Chapter 3

Douady-Hubbard の z^2+c に関する理論

この章では２章に引き続き準備として Douady と Hubbard による，２次多項式族に関する理論とその基本的な結果 ([**DH1**]) について解説する．

3.1 Julia 集合

3.1.1 G_c, φ_c, external ray

Julia 集合に関することを述べる前に，Green 関数と external ray についての一般論を簡単に解説しておく．

Definition 3.1.1. $X \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合で full (即ち，$\mathbb{C} \setminus X$ が連結) なものとする．このとき X の (∞ を極に持つ) **Green 関数 (potential)** とは，$\mathbb{C} \setminus X$ で定義された調和関数 $G(z)$ で次の条件を満たすものである ([**Po**, §§9.3])：

- $G(z) \geq 0$,
- $G(z) = \log|z| + \mathrm{const} + o(1)\ (z \to \infty)$,
- $G(z) \to 0\ (z \to \partial X)$.

$G(z)$ は存在すれば一意であることが知られている (注：最後の条件は本当は強すぎるが，Julia 集合，Mandelbrot 集合に対してはこれで十分．実際，後で示すように存在する)．次に ∞ の近くで定義された解析関数 $\varphi(z)$ を

- $G(z) = \log|\varphi(z)|$,
- $\dfrac{\varphi(z)}{z} \to c > 0\ (z \to \infty)$,

を満たすものとして定義すると $\varphi(z)$ も ∞ の近傍で一意に存在する (実際 G^* を G の共役調和関数とすると $\varphi(z) = \exp(G(z) + iG^*(z))$ である)．

Definition 3.1.2. G の gradient flow の ∞ からの軌道を X の **external ray** と呼ぶ．また，

$$\varphi^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\}$$

を含む external ray の **external angle** は θ であるという．更に $\{z \mid G(z) = \mathrm{const}\}$ を **equi-potential curve** という．

ここで特に X が連結で $^{\#}X \geq 2$ であるときを考える．$\overline{\mathbb{C}} \setminus X = (\mathbb{C} \setminus X) \cup \{\infty\}$ は単連結になるので Riemann の写像定理から次の条件を満たす等角写像 $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \setminus X \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ (ただし，$\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$) が一意に存在する：

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \frac{\varphi(z)}{z} \to c > 0 \ (z \to \infty).$$

これは Green 関数 G から定義された φ と一致する．Riemann 写像の逆写像 φ^{-1} に関しては次の Carathéodory の定理が知られている ([**CG**, p.6, Theorem 2.1], [**Po**, p.20, Theorem 2.1])：

Theorem 3.1.3 (Carathéodory). φ^{-1} が $\partial\mathbb{D} = S^1$ まで連続に拡張できるための必要十分条件は，X が局所連結であることである．

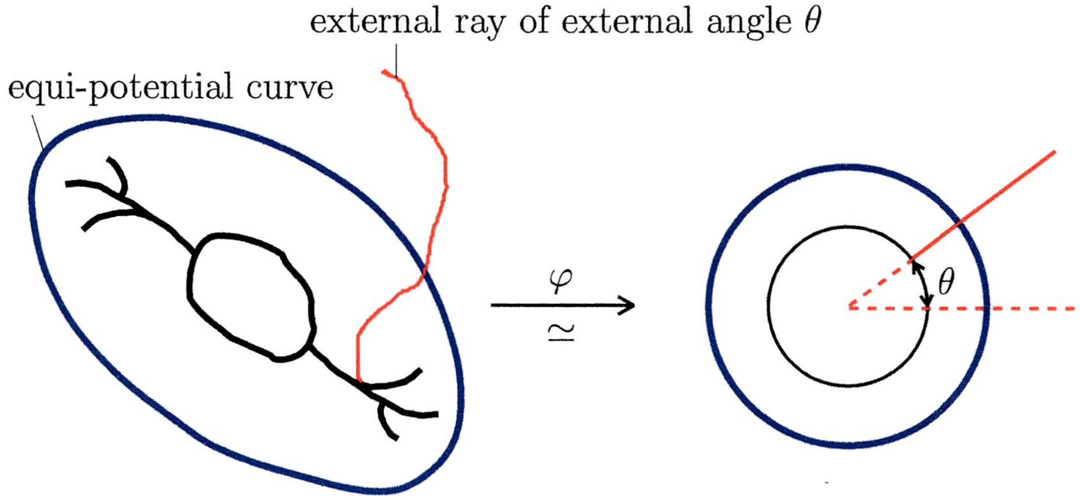


Figure 3.1 external ray, external angle, equi-potential curve.

以上のことを 2 次多項式の充填 Julia 集合の場合に適用する．$p_c(z) := z^2 + c$ に対して充填 Julia 集合は

$$K_c := \{z \mid \{p_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{が有界}\}$$

であったがこのとき K_c はコンパクトであり，また最大値の原理から full (つまり，$\mathbb{C} \setminus K_c$ が連結) になることがわかる．よって Green 関数 $G(z) = G_c(z)$，$\varphi(z) = \varphi_c(z)$ が定義できるが，それらは次のようにして構成される：

Proposition 3.1.4. $G_c(z)$, $\varphi_c(z)$ は $p_c(z)$ を用いて次のように定義される：

$$\begin{aligned} G_c(z) &:= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log^+ |p_c^n(z)|, \quad (\log^+ x := \max\{0, \log x\}), \\ \varphi_c(z) &:= \lim_{n\to\infty} [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

またこれらは次の関係を満たす：

$$G_c(p_c(z)) = 2G_c(z), \quad \varphi_c(p_c(z)) = (\varphi_c(z))^2, \quad G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|.$$

Remark 3.1.5. 先に述べた一般論から $G_c(z)$ は次の性質を満たす：

- $G_c(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で存在，広義一様収束.
- $G_c(z) \geq 0$, $K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid G_c(z) = 0\}$.
- $G_c(z)$ は $\mathbb{C}$ で劣調和，$\mathbb{C} \setminus K_c$, int K_c で調和.
- $G_c(z) = \log|z| + o(1) \quad (z \to \infty)$.

(Outline of the Proof ([CG, VIII. 3.])) : $z \notin K_c$ なら $p_c^n(z) \to \infty \quad (n \to \infty)$ となるので $G_c(z)$ の定義で $\log^+$ の $+$ は不要となる．そこで $G_c^{(n)}(z) := \frac{1}{2^n}\log|p_c^n(z)|$ とすると

$$G_c^{(n+1)}(z) - G_c^{(n)}(z) = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\log|p_c^{n+1}(z)| - \log|p_c^n(z)|^2\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}\log\left|1 + \frac{c}{(p_c^n(z))^2}\right|$$

となり，これから $\lim_{n\to\infty} G_c^{(n)}(z) = G_c(z)$ がわかる．また $G_c^{(n)+}(p_c(z)) = 2G_c^{(n+1)+}(z)$ より $G_c(p_c(z)) = 2G_c(z)$ が成り立つ ($2 = \deg p_c$ であることに注意).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{p_c} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle G_c}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G_c} \\ \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{p_c} & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

次に $|z| >> 1$ のとき (このとき $p_c^n(z) \to \infty$) 巾根をうまくとって

$$\varphi_c(z) = \lim_{n\to\infty} [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$$

で定義したい．今，$\varphi^{(n)}(z) = [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$ が定義できたとしよう．形式的計算をしてみると

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(z)}{\varphi^{(n)}(z)} = \frac{[p_c^{n+1}(z)]^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{[p_c^n(z)^2]^{\frac{1}{2^{n+1}}}} = \left[1 + \frac{c}{(p_c^n(z))^2}\right]^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

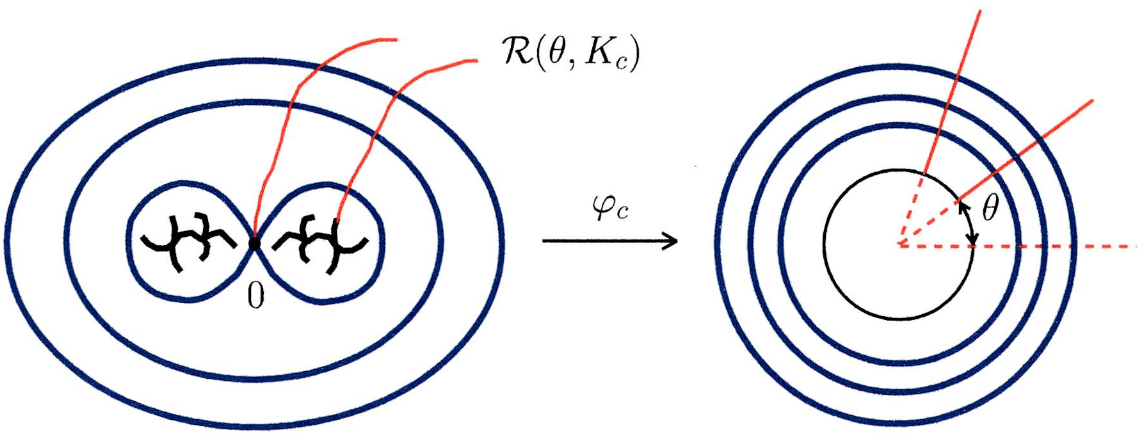
となり $\frac{c}{(p_c^n(z))^2}$ は十分小さいので最後の式では巾根の自然な branch をとることができる．よって帰納法により $\varphi^{(0)}(z)=z$ から始めて$\varphi_c^{(n)}$ を決めることができ，また収束することも示せる．そして

$$\frac{\varphi_c(z)}{z}=\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\log\left(1+\frac{c}{(p_c^n(z))^2}\right)\right),\quad \varphi_c(p_c(z))=(\varphi_c(z))^2$$

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{p_c} & * \\ {\scriptstyle\varphi_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_c} \\ * & \xrightarrow{p_c} & * \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}\qquad \text{partial conjugacy}$$

$\varphi_c(z)$ が定義されれば $G_c(z)=\log|\varphi_c(z)|$ が成立する． □

次に上記の関数方程式 $\varphi_c(p_c(z))=(\varphi_c(z))^2$ を使うと φ_c は $\{z\in\mathbb{C}\mid G_c(z)>G_c(0)\}$ まで関数方程式を満たしたまま 1 価解析的に拡張でき，ここでは 1 対 1 になる．そこで $\boldsymbol{\mathcal{R}(\theta,K_c)}$ を external angle θ の external ray とすると $\mathcal{R}(\theta,K_c)$ は K_c まで到達するか (このときは 1 点に到達するか振動するか)，または途中で critical point のところで break up するかのどちらかである (Figure 3.2).



$0=p_c$の critical point $=G_c$の 1st. critical point.

Figure 3.2 external ray(K_c まで到達するものと break up するもの).

もし K_c が連結ならば (これは $0\in K_c$ と同値 (Theorem 1.1.1)) $G_c(0)=0$ で $\varphi_c:\mathbb{C}\setminus K_c\to\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ は等角写像，即ち φ_c は $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_c$ の Riemann 写像となる．このとき external ray は

$$\mathcal{R}(\theta,K_c)=\varphi_c^{-1}\{re^{2\pi i\theta}\mid r>1\},$$

また，equi-potential curve は

$$\varphi_c^{-1}\{|z|=\text{const}>1\}=G_c^{-1}\{x=\text{const}\}.$$

更に K_c が局所連結のとき Carathéodory の定理より φ_c^{-1} は $\varphi_c^{-1}: \mathbb{C}\setminus\mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus \mathrm{int}\, K_c$ と連続に拡張でき，$\varphi_c^{-1}(\zeta^2) = p_c(\varphi_c^{-1}(\zeta))$ が成立する．$\mathcal{R}(\theta, K_c)$ が $z \in J_c = \partial K_c$ に到達するとき z は $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の **landing point** であるという．そして $p_c(\mathcal{R}(\theta, K_c)) = \mathcal{R}(2\theta, K_c)$ が成立する．

3.1.2 Landing relation

z が $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point のとき θ は z の **external angle** であるといい

$$\theta \in \mathrm{Angle}(z, K_c)$$

と書く．また z が $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point なら $p_c(z)$ は $\mathcal{R}(2\theta, K_c)$ の landing point である．ここで **doubling map** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ を

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{D}: & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ & \theta & \mapsto & 2\theta \mod \mathbb{Z} \end{array}$$

により定義する．$\mathcal{D}$ については次のことが基本的である：

Proposition 3.1.6. (1) θ が $\mathcal{D}$ の周期点であることと，θ が分母が奇数の有理数であることとは同値である．

(2) θ が $\mathcal{D}$ に関して前周期的 (preperiodic) であることと，θ が分母が偶数の有理数であることとは同値である．

(Proof) : (1) θ が $\mathcal{D}$ の周期点であるとすると，ある $k \in \mathrm{N}$ に対して

$$2^k\theta \equiv \theta \mod \mathbb{Z}$$

となるので

$$\theta = \frac{r}{2^k - 1} \quad r \in \mathbb{Z}$$

即ち，θ は分母が奇数の有理数である．逆に

$$\theta = \frac{p}{q}, \quad p,\ q \in \mathbb{Z}, \quad q: \text{奇数}$$

とする．まず

$$2^n p \equiv 2^m p \mod q$$

を満たす自然数 $n,\ m \in \mathrm{N}$ で $n > m$ なるものがとれる．従って

$$2^n p - 2^m p = qr \quad r \in \mathrm{N} \quad \text{即ち} \quad 2^m(2^{n-m} - 1)p = qr$$

と書けるが，ここで q は奇数であるから r が 2^m で割り切れる．よって

$$(2^{n-m} - 1)\theta = \frac{(2^{n-m} - 1)p}{q} = \frac{r}{2^m} \in \mathbb{Z}$$

となり，従って

$$2^{n-m}\theta \equiv \theta \mod \mathbb{Z}$$

であるから，θ は $\mathcal{D}$ の周期点である．

(2) θ が $\mathcal{D}$ に関して前周期的 (preperiodic) であるとするとある $k,\ l \in \mathbb{N}$ に対して

$$2^l \cdot 2^k\theta \equiv 2^k\theta \mod \mathbb{Z}$$

となるので

$$\theta = \frac{r}{2^k(2^l-1)} \quad r \in \mathbb{Z}$$

即ち，θ は分母が偶数の有理数である．逆に

$$\theta = \frac{p}{2^n q} \quad n \in \mathbb{N} \quad q: 奇数$$

とすると $\mathcal{D}$ で写すと

$$\theta \mapsto 2\theta \mapsto 4\theta \mapsto \cdots \mapsto 2^n\theta = \frac{p}{q}$$

であり $\frac{p}{q}$ は q が奇数だから (1) より周期点，即ち分母が偶数の θ は前周期的 (preperiodic) である． □

θ が $\mathcal{D}$ に関して周期的で $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point z が存在するとき，z は p_c に関して周期的であり z の周期は θ の周期の約数である．実際 $\mathcal{D}^n(\theta)=\theta$ とすると

$$p_c^n(z) = p_c^n(\mathcal{R}(\theta, K_c)) = \mathcal{R}(\mathcal{D}^n(\theta), K_c) = \mathcal{R}(\theta, K_c) = z$$

が成り立つ．例えば period$(\theta)=6$, period$(z)=2$ の場合は次のようである．

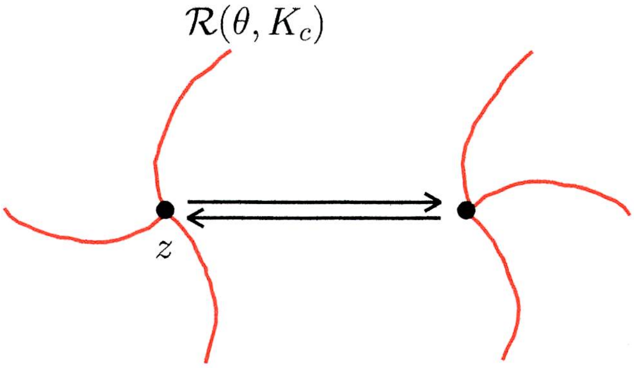


Figure 3.3

また landing point z は $\partial K_c = J_c$ の点であるので吸引的ではない．

Proposition 3.1.7. θ が $\mathcal{D}$ に関して周期的であり，$\mathcal{R}(\theta, K_c)$ が critical point によって break up しないとする．このとき $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は $J_c = \partial K_c$ のある 1 点に到達する．この点は p_c の反発的または放物的な周期点である．

Remark 3.1.8. (1) Proposition 3.1.7 で J_c の連結性，局所連結性は仮定していない．
(2) θ が前周期的なときは $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は前周期的な点に land する ([**Mi1**, Corollary 18.4]).

