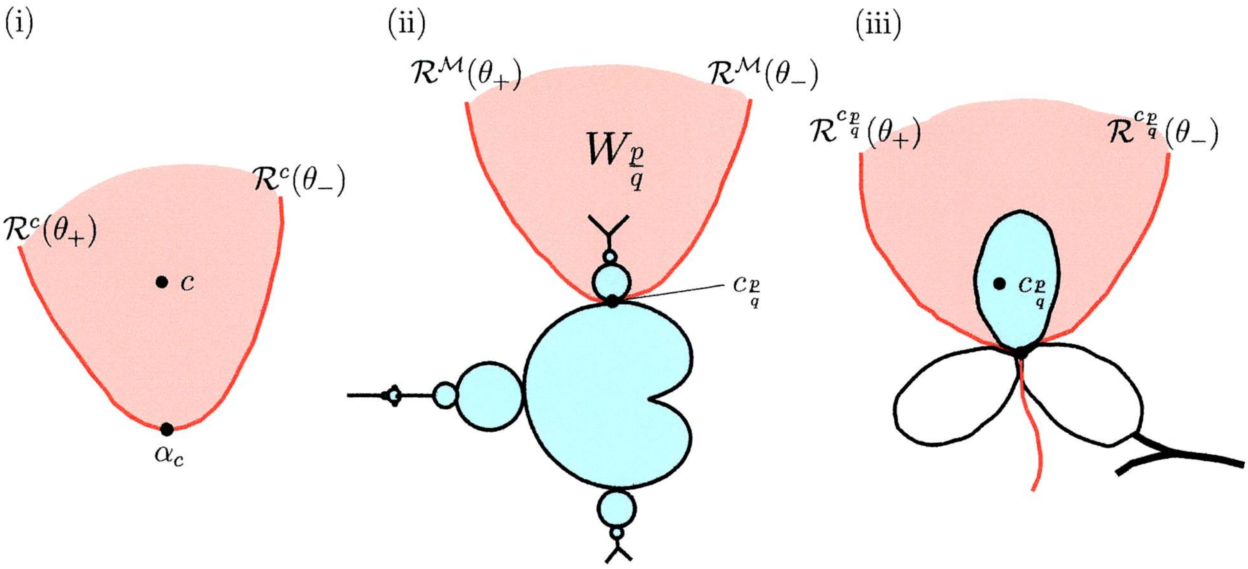


Figure 6.1

Lemma 6.1.1 にある $W_{\frac{p}{q}}$ を $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$**-wake** という．

**Definition 6.1.2.** Lemma 6.1.1 にある $\theta_-$, $\theta_+$ をとり，また定数 $\eta_0>0$ を 1 つ定めて $n\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\Gamma_n^{\mathcal{M}} &:= \left\{ c\in\overline{W_{\frac{p}{q}}} \;\middle|\; c\in\partial W_{\frac{p}{q}} \text{ or } f_c^n(c)\in\overline{\mathcal{R}^c(\theta_\pm)} \text{ or } G_c(f_c^n(c))=\eta_0 \right\} \\
\mathcal{P}_n^{\mathcal{M}} &:= \left\{ W_{\frac{p}{q}}\setminus\Gamma_n^{\mathcal{M}} \text{の連結成分で } \mathcal{M} \text{ と交わるもの} \right\} \\
\mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}} &:= \mathcal{M}\cap W_{\frac{p}{q}}\setminus\left\{ c\in W_{\frac{p}{q}} \;\middle|\; {}^{\exists}n,\ f_c^n(c)=\alpha_c(=\overline{\mathcal{R}^c(\theta_-)}\cap\overline{\mathcal{R}^c(\theta_+)}) \right\}
\end{aligned}$$

と定義する．ただし，$G_c$ は §3.1.1 で定義した Green 関数である．$c \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}}$ であるとき $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}_n$ の元で $c$ を含むものを $P^{\mathcal{M}}_n(c)$ と書き (parameter space における) $c$ を含む **depth $n$ の puzzle piece** という (Figure 6.2).

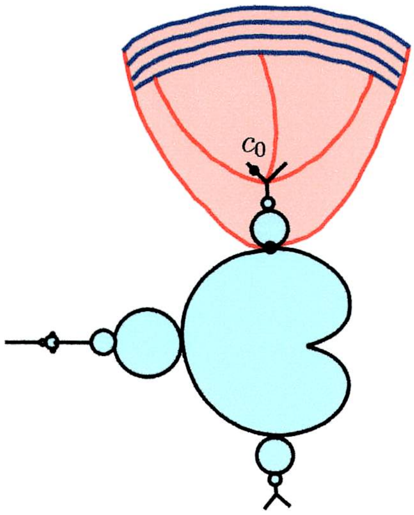


Figure 6.2 $\Gamma^{\mathcal{M}}_n$ と $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}_n$.

以後，ここで定義した parameter space における puzzle piece $P^{\mathcal{M}}_n(c)$ と区別するために，$f_c$ に関する $\mathcal{P}_n$ に属する元 $P_n(c)$ のことを $P^c_n(c)$ と書くことにする．

**Lemma 6.1.3.** $c_0 \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}}$ とする．

(1) $P^{c_0}_n(c_0)$ と $P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ は同じ external angle と potential を持つ external rays と equi-potential curve (の一部分) で構成される．更にそれらが現れる順番も一致する．

(2) $\overline{P^{\mathcal{M}}_n(c_0)}$ まで $P^c_n(c)$ は拡張される．即ち，$c \in \overline{P^{\mathcal{M}}_n(c_0)}$ に対しても $P^c_n(c)$ が定義される．

(3) $c$ が $\partial P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ を 1 周するとき $c$ は $\partial P^c_n(c)$ を “1 周 ”する．詳しくは $c \in P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ に対して同相写像

$$\partial_c : \partial P^{\mathcal{M}}_n(c_0) \xrightarrow{\simeq} \partial P^c_n(c)$$

が存在し，(1) と同様のことが成立する．$\overline{P^{\mathcal{M}}_n(c_0)} \subset W_{\frac{p}{q}}$ ならこの $\partial_c$ は $c \in \partial P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ に対して拡張され

$$\partial_c(c) = c \in \partial P^c_n(c)$$

が成立し，更に $c$ が $\partial P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ を 1 周するとき $\partial_c(c) = c \in \partial P^c_n(c)$ は上記の external angle と potential によるパラメーターづけでみて $\partial P^c_n(c)$ を 1 周する (Figure 6.3 参照).

**(Outline of the Proof) :** (1) は $n$ に関する帰納法によって証明される．まず $n = 0$ のときは Lemma 6.1.1 より主張が成り立つ．また例えば $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ のときは $n = 1, 2$ に対しては equi-potential の level が下がるだけで puzzle piece $P^{\mathcal{M}}_n(c_0)$ の境界の combinatorics は変化しないことに注意せよ．この場合は $n = 3$ で初めて変化が起こる．Figure 6.2 を参照せよ．また 4 章の Figure 4.2–1，4.2–2 も参照せよ． □

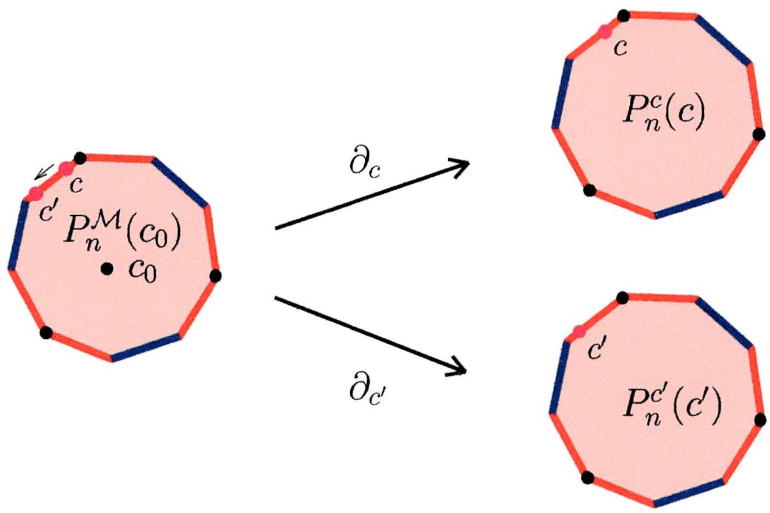


Figure 6.3

**Lemma 6.1.4.** $c_0 \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}}$ のとき $\overline{P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \cap \mathcal{M}}$ は連結.

