

Chapter 3

Douady-Hubbard の $z^2 + c$ に関する理論

この章では2章に引き続き準備として Douady と Hubbard による, 2次多項式族に関する理論とその基本的な結果 ([DH1]) について解説する.

3.1 Julia 集合

3.1.1 $G_c, \varphi_c, \text{external ray}$

Julia 集合に関することを述べる前に, Green 関数と external ray についての一般論を簡単に解説しておく.

Definition 3.1.1. $X \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合で full (即ち, $\mathbb{C} \setminus X$ が連結) なものとする. このとき X の (∞ を極に持つ) **Green 関数 (potential)** とは, $\mathbb{C} \setminus X$ で定義された調和関数 $G(z)$ で次の条件を満たすものである ([Po, §§9.3]):

- $G(z) \geq 0$,
- $G(z) = \log |z| + \text{const} + o(1) \ (z \rightarrow \infty)$,
- $G(z) \rightarrow 0 \ (z \rightarrow \partial X)$.

$G(z)$ は存在すれば一意であることが知られている (注: 最後の条件は本当は強すぎるが, Julia 集合, Mandelbrot 集合に対してはこれで十分. 実際, 後で示すように存在する). 次に ∞ の近くで定義された解析関数 $\varphi(z)$ を

- $G(z) = \log |\varphi(z)|$,
- $\frac{\varphi(z)}{z} \rightarrow c > 0 \ (z \rightarrow \infty)$,

を満たすものとして定義すると $\varphi(z)$ も ∞ の近傍で一意に存在する (実際 G^* を G の共役調和関数とすると $\varphi(z) = \exp(G(z) + iG^*(z))$ である).

Definition 3.1.2. G の gradient flow の ∞ からの軌道を X の external ray と呼ぶ。また、

$$\varphi^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\}$$

を含む external ray の external angle は θ であるという。更に $\{z \mid G(z) = \text{const}\}$ を equi-potential curve という。

ここで特に X が連結で $\#X \geq 2$ であるときを考える。 $\mathbb{C} \setminus X = (\mathbb{C} \setminus X) \cup \{\infty\}$ は単連結になるので Riemann の写像定理から次の条件を満たす等角写像 $\varphi: \mathbb{C} \setminus X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ (ただし、 $\mathbb{D} := \{z \mid |z| < 1\}$) が一意に存在する：

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \frac{\varphi(z)}{z} \rightarrow c > 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

これは Green 関数 G から定義された φ と一致する。 Riemann 写像の逆写像 φ^{-1} に関しては次の Carathéodory の定理が知られている ([CG, p.6, Theorem 2.1], [Po, p.20, Theorem 2.1])：

Theorem 3.1.3 (Carathéodory). φ^{-1} が $\partial\mathbb{D} = S^1$ まで連続に拡張できるための必要十分条件は、 X が局所連結であることである。

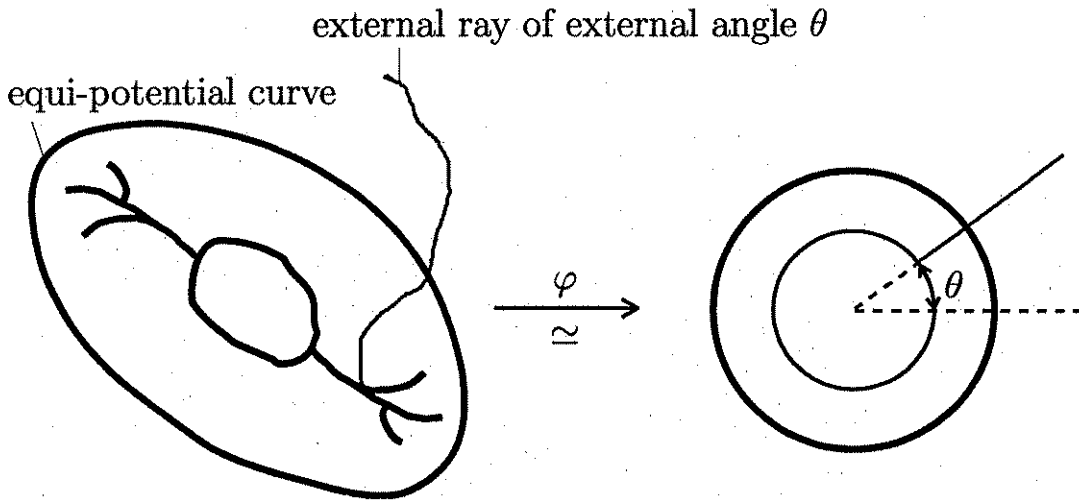


Figure 3.1 external ray, external angle, equi-potential curve.