(Proof) : θ の周期を k，即ち $2^k\theta \equiv \theta \mod \mathbb{Z}$ とし，$\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\}$ 上に ζ_0, $\zeta_1, \dots$ を $\zeta_j^{2^k} = \zeta_{j-1}$ を満たすようにとる．そこで $z_j := \varphi_c^{-1}(\zeta_j)$ とすると

$$z_j \in \mathcal{R}(\theta, K_c) \quad (j = 0, 1, \dots), \qquad p_c^k(z_j) = z_{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ (Figure 3.4 参照).

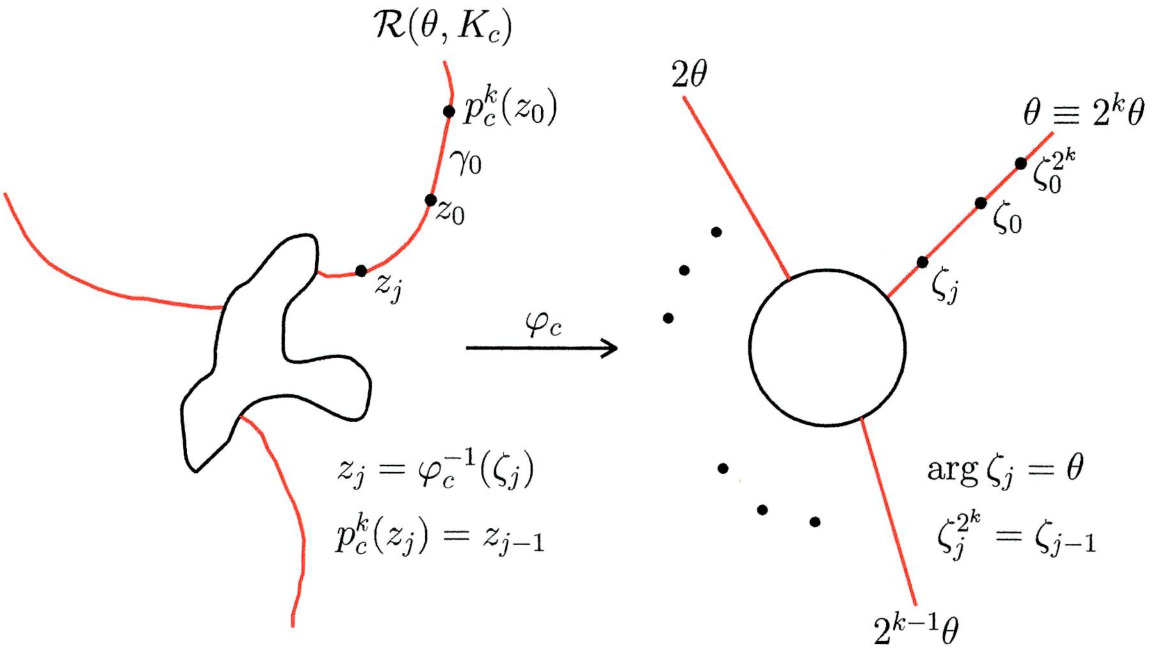


Figure 3.4

γ_0 を $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の z_0 と $p_c^k(z_0)$ を結ぶ部分，γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ を $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の z_j と $z_{j-1}(= p_c^k(z_j))$ を結ぶ部分とする．$\mathbb{C} \setminus K_c$ の Poincaré metric を考えると

$$\varphi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

は Poincaré metric に関して isometry であり，また一方で

$$p_c : \mathbb{C} \setminus K_c \to \mathbb{C} \setminus K_c$$

は covering map だから Poincaré metric に関して local isometry である．よって γ_j と γ_{j-1} の Poincaré length は等しい．ところが Poincaré metric を $\lambda(z)|dz|$ と書くと

$$\lambda(z) \to \infty \quad (z \to K_c)$$

であるが，一方

$$\gamma_j \to K_c \quad (j \to \infty)$$

であるので

$$\gamma_j \text{ の Euclidean length} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

即ち

$$|z_j - z_{j-1}| \to 0 \quad (j \to \infty)$$

となる．w を $\{z_j\}$ の集積点とすると，ある $j_n \in \mathbb{N}$, $j_n \nearrow \infty$ が存在して $z_{j_n} \to w$ となる．p_c^k を作用させると

$$p_c^k(z_{j_n}) \to p_c^k(w)$$

となる．一方 $p_c^k(z_{j_n}) = z_{j_n - 1}$ で $|z_j - z_{j-1}| \to 0$ と $z_{j_n} \to w$ より $z_{j_n-1} \to w$ が得られる．従って $p_c^k(w) = w$ となり $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の集積点は p_c^k の不動点であることがわかる (注：$\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の集積点は $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ の集積点であることに注意 ($|z_j - z_{j-1}| \to 0$ からわかる))．ところが

$$\{\mathcal{R}(\theta, K_c) \text{ の集積点 }\} = \bigcap_{r_0 > 1} \overline{\varphi_c^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid 1 < r < r_0\}}$$

でありこれは右辺の表示から連結である．p_c^k の不動点は有限個しかないので結局この集合は 1 点だけからなる集合であり，ゆえに $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は $J_c = \partial K_c$ のある 1 点に到達し，この点は p_c の反発的または放物的な周期点である． □

K_c が連結であるときはこの Proposition の逆，即ち次の定理が成り立つ：

Theorem 3.1.9 (Douady(+ Yoccoz + Milnor)'s Landing Theorem [Mi1, Theorem 18.2], [Pe1, p.787, Theorem B]). K_c は連結，また $z_0 \in K_c$ は反発または放物型周期点であるとする．このとき周期的な θ が存在し z_0 は $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point になる． □

このとき z_0 の **combinatorial rotation number** が次のようにして定義できる．z_0 の周期を k とすると p_c^k は z_0 のまわりでは z_0 に land する external ray の cyclic order を保つ rotation であり

$$p_c^k : \mathcal{R}(\theta_i, K_c) \to \mathcal{R}(\theta_j, K_c), \quad j \equiv i + p \mod q$$

とかける (Figure 3.5)．そこで z_0 の combinatorial rotation munber を $\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ と定義する．

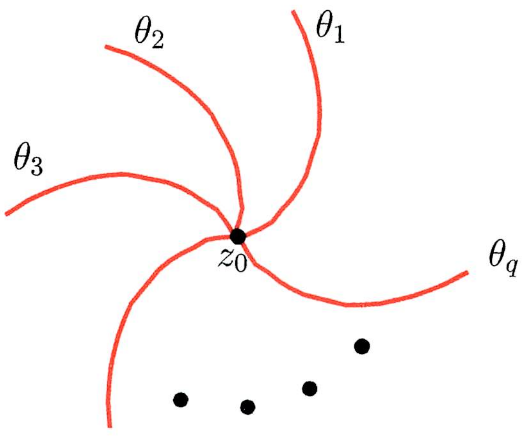


Figure 3.5

Remark 3.1.10. p_c は反発または放物型不動点 z_0 のまわりで z_0 に land する external ray の cyclic order を保つ rotation であるが φ_c で共役をとった doubling map $\mathcal{D}$ は cyclic order を保たない．

Theorem 3.1.11 (Yoccoz inequality [H, Part I]). K_c は連結とし，z_0 を反発不動点，z_0 の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$，$\lambda = p_c'(z_0)(= z_0$ の multiplier) とする．このときある普遍定数 $C > 0$ が存在し次が成立する：

$$\log\lambda \in \left\{ z \;\middle|\; \left| z - \left(\frac{C}{q} + 2\pi i \frac{p}{q} \right) \right| < \frac{C}{q} \right\}.$$

□

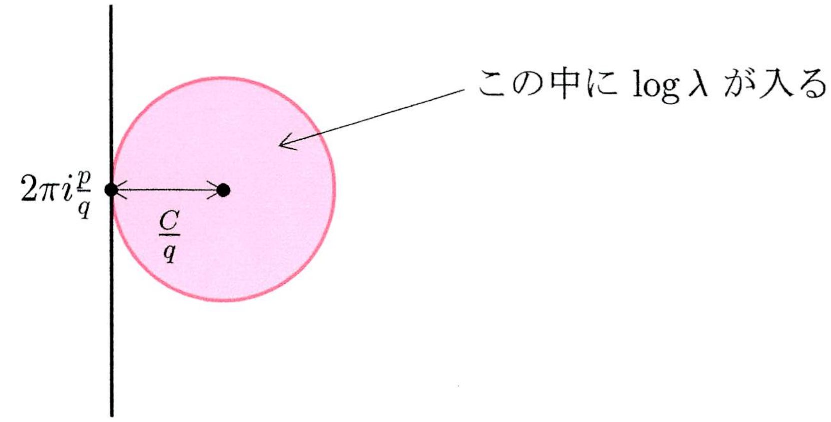


Figure 3.6

Remark 3.1.12. [H] にはもう少し詳しい形での Yoccoz inequality が書いてある．また [**Pe1**] も参照せよ．

Corollary 3.1.13 ([H, p.479, Corollary 4.4]). p_c が indifferent cycle で multiplier が $e^{2\pi i t}$ となるものを持つとする．t が無理数なら $\mathcal{M}$ は c で局所連結である．

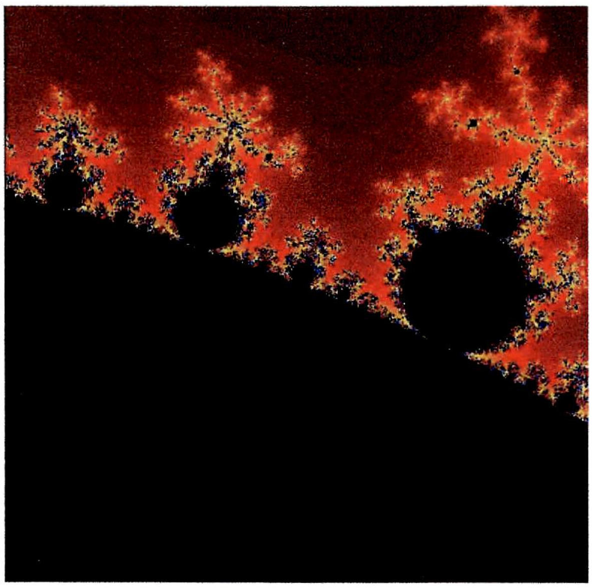


Figure 3.7

(Outline of the Proof) : $\lambda z+z^2$ の形のものに対し Yoccoz inequality を適用する．その結果を変数パラメーターの変換により z^2+c にもっていく． □

$k\in\mathbb{N}$ に対し k を割る周期を持つ周期点の個数は $p_c^k(z)=z$ より 2^k個である．一方 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の doubling map $\mathcal{D}$ については 2^k-1 個しか存在しない．特に $k=1$ のとき $\mathcal{D}$ の唯一の不動点 $\theta=0$ に対応する $p_c(z)$ の不動点を **β-不動点**，$p_c(z)$ のもう 1 つの不動点を **α-不動点**という．

Definition 3.1.14. $\theta,\ \theta'\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ について **θ と θ' が同値である ($\theta \underset{c}{\sim} \theta'$)** とは

$$\mathcal{R}(\theta,K_c) \text{ の landing point} = \mathcal{R}(\theta',K_c) \text{ の landing point}$$

が成立することである．

K_c が局所連結であるとすると Carathéodory の定理より任意の θ に対し $\mathcal{R}(\theta,K_c)$ は landing point を持つ．このとき

$$((\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\underset{c}{\sim},z^2) \underset{\substack{\text{top.}\\ \text{conj.}}}{\sim} (J_c,p_c)$$

が成立する．

3.2 Mandelbrot 集合

Douady's principle

「dynamical plane (z-plane) で耕して parameter plane (c-plane) で収穫する」

これは２次多項式の複素力学系においては，個々の $p_c(z)$ の dynamical plane (z-plane) で得た性質 (Julia 集合に関する性質) から parameter plane (c-plane) の性質 (Mandelbrot 集合の性質) がわかることを端的に表現したものである．これに従ってまず $\mathbb{C}\setminus\mathcal{M}$ について考察していくことにしよう．$c\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{M}$ は $0\notin K_c$ と同値でこれはまた $G_c(0)>0$ と同値である．このとき φ_c は $\{z \mid G_c(z)>G_c(0)\}$ で定義されており，$G_c(c)=2G_c(0)>G_c(0)$ であるから $\Phi(c):=\varphi_c(c)$ が定義できる．すると

$$\Phi:\mathbb{C}\setminus\mathcal{M}\to\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$$

でありこれは

1. Φ : 解析的,
2. $\dfrac{\Phi(c)}{c}\to 1 \quad (c\to\infty)$,
3. proper (即ち，$c\to\partial\mathcal{M}$ のとき $\Phi(c)\to\partial\mathbb{D}$)，従って Φ は branched covering．また，∞ の近傍では 1 対 1 ,

を満たす．従って

Theorem 3.2.1 (Douady-Hubbard [DH1]). Φ は $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ の Riemann 写像である.

Corollary 3.2.2 (Douady-Hubbard [DH1]). $\mathcal{M}$ は連結である.

Riemann 写像 $\Phi(c) = \varphi_c(c)$ は次のように解釈することができる.

$\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ の Riemann map　　$\mathbb{C} \setminus K_c$ の Riemann map

parameter

critical value

$$\Phi(c) = \varphi_c(c)$$

「parameter c の $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ における関数論的位置」　　「critical value c の $\mathbb{C} \setminus K_c$ における関数論的位置」

Definition 3.2.3. Mandelbrot 集合の **external ray** $\boldsymbol{\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M})}$ を

$$\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M}) = \Phi^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\},$$

で定義する. また $c \in \mathcal{M}$ が $\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M})$ の landing point のとき θ は c の **external angle** であるといい

$$\theta \in \mathrm{Angle}(c, \mathcal{M})$$

と書く.

