Chapter 5

Julia 集合に関する結果 — Theorem A, C の証明

さて，以上で定理の証明に必要な道具はすべてそろった．以下の章ではいよいよ結果の証明をしていくわけだが，当然，一言二言で終わるような簡単なものでは決してない．いくつかの場合分けを行い，その中のいくつかは更に 2，3 の段階に分かれることになる．そこで見通しをよくするために §5.1 ではまず証明の方針とその簡単な概略を予め述べておくことにする．その後，§5.2 で Theorem A を，§5.3 で Theorem C をそれぞれ証明する．なお，§4.1 で partition の説明をするときにも注意したが，以下では簡単のために「f は (1 回も) くりこみ可能ではない」という場合について証明する．

5.1 証明の方針と概略

$f(z) = p_c(z) = z^2 + c$ はくりこみ可能でないとする．この f に対して §4.1 で定義した partition を考える (一般の「無限回くりこみ可能ではない」場合にはこの partition ではなく，Proposition 4.1.5 を用いて作られる別の partition を考えればよい)．基本的なアイデアは，§4.2 で定義したこの partition に関するτ-関数の性質によって $K^* := K \setminus \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の点，またはパラメーター $c \in \partial\mathcal{M}$ を分類することである．即ち，$x \in K^*$ を τ_x の性質で，また $c \in \partial\mathcal{M}$ を τ の性質で次の 4 通りに分類する：

	$x \in K^*$	$c \in \partial\mathcal{M}$
(i) CP	${}^{\#}\Sigma_x < \infty \ \left(\lim_{n\to\infty} \tau_x(n) = \infty\right)$	${}^{\#}\Sigma < \infty \ \left(\lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty\right)$
(ii) PR	${}^{\#}\Sigma_x = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \tau_x(n) = \infty$	${}^{\#}\Sigma = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty$
(iii) IR (or NPR)	$({}^{\#}\Sigma_x = \infty),\ \limsup_{n\to\infty} \tau_x(n) = \infty,$ $\liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) < \infty$	$({}^{\#}\Sigma = \infty),\ \limsup_{n\to\infty} \tau(n) = \infty,$ $\liminf_{n\to\infty} \tau(n) < \infty$
(iv) NR	$({}^{\#}\Sigma_x = \infty),\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_x(n) < \infty$	$({}^{\#}\Sigma = \infty),\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(n) < \infty$

ただし表中の **CP**，**PR**，**IR**，**NPR**，**NR** はそれぞれ **Combinatorial Preimage**，**Persistently Recurrent**，**Intermittently Recurrent**，**Non-Persistently Recurrent**，**Non-Recurrent** の略である．各々の性質を持つ点の集合をそれぞれ $(\mathrm{PR})_{K^*}$，$(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}, \cdots$ などと表すことにする．この表からもわかるように K^* の点および $c \in \partial\mathcal{M}$ の点をまず $^{\#}\Sigma_x$ (or $^{\#}\Sigma$) $< \infty$ か $= \infty$ かで場合分けし，更に $^{\#}\Sigma_x$ (or $^{\#}\Sigma$) $= \infty$ の場合をτ-関数の性質によって3通りに場合分けするのである．ただし例えば $(\mathrm{IR})_{K^*}$の場合に表の中で $^{\#}\Sigma_x = \infty$ が括弧つきになっているのは，条件

$$\limsup_{n\to\infty} \tau_x(n) = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) < \infty$$

から必然的に $^{\#}\Sigma_x = \infty$ となるからである．

パラメーター c が $c \in (\mathrm{CP})_{\mathcal{M}}$ の場合は Proposition 4.2.2 (2) より f はくりこみ可能になってしまうので，Theorem A や C の仮定の下でのパラメーターの分類は正味 $(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の3種類である．

なお，$K \setminus K^* = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の点については別の考察を行う．

次に (i) から (iv) それぞれの性質を持つ K^* の点の挙動の特徴を見ていこう．これは証明のための予備的考察である．まず $(\mathrm{CP})_{K^*}$ の点については次が成り立つ：

Proposition 5.1.1. $x \in (\mathrm{CP})_{K^*}$ (即ち，$^{\#}\Sigma_x < \infty$) ならば，ある $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して

$$f^{k_0}(x) \in \bigcap_{j=0}^{\infty} P_j(0)$$

が成立する．

(Proof)： 条件からある $n_0 \in \mathbb{N}$，$k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して $n \geq n_0$ なら $\tau_x(n) = n - k_0$ となる ($n_0 := \sup \Sigma_x + 1$ とすればよい．Figure 4.14 参照)．このことと，τ-関数の定義から

$$f^{n-\tau_x(n)}(x) \in P_{\tau_x(n)}(0)$$

となることから結果は従う． □

Remark 5.1.2. この結果から，もし $\bigcap_{j=0}^{\infty} P_j(0) = \{0\}$ が示されることによって K が $z = 0$ で局所連結であるとわかれば，$(\mathrm{CP})_{K^*}$ を満たす点全体は 0 の逆像全体の集合に一致することになり，可算集合であることがわかる (実際そうであることが後に示される)．

次に (ii), (iii) の場合について見ていく．$P_n(x)$ を f で写していったとき $k = k(n)$ 回目で初めて 0 を含んだとする．$x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ なら $\tau_x(n) = n - k(n) \to \infty$ である．これは f の iteration によって各 $P_n(x)$ が $n - k(n) \to \infty$ となる程度の少ない回数 $k(n)$ で $P_{\tau_x(n)}(f^k(x))$ が 0 を含むように 0 の近くへ戻ってくることを示している．この性質からこれらの点を「persistently recurrent」と呼ぶのである．

また $x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ なら，ある $n_l \nearrow \infty$ $(l = 1, 2, \dots)$ に対しては $P_{n_l}(x)$ は $n_l - k(n_l) \to \infty$ となる程度の少ない回数 $k(n_l)$ で 0 の近くに帰ってくるが，別の部分列 $n_{l'} \nearrow \infty$ $(l' = 1, 2, \dots)$ に対しては $P_{n_{l'}}(x)$ は f で $k(n_{l'}) = n_{l'} - N_0$，($N_0 := \liminf_{n\to\infty} \tau_x(n)$) 回も動かさないと 0 の近くに戻ってこない．この性質からこれらの点を「intermittently recurrent」であるという．

Remark 5.1.3. Combinatorial Divergence Theorem がすでに示されているので，少なくとも $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ のときには $\mathrm{diam}\ P_n(0) \to 0\ (n \to \infty)$ であり，$x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ または $(\mathrm{IR})_{K^*}$ についても $\mathrm{diam}\ P_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$ がわかる (後ほど Theorem A の証明の中で詳しく述べる)．すると $x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ なら定義より

$$f^{n-\tau_x(n)}(P_n(x)) = P_{\tau_x(n)}(0) \quad かつ \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\ P_{\tau_x(n)}(0) = 0$$

が成り立つ．つまり「x の小さな近傍が常に 0 の小さな近傍に帰ってくる」のである．「x は f の iteratin によって常に 0 の近くに帰ってくる」と言ってもいいだろう．また $x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ なら，ある $n_l \nearrow \infty\ (l = 1, 2, \dots)$ に対しては

$$f^{n_l-\tau_x(n_l)}(P_{n_l}(x)) = P_{\tau_x(n_l)}(0) \quad かつ \quad \lim_{l\to\infty} \mathrm{diam}\ P_{\tau_x(n_l)}(0) = 0$$

が成り立つが一方，別の部分列 $n_{l'} \nearrow \infty\ (l' = 1, 2, \dots)$ に対しては

$$f^{n_{l'}-\tau_x(n_{l'})}(P_{n_{l'}}(x)) = P_{N_0}(0) \quad (N_0 := \liminf_{n\to\infty} \tau_x(n))$$

となる．つまり，1 点 x に縮む，x のある近傍の列は f の iteration によって 0 の小さな近傍に帰ってくるが，別の x の近傍の列は f の iteration によって 0 の近傍に帰ってくるのに時間がかかるため，帰ってきたときは $P_{N_0}(0)$ 程度の大きさになってしまっている (よってこのとき x 自身の像は 0 の近くにあるかどうかは定かではない)．言い換えれば「x は f の iteratin によって "たまに" 0 の近くに帰ってくるがそうでない場合もある」となるであろう．$c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合も局所連結性を示してしまえば同じことが言える．このように「persistently recurrent」と「intermittently recurrent」な点は局所連結性を示してから説明する方がわかりやすい．