**(Proof) :** Lemma 4.1.1 と全く同様の議論により，もし $\overline{P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \cap \mathcal{M}}$ が連結でないとすると，$\mathcal{M}$ が連結でないことになり Corollary 3.2.2 に矛盾することがわかる. □

さて $c_0 \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}}$ とし，$f_{c_0}$ はくりこみ可能ではないとすると，Separation Lemma (Lemma 4.1.2) より，ある $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{P_{N+1}^{c_0}(0)} \subset P_N^{c_0}(0)$$

が成り立つ. $f$ の作用を考えればこれは

$$\overline{P_N^{c_0}(c_0)} \subset P_{N-1}^{c_0}(c_0) \tag{6.1}$$

と同値である ( 4 章 Figure 4.6 参照). (6.1) を用いると parameter space における Separation Lemma が次のように示される (Douady's Principle!) :

**Lemma 6.1.5 (Separation Lemma in Parameter Space).**

(1) $\overline{P_N^{\mathcal{M}}(c_0)} \subset P_{N-1}^{\mathcal{M}}(c_0) \subset W_{\frac{p}{q}}$ が成立する.

(2) $c \in \overline{P_N^{\mathcal{M}}(c_0)}$ ならば $\overline{P_N^c(c)} \subset P_{N-1}^c(c)$ が成立する.

**(Proof) :** (1) Lemma 6.1.3 より external ray と potential による対応

$$\partial P_N^{c_0}(c_0) \longleftrightarrow \partial P_N^{\mathcal{M}}(c_0), \quad \partial P_{N-1}^{c_0}(c_0) \longleftrightarrow \partial P_{N-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$$

がある．(6.1) より $\partial P_N^{c_0}(c_0)$ と $\partial P_{N-1}^{c_0}(c_0)$ は交わらない．よって $\partial P_N^{\mathcal{M}}(c_0)$ と $\partial P_{N-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ も交わらない．従って $\overline{P_N^{\mathcal{M}}(c_0)} \subset P_{N-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ が成り立つ．

(2) 同じく Lemma 6.1.3 より external ray と potential による対応

$$\partial P_N^{c_0}(c_0) \longleftrightarrow \partial P_N^{c}(c), \quad \partial P_{N-1}^{c_0}(c_0) \longleftrightarrow \partial P_{N-1}^{c}(c), \quad (c \in \overline{P_N^{\mathcal{M}}(c_0)})$$

があるので，(1) と同様の理由で $\overline{P_N^c(c)} \subset P_{N-1}^c(c)$ が成立する． □

さて

$$A_n^{\mathcal{M}}(c_0) := P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \setminus \overline{P_{n+1}^{\mathcal{M}}(c_0)}$$

と定義し，今まで $A_n(x)$ と書いてきた $f_c$ の相空間内の集合を $A_n^c(x)$ と書くことにする．Lemma 6.1.5 より $A_N^{c_0}(0)$ が non-degenerate annulus ならば $A_{N-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ も non-degenerate annulus になる．また一般に $\mu(n+1) > 0$ ならば $A_{n+1}^{c_0}(0)$ が non-degenerate annulus であり，従って

$$A_n^{c_0}(c_0) = f_{c_0}(A_{n+1}^{c_0}(0))$$

も non-degenerate annulus になるので，Lemma 6.1.5 (1) の証明にあるのと同様の理由により $A_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ も non-degenerate annulus になる．これらの annuli の modulus の間には次の Comparison Theorem が成り立つ：

**Theorem 6.1.6 (Comparison Theorem (Yoccoz)).** $c_0 \in \mathcal{M}_{\frac{p}{q}}^*$ で $f_{c_0}$ はくりこみ可能ではなく，(APR) であるとする．またこの $c_0$ に対して Lemma 6.1.5 にある $N$ (separation level) をとる．このとき定数 $K = K(\frac{p}{q}, N) > 0$ が存在し，$\mu(n+1) > 0$ なる任意の $n$ に対して次の評価が成立する：

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\operatorname{mod} A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}{\operatorname{mod} A_n^{c_0}(c_0)} \leq K.$$

この定理の証明の前に，必要な概念の定義とそれらのいくつの性質を挙げておく．

**Definition 6.1.7.** $X$ を $\mathbb{C}$ の部分集合とするとき $i : X \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が $X$ の **holomorphic motion** であるとは $i(z, \lambda) =: i_\lambda(z)$ としたとき，次を満たすことをいう：

- $i_0 = i(\cdot, 0) =$ 恒等写像,
- 任意の $\lambda \in \mathbb{D}$ に対し $i_\lambda = i(\cdot, \lambda)$ は単射,
- 任意の $z \in X$ に対し $i_\lambda(z)$ は $\lambda$ について解析的.

また，$\Omega$, $\Omega' \subset \mathbb{C}$ を開集合としたとき $f : \Omega \to \Omega'$ が ***K*-quasi-regular** であるとは

$$f = f_2 \circ f_1, \quad f_1 : K\text{-quasi conformal}, \quad f_2 : \text{analytic}$$

と表せることをいう．

holomorphic motion については次が成り立つ：

**Theorem 6.1.8 (Optimal $\lambda$-Lemma (Słodkowski [Sł, p.348, Theorem 1.3])).** $i : X \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を $X \subset \mathbb{C}$ の holomorphic motion とする．このとき $\mathbb{C}$ の holomorphic motion $\widetilde{i} : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ で $\widetilde{i}_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は quasi-conformal で，$\widetilde{i}|X \times \mathbb{D} = i$ となるものが存在する． □

また，次の Lemma は Comparison Theorem の証明の 1 つの鍵となる：

**Lemma 6.1.9 ([DH2, p.327, Lemma]).** $h : \mathbb{C} \times \Lambda \to \mathbb{C}$ を holomorphic motion, $\Lambda \simeq \mathbb{D}$ (この対応により $\Lambda \ni \lambda_0 \longleftrightarrow 0 \in \mathbb{D}$)，また $v : \Lambda \to \mathbb{C}$ を holomorphic map とする．$c \in \Lambda$ に対して $h_c(z) := h(z, c)$ とし，$g(c) := h_c^{-1}(v(c))$ とおく．更に $\Lambda_1 \subset \Lambda$ を開集合で $\overline{\Lambda_1} \subset \Lambda$ を満たし $\overline{\Lambda_1}$ がコンパクトになるものとする．このとき $g$ は $\Lambda_1$ 上 $K$-quasi-regular になり，しかも定数 $K$ は $\sup_{z \in \partial\Lambda_1}$ distance $(\lambda_0, z)$ (ただし "distance" は $\Lambda$ 内の Poincaré distance) のみに依存する．更に $\sup_{z \in \partial\Lambda_1}$ distance $(\lambda_0, z) \to 0$ のとき (即ち，$\Lambda_1$ が 1 点 $\lambda_0 \in \Lambda$ に縮むとき) $K \to 1$ となる． □

**(Proof of Comparison Theorem)：** $\Lambda := P_N^{\mathcal{M}}(c_0)$ とし，holomorphic motion

$$i : (\partial P_{N+1}^{c_0}(0) \cup \partial P_N^{c_0}(0)) \times \Lambda \to \mathbb{C}$$

を次で定義する (注：$\partial P_{N+1}^{c_0}(0) \cup \partial P_N^{c_0}(0) = \partial A_N^{c_0}(0)$ である)：

1. $i(*, c_0) = \mathrm{id}$,
2. $i_c := i(*, c) : \partial P_{N+1}^{c_0}(0) \cup \partial P_N^{c_0}(0) \to \partial P_{N+1}^{c}(0) \cup \partial P_N^{c}(0)$ は external angle と potential による canonical な対応 (Lemma 6.1.3).