$c \to \partial\mathcal{M}$ のときについては後述の Douady-Hubbard の定理 (Theorem 3.2.8) 参照.

次に $\mathcal{M}$ 自身について考察する. 2 章で述べたことなどから次の 3 つは同値である :

1. p_c が 双曲的 (hyperbolic) (or 拡大的 (expanding), 公理 A (Axiom A)) である (即ち, ある $N \geq 1$ が存在し J_c 上で $\|(p_c^N)'\| \geq 2$ が成り立つ).
2. $p_c^n(0) \to \infty$ $(n \to \infty)$ または $p_c^n(0) \to$ 吸引周期軌道 $(n \to \infty)$.
3. $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ または p_c が吸引周期点を持つ.

もし吸引周期点が存在すれば, 複素力学系の一般論から少なくとも 1 つの critical value の軌道がこの cycle に収束するので, p_c については吸引周期軌道の個数は高々 1 個 ($= p_c$ の critical value の個数) である. また, 吸引周期点は摂動によってこわれない (残り続ける) ので p_c が双曲的かつ $c \in \mathcal{M}$ ならば $c \in \mathrm{int}\, \mathcal{M}$ である. そこで $\cdots$,

Definition 3.2.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{c \in \mathbb{C} \mid p_c \text{ が吸引周期点を持つ}\} \\ &= \{c \in \mathcal{M} \mid p_c \text{ が双曲的}\} \subset \mathrm{int}\, \mathcal{M} \end{aligned}$$

とおき，$\mathcal{H}$ の連結成分を $\mathcal{M}$ の**双曲成分 (hyperbolic component)** と呼ぶ．H を双曲成分の１つとすると $c \in H$ に対し p_c の吸引周期軌道の周期は c によらず一定である．これを双曲成分 H の**周期** と呼ぶ．そこで **multiplier map "mul"** を

$$\mathrm{mul} : H \ni c \mapsto (p_c\text{の吸引周期点の multiplier (eigenvalue)}) \in \mathbb{D}$$

と定義する．

mul については次が成り立つ ([**CG**, p.134, Theorem 2.1]) :

Theorem 3.2.5 (Douady-Hubbard [DH1]). 各双曲成分に対し multiplier map mul : $H \to \mathbb{D}$ は全単射であり，高々１点を除いて境界点の近傍まで拡張できる．

Remark 3.2.6. 「高々１点」の例外がおこるのはもちろん，H が main cardioid およびその "コピー"にあたる双曲成分の場合である．

Definition 3.2.7. $(\mathrm{mul})^{-1}(0)$ を双曲成分 H の **center**，$(\mathrm{mul})^{-1}(1)$ を **root** と呼ぶ．

Figure 3.8 は main cardioid(= 周期１の双曲成分) と，その左に続く周期２の双曲成分の center と root を示している．

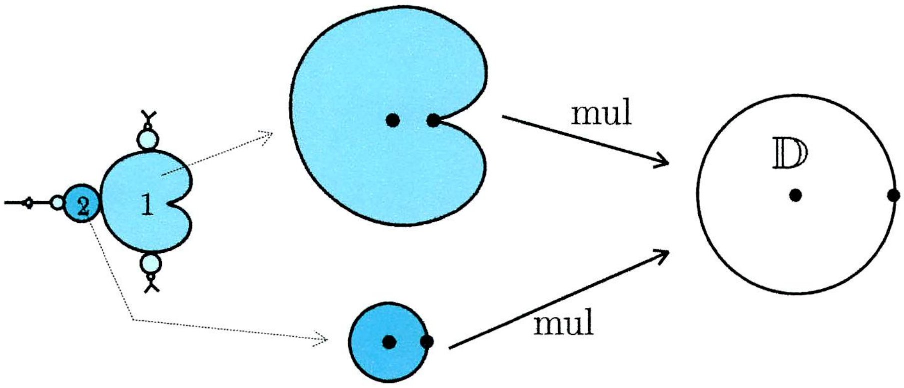


Figure 3.8 双曲成分の root と center.

次に，$c \in \mathcal{H}$ のとき z_0 を周期 k の吸引周期点とし

$$A(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid p_c^{nk}(z) \to z_0 \ (n \to \infty)\}$$

とおき，これを z_0 の**吸引領域 (basin)** と呼ぶ．更に $A^*(z_0)$ を $A(z_0)$ の z_0 を含む連結成分 (**immediate basin**) とすると $\psi : A^*(z_0) \to \mathbb{D}$ なる等角写像で次の図式が可換になるものがただ１つ存在する．

$$\begin{array}{ccc} A^*(z_0) & \xrightarrow{p_c^k} & A^*(z_0) \\ \psi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{g} & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & g(z) \end{array}$$

ただし $g(z)$ は $g(0)=0$, $g(1)=1$ を満たす．ψ は $\partial A^*(z_0)$ まで同相写像として拡張できる．multiplier map のときと同様に $\psi^{-1}(0)$ を immediate basin の **center**，$\psi^{-1}(1)$ を **root** という．Immediate basin の root は実は $\partial A^*(z_0)$ の一番周期の低い周期点になる．

Theorem 3.2.8 (Douady-Hubbard [DH1]).

(1) p_c について 0 が前周期的とする (このとき $c \in \partial\mathcal{M}$) と，

$$\mathrm{Angle}(c, K_c) = \mathrm{Angle}(c, \mathcal{M})$$

でこの集合は空ではなく有限個の (doubling map $\mathcal{D}$ について) 前周期的な角度 $\theta_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ からなる (Figure 3.9–1 参照).

(2) $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が前周期的のとき，ある c が存在して 0 が p_c について前周期的であり $\theta \in \mathrm{Angle}(c, \mathcal{M})$ が成立する．

(3) $c \in \mathcal{H}$ で H を c を含む双曲成分とする．また c' を H の root，$c \in A^*(z_0)$，z_1 を $A^*(z_0)$ の root とする．このとき $p_{c'}$ は放物型周期点 z_0' を持ち，

$$\mathrm{Angle}(c', \mathcal{M}) \subset \mathrm{Angle}(z_1, K_c) = \mathrm{Angle}(z_0', K_{c'})$$

が成立する．また H の周期が 1 でないときは

$$\mathrm{Angle}(c', \mathcal{M}) = \{\theta \in \mathrm{Angle}(z_1, K_c) \mid \theta \text{ は } A^*(z_0) \text{ に隣接}\}$$

が成立する (Figure 3.9–2 参照).

(4) θ が周期的ならば，ある双曲成分の root c が存在し，$\theta \in \mathrm{Angle}(c, \mathcal{M})$ が成立する．

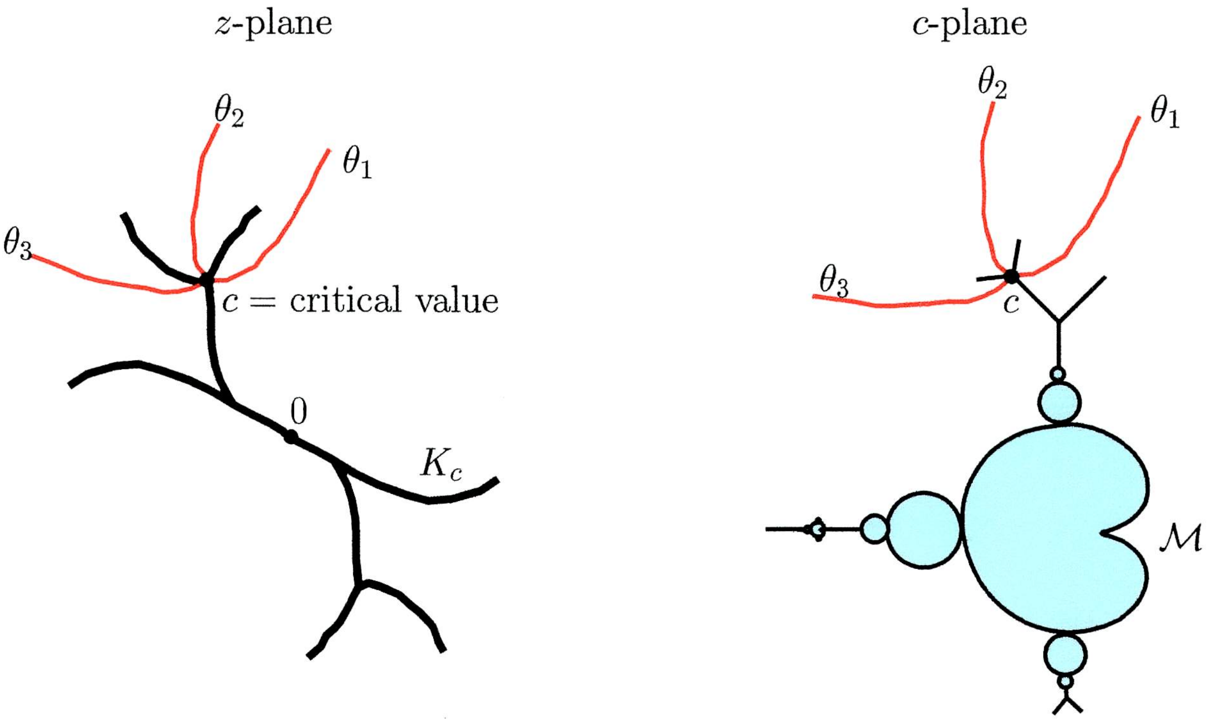


Figure 3.9–1

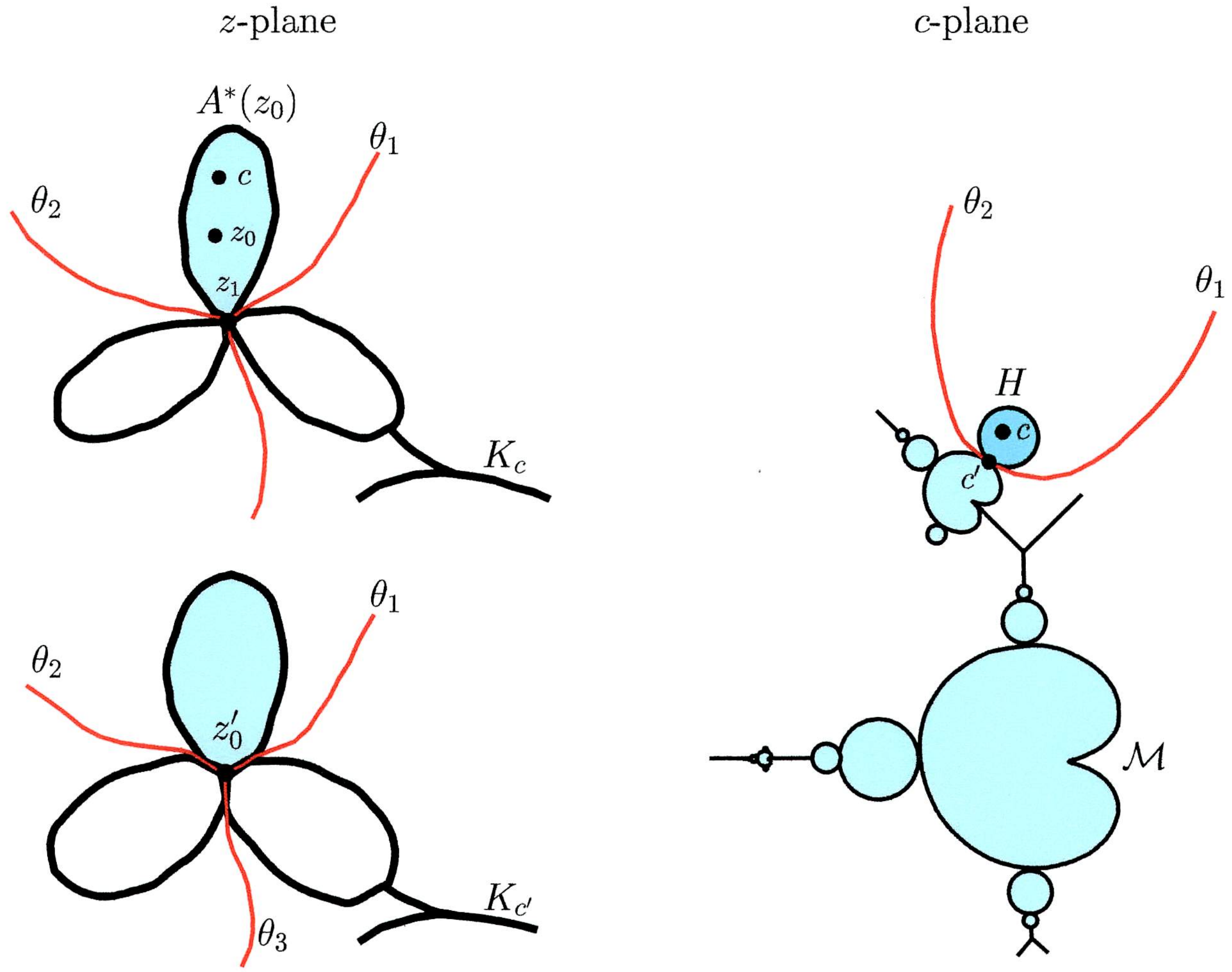


Figure 3.9–2

Remark 3.2.9. Figure 3.9–1, 3.9–2 の $\mathcal{M}$ は一部を拡大，誇張して描いてある．

Chapter 4

Yoccoz の方法

この章では Yoccoz によって導入された，２次多項式の Julia 集合に対する "partition" (Yoccoz puzzle) と，それに付随するτ-関数について解説する．

4.1 Partition (puzzle) の構成

Theorem A, C の証明のために K_c の "partition(puzzle)" というものを構成する．一般の「無限回くりこみ可能ではない場合」についてはこの節の最後で述べることにして，以下では最も簡単な「(１回も) くりこみ可能でない場合」の partition の構成について述べる．

以下では $c \in \mathcal{M} \setminus \overline{\text{cardioid}}$ (即ち，K_c は連結でかつ p_c の不動点は反発的) と仮定する．p_c の２つの不動点を §3.1.2 で定義したように $\{\alpha, \beta\}$ とし，β が $\mathcal{R}(0, K_c)$ の landing point であるとする．そこでまず，equi-potential curve を１つ選んで固定して $\mathbf{\Gamma_0}$ を