最後に $x \in (\mathrm{NR})_{K^*}$ については次が成り立つ：

Proposition 5.1.4. $x \in (\mathrm{NR})_{K^*}$ (即ち，$\sup \tau_x < \infty$) のとき $n_0 := \sup \tau_x + 1$ とおくと，任意の $j \geq 0$ に対して $f^j(x) \notin P_{n_0}(0)$ である．即ち x は f の iteration によって 0 のある近傍には戻ってこない．

(Proof)： ある j に対して $f^j(x) \in P_{n_0}(0)$ であるとすると

$$P_{n_0}(f^j(x)) = f^j(P_{n_0+j}(x)) \ni 0$$

である．従って τ_x の定義より

$$\tau_x(n_0 + j) \geq (n_0 + j) - j = n_0 > \sup \tau_x$$

となり矛盾を生じる．よって結果は成り立つ． □

以上でそれぞれの場合の点の挙動の特徴がわかった．またそれぞれの場合の呼び方の理由もわかっていただけたと思う．なお Proposition 4.2.13 (2) より $\tau(n) = \tau_{f(0)}(n-1)$ であるから $c \in (\mathrm{CP})_{\mathcal{M}}$, $(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$, $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$, $(\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ に従って上で述べた事柄が $x = f(0) = c$ として成立する．

では証明の概略を述べることにしよう．ただしそのために $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して集合 $\boldsymbol{K_m}$ を

$$K_m := \{x \in K^* \mid f^n(x) \notin P_m(0),\ n = 0, 1, \dots\}$$

と定義しておく．

(Outline of the Proof of Theorem A) :

最初に $0 \in \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の場合は 0 が前周期的になるので **[DH1]** より $K_f = J_f$ の局所連結性はすでに証明されている．よって以下では大前提として，常に

$$0 \notin \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$$

であると仮定する．

(Step I) : まず，パラメーターの分類に関わらず K_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) の各点，および $K \setminus K^* = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の各点において K が局所連結であることを示す．これらは共に Poincaré metric を使った議論 (双曲的部分集合を扱うときによく使う議論) により示される．Proposition 5.1.4 より特に $(\mathrm{NR})_{K^*}$ の点 x については適当な $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $x \in K_m$ であるので，パラメーターの分類に関わらず，$(\mathrm{NR})_{K^*}$ の点における局所連結性が示されたことになる．

次に，パラメーターの分類に従って $(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$の各場合について最初に $K = K_f$ が $z = 0$ で局所連結であることを次のようにして示す：

(Step II) $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合：

Combinatorial Divergence Theorem (Theorem 4.2.10)，Proposition 4.2.16 (1) と Proposition 2.3.11 より局所連結性が示せる (§4.2 の最後で述べたとおりである)．

(Step III) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合：

Proposition 5.1.4 より，ある $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $f(0) \in K_m$ であるから (Step I) で示したことから K は $f(0)$ で局所連結である．f は branched covering なので，従って $f(0)$ の逆像である 0 においても局所連結である．

以上でいずれの場合も $z = 0$ では局所連結であることがわかる．次に $z = 0$ 以外の点での局所連結性は各々の場合について以下のようにして示される：

(Step IV) $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合：

$(\mathrm{CP})_{K^*}$ の点については 0 での局所連結性から 0 の逆像になることがわかり (Remark 5.1.2)，f は branched covering であるからその点でも局所連結といえる．$(\mathrm{PR})_{K^*}, (\mathrm{IR})_{K^*}$ の点については Theorem 4.2.15，Proposition 4.2.16 (2) と Proposition 2.3.11 から局所連結性がわかる．残りの $(\mathrm{NR})_{K^*}$の点と $K \setminus K^* = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の点についてはすでに (Step I) で証明した．

(Step V) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$の場合：

上記の 4 種類の分類は使わずに各点での局所連結性が証明される．

以上のようにして局所連結性は証明される．なお，一般の「無限回くりこみ可能ではない」場合は Proposition 4.1.5 をもとにしてできる partition を考えて，その partition に関するτ-関数を定義して同様の議論をすればよい． □

(Outline of the Proof of Theorem C) :

まず $K \setminus K^* = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\alpha)$ の点は可算個より測度 0 である．次に K^* の点である (i) から (iv) の各々が測度 0 であることを，c の分類に基本的によらずに以下のようにして示す (注 :「基本的に」と断ったのは $(\mathrm{PR})_{K^*}$ の場合の証明が $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のある場合に通用しなくなるためで，この場合だけ別扱いする).

(Step I) $(\mathrm{CP})_{K^*}$ の点について :

0 での局所連結性からこのような点は可算個しかない (Proposition 5.1.1, Remark 5.1.2). よって測度 0 である．

(Step II) $(\mathrm{PR})_{K^*}$ の点について :

$c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ であるとする．f はくりこみ可能でないとしているので Separation Lemma (Lemma 4.1.2) より，ある $N \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ となる．このような $N \in \mathbb{N}$ を 1 つ固定する．

$$Z := \left\{ x \in K^* \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_x(n) = \infty,\ \liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) > N \right\}$$

とすると $x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ なら $x \in Z$ となる．よって $|Z| = 0$ を示せば十分である．$x \in Z$ ならば $\sup \tau_x^{-1}(N) < \infty$ であるから

$$Z = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k, \quad Z_k := \{x \in Z \mid \max \tau_x^{-1}(N) = k\}$$

と表せる．次に

$$\mathcal{A}_k := \{A_n(x) \mid x \in Z_k,\ n \geq k,\ \mu_x(n) > 0\}$$

とすると $\mathcal{A}_k$ の相異なる元は互いに disjoint であることが示される．また $x \in Z_k$ なら

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_x(n) = \infty \tag{5.1}$$

であることが示せるので (注 : この部分の証明が $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合の一部で通用しなくなる)

$$Z_k \subset \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{z \in D_A, A \in \mathcal{A}_k} \mathrm{mod}\ A = \infty \right\}$$

が成り立つ．すると Lemma 2.3.14 が使えて $|Z_k| = 0$ が示せる．従って $|Z| = 0$ である．

$c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のときは，ある場合には μ に関する Divergence Theorem が示せるので Theorem 4.2.15 より (5.1) が従うのでここで述べた証明がそのまま通用する．しかし，別のある場合には Divergence Theorem が示せなくなる．そこでここでは $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合すべてに通用する別の方法で $|K_f| = 0$ を示す．この証明は (Step V) として述べる．

(Step III) $(\mathrm{IR})_{K^*}$ の点について：
$x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ ならば

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_x(n) = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) < \infty$$

であるが，更に

$$\liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) > N$$

であれば $x \in Z$ となる．(Step II) より $|Z| = 0$ であるからこのような点全体は測度 0 である．よって以下では

$$\liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) \le N$$

となる点 $x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ を考える．そこで

$$Y := \left\{ x \in K^* \;\middle|\; \limsup_{n\to\infty} \tau_x(n) \ge N+1,\ \liminf_{n\to\infty} \tau_x(n) \le N \right\}$$

とすると，このような点は Y に含まれる．よって $|Y| = 0$ を示せば十分であるが，Koebe's Distortion Theorem を使った議論から $|Y| = 0$ が証明される．

(Step IV) $(\mathrm{NR})_{K^*}$ の点について：
Proposition 5.1.4 より $x \in (\mathrm{NR})_{K^*}$ については適当な $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $x \in K_m$ である．よって $|K_m| = 0$ を示せば十分であるが，K_m は双曲的部分集合であることが Proposition 2.1.5 にあるような形で示せるので，Theorem 2.2.1 より $|K_m| = 0$ である．

(Step V) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合：
$|J_f| > 0$ なら J_f の density point z_0 に対して $\omega(z_0) = \omega(c) \ni c$ であることを証明する (Proposition 5.3.2)．つまり $|J_f| > 0$ ならほとんどすべての $z_0 \in J_f$ について $\omega(z_0) = \omega(c) \ni c$ が成り立つのである (Lebesgue's Density Theorem)．一方 $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ なら Proposition 5.1.4 より $0 \notin \omega(c)$，従って $c \notin \omega(c)$ である．よって $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ なら $|J_f| = 0$ である．