定義より任意の $c$ に対して $i_c$ は単射になり，また任意の $z$ に対して $i_c(z)$ は $c$ について解析的であるから，確かに $i$ は holomorphic motion になる．すると Optimal $\lambda$-Lemma より holomorphic motion

$$h : \mathbb{C} \times \Lambda \to \mathbb{C}$$

で $h|\partial A_N^{c_0}(0) \times \Lambda = i$ を満たすものが存在する．$h_c := h(*, c)$ とおく．$\mu(n+1) > 0$ となる $n$ を考えると $f_{c_0}^{n-N}$ によって $A_n^{c_0}(c_0)$ は $A_N^{c_0}(0)$ に写され

$$f_{c_0}^{n-N} : A_n^{c_0}(c_0) \to A_N^{c_0}(0)$$

はある $k \in \mathrm{N}$ に対して $2^k$ 次の covering になる．すると Lemma 6.1.3 より $c \in \overline{P_n^{\mathcal{M}}(c_0)}$ のとき

$$f_c^{n-N} : A_n^c(c_0) \to A_N^c(0)$$

も $2^k$ 次の covering になる．また先に説明したように $\overline{P_{n+1}^{\mathcal{M}}(c_0)} \subset P_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ であり Lemma 6.1.3 より $c$ が $\partial P_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ を 1 周するとき $c$ は $\partial P_n^c(c)$ を 1 周する．従って $c$ が $\partial P_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ を 1 周するとき $f_c^{n-N}(c)$ は $\partial P_N^c(0)$ をちょうど $2^k$ 周する．同様に $c$ が $\partial P_{n+1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ を 1 周するとき $f_c^{n-N}(c)$ は $\partial P_{N+1}^c(0)$ をちょうど $2^k$ 周する．そこで $g : \overline{A_n^{\mathcal{M}}(c_0)} \to \mathbb{C}$ を

$$g(c) = h_c^{-1} \circ f_c^{n-N}(c)$$

で定義すると次が成り立つ：

**Lemma 6.1.10.** $g$ は $\overline{A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}$ から $\overline{A_N^{c_0}(0)}$ への $2^k$ 次の covering であり，内点においては quasi-regular である．

**(Proof)：** $g$ が quasi-regular であることは Lemma 6.1.9 からただちに従う．また先程述べたとおり $g$ は $\partial A_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ 上では $2^k$ 次の covering である．この2つのことから $g$ は $\overline{A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}$ から $\overline{A_N^{c_0}(0)}$ への $2^k$ 次の covering にならざるを得ない (つまり critical point を持ち得ない)． □

この Lemma より $g$ は quasi-regular であるので次のように分解できる：

$$\begin{aligned} g \ &: A_n^{\mathcal{M}}(c_0) \xrightarrow{f_1} f_1(A_n^{\mathcal{M}}(c_0)) \xrightarrow{f_2} A_N^{\mathcal{M}}(0), \\ f_1 \ &: K_n\text{-quasi conformal}, \ \ f_2 : \text{analytic}, \ 2^k\text{次の covering} \end{aligned}$$

このことから

$$\frac{1}{K_n}\cdot\frac{1}{2^k} \leq \frac{\mathrm{mod}\ A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}{\mathrm{mod}\ A_N^{c_0}(0)} \leq K_n\cdot\frac{1}{2^k}$$

であることがわかる．これと

$$\mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0) = \frac{1}{2^k}\cdot\mathrm{mod}\ A_N^{c_0}(0)$$

であることから

$$\frac{1}{K_n} \leq \frac{\mathrm{mod}\ A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}{\mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0)} \leq K_n$$

が従う．ここで定数 $K_n$ は，一般に $P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \supseteq P_{n+1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ であることを考えると Lemma 6.1.9 より $n$ によらない値でとりかえることができる．つまり $K = K(\frac{p}{q}, N)$ で任意の $n$ に対して $K_n \leq K$ を満たすものがとれる．よって

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\mathrm{mod}\ A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}{\mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0)} \leq K$$

が成り立つ． □

## 6.2 Theorem B の証明

$c_0 \in \mathcal{M}$ とし $f_{c_0}$ は (APR) を満たし，更にくりこみ可能でないとする．

**(Step I)** $c_0 \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合：

$\mu(n+1) > 0$ であるとき $f : A_{n+1}^{c_0}(0) \to A_n^{c_0}(c_0)$ は2対1の covering になるので

$$\mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0) = 2\cdot\mathrm{mod}\ A_{n+1}^{c_0}(0) > 0$$

が成り立つ．よって Combinatorial Divergence Theorem より

$$\sum_{\mu(n+1)>0} \mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0) = \infty$$

であることがわかる．従って Comparison Theorem より

$$\sum_{\mu(n+1)>0} \mathrm{mod}\ A_n^{\mathcal{M}}(c_0) \geq \frac{1}{K} \sum_{\mu(n+1)>0} \mathrm{mod}\ A_n^{c_0}(c_0) = \infty$$

即ち

$$\sum_{\mu(n+1)>0} \mathrm{mod}\ A_n^{\mathcal{M}}(c_0) = \infty$$

が従う．よって Proposition 2.3.11 より

$$\mathrm{diam}\ P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \to 0, \quad (n \to \infty)$$

となる．これは $\mathcal{M}$ が $c_0$ で局所連結であることを示す．

**(Step II)** $c_0 \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合：
証明の outline だけを以下で述べる．

$$K_m^{c_0} := \{x \in K_{c_0}^* \mid f_{c_0}^n(x) \notin P_m^{c_0}(0),\ n = 0, 1, \ldots\}$$

とすると $c_0 \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ より，適当な $m \in \mathbf{N}$ に対して $c_0 \in K_m^{c_0}$ となる．そこで

$$Q_k^{c_0} := P_m^{c_0}(f^k(c_0)) \in \mathcal{P}_m^{c_0} \setminus \{P_m^{c_0}(0)\}$$

とすると $n \geq m$ のとき $P_n^{c_0}(c_0)$ は $f^{-(n-m)}(Q_{n-m}^{c_0})$ の連結成分である．更に詳しく

$$P_n^{c_0}(c_0) = (f_{c_0}|Q_0^{c_0})^{-1} \circ (f_{c_0}|Q_1^{c_0})^{-1} \circ \cdots \circ (f_{c_0}|Q_{n-m-1}^{c_0})^{-1}(Q_{n-m}^{c_0}) \tag{6.2}$$

と表せる (注：ただし $f_{c_0}^{-1}$ の branch は各段階で適当なものをとる)．ここで $c \in P_m^{\mathcal{M}}(c_0)$ ならば $P_m^{\mathcal{M}}(c_0)$ の定義から $\Gamma_m^{c_0}$ と $\Gamma_m^c$ は combinatorial に同型であることがわかる．そこで $c \in P_m^{\mathcal{M}}(c_0)$ に対して

$$R_n^c := (f_c|Q_0^c)^{-1} \circ (f_c|Q_1^c)^{-1} \circ \cdots \circ (f_c|Q_{n-m-1}^c)^{-1}(Q_{n-m}^c)$$

とすると (注：ただし $f_c^{-1}$ の branch は (6.2) にあるのと同様にとる) $R_n^c \in \mathcal{P}_n^c$ である．また

$$R_m^c \supset R_{m+1}^c \supset \cdots$$

であり，Theorem A の証明の (Step I) で述べた双曲性を使った議論から

$$\mathrm{diam}\ R_n^c \to 0, \quad (n \to \infty)$$

が示せる．次に

$$R_n^{\mathcal{M}} := \{c \in P_m^{\mathcal{M}}(c_0) \mid c \in R_n^c\}$$

とおくと (注：一般に $c \in R_n^c$ であるかどうかはわからない)

$$R_m^{\mathcal{M}} \supset R_{m+1}^{\mathcal{M}} \supset \cdots, \quad c_0 \in \bigcap_{n \geq m} R_n^{\mathcal{M}}$$