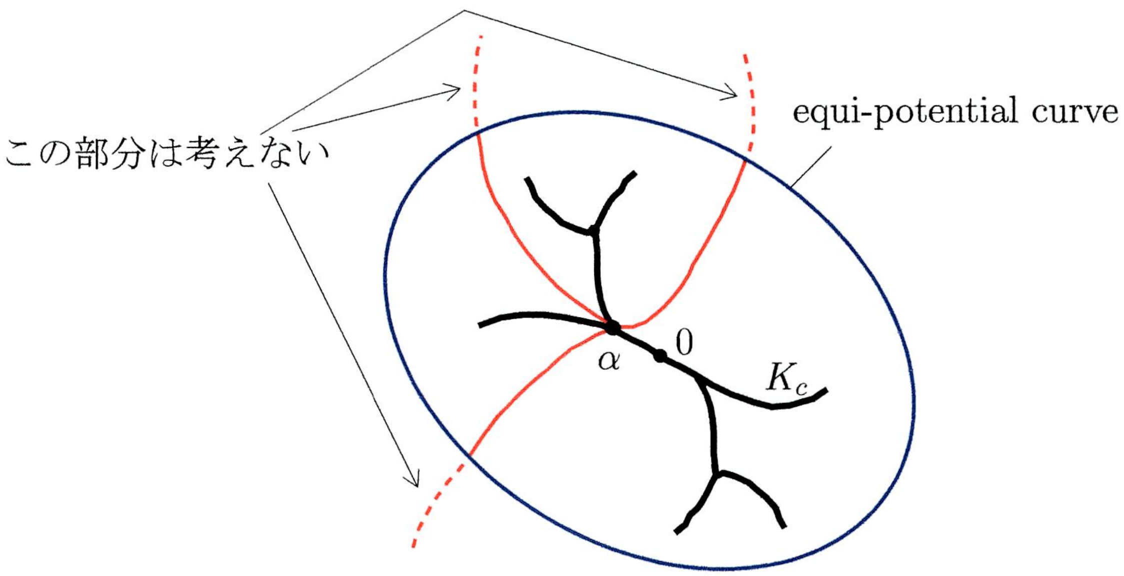


Figure 4.1 α の external rays と１つの equi-potential curve.

$$\Gamma_0 := \bigcup (\alpha \text{ の external ray}) \bigcup (\text{1つの equi-potential curve})$$

とする．ただし，∞に延びている external ray のうち，この equi-potential curve の外側にある部分は考えないことにする (忘れる!?) (Figure 4.1)．次に $\boldsymbol{\Gamma_n := p_c^{-n}(\Gamma_0)}$ とし

$$\mathcal{P}_n := \{\mathbb{C} \setminus \Gamma_n \text{ の } K_c \text{ と交わる連結成分}\}$$

とする．そこで $x \in K_c \setminus \Gamma_n$ のとき x を含む $\mathcal{P}_n$ の元を $\boldsymbol{P_n(x)}$ と書き $\boldsymbol{x}$ **を含む** $\boldsymbol{n}$**-piece** (または **depth $\boldsymbol{n}$ の (puzzle) piece**) という．$P_n(x)$ は単連結である．このことは

$$\mathcal{P}_n = \{p_c^{-1}(P) \ (P \in \mathcal{P}_{n-1}) \text{ の連結成分}\}$$

であることから帰納的に理解できる．

[**Mc**, p.133, Figure 8.3] には $p_i(z) = z^2 + i$ (注：$i = \sqrt{-1}$) について 0-piece から 4-piece までをコンピューターで計算して表した図がある．以下の Figure 4.2–1〜5 は一般に Γ_0 から始めて Γ_1, $\Gamma_2, \ldots$ がどのようになっていくかを α の combinatorial rotation munber が $\frac{1}{3}$ のときについて模式的に示したものである．

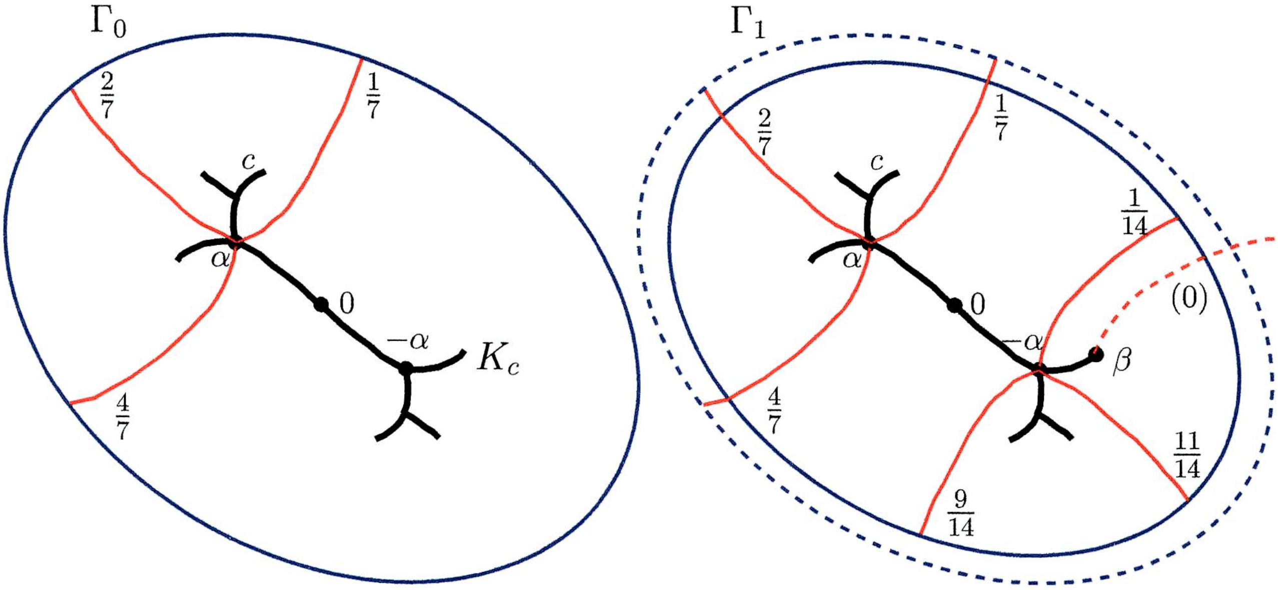


Figure 4.2–1 Γ_0 と Γ_1.

不動点 α の逆像は α と $-\alpha$ であることに注意せよ．Figure 4.2–1 中の $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}, \ldots$ などの分数は puzzle piece の境界をなす external ray の angle を表している．また Γ_1 の図には β に land する，angle 0 の external ray も参考のために点線で書き込んである．また Γ_0, Γ_1, Γ_2 の図の各々の中に "c" とあるのは critical value c の位置が，angle が $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ の external ray と equi-potential curve で囲まれる piece の中にあることを示しているだけで，更に K_c の中でどの位置にあるかまでは特定していない．どの位置にあるかは Γ_4 以降で重要になってくる．実際，Γ_3 において Figure 4.2–2 のイ，ロ，ハの3つの piece のうちどこに critical value c があるかによって Γ_4 の形は以下のように異なってくる：

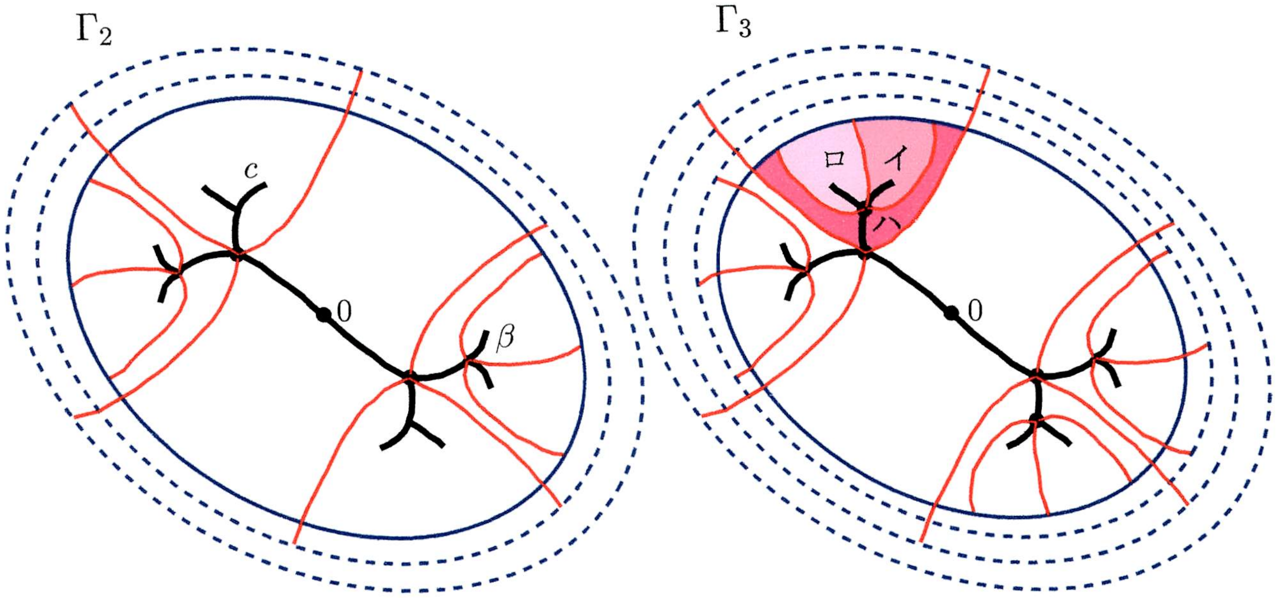


Figure 4.2–2 Γ_2 と Γ_3.

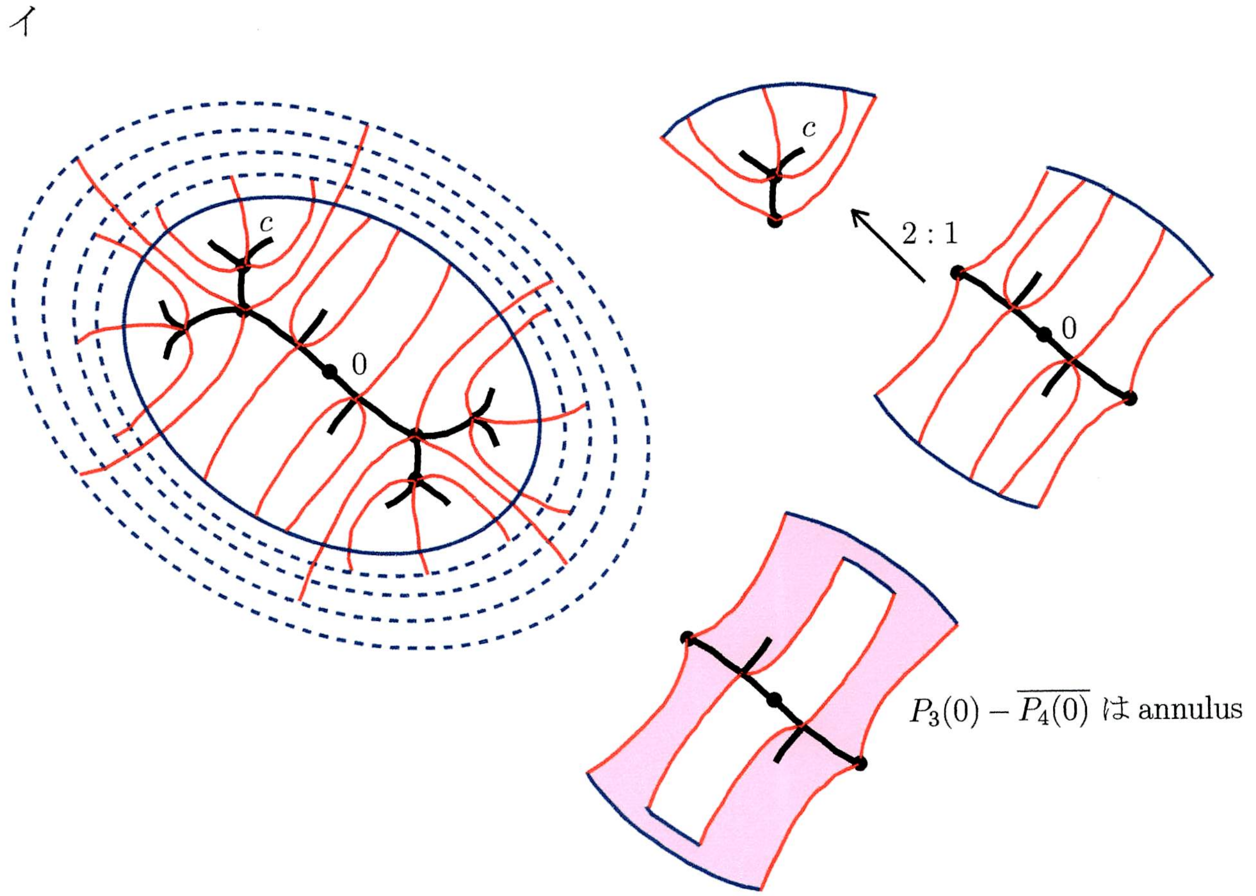


Figure 4.2–3 Γ_4 (イの場合).

イの場合 Figure 4.2–3 にあるように $P_3(0) - \overline{P_4(0)}$ が annulus になることに注意せよ．後述のように (Lemma 4.1.2) これは f がくりこみ可能でないことに起因する．

ロ

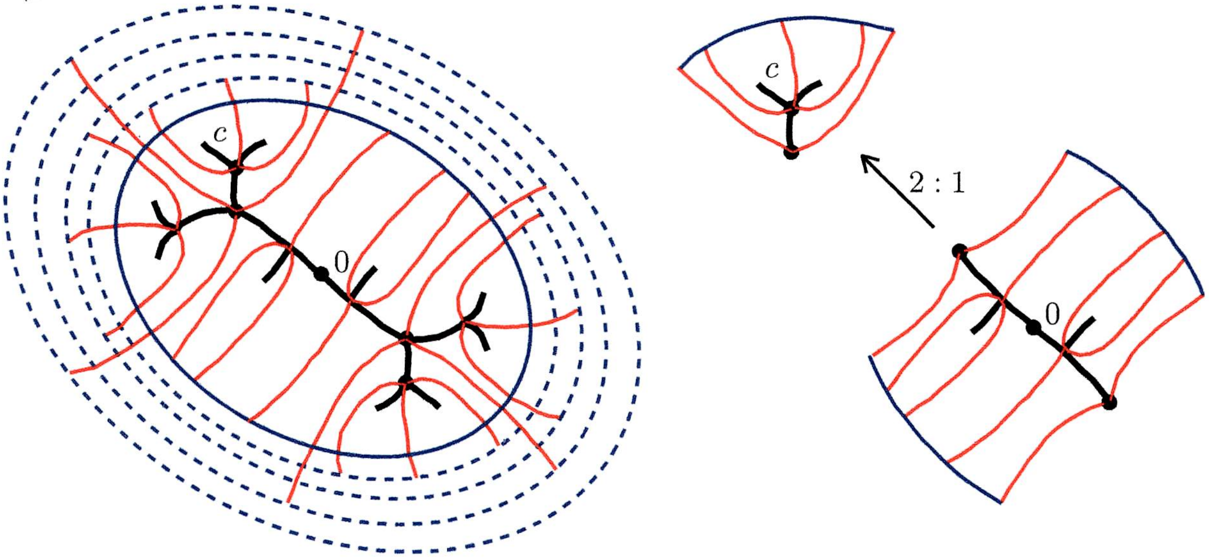


Figure 4.2–4 Γ_4 (ロの場合).