以上のようにして測度 0 であることは証明される．なお，一般の「無限回くりこみ可能ではない」場合は局所連結性のときと同じく Proposition 4.1.5 をもとにしてできる partition を考えて，その partition に関するτ-関数を定義して，あとは同様の議論をすればよい．□

以上を見てもわかるとおり，K^* の点を 4 通りに分類して各々の点の集合が測度 0 であることを示すのだが，実際はそれらを含むもう少し広い集合を扱い，それらが測度 0 であることを示すのである．

5.2 Theorem A の証明

(Step I)： 最初に $x \in K_m$ の各点における局所連結性をパラメーター c の分類にはよらない方法で示す．そのために $L := {}^{\#}\mathcal{P}_m - 1$ として

$$\mathcal{P}_m \setminus \{P_m(0)\} := \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(L)}\}$$

として，各 $Q^{(i)}$ に対して領域 $U^{(i)}$ を $U^{(i)} \supset \overline{Q^{(i)}}$ を満たし，また $f(Q^{(i)}) \supset Q^{(j)}$ のときは $f(U^{(i)}) \supset \overline{U^{(j)}}$ となるように構成する (注 : $Q^{(i)}$, $Q^{(j)}$ $(i \neq j)$ については piece の作り方から

$$f(Q^{(i)}) \supset Q^{(j)} \quad \text{または} \quad f(Q^{(i)}) \cap Q^{(j)} = \emptyset$$

のどちらか一方が成り立つ．また $f(Q^{(i)}) \supset Q^{(j)}$ のときは $f(Q^{(i)})$ と $Q^{(j)}$ が境界を一部共有することがあるので，一般に必ずしも $f(Q^{(i)}) \supset \overline{Q^{(j)}}$ が成り立つとは限らない)．その方法は一言で言うと「$U^{(i)}$ は $Q^{(i)}$ の境界を構成する external ray を "oblique curve" に代え，external ray の端点の周りに disk をつけ加えたもの」となるが，詳しくは次のとおりである :

まず，**oblique curve** とは Riemann map $\varphi : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ による $\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ の引き戻しである external ray $\mathcal{R}(\theta, K)$ を Figure 5.1 にあるような curve

$$\exp[-2\pi i\{y = c(x - x_0)^2\}] \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$$

の φ による引き戻しにおきかえたものである (注 : 1 つの external ray に対して 2 本ある)．

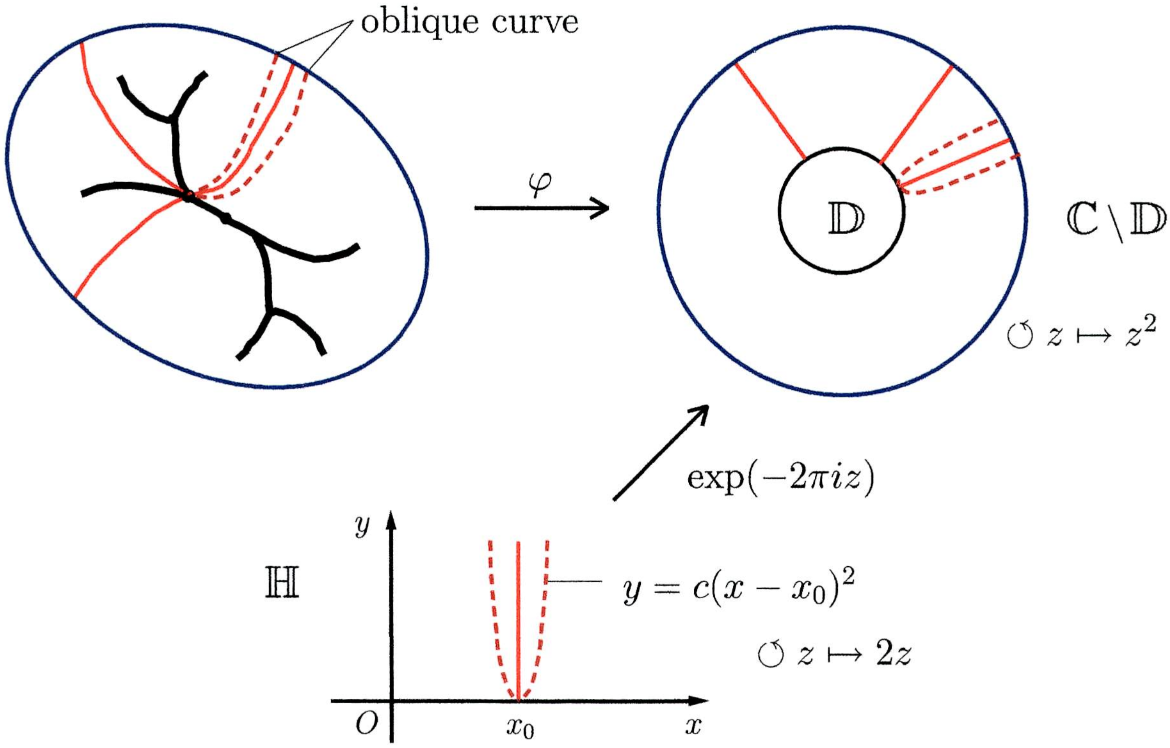

Figure 5.1 oblique curve.

$K \cap \Gamma_m$ の点に land する oblique curve C_i はいずれも共通の定数 $c > 0$ を用いて $\{y = c(x - x_0)^2\}$ の形の放物線をもとにして，写像 $\exp(-2\pi i z)$ と φ^{-1} を用いて構成する (もちろん x_0 は各 oblique curve で異なる)．この定数 $c > 0$ を十分大にとれば各 C_i は互いに disjoint で

$$f(C_i) \cap C_j = \emptyset, \quad (i \neq j)$$

を満たすようにできる(ただし Figure5.1 にあるように，適当な equi-potential curve で切った有限部分だけを C_i とおくことにする)．なぜなら定義より $\mathbb{C}\setminus K$ における f の作用は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ 上では $z\mapsto z^2$，更に $\mathbb{H}$ では $z\mapsto 2z$ となる (Figure 5.1)．従って

$$\{y=c(x-x_0)^2\}\subset\mathbb{H}\xrightarrow{z\mapsto 2z}\left\{y=\frac{c}{2}(x-2x_0)^2\right\}\subset\mathbb{H}$$

であり $\frac{c}{2}<c$ であるから，もとの $\{y=c(x-2x_0)^2\}$ とは確かに $x=2x_0$ でしか交わらない．

さて，各 $Q^{(i)}$ の境界を構成する external rays を "外側"(注：その意味は図よりほぼ明らかであろう) の oblique curves に置き換え，Γ_m の equi-potential curve を使って新しい領域 $Q'^{(i)}$ を定義すると

$$Q'^{(i)}\supset Q^{(i)},\quad Q'^{(i)}\cap K=Q^{(i)}\cap K$$

であり，また $f|Q'^{(i)}$ は単射である．また $f(Q^{(i)})\supset Q^{(j)}$ ならば

$$f(Q'^{(i)})\cup(K\cap\partial Q'^{(j)})\supset\overline{Q'^{(j)}}$$

が成り立つ (注：$K\cap\partial Q'^{(j)}$ は external rays の端点にあたる)．

次に $K\cap\Gamma_n=\{x_j\}\subset K^*$ とすると各 x_j は preperiodic で，最終的には α に写される．α は反発不動点であるから，各 x_j に対して x_j を含む小さな円板 D_j をとって $f(x_j)=x_k$ ならば $f(D_j)\supset\overline{D_k}$ かつ $f|D_j$ が単射となるようにすることができる．そこで

$$U^{(i)}:=Q'^{(i)}\cup\bigcup_{x_j\in\overline{Q^{(i)}}}D_j$$

と定義すれば目的のものが得られる (Figure 5.2 参照．実線で囲まれた部分が $Q^{(i)}$，点線で囲まれた部分をつけ加えて太らせたものが $U^{(i)}$)．

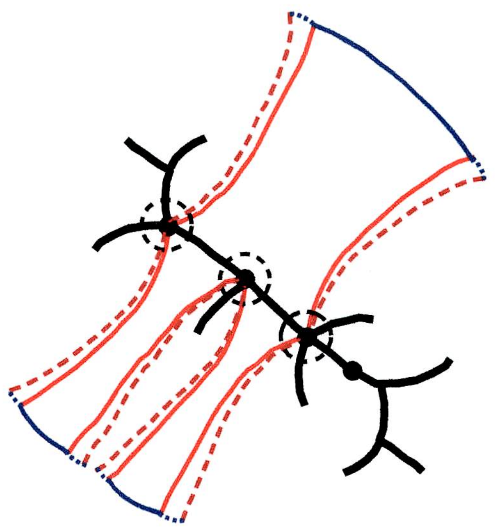

Figure 5.2 $Q^{(i)}$ と $U^{(i)}$.