が成り立つ．実は

$$R_n^{\mathcal{M}} = P_n^{\mathcal{M}}(c_0)$$

でありしかも

$$\text{diam } R_n^{\mathcal{M}} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

であることが示せる．従って $\mathcal{M}$ は $c_0$ で局所連結である．

以上で Theorem B は証明された． □

$c_0 \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合は Comparison Theorem によって証明したわけであるが，この場合に $z$-plane における $c_0$ を囲む annulus $A_n^{c_0}(c_0)$，$c$-plane における $c_0$ を囲む annulus $A_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ それぞれの modulus の比の極限については次のことが成り立つ：

**Corollary 6.2.1 .** $\mu(n_k+1) > 0$, $n_k \nearrow \infty$ なる列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して

$$\frac{\text{mod } A_{n_k}^{\mathcal{M}}(c_0)}{\text{mod } A_{n_k}^{c_0}(c_0)} \to 1 \quad (k \to \infty)$$

が成立する．

**(Proof) :** Comparison Theorem の証明より

$$\frac{1}{K_n} \leq \frac{\text{mod } A_n^{\mathcal{M}}(c_0)}{\text{mod } A_n^{c_0}(c_0)} \leq K_n$$

であり，定数 $K_n$ は Lemma 6.1.9 より $\sup_{z \in \partial P_n^{\mathcal{M}}(c_0)}$ distance $(c_0, z)$ (ただし "distance" は $P_N^{\mathcal{M}}(c_0)$ 内の Poincaré distance) によるものである．そして Theorem B の証明より

$$\text{diam } P_n^{\mathcal{M}}(c_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即ち，$P_n^{\mathcal{M}}(c_0)$ は 1 点 $c_0$ に縮むので再び Lemma 6.1.9 より

$$K_n \to 1 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって

$$\frac{\text{mod } A_{n_k}^{\mathcal{M}}(c_0)}{\text{mod } A_{n_k}^{c_0}(c_0)} \to 1 \quad (k \to \infty)$$

が成立する． □

## 6.3 Theorem D の証明

$f_c$ はくりこみ可能ではなく，また $f_c$ のすべての周期点は反発的であるとする．以下ではパラメーター $c$ に対する $\tau$-関数とこれに付随する $\Sigma$，それに weight function $\mu$ をそれぞれ $\tau^{(c)}$，$\Sigma^c$，$\mu^c$ と書くことにする．$\alpha$-不動点の combinatorial rotation number $\frac{p}{q} \in (0,1)$ と separation level $N$ をそれぞれ 1 つとり固定する．$f_c$ が 4 つの条件

1. $f_c$ はくりこみ可能ではない,
2. $f_c$ のすべての周期点は反発的である,
3. $f_c$ の $\alpha$-不動点の combinatorial rotation number は $\frac{p}{q}$,
4. $f_c$ の separation level は $N$,

を満たすことをまとめて $(*)$ の記号で表すことにする．そこで $\mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}}$ を次の3つの集合に分類する：

$$\begin{aligned}
Y_k &= Y_{\frac{p}{q},N,k} \quad (k=1,2,\dots) \\
&:= \left\{ c \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}} \;\middle|\; (*),\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau^{(c)}(n) = \infty,\ \sup {\tau^{(c)}}^{-1}(N) = k,\ \liminf_{n\to\infty} \tau^{(c)}(n) > N \right\} \\
Y_\infty &= Y_{\frac{p}{q},N,\infty} \\
&:= \left\{ c \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}} \;\middle|\; (*),\ \limsup_{n\to\infty} \tau^{(c)}(n) > N,\ \liminf_{n\to\infty} \tau^{(c)}(n) \le N \right\} \\
Z_m &= Z_{\frac{p}{q},N,m} \quad (m=1,2,\dots) \\
&:= \left\{ c \in \mathcal{M}^*_{\frac{p}{q}} \;\middle|\; (*),\ \limsup_{n\to\infty} \tau^{(c)}(n) < m \right\}
\end{aligned}$$

この分類は Theorem C の証明のときに用いたやり方に従っている．ただしそのときに使ったのと同じような記号を一部使っているが，意味しているものは全く違うので注意していただきたい．またすべての場合について「$f_c$ はくりこみ可能ではない」としているので，常に ${}^{\#}\Sigma^c = \infty$ である (Proposition 4.2.2 (2) 参照)．更に

1. $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ ならば，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $c \in Y_k$,
2. $c \in (\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ ならば，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $c \in Y_k$，または $c \in Y_\infty$,
3. $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ ならば，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $c \in Z_k$,

となる．よって Theorem D を証明するには $Y_k$, $Y_\infty$, $Z_k$ の各々が測度0であることを示せば十分である．そのための方法は Theorem C の証明のときと同様で $Y_k$ は Modulus-Area inequality と Combinatorial Divergence Theorem で，$Y_\infty$ は Koebe's Distortion Theorem を使った議論で，$Z_k$ は双曲性を使った議論で，それぞれ証明する．

**(Step I)** $Y_k$ について：

$$\mathcal{A}^{\mathcal{M}}_k = \mathcal{A}^{\mathcal{M}}_{\frac{p}{q},N,k} := \{ A^{\mathcal{M}}_n(c) \mid c \in Y_k,\ n > k,\ \mu^c(n+1) > 0 \}$$

とすると Theorem C の証明の (Step II) と同様に次が成り立つ：

**Lemma 6.3.1.** $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}_k$ の相異なる annuli は互いに disjoint である．

**(Proof) :** $c_1$, $c_2 \in Y_k$ で $k < n < m$ として $A_n^{\mathcal{M}}(c_1)$ と $A_m^{\mathcal{M}}(c_2)$ が disjoint でなかったとする (Figure 6.4 参照).

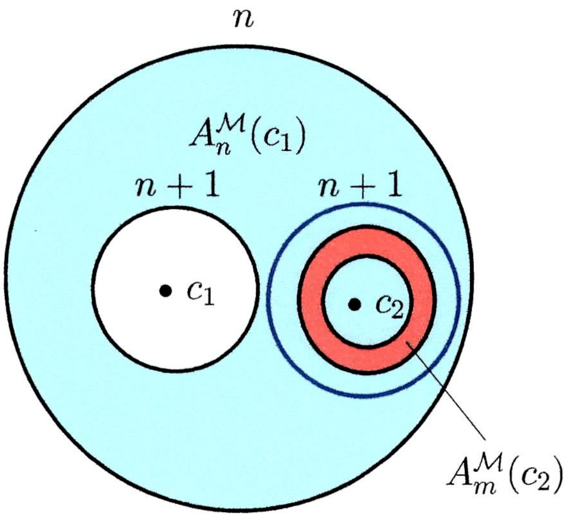


Figure 6.4 $c$-plane における pieces の関係.

このとき $A_m^{\mathcal{M}}(c_2)$ を含む $(n+1)$-piece を考えると Figure 6.4 のようになっており，depth $n$ と $n+1$ のときの pieces の境界の combinatorial な対応を考えると (Lemma 6.1.3)，$c = c_1$ の $z$-plane では Figure 6.5 のようなことがおこっていることがわかる：

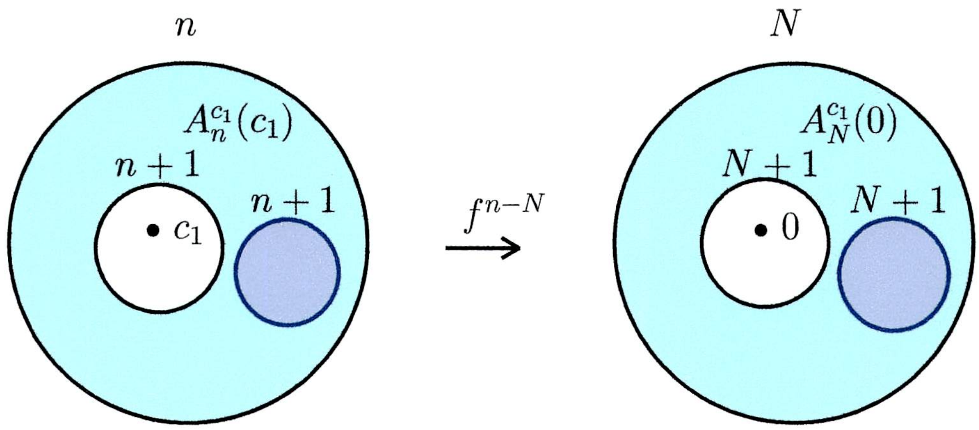


Figure 6.5 $c = c_1$ のときの $z$-plane における pieces の関係.