ロの場合もイの場合と同様に $P_3(0) - \overline{P_4(0)}$ は annulus になる．

ハ

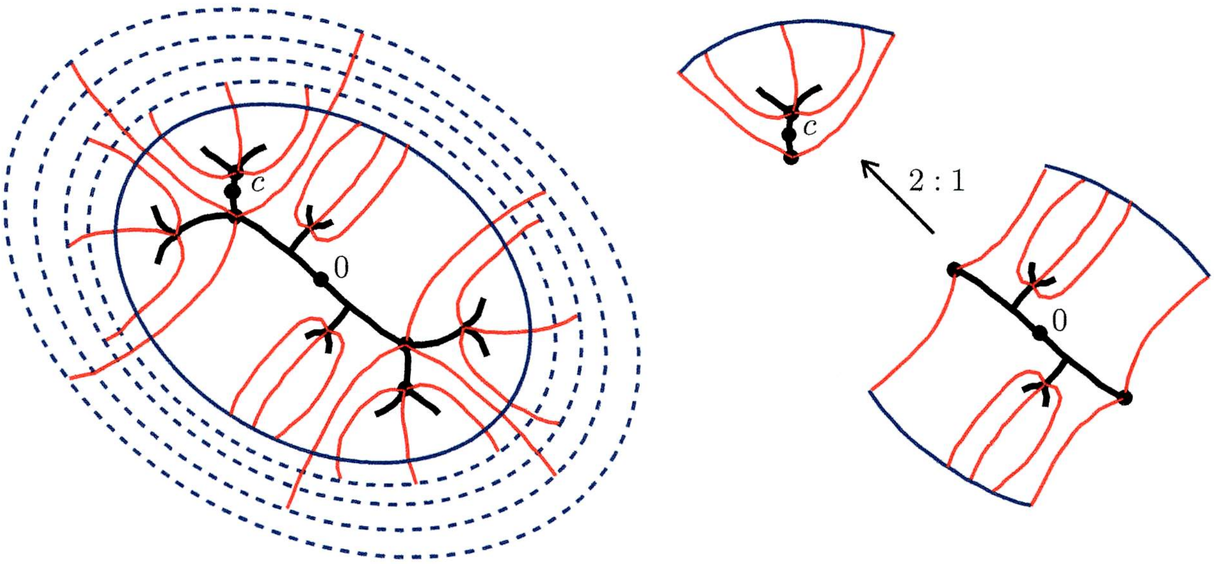


Figure 4.2–5 Γ_4 (ハの場合).

ハの場合にはまだ annulus は現れない．

さて，次の Lemma は基本的である：

Lemma 4.1.1. $x \in K_c \setminus \Gamma_n$ のとき $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結.

(Proof)： Figure 4.2–1〜5 からもわかるように，一般に 1 つの puzzle piece の境界は次の Figure 4.3 にあるように 2 つの external ray と 1 つの equi-potential が交互に現れるようになっている (厳密には帰納法により理解できる). またこの境界と K_c とは明らかに 2 つの external rays の交点 (= 共通の landing point) でのみ交わる (注 : equi-potential curve $\subset F_c$, external ray $\subset F_c$, external ray の landing point $\in J_c$ である).

(1) (2) (3)

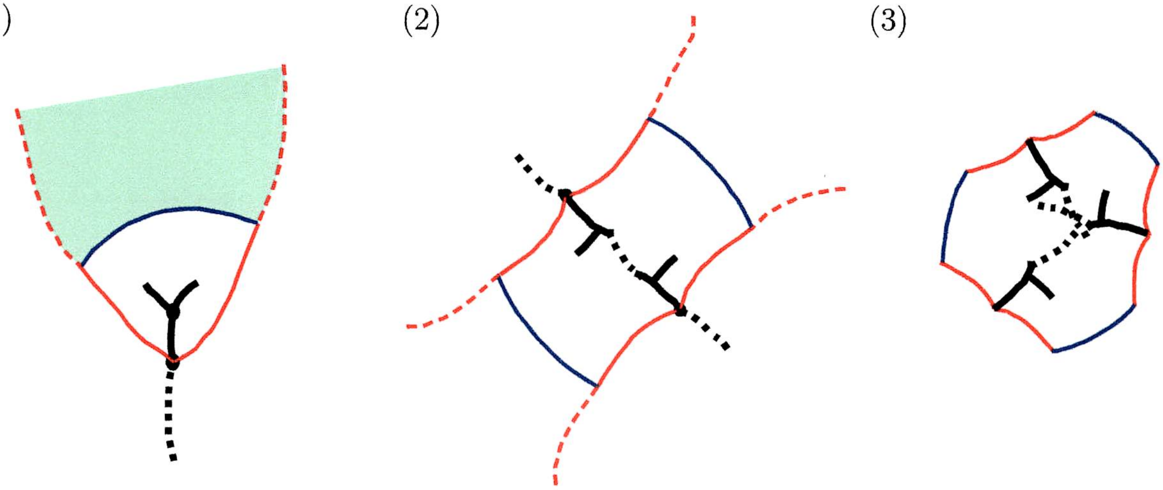


Figure 4.3 いろいろな puzzle piece $P_n(x)$ と $\overline{P_n(x) \cap K_c}$.
(piece 内の K_cの点で点線で示されている部分は実は piece 内で 1 つにつながっている)

さて，例えば Figure 4.3 (1) の場合に $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ が連結でないと仮定し，K_1 を 2 つの external ray の交点を含む $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ の連結成分，$K_2 := \overline{P_n(x) \cap K} \setminus K_1$ とすると $K_2 \neq \emptyset$ である．このとき external ray が ∞ まで延びていることと，Figure 4.3 (1) の dot がかけてある部分には K_c の点が存在しないことから K_2 の $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ における連結成分は K_c の連結成分にもなることになる．これは K_c が連結であることに反する．従ってこの場合 $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結である．Figure 4.3 (2), (3)，更に一般の場合も全く同様の議論で証明することができる．つまり $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ が連結でないと仮定すると，K_c 自身が連結でないことになり矛盾を生じるのである． □

以後簡単のため $p_c = f$ と書くことにする．$K_c \setminus \Gamma_n = K_c \setminus \cup_{j=0}^{n} f^{-j}(\alpha)$ であり，ここで

$$K^* := K_c \setminus \cup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\alpha)$$

とおくと $x \in K^*$ なら Lemma 4.1.1 より $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は x の連結な近傍となる．よってもし diam $P_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ が示せれば x で K_c は局所連結であるといえることになる．

Lemma 4.1.2 (Separation Lemma). f がくりこみ可能でないとする．このときある $N > 1$ が存在し $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ が成立する．

(Proof) : α-不動点の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$ とする.

$$\mathbb{C} \setminus \{\alpha \text{ の external rays}\} := Q^{(0)} \cup Q^{(1)} \cup \cdots \cup Q^{(q-1)}, \quad f^i(0) \in Q^{(i)} \ (i = 0, 1, \ldots, q-1)$$

とすると (Figure 4.4), $1 \leq i \leq q-1$ に対し $f : Q^{(i)} \to Q^{(i+1)}$ (ただし $Q^{(q)} = Q^{(0)}$) は同相写像となる.

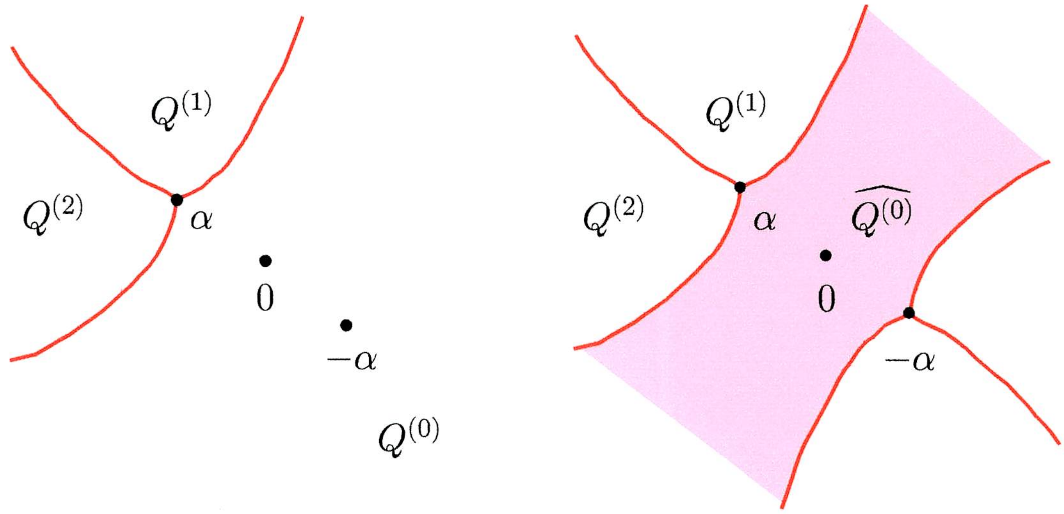


Figure 4.4

また $\widehat{Q^{(0)}} := f^{-1}(Q^{(1)}) \subset Q^{(0)}$ とおくと $f : Q^{(0)} \to Q^{(1)}$ は2対1の branched covering になる. このとき 次のことが成り立つ:

Lemma 4.1.3. $f^{nq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ であれば f はくりこみ可能である.

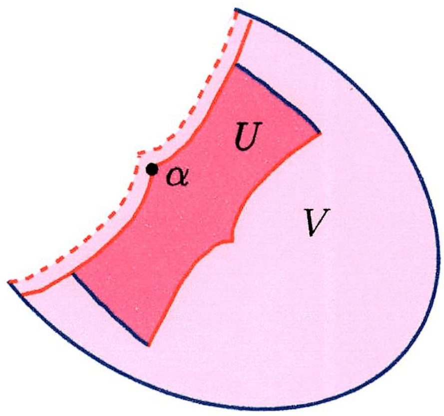


Figure 4.5

(Proof of Lemma 4.1.3) : $0 \in \widehat{Q^{(0)}} \subset Q^{(0)}$ であり (Figure 4.4) $f^q : \widehat{Q^{(0)}} \to Q^{(0)}$ は

$$\widehat{Q^{(0)}} \xrightarrow{f} Q^{(1)} \xrightarrow{f} Q^{(2)} \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} Q^{(q-1)} \xrightarrow{f} Q^{(q)} = Q^{(0)}$$

と考えると 2 対 1 の branched covering であることがわかる．従って Figure 4.5 のように $\widehat{Q^{(0)}}$ の境界の一部を構成している，α に land している external rays を点線のように少し外側に修正し，また適当な equi-potential curve で切った領域の組を考えると $f^{nq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の仮定から f はくりこみ可能であるといえる．即ち，Figure 4.5 の (f, U, V) について $U \Subset V$ であり，$f^q : U \to V$ は proper，2 対 1 で，任意の n に対して

$$f^{nq}(0) \in U \ (n = 0, 1, \ldots)$$

となるので，f は q を周期としてくりこみ可能である． □

さて，証明すべき Lemma 4.1.2 では f はくりこみ可能ではないと仮定していたので，Lemma 4.1.3 より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f^{iq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}} \ (0 \leq i < n_0), \quad f^{n_0 q}(0) \in Q^{(0)} - \widehat{Q^{(0)}}$$

が成り立つ．ここで $R := Q^{(0)} - \widehat{Q^{(0)}}$ とおくと R は単連結であり

$$f^i(0) \notin R \ (0 \leq i < n_0 q), \quad f^{n_0 q}(0) \in R$$

が成り立つ．よって

$$f^{-(n_0 q - 1)}(R) = \coprod R_j$$

と disjoint union のかたちに表され，各 R_j は単連結であり ∂R_j は α の f による逆像 (= ある $k \in \mathbb{N}$ に対する，集合 $f^{-k}(\alpha)$ の点) の external rays からなる．$f^{n_0 q}(0) = f^{n_0 q - 1}(c) \in R$ であるから

$$c = f(0) \in f^{-(n_0 q - 1)}(R) = \coprod R_j$$

即ち，ある j_1 に対して $c \in R_{j_1} \subset Q^{(1)}$ が成り立つ．以上のことから c と α は R_{j_1}の境界を構成する，α のある逆像 $\alpha'(\in f^{-k}(\alpha))$ の external rays によって分離される (Figure 4.6)．これらの更に逆像をとると Figure 4.6 にあるとおり annulus が構成される． □

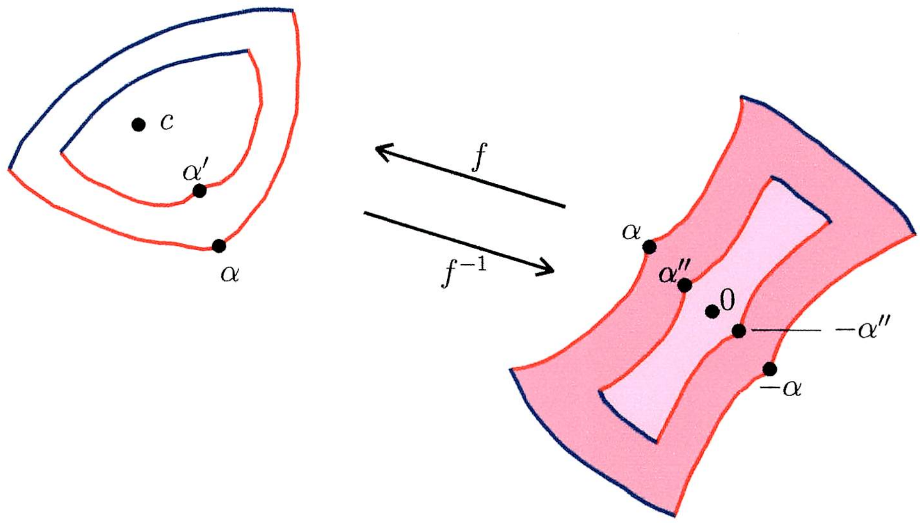


Figure 4.6 annulus の構成 $(f^{-1}(\alpha) = \pm\alpha,\ f^{-1}(\alpha') = \pm\alpha''$ である$)$.

Lemma 4.1.2 にある N を **separation level** という.

$A_n(x) := P_n(x) - \overline{P_{n+1}(x)}$ と書くことにすると，Lemma 4.1.2 は f がくりこみ可能でないなら，ある n に対して $A_n(x)$ が annulus になることを示している．このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mod}\, A_n(x) = \infty$ となるかどうかが問題となる．実際，これが示されれば Lemma 2.3.11 から diam $P_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立することがわかる.

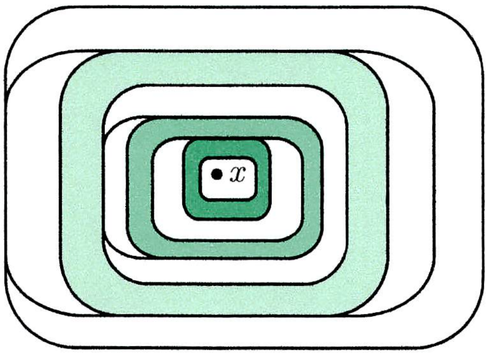


Figure 4.7 $P_n(x)$ と $A_n(x)$.

$x \in K^*$ としたときの puzzle piece $P_n(x)$ の持つ性質をまとめると以下のようになる：

1. $P_n(x) \supset P_{n+1}(x)$ であり，写像 $f : P_n(x) \to f(P_n(x)) = P_{n-1}(f(x))$ は $0 \notin P_n(x)$ なら全単射，$0 \in P_n(x)$ なら 2 対 1 の branched covering.

2. $P_n(x)$ は単連結で，$\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結.

3. $A_n(x) := P_n(x) - \overline{P_{n+1}(x)}$ とおくと，ある $N > 1$ が存在し $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ が成立する，即ち $A_N(0)$ は非退化な annulus になる (ただし「p_c はくりこみ可能でない」の条件の下).