さて，$x \in K_m$ とすると K_m の定義より $x \notin P_m(0)$ である．そこで $x \in Q^{(i_0)} \subset \mathcal{P}_m \setminus \{P_m(0)\}$ であるとする．$n > m$ とすると $P_n(x) \subset Q^{(i_0)}$ でありまた，ある $Q^{(j_0)}$ に対して $f(P_n(x)) = P_{n-1}(f(x)) \subset Q^{(j_0)}$ である．すると $f(Q^{(i_0)}) \supset Q^{(j_0)}$ であるから $U^{(i)}$ の構成法から $f(U^{(i_0)}) \supset \overline{U^{(j_0)}}$ が成り立つ．よって Schwarz's Lemma から $f^{-1}|U^{(j_0)} : U^{(j_0)} \to U^{(i_0)}$ は Poincaré 距離を λ 倍 $(0 < \lambda < 1)$ 以下に縮める．従って

$$\mathrm{diam}_{\,U^{(i_0)}} P_n(x) \le \lambda \cdot \mathrm{diam}_{\,U^{(j_0)}} P_{n-1}(f(x))$$

が成り立つ．ただし $P_n(x) \subset U^{(i)}$ であるとき $\mathrm{diam}_{\,U^{(i)}} P_n(x)$ は $U^{(i)}$ の Poincaré metric によって計った $P_n(x)$ の直径を表す．以下この議論を帰納的に繰り返すと

$$\mathrm{diam}_{\,U^{(i_0)}} P_n(x) \le \lambda^{n-m} \cdot \mathrm{diam}_{\,U^{(k_0)}} P_m(f^{n-m}(x)) \le \lambda^{n-m} \cdot \left\{ \max_{1 \le i \le L} \mathrm{diam}_{\,U^{(i)}} Q^{(i)} \right\}$$

が成り立つことがわかる (注：ただし λ は適当なものにとりかえる必要がある)．よって $n \to \infty$ として

$$\mathrm{diam}_{\,U^{(i_0)}} P_n(x) \to 0$$

を得る．これは $x \in K_m$ で K が局所連結であることを示している．Proposition 5.1.4 より特に $(\mathrm{NR})_{K^*}$ の点 x については適当な $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $x \in K_m$ であるので，パラメーターの分類に関わらず，$(\mathrm{NR})_{K^*}$ の点における局所連結性が示されたことになる．

次に $K \setminus K^* = \cup_{n \ge 0} f^{-n}(\alpha)$ の各点について考察する．$x \in K \setminus K^*$ に対しては

$$P_k := \bigcup_{x \in \overline{P},\, P \in \mathcal{P}_k} \overline{P}$$

を考えるとこれは q 個の puzzle pieces の和集合で (注：q は α の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$ としたときの q である) x の近傍となる (Figure 5.3)．

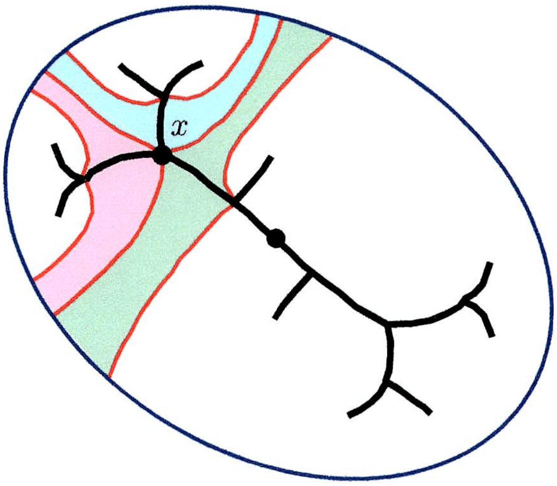

Figure 5.3 q 個の puzzle piece を集めると x の近傍になる．

P_k を構成する各 piece $P_k^{(i)}$ $(1 \le i \le q)$ に対しては，puzzle piece の作り方から nest する puzzle pieces の列 $P_k^{(i)} \supset P_{k+1}^{(i)} \supset \cdots$ で任意の k に対し $x \in \partial P_k^{(i)}$ となるものが一意に存

在する．またこの x は α の逆像であることから，十分大きな n に対しては常に $f^n(x) = \alpha$ となる．このことを使えば先に示した，K_m の点の場合と全く同様の議論ができて

$$\mathrm{diam}\ P_k \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が示される．従って $x \in K \setminus K^*$ の各点においても K は局所連結である．

次に，パラメーターの分類に従って $(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$，$(\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$の各場合について $K = K_f$ が $z = 0$ で局所連結であることを次のようにして示す：

(Step II) $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$の場合：
これらの場合には $^{\#}\Sigma = \infty$, $\sup \tau = \infty$ であるから weight function を §4.2 で述べたように定義すると，Combinatorial Divergence Theorem (Theorem 4.2.10) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成り立つ．これは Proposition 4.2.16 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0) = \infty$$

を意味するので Proposition 2.3.11，Lemma 4.1.1 より K は $z = 0$ で局所連結である．

(Step III) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合：
$\tau(n) = \tau_{f(0)}(n-1)$ であることと Proposition 5.1.4 より適当な $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $f(0) \in K_m$ が成り立つ．よって (Step I) で示したことから K は $f(0)$ で局所連結である．f は branched covering なので，従って $f(0)$ の f による逆像である 0 においても K は局所連結である．

以上ですべての場合について $z = 0$ における局所連結性が示せた．次に各場合について $x = 0$ 以外の点での局所連結性を示す：

(Step IV) $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合：
0 での局所連結性がすでに示されているので $x \in (\mathrm{CP})_{K^*}$ については Proposition 5.1.1 と Remark 5.1.2 より x は 0 の逆像である．f は branched covering であるから 0 での局所連結性から x における局所連結性が従う．

次に $x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ または $(\mathrm{IR})_{K^*}$ の点について考察する．いずれの場合も $\limsup_{n\to\infty} \tau_x(n) = \infty$ であり，また $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合は Combinatorial Divergence Theorem が成り立っていた．従って μ_x に対する Divergence Theorem(Theorem 4.2.15) と Theorem 4.2.16 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_n(x) = \infty$$

が成り立つ．よって Proposition 2.3.11，Lemma 4.1.1 より K は x で局所連結である．

$x \in (\mathrm{NR})_{K^*}$ の点については (Step I) で示したとおりである．また，$K \setminus K^*$ の各点についても (Step I) で考察した．以上で $c \in (\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$の場合に $K = J_f$ の局所連結性が示された．

(Step V) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$の場合：
ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $f(0) \in K_m$ である．さて，$x \in K \setminus K^*$ については (Step I) で示した．よって $x \in K^*$ とする．ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in K_n$ ならやはり (Step I) ですでに示した．そうでないなら任意の $M \in \mathbb{N}$ に対してある $n = n_M \in \mathbb{N}$ が存在して $f^{n_M}(x) \in P_M(0)$ が成り立つ．ここでもしある $k \in \mathbb{N}$ に対して $f^k(x) = 0$ なら x は 0 の逆像であり，0 において K が局所連結であることと f が branched covering であることから x においても局所連結であると言える．そうでないなら $n_M \nearrow \infty$ なる無限個の n_M に対して $f^{n_M}(x) \in P_M(0)$ となる．すると $f(0) \in K_m$ より

$$f^{n_M} : P_{m+n_M}(x) - \overline{P_{M+n_M}(x)} \to P_m(0) - \overline{P_M(0)}$$