さて，$P_n^{\mathcal{M}}(c_1)$ の定義より $c$ が $P_n^{\mathcal{M}}(c_1)$ 内を動くとき $P_n^c(c)$ の中の $(n+1)$-pieces の combinatorics は変化しないことがわかる．また一方，$P_n^{c_1}(c_1)$ の中の $(n+1)$-pieces と $P_n^{\mathcal{M}}(c_1)$ の中の $(n+1)$-pieces の間には 1 対 1 対応がつく．この 2 つの事実から $c = c_2$ に対しても $\partial P_{n+1}^{\mathcal{M}}(c_2)$ と $\partial P_{n+1}^{c_2}(c_2)$ の間に 1 対 1 対応がつくことがわかる．従って

$$f_{c_2}^{n-N} : P_{n+1}^{c_2}(c_2) \to P_{N+1}^{c_2}(f_{c_2}^{n-N}(c_2))$$

であり，更に任意の $0 \leq j \leq n - N$ に対して $0 \notin f_{c_2}^j(P_{n+1}^{c_2}(c_2))$ である．これは

$$\tau^{(c_2)}(n+2) \leq N$$

であることを示しており，一方 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau^{(c_2)}(n)=\infty$ であるから中間値の定理より，ある $k'\geq n+2$ に対して $\tau^{(c_2)}(k')=N$ となる．これは $\max\tau^{(c_2)^{-1}}(N)=k<n$ であること，即ち，$c_2\in Y_k$ であることに反する． □

さて，$c\in Y_k$ だから Combinatorial Divergence Theorem より

$$\sum_{\mu^c(n+1)>0}\mu^c(n+1)=\infty$$

であるから Proposition 4.2.16 と Comparison Theorem を考慮すると

$$Y_k\subset\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\sum_{z\in D_A,A\in\mathcal{A}_k^{\mathcal{M}}}\mathrm{mod}\ A=\infty\right\}$$

が成り立つ．すると Lemma 2.3.14 より $|Y_k|=0$ がわかる．

**(Step II)** $Y_\infty$ について：
任意の $c_0\in Y_\infty$ が $Y_\infty$ の density point でないことを以下で示す．

$c_0\in Y_\infty$ より自然数の列 $n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$ で

$$\tau^{(c_0)}(n_j)=N,\quad n_j\notin\Sigma^{c_0}\ (\text{即ち，}\tau^{(c_0)}(n_j+1)=N+1)$$

となるものが存在する．すると

$$f_{c_0}^{n_j-N-1}:A_{n_j-1}^{c_0}(c_0)\to A_N^{c_0}(0) \tag{6.3}$$

は conformal である．$c$ が $\partial P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ を 1 周するとき Lemma 6.1.3 より $c$ は $\partial P_{n_j-1}^{c}(c)$ を 1 周し，(6.3) より $f_c^{n_j-N-1}(c)$ は $\partial P_N^c(0)$ を 1 周する．ここで $\mathcal{M}$ の $c_0$ における局所連結性の証明から

$$\mathrm{diam}\ P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)\to 0,\quad (j\to\infty)$$

であることがわかっているので，$j$ が十分大なら $c$ が $P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ を動くとき $\partial P_N^c(0)$, $\partial P_{N+1}^c(0)$ は相空間である複素平面上をほとんど動かない．従って $c$ が $P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ を 1 周するとき $f_c^{n_j-N-1}(c)$ は $\overline{P_{N+1}^{c_0}(c_0)}$ の外側を 1 周することになる．よって関数 $f_c^{n_j-N-1}(c)$ の逆関数

$$g_i:P_{N+1}^{c_0}(0)\to P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$$

が定義できる (注：偏角の原理による)．そこで

$$B\subset P_{N+1}^{c_0}(0)\setminus K_{c_0}$$

を 1 つの閉円板とすると，$c$ が $c_0$ に十分近ければ

$$B\subset\mathbb{C}\setminus K_c \tag{6.4}$$

となる．よって $j$ を十分大として $c\in P_{n_j-1}^{\mathcal{M}}(c_0)$ のとき (6.4) が成立しているとしてよい．ここで $c\in g_i(B)$ とすると

$$f_c^{n_j-N-1}(c)\in B\subset\mathbb{C}\setminus K_c$$

であるから $c \notin \mathcal{M}$，即ち，$c \notin Y_\infty$ である．よって Koebe's Distortion Theorem と Proposition 2.2.6 より $c_0$ は $Y_\infty$ の density point ではあり得ない．従って Lebesgue's Density Theorem より $|Y_\infty| = 0$ である．

**(Step III)** $Z_m$ について：
証明の outline を以下で示す．

$$K_m^c := \{x \in K_c^* \mid f_c^n(x) \notin P_m^c(0),\ n = 0, 1, \dots\}$$

とすると (注：$K_m^c$ の "$c$" は補集合を表す記号ではないことに注意)，Proposition 5.1.4 より $c \in Z_m$ なら $c \in K_m^c$ である．さて，$c_0 \in Z_m$, $c \in \overline{P_m^{\mathcal{M}}(c_0)}$ のとき itinerary で対応をつけることにより

$$K_m^{c_0} \xrightarrow{\simeq} K_m^c$$

なる同型写像がつくれる．これを用いると holomorphic motion

$$i : K_m^{c_0} \times P_m^{\mathcal{M}}(c_0) \to \mathbb{C}$$

であって

$$i_c(z) := i(z, c) : K_m^{c_0} \to K_m^c$$

となるものが構成できる．すると任意の $z \in K_m^{c_0}$ に対して写像

$$z(c) := i(z, c) : P_m^{\mathcal{M}}(c_0) \to \mathbb{C}$$

は恒等写像 $z(c) \equiv c$ とはならないことがわかる．Optimal $\lambda$-Lemma (Theorem 6.1.8) より $i$ は holomorphic motion

$$\tilde{i} : \mathbb{C} \times P_m^{\mathcal{M}}(c_0) \to \mathbb{C}$$

に拡張される．そこで

$$g(c) := \tilde{i}_c^{-1}(c)$$

とおくと $g$ は $g(c_0) = c_0$ を満たし，また Lemma 6.1.9 より quasi-regular である．$U$ を $c_0$ の任意の近傍とすると構成の方法から

$$Z_m \cap U = g^{-1}(K_m^{c_0}) \cap U$$

であることがわかる．さて $K_m^{c_0}$ は Theorem C の証明の (Step IV) より測度 0 であった．quasi-regular map は「測度 0 である」という性質を保存するので，これから $|Z_m \cap U| = 0$ であることがわかる．$c_0 \in Z_m$ は任意であったから $|Z_m| = 0$ が示されたことになる．

以上で Theorem D は証明された． □

**Remark 6.3.2.** (1) $f(z) = z^l + c$ の形の多項式で $l$ が十分大のとき，ある $c \in \mathbb{R}$ に対して $f$ はくりこみ可能ではなく，すべての周期点は反発的であり，しかも $|J_f| > 0$ となる，という主張もある ([**NvS**, p.2, Main Theorem]).