ここで $A_n(x)$ が annulus でない，即ち，退化した annulus になるときは mod $A_n(x) := 0$ と定義する (Figure 4.8 参照).

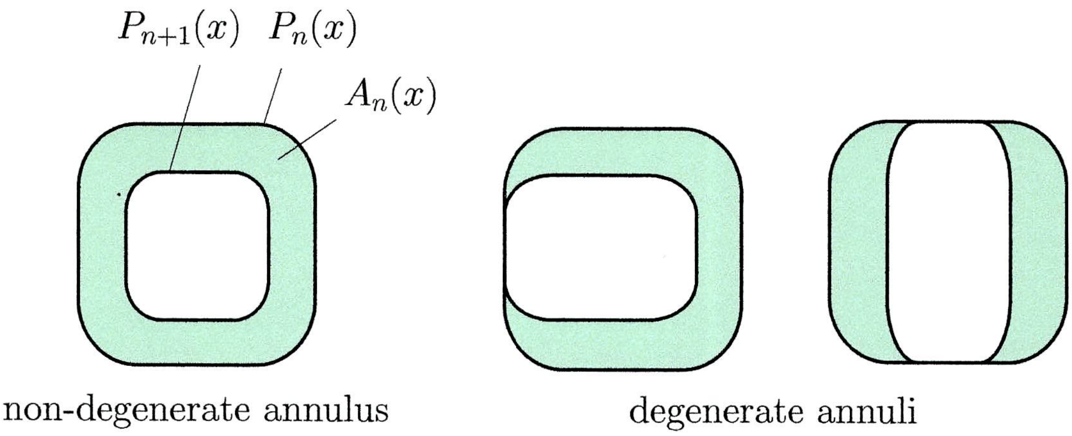


Figure 4.8 $A_n(x)$ の形.

また f の $A_n(x)$ 上でのふるまいは critical point 0 の位置により次のように分類できる：

1. $0 \in \overline{P_{n+1}(x)}$ のとき

   $f : A_n(x) \to A_{n-1}(f(x))$ で 2 対 1 の covering であり，$\mathrm{mod}\, A_{n-1}(f(x)) = 2 \cdot \mathrm{mod}\, A_n(x)$ が成り立つ (Lemma 2.3.9).

2. $0 \notin P_n(x)$ のとき

   $f : A_n(x) \to A_{n-1}(f(x))$ は全単射でありこのときは $\mathrm{mod}\, A_{n-1}(f(x)) = \mathrm{mod}\, A_n(x)$ が成り立つ.

3. $0 \in A_n(x)$ のとき

   $f : A_n(x) \to P_{n-1}(f(x))$ であるとしか言えない (あまり情報がない).

以上で説明してきたのは f が「(1回も) くりこみ可能でない」場合の partition (puzzle) の構成であった．この節の最後に一般の「無限回くりこみ可能ではない」場合のときの partition (puzzle) の構成について簡単に説明しておく．Proposition のかたちで述べる前に次の用語を定義しておく：

Definition 4.1.4. (前) 周期点 z が点 $w_1(\in K)$ と $w_2(\in K)$ を**分離する**とは，w_1 と w_2 が $\mathbb{C} - \cup(z$ の external rays) の相異なる連結成分に属することをいう (Figure 4.9).

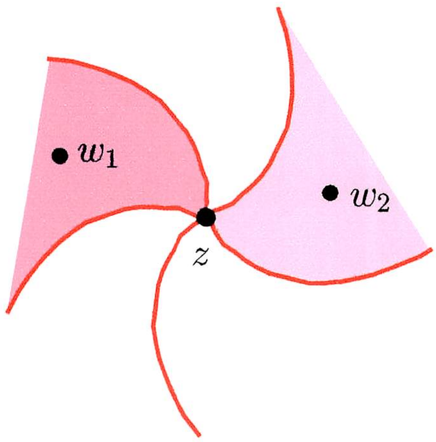


Figure 4.9 (前) 周期点 z が点 w_1, w_2 を分離する.

このとき次のことが成り立つ：

Proposition 4.1.5 (Yoccoz). $f = p_c$ が (NIR) と (APR) を満たすとする．このときある周期点 α と α の逆像 $\alpha' \in f^{-n}(\alpha)$ であって以下の性質を持つものが存在する：

(i) α は c と 0 を分離する．また，α は c と $f^j(\alpha)$ $(1 \leq j < \mathrm{period}(\alpha))$ を分離する.

(ii) α' は c と α を分離する．また，α は $f^j(\alpha')$ $(1 \leq j)$ と 0 を分離しない.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $\alpha'' \in \cup_{j\geq 0} f^{-j}(\alpha)$ で 0 と $f^n(0)$ を分離するものが存在する． □

Proposition 4.1.5を用いると，無限回くりこみ可能ではない場合には次のようにしてpartition (puzzle)を構成することができる：Γ_0 を1つのequi-potential curve C と $\{f^j(\alpha') \mid j \geq 0\}$ (α' はProposition 4.1.5にあるもの)のexternal raysの C の内部の部分の和集合とする．あとは以前に定義したやり方と全く同様で $\Gamma_n := f^{-n}(\Gamma_0)$ とし，$\mathcal{P}_n$，$P_n(x)$，K^* なども同様に定義される．このときProposition 4.1.5 (i) と (ii) より

$$\overline{P_1(0)} \subset P_0(0)$$

即ち，$A_0(0) := P_0(0) - \overline{P_1(0)}$ がnon-degenerate annulusになることがわかる(Figure 4.10)．また(3)からは任意の $n \geq 1$ に対して $j \geq 0$ が存在して $f^n(0) \notin P_j(0)$ が成り立つことがわかる．

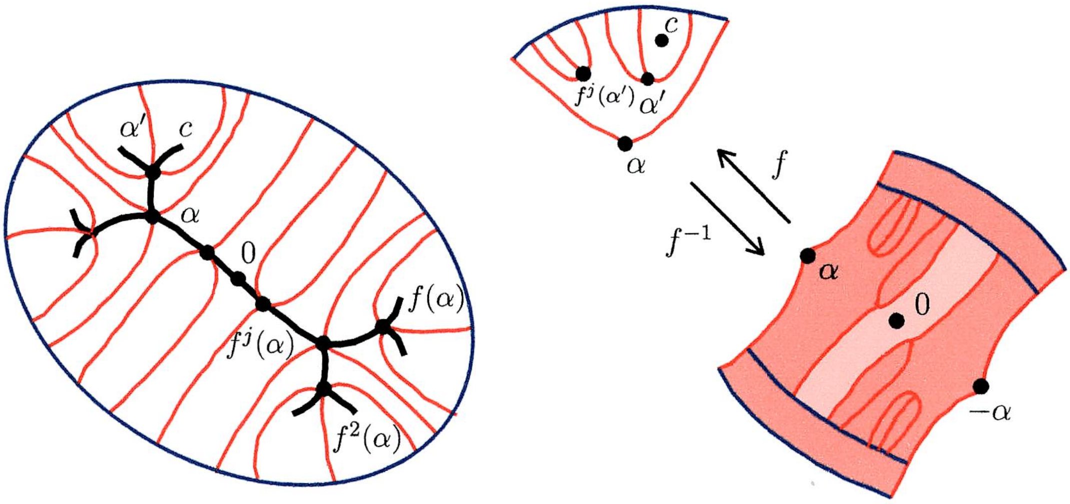


Figure 4.10

4.2 τ-関数とCombinatorial Divergence Theorem

τ-関数とは f と1つのpartitionから決まる $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ なる関数で(ただし $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする)，以下で見るようにAxiom of recurrenceを満たし，またBranner-HubbardのTableauに対応するものである(ちなみに名前は「return time」の“**t**”からか?)．

Definition 4.2.1. **τ-関数** $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ を次で定義する：

$$\tau(n) := \max\{-1\} \cup \{n-k \mid 1 \leq k \leq n,\ f^k(P_n(0)) = P_{n-k}(f^k(0)) \ni 0\}.$$

また

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{N} \mid \tau(n) = -1 \ \text{ or } \ \tau(n+1) \neq \tau(n) + 1\}$$

と定義する．

$\tau(n)$ の意味は次のとおりである: $P_n(0)$ を f で写していったとき k 回目で初めて $f^k(P_n(0)) = P_{n-k}(f^k(0))$ が critical point 0 を含んだとすると，$\tau(n) = n-k$ となる．またこのような k が存在しないときは $\tau(n) := -1$ と定義する (Figure 4.11)．標語的に「depth の max, iteration の min」と覚えておいてもよい．

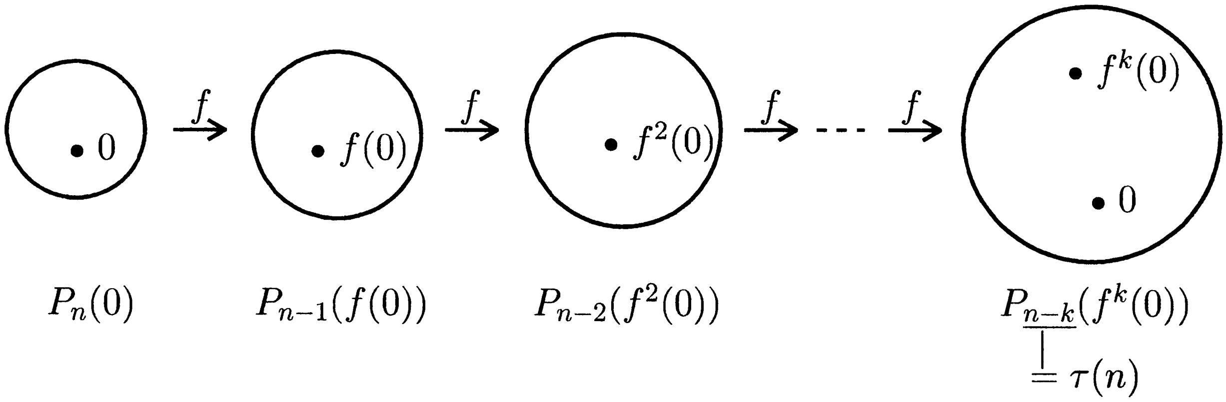


Figure 4.11 $\tau(n)$ の意味.

また $\tau(n)$ と $\tau(n+1)$ の関係を考察すると，Figure 4.12 を見ればわかるとおり

$$\text{(a) } 0 \in P_{\tau(n)+1}(f^k(0)), \qquad \text{(b) } 0 \in P_{\tau(n)}(f^k(0)) - P_{\tau(n)+1}(f^k(0))$$

のどちらかであり，(a) の場合は $\tau(n+1) = \tau(n)+1$, (b) の場合は $\tau(n+1) < \tau(n)+1$ となる．このことから特に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau(n+1) \leq \tau(n)+1$ となることがわかる．

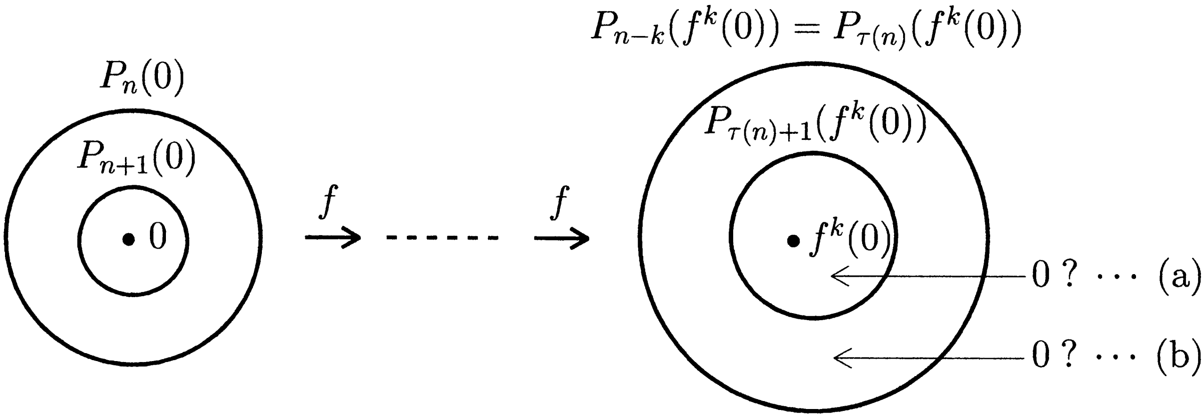


Figure 4.12

またこの考察から Σ は τ の値が n から $n+1$ にかけて増加しないような n 全体であるといえる．

Proposition 4.2.2. (1) (**Axiom of recurrence**) $n \in \Sigma$ なら $\tau(n+1) = 0$ or -1 または

$$\tau(n+1) = \tau^{k+1}(n) + 1 \quad (k \geq 1,\ \tau^k(n) \in \Sigma)$$

と表せる．また $\tau(1)=0$ or -1 である．

(2) $^{\#}\Sigma<\infty$ であるならば f はくりこみ可能である．

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau(n)<\infty$ であることと 0 が combinatorial に non-recurrent であること，即ち，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $f^n(0)\notin P_N(0)$ $(n=1,2,\dots)$ となることは同値である．

Remark 4.2.3. Axiom of recurrence の式は

$$\tau(n+1)=\tau(\tau^k(n))+1$$

と見る方がわかりやすい．

(Proof) : (1) $\tau(n)=-1$ なら $\tau(n+1)=0$ or -1 となる．また $\tau(n)\geq 0$ であっても $\tau(n+1)=0$ or -1 なら何もすることはない．$\tau(n+1)\geq 1$ であるとする．$n\in\Sigma$ の仮定から $k_1:=n-\tau(n)$ とおくと点 0，$f^{k_1}(0)$ と puzzle pieces $P_{\tau(n)}(f^{k_1}(0))=P_{\tau(n)}(0)$, $P_{\tau(n)+1}(f^{k_1}(0))$ の位置関係は Figure 4.13 の右上のようになる．