は全単射になり，従って modulus の間には

$$\mathrm{mod}\ (P_{m+n_M}(x) - \overline{P_{M+n_M}(x)}) = \mathrm{mod}\ (P_m(0) - \overline{P_M(0)}) \tag{5.2}$$

が成り立つ (Figure 5.4)．

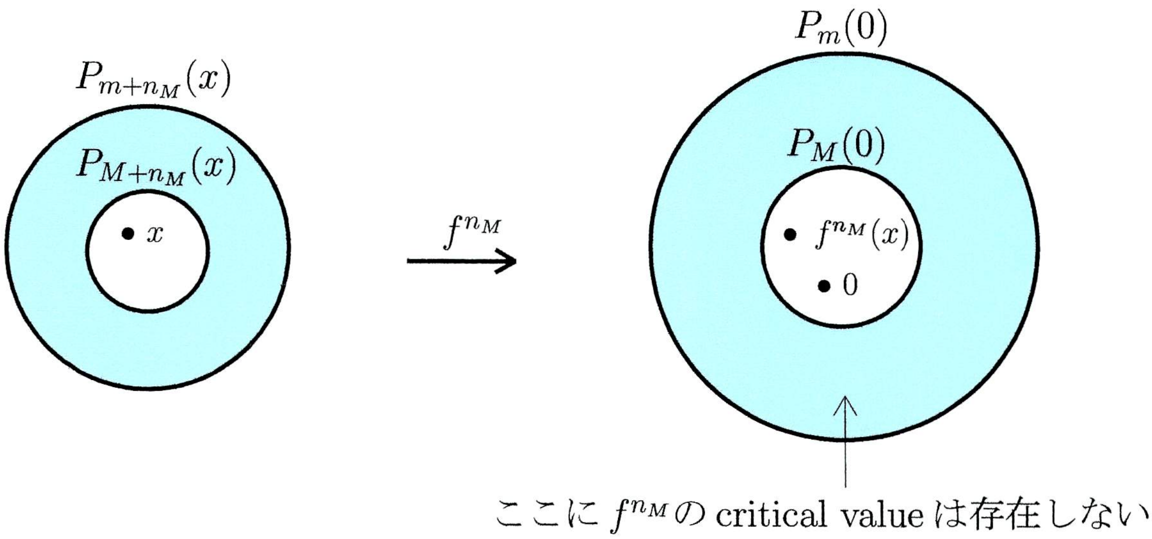

Figure 5.4

diam $P_M(0) \to 0 \quad (M \to \infty)$ であったから

$$\mathrm{mod}\ (P_m(0) - \overline{P_M(0)}) \to \infty \quad (M \to \infty)$$

であり，よって (5.2) より

$$\mathrm{mod}\ (P_{m+n_M}(x) - \overline{P_{M+n_M}(x)}) \to \infty \quad (M \to \infty)$$

が成り立つ．これは

$$\operatorname{diam} \overline{P_{M+n_M}(x)} \to 0 \quad (M \to \infty)$$

を示す．よって $K = J_f$ は x で局所連結である．

以上ですべての場合について $K = K_f = J_f$ が局所連結であることが証明された． □

Remark 5.2.1. (1) 証明の (Step I) の部分で用いた oblique curve の方法は宍倉による．似たような方法として Milnor による "thickening" という手法もある．これは一言で言えば「puzzle piece の境界を構成している external ray の角度を少しだけ変え，landing point に小さな disk をつけて piece を太らせる」となるが，詳しくは [**Mi2**, p.12, Figure 11] を参照せよ．

(2) $\operatorname{diam} P_n(0) \to 0$, $(n \to \infty)$ が示されたので，0 が $f = p_c$ で non-recurrent であること (即ち，0 のある近傍 V に対し $f^n(0) \notin V$ $(n = 1, 2, \dots)$) と，0 が combinatorial に non-recurrent であること (即ち，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $f^n(0) \notin P_m(0)$ $(n = 1, 2, \dots)$) の同値性がわかる．ちなみにこのことは Proposition 4.2.2(3) より $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < \infty$，即ち $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ と同値である．

5.3 Theorem C の証明

$K = K^* \cup (\cup f^{-n}(\alpha))$ である．まず $\cup f^{-n}(\alpha)$ は可算集合なので測度 0 である．そこで §5.1 で述べた K^* の点の分類に従って $(\mathrm{CP})_{K^*}$，$(\mathrm{PR})_{K^*}$，$(\mathrm{IR})_{K^*}$，$(\mathrm{NR})_{K^*}$ のそれぞれが測度 0 であることを示す．

(Step I) $(\mathrm{CP})_{K^*}$ について：
Proposition 5.1.1 と $z = 0$ における局所連結性から

$$(\mathrm{CP})_{K^*} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(0)$$

である．右辺は可算集合なので $|(\mathrm{CP})_{K^*}| = 0$ である．

(Step II) $(\mathrm{PR})_{K^*}$ について：
f はくりこみ可能でないとしているので Separation Lemma (Lemma 4.1.2) より，ある $N \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ となる．このような $N \in \mathbb{N}$ (separation level) を 1 つ固定する．

$$Z := \left\{ x \in K^* \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_x(n) = \infty,\ \liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) > N \right\}$$

とすると $x \in (\mathrm{PR})_{K^*}$ ならば $x \in Z$ となるので $|Z| = 0$ を示せば十分である．$x \in Z$ ならば $\sup \tau_x^{-1}(N) < \infty$ であるから

$$Z = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k, \quad Z_k := \{x \in Z \mid \max \tau_x^{-1}(N) = k\}$$

と表せる．よって各 Z_k について $|Z_k|=0$ を示せばよい．そこで

$$\mathcal{A}_k := \{A_n(x) \mid x \in Z_k,\ n \geq k,\ \mu_x(n) > 0\}$$

とすると次が成り立つ：

Lemma 5.3.1. $\mathcal{A}_k$ の相異なる annuli は互いに disjoint である．

(Proof of Lemma 5.3.1)： $A_n(x),\ A_m(y) \in \mathcal{A}_k$ とする．即ち，$x,\ y \in Z_k$ で

$$\mu_x(n) > 0, \quad \mu_y(m) > 0, \quad (n,\ m \geq k)$$

であるとする．このとき更に $n \leq m$ であるとしてよい．定義より

$$A_n(x) = P_n(x) - \overline{P_{n+1}(x)}, \quad A_m(y) = P_m(y) - \overline{P_{m+1}(y)}$$

と書けるが，この2つが相異なるとすると piece の定義から

$$P_m(y) \subset P_n(x) \ \text{ または }\ P_m(y) \cap P_n(x) = \emptyset$$

である．後者の場合は

$$A_n(x) \cap A_m(y) = \emptyset$$

となるので主張は成り立つ．前者の場合は2つの元が相異なるとしているので $m=n$ ではあり得ない．よって $m>n$ であるが更に $y \in P_{n+1}(x)$ ならば $A_n(x)$ と $A_m(y)$ は disjoint であるのでこのときも主張は成り立つ．よって残る場合は $m>n$ でかつ $y \notin P_{n+1}(x)$ の場合であるが，これがあり得ないことを以下で示す (Figure 5.5 参照).