(2) Remark 1.1.10 でも述べたとおり，無理的中立周期点をもつ $p_c$ で，$J_c$ が局所連結でないような例がある．そこで

回転数 (Diophantine condition) で局所連結性を特徴づけられるか？

という問題が考えられるが，これについては [**Pe2**] を参照せよ．

(3) 無限回くりこみ可能な $p_c$ で，$J_c$ が局所連結でないような例がある ([**Mi2**, §3])．そこで

くりこみの周期のパターンで局所連結性を特徴づけられるか？

という問題が考えられる ([**Ly3**] も参照せよ)．

# Appendix A

# Branner-Hubbardの3次多項式に関する理論

以下では $f$ を3次多項式とし，$\omega_1$, $\omega_2$ を2つの critical points とする．このとき可能性として次の3通りが考えられる：

1. $\omega_1,\ \omega_2 \in K_f$,

2. $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus K_f$,

3. $\omega_1$, $\omega_2$ のどちらか一方が $K_f$ に属し，もう一方が $\mathbb{C} \setminus K_f$ に属する．

最初の2つの場合は Theorem 1.1.1 よりそれぞれ $K_f$ は連結，$K_f$ は Cantor 集合となる．そこで以下では残りの第3の場合を考える．これに関しては次が成り立つ：

**Theorem A.0.1 (Branner-Hubbard [BH, p.273, Theorems 5.3; p.278, Theorem 5.9]).** $f$, $\omega_1$, $\omega_2$ を上のとおりとし，$\omega_1 \in K_f$, $\omega_2 \notin K_f$ であるとする．ここで $K(\omega_1)$ を $K_f$ の $\omega_1$ を含む連結成分とする．このとき次のどちらかが成立する：

(1) $K(\omega_1)$ が $f$ に関して周期的 (即ち，ある $p \in \mathrm{N}$ に対して $f^p(K(\omega_1)) = K(\omega_1)$) ならば，$U \supset K(\omega_1)$ なる開集合 $U$ が存在して $f^p : U \to f^p(U)$ が次数2の polynomial-like mapping となる．即ち，$U$, $f^p(U)$ は単連結で $f|U$ が $2:1$ の covering であり，$f^p(U) \supset \overline{U}$ が成立する．従ってこのときはある $c \in \mathcal{M}$ に対して $K(\omega_1) \simeq K_c$ となる．

(2) $K(\omega_1)$ が $f$ に関して周期的でないならば，$K_f$ は Cantor 集合であり，更に $|K_f| = 0$ である．

**Remark A.0.2.** 上記定理 (2) の $|K_f| = 0$ の主張は McMullen による ([**BH**, p.235]).

この結果は元の論文では Tableau を用いて証明されているし，また [**Mi2**, §2] ではこの結果の一般化として $d$ 次多項式で1つの critical point を除いてすべての critical points が $\mathbb{C} \setminus K_f$ に属する場合に同様な結果が得られることが，やはり Tableau を用いて示されている．ここではこの場合に通用する$\tau$-関数を新たに定義し，それに付随した weight function に関する Combinatorial Divergence Theorem を示すことによって証明する．なお，以下の証明は宍倉による．

最初に第3の場合の例を2つだけ挙げておく.

**Example A.0.3.** (1) $f_\lambda(z) := \lambda z^2(z-1)$ とし $\omega_1 := 0$, $\omega_2 := \frac{2}{3}$ とすると, $f_\lambda(\omega_1) = \omega_1$ でありまた $\lambda$ が十分大のとき $f_\lambda^n(\omega_2) \to \infty$ となる.

(2) $f$ が実3次多項式で Figure A.1 のようなグラフを持つ場合, $f(\omega_1) = \alpha$ で $\alpha$ は反発不動点である. 更に $K(\alpha)$ を $\alpha$ を含む $K_f$ の連結成分とすると $K(\omega_1) \neq K(\alpha)$ で

$$f(K(\omega_1)) = K(\alpha), \quad f(K(\alpha)) = K(\alpha)$$

が成り立つ. また $f_\lambda^n(\omega_2) \to \infty$ となる (Theorem 1.1.3 参照).

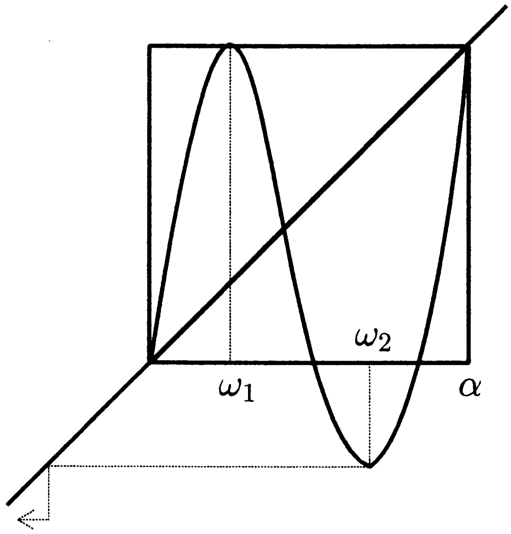


Figure A.1

**(Proof of Theorem A.0.1) :** §3.1.1 で2次多項式に対して構成したのと同様にして $f$ に対して

$$\varphi = \varphi_f : \infty \text{ の近傍} \to \infty \text{ の近傍}$$

なる conformal map $\varphi$ と Green 関数 $h : \mathbb{C} \setminus K_f \to \mathbb{R}_+$ が定義できる. これらは次を満たす:

$$\varphi_f \circ f(z) = (\varphi_f(z))^3, \quad \frac{\varphi(z)}{z} \to 1 \ (z \to \infty),$$
$$h(z) = \log|\varphi(z)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \log^+ |f^n(z)|.$$

さて, 2次多項式の場合は external rays と equi-potential curves で partition (Yoccoz puzzle) を構成したが, ここでは equi-potential curves だけを用いて partition (Branner-Hubbard puzzle) を次のようにして構成する : まず,

$$\Gamma_0 := \{z \mid h(z) = h(f(\omega_2))\}$$

とする. 即ち, critical value $f(\omega_2)$ を含む equi-potential curve を $\Gamma_0$ と定義するのである. 次に $\Gamma_1 := f^{-1}(\Gamma_0)$ とすると $\Gamma_1$ は Figure A.2–1 にあるように $\omega_2$ を通る8の字型の curve になる. 以下, 帰納的に

$$\Gamma_n := f^{-n}(\Gamma_0)$$

と定義すると，$\Gamma_n$ は Jordan cruves をつなぎ合わせたものの集まりとなる (Figure A.2–1 〜3 参照)．$\Gamma_2$, $\Gamma_3$ は $f(\omega_1)$ の位置によって Figure A.2–2, A.2–3 のようになる：

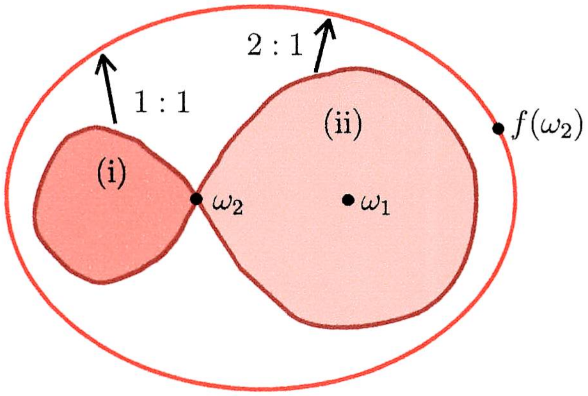


Figure A.2–1 $\Gamma_0$ と $\Gamma_1$.

(1) Figure A.2–1 (i) に $f(\omega_1)$ がある場合　　(2) Figure A.2–1 (ii) に $f(\omega_1)$ がある場合

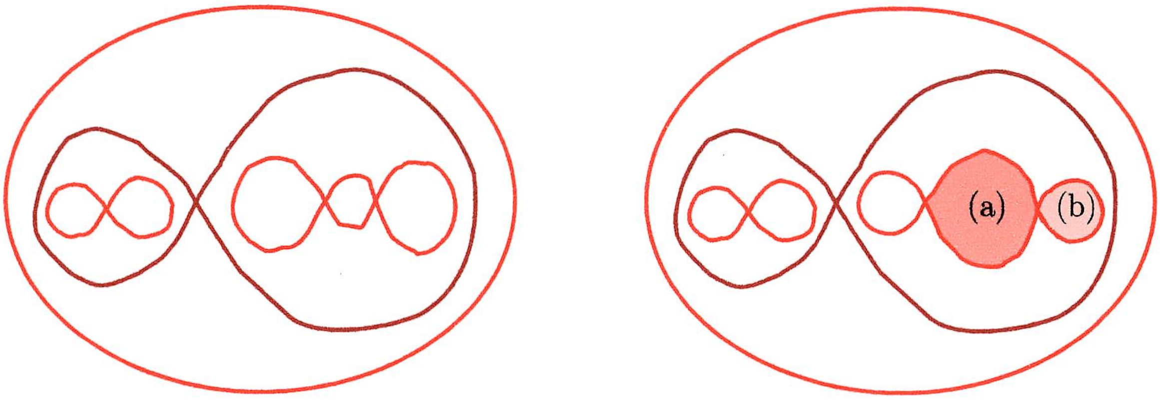


Figure A.2–2 $\Gamma_0 \sim \Gamma_2$.