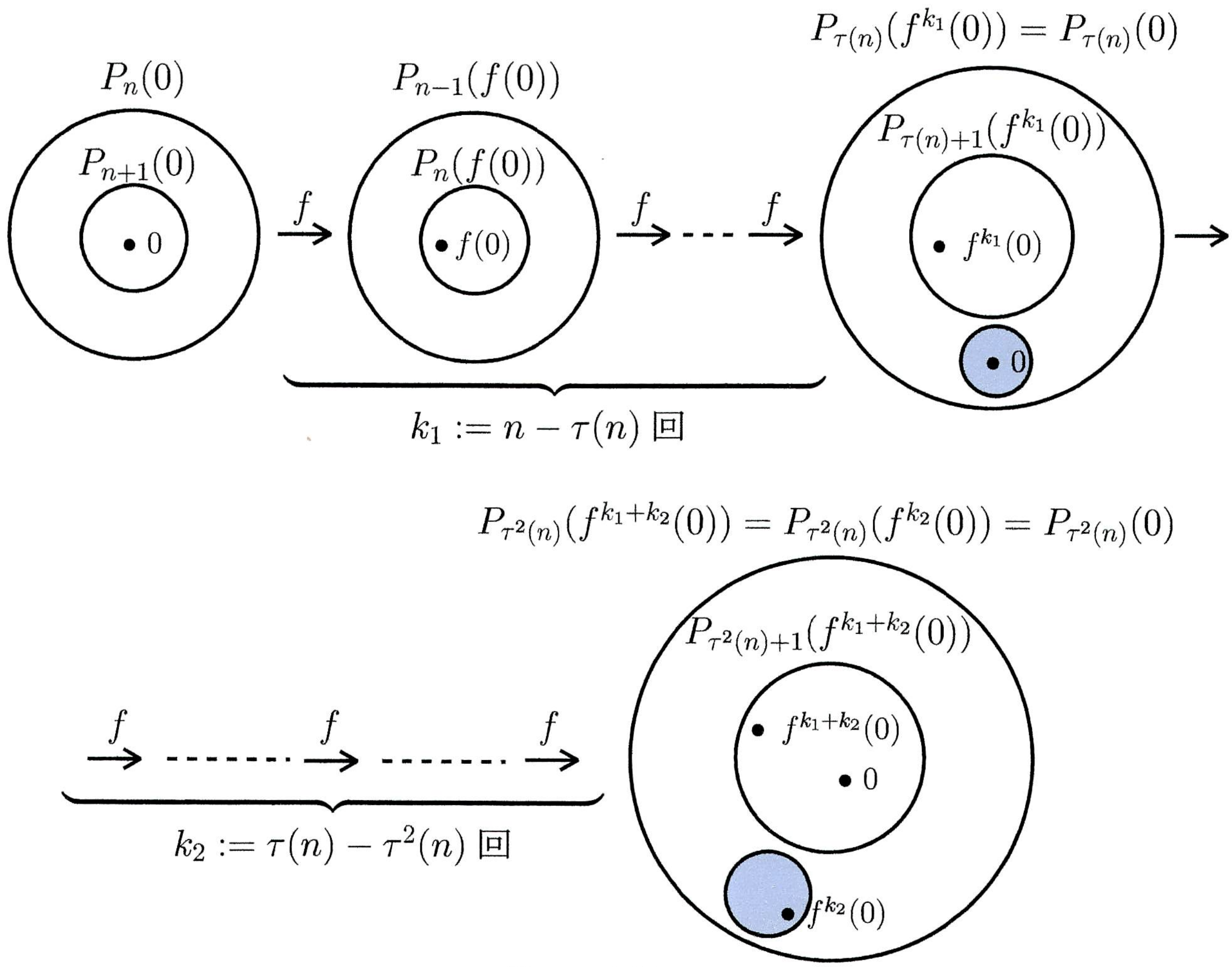


Figure 4.13

即ち，puzzle piece $P_{\tau(n)}(f^{k_1}(0))$ より depth が 1 つ上の piece $P_{\tau(n)+1}(f^{k_1}(0))=f^{k_1}(P_{n+1}(0))$ を見ると，これは 0 を含まない．

次に $P_{\tau(n)}(0)$ から始めて f で写していったときに puzzle piece が最初に 0 に遭遇するのは depth が $\tau(\tau(n)) = \tau^2(n)$ のときで，$k_2 := \tau(n) - \tau^2(n)$ とすると $\tau^2(n)$ の定義から

$$P_{\tau^2(n)}(f^{k_1+k_2}(0)) = P_{\tau^2(n)}(f^{k_2}(0)) = P_{\tau^2(n)}(0)$$

となる．また $f^{k_1+k_2}(0) \in P_{\tau^2(n)}(0)$ であるが，ここで depth が 1 つ上の piece を見ると $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_1+k_2}(0))$ は $P_{\tau^2(n)}(f^{k_1+k_2}(0))$ の部分集合で 0 を含むか含まないかのどちらかである．もし含めば (= Figure 4.13 右下の場合)

$$\tau(n+1) = \tau^2(n) + 1 = \tau^{1+1}(n) + 1$$

である．また更に $\tau(n) = \tau^1(n) \in \Sigma$ である．なぜなら 0 を含む，depth が $\tau(n)+1$ の piece $P_{\tau(n)+1}(0)$ は f^{k_2} によって $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_2}(0))$ に写り，これは 0 を含まない (即ち，Figure 4.13 右上の dot をつけた piece は右下の dot をつけた piece に写る．もしこうならずに $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_2}(0))$ が 0 を含むと仮定すると，piece の写り方から f は 3 対 1 の写像になってしまうのでこれは f が 2 次多項式であることに矛盾)．よって

$$\tau(\tau(n)+1) \neq \tau(\tau(n)) + 1$$

である．

また，$P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_1+k_2}(0))$ が 0 を含まなければ $\tau^3(n)$ を考えて同じ議論を繰り返すと $\tau(n+1) \geq 1$ としていたから，いつかは

$$\tau(n+1) = \tau^{k+1}(n) + 1 \quad (k \geq 1,\ \tau^k(n) \in \Sigma)$$

となる k を見いだすことができる ($\tau^k(n) \in \Sigma$ となる理由も同様である)．

(2) $^{\#}\Sigma < \infty$ であることと，一般に $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$ であることから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $m \geq N$ に対して $\tau(m+1) = \tau(m) + 1$ が成立する (Figure 4.14 参照)．

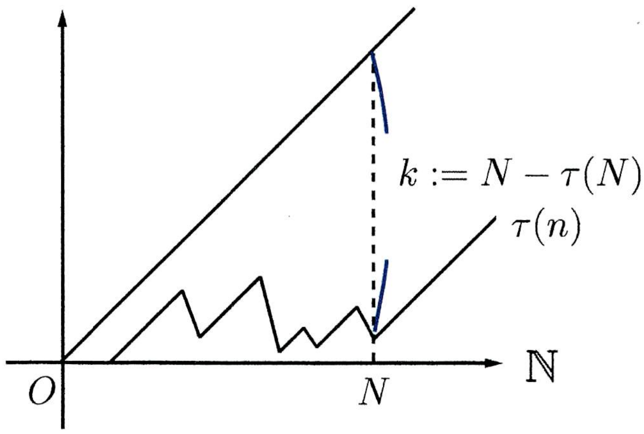


Figure 4.14

そこで $k := N - \tau(N)$ とするとまず，

$$f^k : P_N(0) \to P_{N-k}(f^k(0)), \quad P_N(0) \subset P_{N-k}(f^k(0))$$

となる．また任意の $m \geq N$ に対して $\tau(m+1)=\tau(m)+1$ であることから

$$f^{nk}(0) \in P_N(0) \quad (n \geq 0)$$

がわかる (注： $m \geq N$ なら $m-\tau(m) \equiv k$ である)．従って

$$P_N(0) \Subset P_{N-k}(f^k(0)) \quad (\text{即ち}, P_{N-k}(f^k(0)) - \overline{P_N(0)} \text{ は annulus})$$

のときは f は k を周期としてくりこみ可能であると言える．また $P_N(0) \Subset P_{N-k}(f^k(0))$ でない，即ち，$P_N(0)$ と $P_{N-k}(f^k(0))$ が境界を一部共有して $P_{N-k}(f^k(0)) - \overline{P_N(0)}$ が annulus にならない可能性も考えられるが，$P_N(0)$ と $P_{N-k}(f^k(0))$ の body を少し修正 (大きくする) して f^k を quadratic-like map にすることができるので (注：詳しくは，§5.2 Theorem A の証明の最初の部分を見よ)，やはり f は k を周期としてくりこみ可能である．

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ のとき $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(n) < N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる．この N に対してある n_0 が存在して $f^{n_0}(0) \in P_N(0)$ となったとすると $P_N(0) = P_N(f^{n_0}(0))$，即ち $0 \in P_N(f^{n_0}(0))$ が成り立つ．τ-関数の定義から $\tau(n)$ は「$P_n(0)$ から出発して puzzle piece が 0 を含むときの最大の depth」であったから，$P_N(f^{n_0}(0)) = f^{n_0}(P_{N+n_0}(0))$ であることを考慮して $\tau(N+n_0)$ を考えると，このことは $N \leq \tau(N+n_0)$ であることを示している．これは N の定義に反する．従って 0 は combinatorial に non-recurrent である．

逆に 0 が combinatorial に non-recurrent であるとすると，ある $N \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(0) \notin P_N(0)$ $(n=1,2,\ldots)$ が成り立つ．さて τ-関数の定義から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in P_{\tau(n)}(f^{n-\tau(n)}(0))$ となり，従って $P_{\tau(n)}(f^{n-\tau(n)}(0)) = P_{\tau(n)}(0)$ が成り立つ．ここで $\tau(n) > N$ とすると $P_{\tau(n)}(0) \subset P_N(0)$ であるから $f^{n-\tau(n)}(0) \in P_N(0)$ となり，これは N の定義に反する．よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau(n) \leq N$ が成り立つので $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ である． □

Remark 4.2.4. $\tau(n) = -1$ のときを，その代わりに $\tau(n) := 0$ と定義してしまっても大差はない．宍倉氏は最近こちらの定義を採用している．

次に $\tau(n)$ が満たす基本的性質をいくつか見ていくことにする．

Lemma 4.2.5. (1) $\tau(n) \leq n-1$，また一般に $\tau^k(n) \leq n-k$ $(k \in \mathbb{N})$ が成立する．
(2) $\tau(n+1) \leq \tau(n)+1$ が成立する．

(Proof)： (1) k に関する帰納法で示す．まず $\tau(n) \leq n-1$ は τ の定義から明らかである．次に $k \in \mathbb{N}$ に対して $\tau^k(n) \leq n-k$ が成立していたとすると $k+1$ のとき

$$\tau^{k+1}(n) = \tau(\tau^k(n)) \leq \tau^k(n) - 1 \leq (n-k) - 1 = n-(k+1)$$

となり，$k+1$ のときも成り立つ．

(2) Figure 4.12 のところで説明したとおりであるが，念のためもう一度説明しておく．$\tau(n)$ の定義より $P_n(0)$ から出発して $n-\tau(n)$ 回目以前の iteration ではその像は 0 を含まない．また $P_{n+1}(0) \subset P_n(0)$ であるから $P_{n+1}(0)$ から出発してもやはり，その像は $n-\tau(n)$ 回目

以前の iteration では 0 を含まない．一方，τ の定義から $P_{n+1}(0)$ は $n+1-\tau(n+1)$ 回目の iteration で 0 を初めて含む．従って

$$n-\tau(n) \le n+1-\tau(n+1) \quad 即ち \quad \tau(n+1) \le \tau(n)+1$$

が成り立つ． □

Lemma 4.2.6 (中間値の定理). (1) $a<b$, $\tau(a) \le v < \tau(b)$ ならば $a \le m < b$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ で $\tau(m)=v$, $m \notin \Sigma$ なるものが存在する．

(2) $\sup \tau = \infty$, $\tau(a) \le v$ ならば $a \le m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ で $\tau(m)=v$, $m \notin \Sigma$ なるものが存在する．

(Proof) : (1) $\tau(n)$ のグラフを考えればほぼ明らかである (Figure 4.15)．$m \notin \Sigma$ 即ち $\tau(m+1)=\tau(m)+1$ となることは Lemma 4.2.5 (2) から従う．

(2) (1) と同様である． □

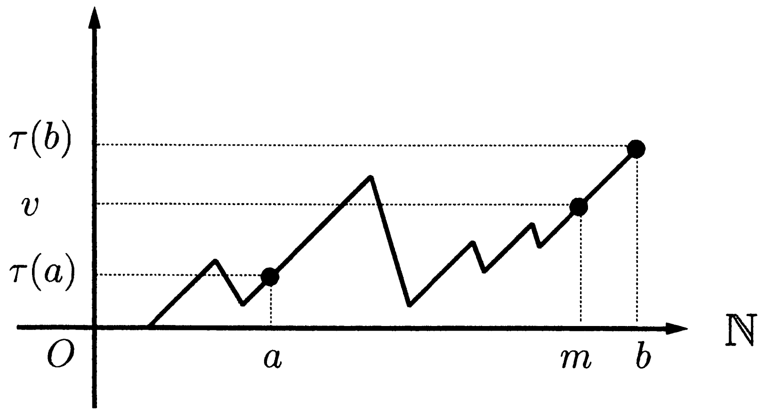


Figure 4.15 $\tau(n)$ に対する中間値の定理.

Proposition 4.2.7 (Branner-Hubbard, Yoccoz, Douady-Hubbard, 宍倉).
$^{\#}\Sigma=\infty$, $\sup \tau=\infty$ であるとすると次が成立する：

(1) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $^{\#}(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) \ge 1$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $^{\#}\tau^{-1}(n) \ge 2$.

(3) $k=\sup(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) < \infty$ ならば $(\cup_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}(k)) \cap \Sigma = \emptyset$.

(Proof) : (1) $m := \inf \tau^{-1}(n+1)-1$ とすれば $m \in \tau^{-1}(n) \setminus \Sigma$ である．

(2) $m := \inf \tau^{-1}(n)$, $s := \inf([m,\infty) \cap \Sigma) \in \Sigma$ とすると定義より $m \le s$．また $s \in \Sigma$ だから Proposition 4.2.2 (1) より

$$\tau(s+1)=0,-1 \quad または \quad \tau(s+1)=\tau^{k+1}(s)+1, \quad (k \ge 1,\ \tau^k(s) \in \Sigma)$$

である．$\tau(s+1)=0,-1$ なら $\sup\tau=\infty$ の仮定と中間値の定理より主張は成り立つ．$\tau(s+1)=\tau^{k+1}(s)+1$ なら $\tau^{k+1}(s)+1\le n$ を示せばよい．Lemma 4.2.5 より $\tau^k(s)\le s-k<s$，よって s の定義より $\tau^k(s)<m$，従って m の定義より $\tau^{k+1}(s)<n$，即ち，$\tau^{k+1}(s)+1\le n$ となる．

(3) $(\cup_{j=0}^{\infty}\tau^{-j}(k))\cap\Sigma\neq\emptyset$ と仮定すると，ある $j_0\in\mathbf{N}$ に対して $\tau^{-j_0}(k)\cap\Sigma\neq\emptyset$ でしかも $i=0,1,\dots,j_0-1$ に対しては $\tau^{-i}(k)\cap\Sigma=\emptyset$ となるものが存在する．そこで $l\in\tau^{-j_0}(k)\cap\Sigma$ とすると $l\in\Sigma$ だから Lemma 4.2.2 (1) より

$$\tau(l+1)=0,\text{ or }-1\quad\text{または}\quad\tau(l+1)=\tau^{s+1}(l)+1,\quad(s\ge 1,\ \tau^s(l)\in\Sigma)$$

となる s が存在する (注 : (2) の証明で使った s とは異なる)．ここでまず，$k<l$ となることに注意しておこう．これは l の定義と Lemma 4.2.5 から

$$\tau^{j_0}(l)=k\le l-j_0<l$$

となるからである．

さて $\tau(l+1)=0$ or -1 なら矛盾である．なぜなら仮定より $\sup\tau=\infty$ だから中間値の定理より $l+1<l'$ なる l' で $\tau(l')=n$ となり，$l'\notin\Sigma$ となるものが存在する．よって $l'\in\tau^{-1}(n)\setminus\Sigma$ であり，一方，先に注意した $k<l$ から $k<l'$ であるからこれは k の定義に反する．