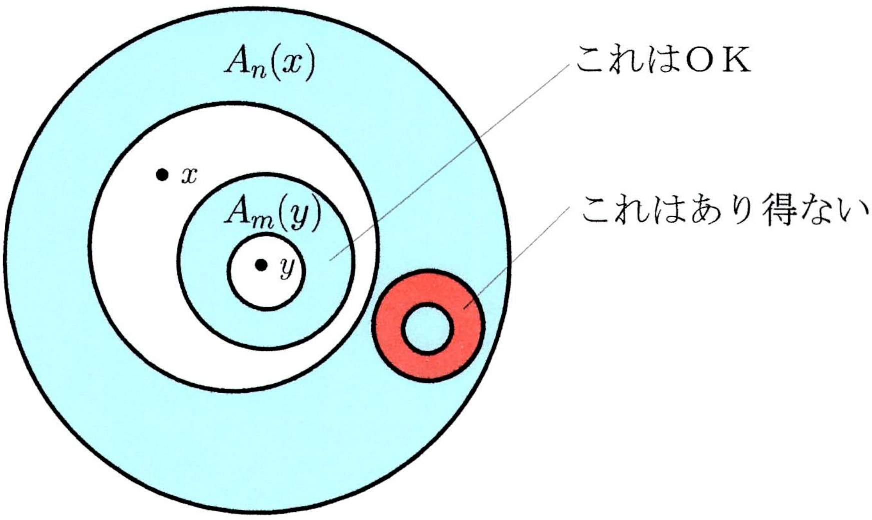

Figure 5.5 $A_n(x)$ と $A_m(y)$ の位置関係.

f で $A_n(x),\ A_m(y)$ を写していって depth $\tau_x(n)$ まできたときは Figure 5.6 の上のようになる：

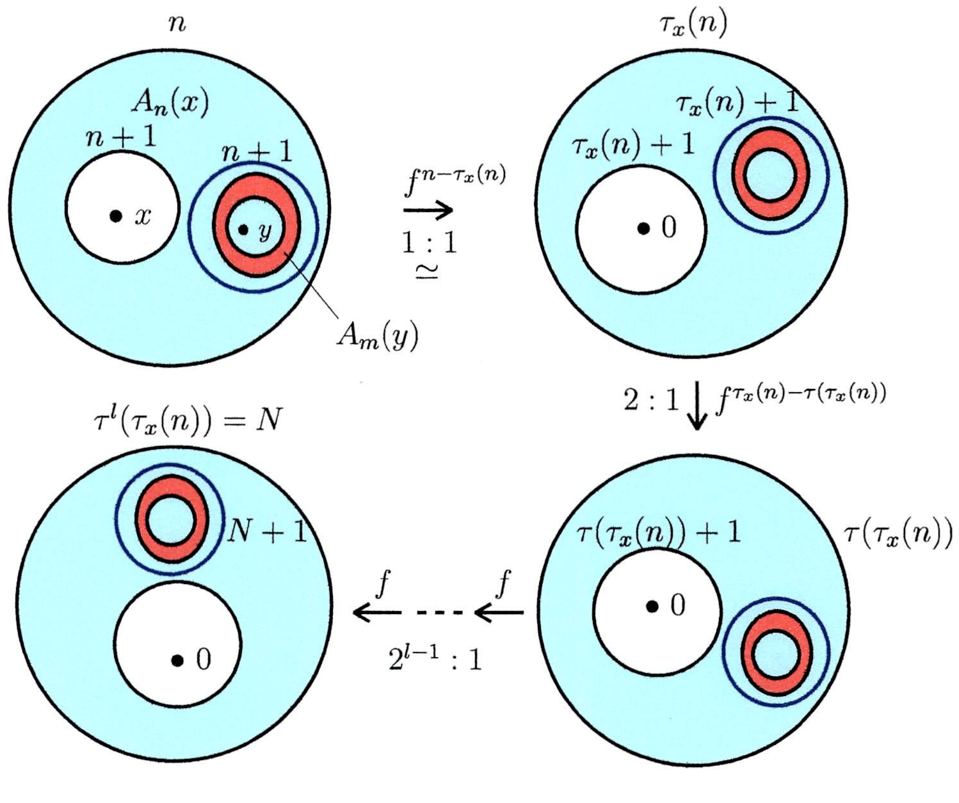

Figure 5.6

また定義より $\max\tau_x^{-1}(N)=k$ であるから $\tau_x(k)=N$ であり，また $\mathcal{A}_k$ の定義より $n\geq k$ であるから

$$\tau_x(n)\geq N$$

である．ここで $\mu_x(n)=\mu(\tau_x(n))>0$ であるから Proposition 4.2.9 よりある $l\in\mathbb{N}$ に対して

$$\tau^l(\tau_x(n))=N,\quad \tau^i(\tau_x(n))\notin\Sigma\quad(i=0,1,\ldots,l-1)$$

となるので depth $\tau_x(n)$ 以降は Figure 5.6 の下のようになり $P_N(0)$ まで到達する．このとき $P_{n+1}(y)$ を考えるとこれの f の iteration による像は各 depth において Figure 5.6 のようになる (つまり最初の位置関係が保たれたまま depth N まで到達する)．よって

$$f^{n-N}(y)\in A_N(0)\ \text{かつ}\ f^{n-N}(P_{n+1}(y))\subset A_N(0)$$

であり，更に任意の $0\leq j\leq n-N$ に対して $f^j(P_{n+1}(y))\not\ni 0$ である．これは $\tau_y(n+1)\leq N$ であることを示しており，一方 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_y(n)=\infty$ であるから中間値の定理より，ある $k'\geq n+1$ に対して $\tau_y(k')=N$ となる．これは $\max\tau_y^{-1}(N)=k<n+1$ であることに反する．以上で Lemma の主張は証明された． □

さて，$c\in(\mathrm{PR})_{\mathcal{M}}$ または $(\mathrm{IR})_{\mathcal{M}}$ の場合は Divergence Theorem より $\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)=\infty$ であるから Theorem 4.2.15 より，$x\in Z$ なら $\sum_{n=0}^{\infty}\mu_x(n)=\infty$ である．よって Proposition 4.2.16 を考慮すると

$$Z_k\subset\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\sum_{z\in D_A,A\in\mathcal{A}_k}\operatorname{mod}A=\infty\right\}$$

が成り立つ．すると Lemma 2.3.14 より $|Z_k| = 0$ がわかる．従って $|Z| = 0$ である．

$c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のときは，ある場合には μ に関する Divergence Theorem が示せるので Theorem 4.2.15 より (5.1) が従うのでここで述べた証明がそのまま通用する (Remark 5.3.4 参照)．しかし，別のある場合には Divergence Theorem が示せなくなる．そこでここでは $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合すべてに通用する別の方法で $|K_f| = 0$ を示す．この証明は (Step V) として述べる．

(Step III) $(\mathrm{IR})_{K^*}$ について：

$x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ ならば

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_x(n) = \infty, \quad \liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) < \infty$$

であるが，更に

$$\liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) > N$$

であれば $x \in Z$ となる．(Step II) より $|Z| = 0$ であるからこのような点全体は測度 0 である．よって以下では

$$\liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) \leq N$$

となる点 $x \in (\mathrm{IR})_{K^*}$ を考える．そこで

$$Y := \left\{ x \in K^* \;\middle|\; \limsup_{n \to \infty} \tau_x(n) \geq N+1,\ \liminf_{n \to \infty} \tau_x(n) \leq N \right\}$$

とすると，このような点は Y に含まれる．よって $|Y| = 0$ を示せば十分である．そこで任意の $x \in Y$ が Y の density point でないことを Koebe's Distortion Theorem を使った議論により以下で示す．そうすれば Lebesgue's Density Theorem より $|Y| = 0$ が従う．

さて $x \in Y$ とすると τ_x のグラフから自然数の列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$ で

$$n_j \notin \Sigma_x \quad \text{かつ} \quad \tau_x(n_j) = N$$

となるものが存在する (Figure 5.7).

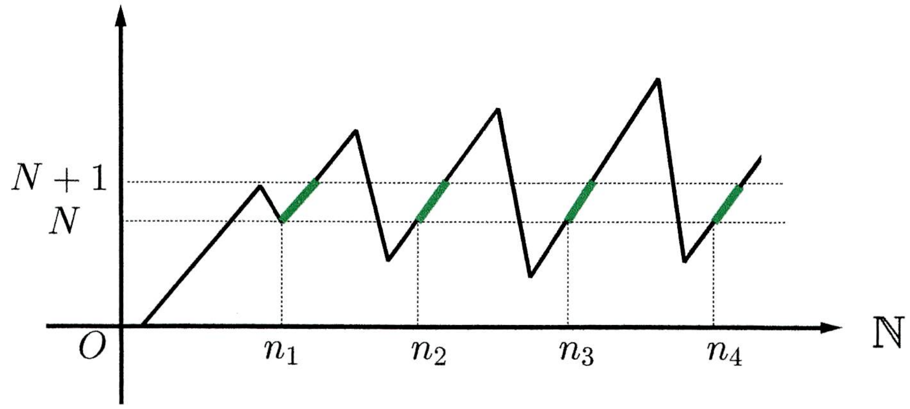

Figure 5.7 $x \in Y$ に対する τ_x のグラフ.