(3) Figure A.2–2 (a) に $f(\omega_1)$ がある場合　　(4) Figure A.2–2 (b) に $f(\omega_1)$ がある場合

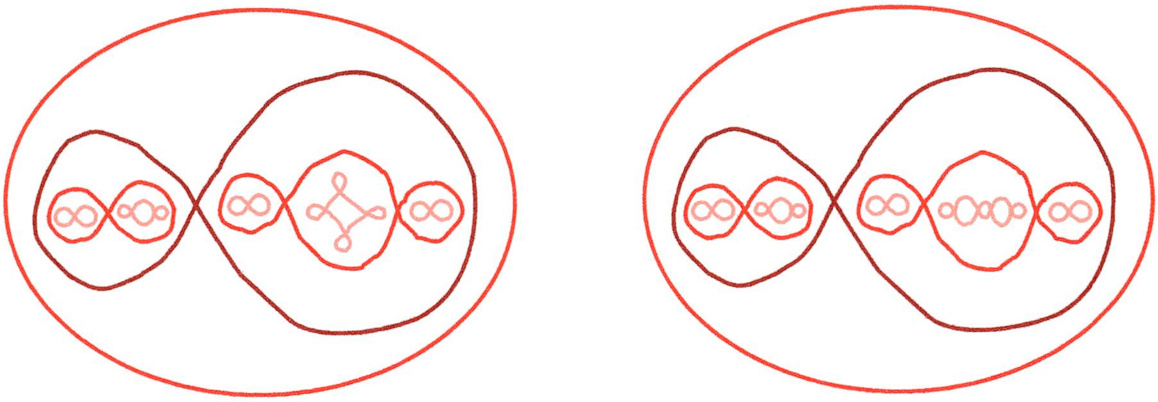

Figure A.2–3 $\Gamma_0 \sim \Gamma_3$.

次に

$$\mathcal{P}_n := \{\mathbb{C} \setminus \Gamma_n \text{の有界連結成分}\}$$

と定義し，また $x \in K_f$ に対して

$$P_n(x) := \mathcal{P}_n \text{ の元で } x \text{ を含むもの}$$

とする．そこで

$$\begin{aligned} A_n(x) &:= P_n(x) \setminus \bigcup_{y \in P_n(x) \cap K_f} \overline{P_{n+1}(y)} \quad (n \geq 0) \\ &= \Gamma_n \text{ と } \Gamma_{n+1} \text{ で囲まれた annuli のうち } x \text{ を囲むもの} \end{aligned}$$

で $x$ を囲む annulus を定義する (Figure A.3).

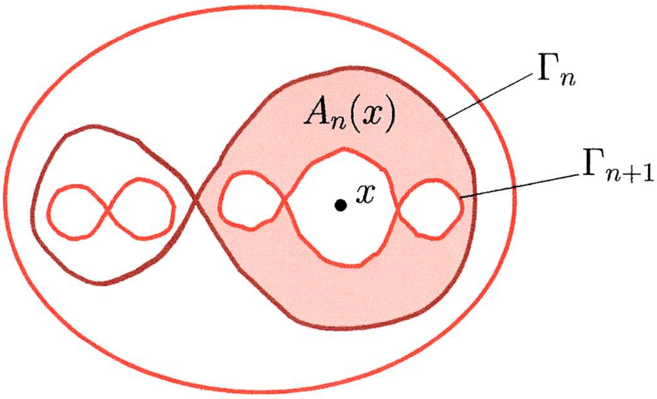


Figure A.3 $x \in K_f$ と $A_n(x)$.

ここで $A_n(x)$ が critical point $\omega_1$ を囲むとき (即ち，$\omega_1 \in D_{A_n(x)}$ ($= A_n(x)$ の内側) となるとき) **critical** と呼ぶことにすると

$$f : A_n(x) \to A_{n-1}(f(x)) \quad (n \geq 1)$$

は annuli の間の covering map であり，$A_n(x)$ が critical なら次数２，$A_n(x)$ が non-critical なら次数１ (即ち，同型) である．一般に $A_n(x)$ を $f$ で写していくと

$$A_n(x) \xrightarrow{f} A_{n-1}(f(x)) \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} A_{n-i}(f^i(x)) \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} A_0(f^n(x)) = A_0$$

となる．ただし $A_0$ は level 0 の annulus (注：これは１つしかない) であり，これは critical である．そして

$$\text{mod } A_n(x) = \frac{1}{2^k} \cdot \text{mod } A_0 \quad \text{ただし} \quad k = {}^{\#}\{i \mid 0 \leq i < n,\ A_{n-i}(f^i(x)) \text{ は critical}\}$$

が成り立つ．そこで任意の $x \in K_f$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod } A_n(x) = \infty$$

となるかどうかを見ることになる (Figure A.4 参照).

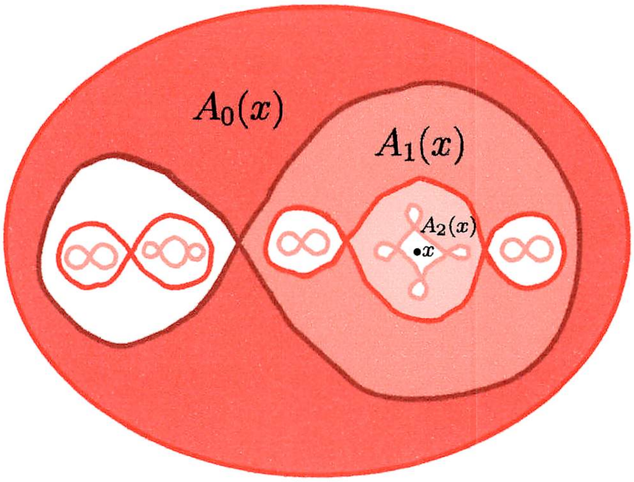


Figure A.4 $x \in K_f$ と $A_0(x),\ A_1(x),\ A_2(x), \cdots$.

そこで次に任意の $x \in K_f$ に対して **$\boldsymbol{\tau}$-関数** $\tau_x : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ を2次多項式のときと同様に

$$\tau_x(n) := \max\{n-k \mid 0 \le k \le n,\ f^k(A_n(x)) = A_{n-k}(f^k(x)) \text{ が critical}\}$$

で定義する．ここで任意の $x$ に対して $f^n(A_n(x)) = A_0(f^n(x)) = A_0$ であり，$A_0$ は critical であるから，上記定義式で max は必ず存在する．従って2次多項式のときのように $\tau_x$ の値域に $-1$ をもってくる必要はない．

$$\underbrace{A_n(x) \xrightarrow{f} \cdots}_{\text{non-critical}} \xrightarrow{f} \underbrace{A_{n-i}(f^i(x))}_{\text{critical}} \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} \underbrace{A_0}_{\text{critical}}$$

のとき $\tau_x(n) = n-i$ である．$\tau_x(n)$ は $A_n(x)$ を $f$ で写していったとき最初に遭遇する critical annulus の level である．また $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ を

$$\tau(n) := \tau_{f(\omega_1)}(n-1)$$

で定義し

$$\Sigma := \{n \mid \tau(n+1) \ne \tau(n)+1\}$$

とすると2次多項式のときと同様に，この $\tau$-関数に対して Axiom of recurrence，即ち，$n \in \Sigma$ なら $\tau(n+1) = 0$ または

$$\tau(n+1) = \tau^{k+1}(n)+1 \quad (k \ge 1,\ \tau^k(n) \in \Sigma)$$

と表せることが示せる (証明の方法も全く同様である．Proposition 4.2.2 (1) の証明を参照せよ).