$\tau(l+1)=\tau^{s+1}(l)+1$ のときは，背理法の仮定の下で $\tau(l+1)\le n$ を以下で示す．これが示せれば先に示した $\tau(l+1)=0$ or -1 のときと同じ議論で同じ矛盾が出る．さてまず

$$\tau^i(l)\notin\Sigma\ (1\le i\le j_0) \tag{4.1}$$

である．なぜなら $\tau^i(l)\in\tau^{-(j_0-i)}(k)$ で $\tau^{-(j_0-i)}(k)\cap\Sigma=\emptyset$ であったから (4.1) が従う．すると，(4.1) と $\tau^s(l)\in\Sigma$ より $s\ge j_0+1$ であることがわかる．一方，

$$\tau^s(l)=\tau^{s-(j_0+1)}\circ\tau\circ\tau^{j_0}(l)=\tau^{s-(j_0+1)}\circ\tau(k)=\tau^{s-(j_0+1)}(n) \tag{4.2}$$

であり，$\tau^s(l)\in\Sigma$であるから，(4.2) と Lemma 4.2.5 の $\tau^t(n)\le n-t$ を使うと

$$\tau(l+1)=\tau(\tau^s(l))+1=\tau(\tau^{s-(j_0+1)}(n))+1=\tau^{s-j_0}(n)+1\le n-(s-j_0)+1\le n$$

となる．ただし，最後の不等号のところで $s\ge j_0+1$ を使った．よって $\tau(l+1)\le n$ が示せた． □

Definition 4.2.8. τ-関数に対して **weight function $\mu(n)$** を次のように帰納的に定義する : 自然数 N を Lemma 4.1.2 (Separation Lemma) で存在が保証されている，$A_N(0)$ が annulus になるような N (separation level) とし，それを 1 つとり固定する．次に $\mu(N):=1$ と定義する．また $0\le n<N$ なる n に対しては $\mu(n):=0$ と定義し，$N<n$ なる n に対しては帰納的に $\mu(n-1)$ まで決まったとき

$$\mu(n):=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mu(\tau(n)) & \text{if } n\notin\Sigma\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

によって定義する．

定義より特に $n \in \Sigma$ なら $\mu(n) = 0$ となることに注意せよ．また，この weight function の定義は次のように表現することもできる：

Proposition 4.2.9.

$$\mu(n) := \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} & \text{if } \tau^k(n) = N,\ \tau^i(n) \notin \Sigma \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(Proof)： まずこの式において $\tau^k(n) = N$ となる k は存在するなら一意的であることを注意しておく．実際，

$$\tau^{k_0}(n) = N = \tau^{k_1}(n), \quad k_0 < k_1$$

であったとすると Lemma 4.2.5 (1) を使って計算すると

$$N = \tau^{k_0}(n) = \tau^{k_1 - k_0}(\tau^{k_0}(n)) = \tau^{k_1 - k_0}(N) \leq N - (k_1 - k_0)$$

となるので矛盾を生じる．さて $\mu(n) \neq 0$ であるとすると μ の定義より

$$\mu(n) = \frac{1}{2}\mu(\tau(n)), \quad n \notin \Sigma$$

である．Lemma 4.2.5 (1) より $\tau(n) \leq n - 1$ であるから帰納的に $\mu(\tau(n))$ の値が決まっていく．$\mu(n) \neq 0$ だから定義より

$$\mu(n) = \frac{1}{2^2}\mu(\tau^2(n)), \quad \tau(n) \notin \Sigma$$

となる．一般に $\tau^k(n) \leq n - k$ であるから $n > \tau(n) > \tau^2(n) > \cdots$ と減少していき，更に $\mu(n) \neq 0$ と仮定しているから，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $\tau^k(n) = N$ となるしかない (注：もし，ある k で $\tau^k(n) < N < \tau^{k-1}(n)$ となるとすると，μ の定義より $\mu(n) = 0$ となってしまう)．そしてこのとき確かに

$$\mu(n) = \frac{1}{2^k}\mu(N) = \frac{1}{2^k}, \quad \tau^k(n) = N,\ \tau^i(n) \notin \Sigma\ (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

が満たされている． □

$\mu(n)$ の意味はこの節の最後に述べることにして (Proposition 4.2.16)，とりあえずこの節の目標である次の定理の証明をしてしまおう．

Theorem 4.2.10 (Combinatorial Divergence Theorem). $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ を Axiom of recurrence を満たす関数，$\mu(n)$ を weight function とする．このとき $^{\#}\Sigma = \infty$, $\sup \tau = \infty$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成立する．

Remark 4.2.11. もともと τ-関数は2次多項式の力学系から定義されたものであったが，この定理は $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*\cup\{-1\}$ が Axiom of recurrence を満たし，Lemma 4.2.5，4.2.6 が成り立つ関数であれば何であっても成立する．そのときの weight function については，適当に $N\in\mathbb{N}$ を1つ決めて定義すればよく，また特に $\mu(N)=1$ とする必要もない ($\mu(N)>0$ なら何でもよい)．ここでは抽象的な扱いは避け，具体的な意味 (Proposition 4.2.16) をもたせるために先程のように μ を定義した．

(Proof)： (i) $^\#(\tau^{-1}(N)\setminus\Sigma)=\infty$ の場合：
$n_0\in\tau^{-1}(N)\setminus\Sigma$ とすると，μ の定義から $\mu(n_0)=\frac{1}{2}$ となる．このような n_0 が無限個存在するので $\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)=\infty$ となる (少なくとも $\frac{1}{2}$ を無限回加えることになるので$\cdots$)．

(ii) $^\#(\tau^{-1}(N)\setminus\Sigma)<\infty$ の場合：
$k:=\sup(\tau^{-1}(N)\setminus\Sigma)$ とおくと Proposition 4.2.7 (3) より

$$(\cup_{j=0}^{\infty}\tau^{-j}(k))\cap\Sigma=\emptyset \tag{4.3}$$

である．(4.3) と Proposition 4.2.7 (2) より，任意の $l\in\cup_{j=1}^{\infty}\tau^{-j}(k)$ に対して

$$^\#\{\tau^{-1}(l)\setminus\Sigma\}\geq 2$$

であることがわかる．これから一般に

$$^\#\{\tau^{-j}(k)\setminus\Sigma\}\geq 2^j$$

が従う．また，μ の定義から $l\in\tau^{-j}(k)\setminus\Sigma$ なら $\mu(l)=\frac{1}{2^j}$ であり，更に

$$\tau^{-i}(k)\cap\tau^{-j}(k)=\emptyset,\quad (i\neq j)$$

である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n) &\geq \sum_{j\geq 1}\sum_{l\in\tau^{-j}(k)\setminus\Sigma}\mu(l)\\ &\geq \sum_{j\geq 1}\frac{1}{2^j}\cdot 2^j\\ &= 1+1+\cdots=\infty\end{aligned}$$

となる． □

さて次に各 $x\in K^*$ に対してτ-関数 τ_x と weight function μ_x を定義する．

Definition 4.2.12. 各 $x\in K^*$ に対して $\boldsymbol{\tau}$**-関数** $\tau_x:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*\cup\{-1\}$ を次で定義する：

$$\tau_x(n):=\max\{-1\}\cup\{n-k\mid 0\leq k\leq n,\ f^k(P_n(x))=P_{n-k}(f^k(x))\ni 0\}.$$

また

$$\Sigma_x:=\{n\in\mathbb{N}^*\mid \tau_x(n)=-1\ \text{ or }\ \tau_x(n+1)\neq\tau_x(n)+1\}$$

と定義する．

$\tau_x(n)$ の意味は $\tau(n)$ のときとほとんど同じで，$P_n(x)$ を f で写していったとき k 回目で初めて $f^k(P_n(x)) = P_{n-k}(f^k(x))$ が critical point 0 を含んだとすると，$\tau_x(n) = n - k$ となる．またこのような k が存在しないときは $\tau_x(n) := -1$ と定義するのである．ただし $n = 0$ に対しては $P_0(x)$ が 0 を含んでいるかいないかによって $\tau_x(0) = 0$ または -1 とするので，τ_x の定義域は $\mathbb{N}$ ではなく $\mathbb{N}^*$ である．また定義より τ_x は τ とは違って iteration を考えることはできない．

以下に τ_x と τ との関係と τ_x の満たす性質を挙げておく．

Proposition 4.2.13. (1) $n \in \Sigma_x$ なら $\tau_x(n+1) = 0$ or -1 または

$$\tau_x(n+1) = \tau^{k+1}(\tau_x(n)) + 1 \quad (k \geq 0,\ \tau^k(\tau_x(n)) \in \Sigma)$$

とかける．また $\tau_x(0) = 0$ or -1 である．

(2) $\tau(n) = \tau_{f(0)}(n-1)$ である．

(3) $\tau_x(n+1) \leq \tau_x(n) + 1$，$\tau_x(n) \leq n$ が成立する．

(4) τ_x に関しても「中間値の定理」が成立する．

(Proof) : (1) は Proposition 4.2.2 の証明と同様である．(2) は τ と τ_x の定義からほぼ明らかであろう．(3) は Lemma 4.2.5 の証明と同様にしてできる．また (4) も Lemma 4.2.6 と同様である． □

Definition 4.2.14. τ_x に対して **weight function** $\boldsymbol{\mu_x}$ を μ を用いて

$$\mu_x(n) := \mu(\tau_x(n))$$

と定義する．

Theorem 4.2.15 (Combinatorial Divergence Theorem for $\boldsymbol{\mu_x}$). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$ が成立しているとする．このとき $\sup \tau_x = \infty$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_x(n) = \infty$$

が成立する．

(Proof) : $\tau_x(0) = 0$ or -1 であり，また仮定より $\sup \tau_x = \infty$ であるから中間値の定理 (Proposition 4.2.13 (4)) より $n \geq 0$ である任意の n に対して $\tau_x(m) = n$ となる $m \in \mathbb{N} \setminus \Sigma_x$ が存在する．従ってこの m に対しては weight function μ_x の定義から

$$\mu_x(m) = \mu(\tau_x(m)) = \mu(n)$$

が成り立つ．よって

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_x(m) = \sum_{m \in \mathbb{N} \setminus \Sigma_x} \mu_x(m) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成り立つ. □

さて最後に μ と μ_x の意味について解説しておこう：

Proposition 4.2.16. (1) $\mu(n) > 0$ ならば $\mathrm{mod}\ A_n(0) = \mu(n) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0)$ が成立する.
(2) $\mu_x(n) > 0$ ならば $\mathrm{mod}\ A_n(x) = \mu_x(n) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0)$ が成立する.

(Proof)： (1) 帰納法で証明する. $0 \le n < N$ なる n については定義より $\mu(n) = 0$ であるから，以下では $n \ge N$ とする. $n = N$ に対しては $\mu(N) = 1$ であったから主張は成り立つ. $\mathrm{mod}\ A_n(0) = \mu(n) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0)$ が $n = m-1$ まで成り立つとして $n = m$ のときを考える. $\mu(m) = 0$ ならばやることは何もない. $\mu(m) = \frac{1}{2}\mu(\tau(m)) > 0$ とすると μ の定義より $m \notin \Sigma$, 即ち, $\tau(m) \ne -1$ であり，また

$$\tau(m+1) = \tau(m) + 1$$

であり，しかも $\mu(\tau(m)) > 0$ である. すると $P_m(0)$ を f で写していくと次のようになっている.

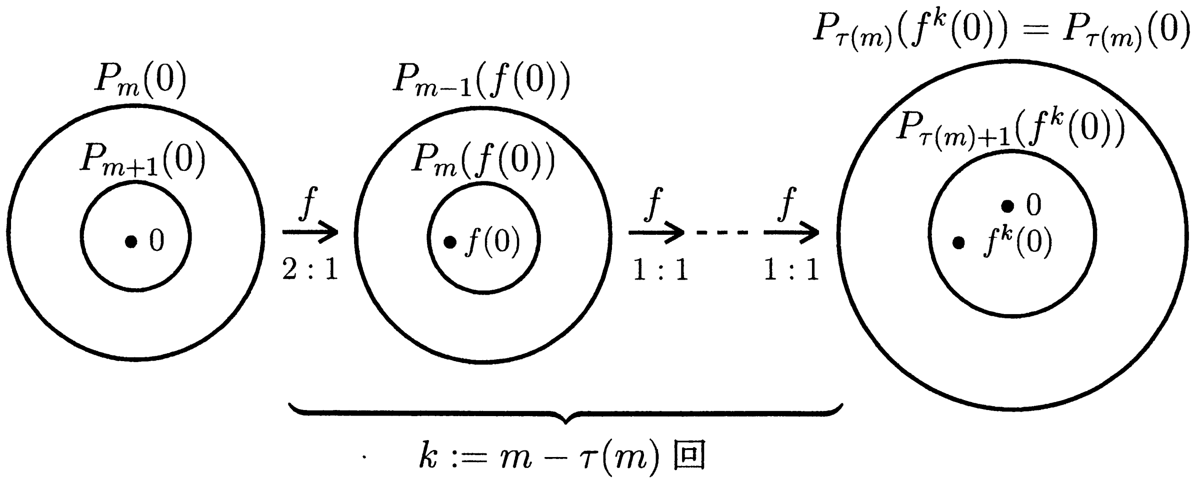


Figure 4.16

帰納法の仮定より

$$\mathrm{mod}\ A_{\tau(m)}(0) = \mu(\tau(m)) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0)$$

であり，また Figure 4.16 より

$$f^{m-\tau(m)} : A_m(0) \to A_{\tau(m)}(0)$$

は $2:1$ の covering である. これにより modulus が 2 倍になる (Lemma 2.3.9) ことから

$$\mathrm{mod}\ A_m(0) = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\ A_{\tau(m)}(0) = \frac{1}{2}\mu(\tau(m)) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0) = \mu(m) \cdot \mathrm{mod}\ A_N(0)$$

となり $n = m$ のときも成り立つ.

(2) この場合は帰納法ではなく，(1) を使って次のように直接示せる：

$$f^{n-\tau_x(n)} : A_n(x) \to A_{\tau_x(n)}(x) = A_{\tau_x(n)}(0)$$

は (1) の場合とは違って 1 : 1 の covering，即ち，解析同型である．よってこれにより modulus は保たれる (Lemma 2.3.6) ので

$$\text{mod } A_n(x) = \text{mod } A_{\tau_x(n)}(x) = \text{mod } A_{\tau_x(n)}(0)$$

である．更に仮定より $\mu_x(n) = \mu(\tau_x(n)) > 0$ であるから，(1) の結果から

$$\text{mod } A_{\tau_x(n)}(0) = \mu(\tau_x(n)) \cdot \text{mod } A_N(0) = \mu_x(n) \cdot \text{mod } A_N(0)$$

となる． □

以上のことから，もし f のτ-関数が $^{\#}\Sigma = \infty$, $\sup \tau = \infty$ を満たせば，Combinatorial Divergence Theorem と Proposition 4.2.16 (1) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod } A_n(0) = \infty$$

が従う．すると Proposition 2.3.11 とその証明の後にある説明から，J_f は $z = 0$ で局所連結であるといえる．更に Theorem 4.2.15 と Proposition 4.2.16 (2) より $\sup \tau_x = \infty$ となる点 $z = x$ においても J_f は局所連結であることがわかる．Theorem A の証明の一部分はこのようにしてなされるのである．詳しくは 5 章以下で述べる．