すると
$$f^{n_j-\tau_x(n_j)} = f^{n_j-N} : P_{n_j}(x) \to P_N(0)$$
は conformal であるから逆写像
$$g_j := (f^{n_j-N}|P_{n_j}(x))^{-1} : P_N(0) \to P_{n_j}(x)$$
が考えられこれも当然 conformal である．このとき
$$\text{diam } P_{n_j}(x) = \text{diam (image } g_j) \to 0 \quad (j \to \infty)$$
即ち，g_j は $P_N(0)$ 上の定数関数 $\equiv x$ に収束する．なぜなら g_j は conformal であるから
$$\text{mod } (P_{n_j}(x) - \overline{P_{n_j+1}(x)}) = \text{mod } (P_N(0) - \overline{P_{N+1}(0)}) > 0$$
である (注：N は $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ となるようなものであった)．よって
$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{mod } (P_{n_j}(x) - \overline{P_{n_j+1}(x)}) = \infty$$
となるので Proposition 2.3.11 より結果が従う

さてここで $x_j := f^{n_j-N}(x) \in P_N(0)$ とおく．また
$$\rho := \text{distance}(\overline{P_{N+1}(0)}, \partial P_N(0)), \quad D_j := \mathbb{D}_\rho(x_j)$$
とすると $D_j \subset P_N(0)$ となる．そこで $r_0 := \frac{\rho}{2}$ とすると Lemma 2.2.8 から，ある定数 $C < 1$ が存在して任意の j に対して
$$\text{density}(K, \mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \le C < 1$$
が成り立つ．また $g_j|D_j$ は univalent であるから Koebe's Distortion Theorem よりある定数 $C' > 0$ が存在し
$$\text{dist}(g_j, \mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \le C'$$
が成り立つ．これらの density と distortion の評価と Proposition 2.2.6 より
$$\begin{aligned}
&\text{density}(g_j(K), g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))) \\
= &\frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \cap K|}{|\mathbb{D}_{r_0}(x_j)|} \\
\le &\frac{e^{2\text{dist}(g_j, \mathbb{D}_{r_0}(x_j))} \cdot \text{density}(K, \mathbb{D}_{r_0}(x_j))}{e^{2\text{dist}(g_j, \mathbb{D}_{r_0}(x_j))} \cdot \text{density}(K, \mathbb{D}_{r_0}(x_j)) + (1 - \text{density}(K, \mathbb{D}_{r_0}(x_j)))} \\
\le &\frac{e^{2C'}C}{e^{2C'}C + (1-C)} =: C'' < 1
\end{aligned}$$
なる評価が成り立つ．次に
$$\varepsilon_j := \sup_{z \in \mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j(z) - x|$$

とおくと g_j が定数 x を値にとる定数関数に収束することから $\varepsilon_j \to 0$ である．そこで density$(K,\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x))$ を評価するためにまず density$(g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)),\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x))$ を下から評価することを考える．まず

$$\varepsilon_j = \sup_{z\in\mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j(z) - g_j(x_j)| \leq \left(\sup_{z\in\mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j'(z)|\right) \cdot |z - x_j| \leq \left(\sup_{z\in\mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j'(z)|\right) \cdot r_0$$

であり，一方 Proposition 2.2.5 の評価を使うと

$$\begin{aligned}|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))| &= \iint_{\mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j'(z)|^2 dxdy \\ &\geq e^{-\mathrm{dist}(g_j,\mathbb{D}_{r_0}(x_j))}|g_j'(p)|^2|\mathbb{D}_{r_0}(x_j)|\end{aligned}$$

を得る．ただし $p \in \mathbb{D}_{r_0}(x_j)$ は任意の点である．よって

$$\mathrm{density}(g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)),\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)) = \frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \cap \mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \geq \frac{e^{-\mathrm{dist}(g_j,\mathbb{D}_{r_0}(x_j))}|g_j'(p)|^2\pi r_0^2}{\pi((\sup_{z\in\mathbb{D}_{r_0}(x_j)} |g_j'(z)|)r_0)^2}$$

である (注：ε_j の定義から $g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \subset \mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)$ である) が，ここで $p \in \mathbb{D}_{r_0}(x_j)$ は何であってもよいのでこの式で $p \in \mathbb{D}_{r_0}(x_j)$ に関して sup をとると結局

$$\frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \cap \mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \geq e^{-\mathrm{dist}(g_j,\mathbb{D}_{r_0}(x_j))} \geq e^{-C'}$$

を得る．以上のことから

$$\begin{aligned}\mathrm{density}(K,\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)) &= \frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \cap K| + |(\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x) - g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))) \cap K|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \\ &\leq \frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j)) \cap K| + |\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x) - g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \\ &\leq \frac{C''|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))| + |\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x) - g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \\ &= \frac{(C''-1)|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))| + |g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))| + |\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x) - g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \\ &= 1 - (1 - C'')\frac{|g_j(\mathbb{D}_{r_0}(x_j))|}{|\mathbb{D}_{\varepsilon_j}(x)|} \\ &\leq 1 - (1 - C'')e^{-C'} \\ &< 1\end{aligned}$$

が成り立つ．$\varepsilon_j \to 0$ であったからこれは x が K の density point ではないことを示している．更に $Y \subset K$ であるから x は Y の density point でもない．従って Lebesgue's Density Theorem より $|Y| = 0$ である．

(Step IV) $(\mathrm{NR})_{K^*}$ について：

$x \in (\mathrm{NR})_{K^*}$ なら適当な $m \in \mathbb{N}$ に対して $x \in K_m$ である．よって $|K_m| = 0$ を示せば十分である．そこで $\overline{K_m}$ が双曲的部分集合であることを以下で示す．

Theorem A の証明の (Step I) で述べたように，$L := {}^{\#}\mathcal{P}_m - 1$ として

$$\mathcal{P}_m \setminus \{P_m(0)\} := \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(L)}\}$$

とし，各 $Q^{(i)}$ に対して領域 $U^{(i)}$ を構成する．$L \times L$ 行列 A を

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } f(Q^{(i)}) \supset Q^{(j)} \\ 0 & \text{if } f(Q^{(i)}) \cap Q^{(j)} = \emptyset \end{cases}$$

で定義する．$A_{ij} = 1$ のとき $g_{ij} := (f|U^{(i)})^{-1}|U^{(j)}$ と定義すると 領域 $U^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, L)$ の定義より $\overline{g_{ij}(U^{(j)})} \subset U^{(i)}$ が成り立つ．すると Proposition 2.1.5 よりある不変集合 X が存在し，X は双曲的部分集合になる．詳しくは,

$$\begin{aligned} \Sigma_A &:= \{\underline{x} := (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \{1, 2, \ldots, L\},\ A_{x_n x_{n+1}} = 1\}, \\ \theta(\underline{x}) &:= \bigcap_{n \geq 1} g_{x_1 x_2} \circ g_{x_2 x_3} \circ \cdots \circ g_{x_n x_{n+1}}(U^{(x_{n+1})}) \\ X &:= \theta(\Sigma_A) \end{aligned}$$

である．そこで

$$K_m \ni z \mapsto \underline{x}(z) := (x_n(z))_{n=1}^{\infty} \in \{1, 2, \ldots, L\}^{\mathbb{N}}$$

を $f^n(z) \in Q^{(x_n(z))}$ によって定義すると

$$\underline{x}(z) := (x_n(z))_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A, \quad \theta(\underline{x}(z)) = z$$

が成り立つ．従って $K_m \subset X$ でありよって $\overline{K_m} \subset X$ である．X は双曲的部分集合であるから $\overline{K_m}$ も双曲的部分集合となる (注：実は $\overline{K_m} = X$ が示せる)．従って Thoerem 2.2.1 より $|\overline{K_m}| = 0$，従って $|K_m| = 0$ である．

(Step V) $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合：
この場合は $K_f = J_f$ の点を τ_x で分類することなく一気に $|J_f| = 0$ を示す．そのためには次の Proposition を示せば十分である：

Proposition 5.3.2. $|J_f| > 0$ ならば J_f の density point z_0 に対して

$$\omega(z_0) = \omega(c) \ni c$$

が成立する．よって特に $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ ならば $|J_f| = 0$ である．