さてここで $^{\#}\Sigma < \infty$ のときを考えると，ある $k$, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau(n) = n-k \quad (n \geq n_0)$ であり

$$f^k : P_n(\omega_1) \to P_{n-k}(\omega_1) \ : \ 2\text{対}1\text{の covering, かつ } f^{ki}(\omega_1) \in P_n(\omega_1) \ ({}^{\forall}i \geq 0)$$

が成り立つ．ただし $P_n(\omega_1) := A_n(\omega_1) \cup D_{A_n(\omega_1)}$，即ち $P_n(\omega_1)$ は $A_n(\omega_1)$ の内側を埋めて得られる単連結領域である．よって $f^k|P_n(\omega_1)$ は次数2の polynomial-like mapping であるから，ある $c \in \mathcal{M}$ に対して $f^k|P_n(\omega_1) \sim z^2 + c$ ($qc$-conjugate) となる．更に

$$K(\omega_1) = K(f^k : P_n(\omega_1) \to P_{n-k}(\omega_1)) \simeq K_c$$

である．以上で (1) は証明された．

次に $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ のときを考えると，この場合も Proposition 4.2.2 (3) と同様に critical point $\omega_1$ が non-recurrent，即ち，ある $n_0$ が存在し

$$f^j(\omega_1) \notin P_{n_0}(\omega_1), \quad (j \geq 1)$$

が成り立つことがわかる．

さて，$^{\#}\Sigma = \infty$ かつ $\sup \tau = \infty$ であるとすると，この$\tau$-関数について2次多項式のときと全く同様にして次が示せる：

**Proposition A.0.4.** $^{\#}\Sigma = \infty$, $\sup \tau = \infty$ であるとすると次が成立する：

(1) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $^{\#}(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) \geq 1$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $^{\#}\tau^{-1}(n) \geq 2$.

(3) $k = \sup(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) < \infty$ ならば $(\cup_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}(k)) \cap \Sigma = \emptyset$. □

証明は Proposition 4.2.7 のそれと全く同様である．

ここで **weight function** $\mu(n) \in \mathbb{R}_+$ を次のように定義する：$\mu(0) := 1$ とし，$n \geq 1$ に対しては

$$\mu(n) = \frac{1}{2}\mu(\tau(n))$$

とする．このときも次の Combinatorial Divergence Theorem が成り立つ：

**Theorem A.0.5 .** $^{\#}\Sigma = \infty$ であるとする．このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成立する．

**Remark A.0.6.** 2次多項式のときの Divergence Theorem では $^{\#}\Sigma = \infty$ の他に $\sup \tau = \infty$ も仮定していた．今の場合はこの仮定は必要ではない．

**(Proof of Theorem A.0.5) :** $\sup\tau < \infty$ のときは，ある $m \geq 0$ に対して

$$^{\#}(\tau^{-1}(m) \setminus \Sigma) = \infty$$

となる．よって

$$\sum_{n \in \tau^{-1}(m)} \mu(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \tau^{-1}(m)} \mu(m) = \infty$$

となる．$\sup\tau = \infty$ のときは Proposition A.0.4 を用いれば，２次多項式のとき (Theorem 4.2.10) と全く同様にして証明することができる． □

$\mu(n)$ の定義から

$$\mathrm{mod}\ A_n(x) = \mu_x(n) \cdot \mathrm{mod}\ A_0 \tag{A.1}$$

であることがわかる．ただし $\mu_x(n) := \mu(\tau_x(n))$ である (注 : Proposition 4.2.16 とその証明を参照せよ).

さて $K(\omega_1)$ が周期的でないときは $^{\#}\Sigma = \infty$ であるから Theorem A.0.5 が成り立ち，Theorem 4.2.15 の証明と同様にして $\mu_x$ に関する Combinatorial Divergence Theorem が示せる．このことと (A.1) より任意の $x \in K_f$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_n(x) = \infty$$

であることがわかる．そこで

$$\mathcal{A} := \{A_n(x) \mid x \in K_f,\ n \geq 0\}$$

とおくと $\mathcal{A}$ は $\mathbb{C}$ のある有界領域に含まれる disjoint な annulus の集まりであり，

$$X_\infty := \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{x \in D_A, A \in \mathcal{A}} \mathrm{mod}\ A = \infty \right\} = K_f$$

が成り立つ．従って Lemma 2.3.14 (1) (ii) より (注 : 今の場合 Lemma 2.3.14 (1) (i) のようなことはおこらない)，$K_f$ は全不連結である．よって $K_f$ は Cantor 集合となる．また Lemma 2.3.14 (2) より $|K_f| = 0$ が従う．以上で定理の主張はすべて証明された． □

# 参考文献


[**Be**] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, GTM 132, Springer-Verlag, 1991.

[**BH**] B. Branner and J. H. Hubbard, The iteration of cubic polynomials, Part II: Patterns and parapatterns, *Acta Math.* **169** (1992), 229–325.

[**BKNvS**] H. Bruin, G. Keller, T. Nowicki and S. van Strien, Wild Cantor attractors exist, *Ann. Math.* **143** (1996), 97–130.

[**Br**] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.* **6** (1965), 103–144.

[**CG**] L. Carleson and T. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[**DH1**] A. Douady and J. H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes I & II, *Publ. Math. d'Orsay*, (1984-85).

[**DH2**] A. Douady and J. H. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **18** (1985), 287–343.

[**F**] P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 161–271; **48** (1920), 33–94 and 208–314.

[**H**] J. Hubbard, Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems by J.-C. Yoccoz, *"Topological Methods in Modern Mathematics"*, Publish or Perish, Houston (1992), 467–511 and 375–378.

[**J**] G. Julia, Mémoires sur l'itération des fonctions rationelles, *J. Math. Pures Appl. (7)*, **4** (1918), 47–245.

[**Le**] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, GTM 109, Springer-Verlag, 1987.

[**LV**] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, 2nd ed. Springer-Verlag, 1973.

[**Ly1**] M. Lyubich, On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial, Preprint SUNY Stony Brook, 1991/10, 1–8.

[**Ly2**] M. Lyubich, Milnor's attractors, persistent recurrence and renormalization, *"Topological Methods in Modern Mathematics"*, Publish or Perish, Houston (1992), 513–541.

[**Ly3**] M. Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials, I–II, *Acta Math.* **178** (1997), 185–297.

[**Mc**] C. T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Ann. Math. stud., Princeton Univ. Press, 1994.

[**Mi1**] J. Milnor, Dynamics in one complex variable, Introductory lectures, Preprint SUNY Stony Brook, 1990/5.

[**Mi2**] J. Milnor, Local connectivity of Julia sets: Expository Lectures, Preprint SUNY Stony Brook, 1992/11, 1–46.

[**Mi3**] J. Milnor, Periodic Orbits, Externals Rays and the Mandelbrot Set; An Expository Account (draft of 8-95), Preprint, 1–44.

[**NvS**] T. Nowicki and S. van Strien, Polynomial maps with a Julia set of positive Lebesgue measure: Fibonacci maps, Preprint SUNY Stony Brook, 1994/3, 1–88.

[**MSS**] R. Mañe, P. Sad and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4e série*, **16** (1983), 193–217.

[**Pe1**] C. L. Petersen, On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality, *Erg. Th. & Dynam. Sys.* **13** (1993), 785–806.

[**Pe2**] C. L. Petersen, Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation, *Acta Math.* **177** (1996), 163–224.

[**Po**] Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Springer-Verlag, 1992.

[**Sł**] Z. Słodkowski, Holomorphic motions and polynomial hulls, *Proc. A.M.S.* **111** (1991), 347–355.

[**Su**] D. Sullivan, Conformal dynamics, in *Geometric Dynamics*, Lecture Note in Math. **1007**, Springer-Verlag, (1983), 725–752.

# 索 引