これの証明のために次の Lemma を用意する：

Lemma 5.3.3. *W, U を J_f と交わる領域とし，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(W) \subset U$ であるとする．このとき任意の $\delta > 0$ に対してある $\varepsilon_n(\delta)$, $\varepsilon(\delta) > 0$ が存在して次のことが成立する：*

$$\mathrm{diam}\ U < \delta \Longrightarrow \mathrm{diam}\ W < \varepsilon_n(\delta) < \varepsilon(\delta).$$

更に $\varepsilon(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, $\varepsilon_n(\delta) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立する．

(Proof of Lemma 5.3.3) : $\varepsilon > 0$ を1つとり固定する．Theorem A の証明からわかるように

$$\mathrm{diam}\ P_l(x) \to 0, \quad (l \to \infty)$$

でありこれは x に関して一様である．よって，ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $x \in J_f$ に対して

$$\mathrm{diam}\ P_l(x) < \varepsilon \tag{5.3}$$

が成り立つ．$\{P_l(x)\}_{x \in J_f}$ は J_f の開被覆である．そこでこの開被覆の Lebesgue 数を δ とする．即ち，直径が δ 以下の任意の集合はある $P_l(x_0)$ $(x_0 \in J_f)$ に含まれる，とする．このことを U に適用する．つまり $y_0 \in W \cap J_f$ で $f^n(y_0) = x_0 \in U$ となるものをとり $P_l(x_0)$ を y_0 の軌道に沿って引き戻すと

$$P_{l+n}(x_0) \supset W$$

であることがわかる．(5.3) より

$$\mathrm{diam}\ W < \varepsilon$$

である．

さて，以上の議論を主張にあるように $\delta > 0$ が与えられたところから考えてみると，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとることにより，上記の Lebesgue 数 $< \delta$ となるようにすることができる．よって主張は証明された． □

(Proof of Proposition 5.3.2) : $\omega(z_0) \subset \omega(c)$ であることはすでに Corollary 2.2.17 で示されている (注 : Corollary 2.2.17 は2次多項式に限らず，一般の有理写像に関する結果である)．そこで J_f の density point z_0 に対して $\omega(z_0) \ni c$ であることを以下で示す :

対偶を示すことにする．$z_n := f^n(z_0)$ とし

$$\mathrm{dist}(\{z_n\}_{n=0}^{\infty}, c) \geq \gamma$$

であるとする．この γ に対して Lemma 5.3.3 にある δ を $\varepsilon(\delta) < \gamma$ となるようにとる．そこで n を1つ止めて $\mathbb{D}_\delta(z_n)$ をとり，これの f による z_0 の軌道に沿った引き戻しを考える．即ち，

$$U_k := f^{-(n-k)}(\mathbb{D}_\delta(z_n)) \text{ の } z_k \text{ を含む成分}$$

と定義する．すると Lemma 5.3.3 より

$$\mathrm{diam}\ U_k < \varepsilon(\delta) < \gamma, \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

であるから各 U_k は critical point c を含まない．$\varepsilon(\delta) \to 0$, $(\delta \to 0)$ であったから density と distortion を用いた議論から z_0 は J_f の density point ではあり得ないことがわかる．以上で主張は示された． □

以上ですべての場合6について $|K_f| = |J_f| = 0$ が証明された． □

Remark 5.3.4. (1) (Step III) の証明は本質的に Theorem 2.2.16 の別証明 (Remark 2.2.18) と同様である．もちろん Theorem 2.2.16 の証明のようにしても示すことができる．

(2) (Step V) の証明は Lyubich によるものである ([**Ly1**, p.5, Lemma 4]).

(3) (Step II) の証明は証明中にも述べたとおり $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ の場合は必ずしも通用しない．しかし次のような場合は同じ証明が通用する．即ち，K^* の点を4通りに分類し，その各々が測度0であることを示す証明が $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のある場合にはそのまま通用する．更に言い換えると $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のある場合にも Divergence Theorem が成り立つのである．

まず次の Proposition を用意しておく：

Proposition 5.3.5. (1) $n \geq N+1$ なる任意の n に対して

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \mu(j) > 0$$

が成立する．ただし $N \in \mathbf{N}$ は separation level である．

(2) $a,\ b \in \mathbf{N}$ が $a < b,\ \tau(a) < \tau(b)$ を満たすとする．このとき不等式

$$\sum_{j=a}^{b-1} \mu(j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=\tau(a)}^{\tau(b)-1} \mu(j)$$

が成立する．更に $b \notin \Sigma$ または $b,\ \tau(b) \in \Sigma$ なら

$$\sum_{j=a}^{b} \mu(j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=\tau(a)}^{\tau(b)} \mu(j)$$

が成立する．

(Proof)： (1) 帰納法で証明する．まず $n = N+1$ のときは $n-1 = N$ であり $\mu(N) = 1$ であるから主張は成り立つ．次に $n\ (> N)$ なるある n まで成り立っているとして $n+1$ のときを考える．$n \in \Sigma$ なら $\tau(n+1) \leq \tau(n)$ であるから，$n+1$ のときの和をとる範囲 $j = \tau(n+1) \sim n$ は n のときの和をとる範囲 $j = \tau(n) \sim n-1$ より真に広い．よって帰納法の仮定から主張は成り立つ．$n \notin \Sigma$ なら $\tau(n+1) = \tau(n)+1$ であるから $n+1$ のときの和をとる範囲は $j = \tau(n)+1 \sim n$ となりこれは n のときの和をとる範囲 $j = \tau(n) \sim n-1$ と比べて1つだけずれている．もし $\tau(n)+1 \leq j_0 \leq n-1$ であり $\mu(j_0) > 0$ を満たすものが存在すれば $n+1$ のときも主張は成り立つ．そうでなければ帰納法の仮定より $\mu(\tau(n)) > 0$ でなければならないことがわかる．$n \notin \Sigma$ であったから weight function μ の定義から

$$\mu(n) = \frac{1}{2}\mu(\tau(n)) > 0$$

となり，やはりこの場合も主張は成り立つ．

(2) 中間値の定理より $\tau(a) \leq j \leq \tau(b)-1$ なる任意の j に対して $a \leq i < b$ なる i で $\tau(i) = j,\ i \notin \Sigma$ を満たすものが存在する．従って

$$\sum_{i=a}^{b-1} \mu(i) = \sum_{\substack{a \leq i \leq b-1 \\ i \notin \Sigma}} \mu(i) = \sum_{\substack{a \leq i \leq b-1 \\ i \notin \Sigma}} \frac{1}{2}\mu(\tau(i)) \geq \sum_{j=\tau(a)}^{\tau(b)-1} \mu(j)$$

となり，与不等式は成り立つ．更に $b \notin \Sigma$ の場合は $\mu(b) = \frac{1}{2}\mu(\tau(b))$ であるからこれを先に得られた不等式の両辺に加えると

$$\sum_{j=a}^{b} \mu(j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=\tau(a)}^{\tau(b)} \mu(j)$$

が得られる．また b, $\tau(b) \in \Sigma$ の場合は $\mu(b) = \mu(\tau(b)) = 0$ となるのでやはりこの不等式は成り立つ． □

さて $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ とする．$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ であるから $n_j \nearrow \infty$ なる自然数の列と $m_0 \leq m_1$ なる自然数で

$$\tau(n_j) = m_1, \quad \tau(n_j + 1) = m_0, \quad n_j \in \Sigma$$

を満たすものが存在する．つまり $n \in \Sigma$ なる部分を見ていったときどれかのパターンが無限回繰り返されるのである．このとき Axiom of recurrence (Proposition 4.2.2) より $m_0 = 0$ or -1 または

$$m_0 = \tau^k(m_1) + 1, \quad (k \geq 1,\ \tau^{k-1}(m_1) \in \Sigma)$$

が成り立つ．ここで $\underline{k \geq 2\ \text{であると仮定すると}}$

$$m_0 \leq \tau(m_1)$$

が成り立つ．更に $m_1 \geq N + 1$ であると仮定すると Proposition 5.3.5 (1), (2) より

$$\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}} \mu(l) \geq \sum_{l=m_0}^{m_1-1} \mu(l) \geq \sum_{l=\tau(m_1)}^{m_1-1} \mu(l) > 0$$

となるので

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu(l) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}} \mu(l) = \infty$$

が成り立つ．

この考察より $c \in (\mathrm{NR})_{\mathcal{M}}$ のときでも，(Step II) で述べた証明が通用しない場合はむしろ少ないと思われる．