以上のことを 2 次多項式の充填 Julia 集合の場合に適用する。 $p_c(z) := z^2 + c$ に対して 充填 Julia 集合は

$$K_c := \{z \mid \{p_c^n(z)\}_{n=0}^\infty \text{が有界}\}$$

であったがこのとき K_c はコンパクトであり、また最大値の原理から full (つまり、 $\mathbb{C} \setminus K_c$ が連結) になることがわかる。 よって Green 関数 $G(z) = G_c(z)$, $\varphi(z) = \varphi_c(z)$ が定義できるが、それらは次のようにして構成される：

Proposition 3.1.4. $G_c(z), \varphi_c(z)$ は $p_c(z)$ を用いて次のように定義される :

$$G_c(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log^+ |p_c^n(z)|, \quad (\log^+ x := \max\{0, \log x\}),$$

$$\varphi_c(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}.$$

またこれらは次の関係を満たす :

$$G_c(p_c(z)) = 2G_c(z), \quad \varphi_c(p_c(z)) = (\varphi_c(z))^2, \quad G_c(z) = \log |\varphi_c(z)|.$$

Remark 3.1.5. 先に述べた一般論から $G_c(z)$ は次の性質を満たす :

- $G_c(z)$ は \mathbb{C} 上で存在, 広義一様収束.
- $G_c(z) \geq 0, K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid G_c(z) = 0\}$.
- $G_c(z)$ は \mathbb{C} で劣調和, $\mathbb{C} \setminus K_c, \text{int } K_c$ で調和.
- $G_c(z) = \log |z| + o(1) \quad (z \rightarrow \infty)$.

(Outline of the Proof ([CG, VIII. 3.])) : $z \notin K_c$ なら $p_c^n(z) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$ となるので $G_c(z)$ の定義で \log^+ の $+$ は不要となる. そこで $G_c^{(n)}(z) := \frac{1}{2^n} \log |p_c^n(z)|$ とすると

$$G_c^{(n+1)}(z) - G_c^{(n)}(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\log |p_c^{n+1}(z)| - \log |p_c^n(z)|^2 \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \log \left| 1 + \frac{c}{(p_c^n(z))^2} \right|$$

となり, これから $\lim_{n \rightarrow \infty} G_c^{(n)}(z) = G_c(z)$ がわかる. また $G_c^{(n+1)}(p_c(z)) = 2G_c^{(n+1)}(z)$ より $G_c(p_c(z)) = 2G_c(z)$ が成り立つ ($2 = \deg p_c$ であることに注意).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{p_c} & \mathbb{C} \\ G_c \downarrow & & \downarrow G_c \\ \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{p_c} & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

次に $|z| \gg 1$ のとき (このとき $p_c^n(z) \rightarrow \infty$) 巾根をうまくとって

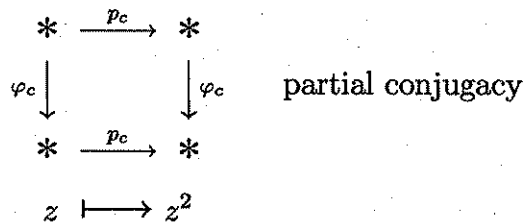
$$\varphi_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$$

で定義したい. 今, $\varphi_c^{(n)}(z) = [p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}$ が定義できたとしよう. 形式的計算をしてみると

$$\frac{\varphi_c^{(n+1)}(z)}{\varphi_c^{(n)}(z)} = \frac{[p_c^{n+1}(z)]^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{[p_c^n(z)]^{\frac{1}{2^n}}} = \left[1 + \frac{c}{(p_c^n(z))^2} \right]^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

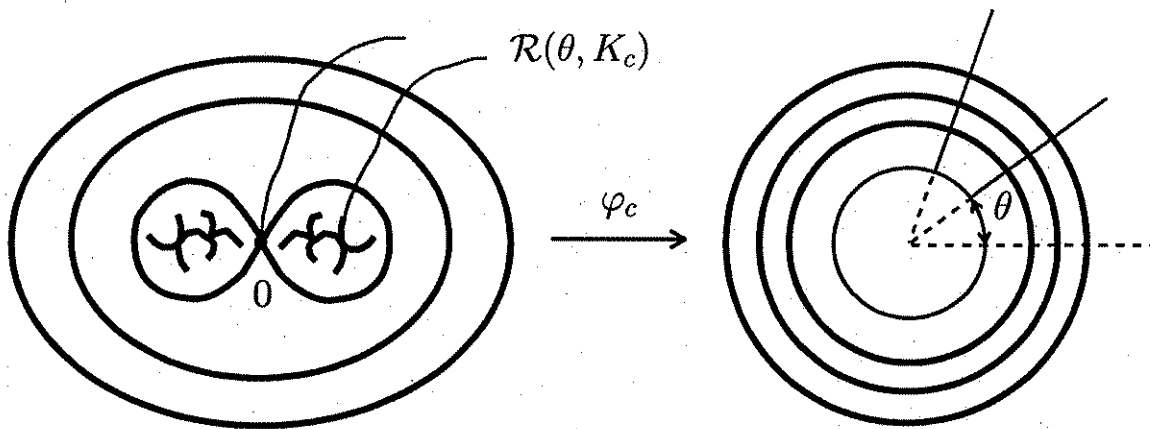
となり $\frac{c}{(\varphi_c^n(z))^2}$ は十分小さいので最後の式では巾根の自然な branch をとることができる。よって帰納法により $\varphi^{(0)}(z) = z$ から始めて $\varphi_c^{(n)}$ を決めることができ、また収束することも示せる。そして

$$\frac{\varphi_c(z)}{z} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \log\left(1 + \frac{c}{(p_c^n(z))^2}\right)\right), \quad \varphi_c(p_c(z)) = (\varphi_c(z))^2$$



$\varphi_c(z)$ が定義されれば $G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|$ が成立する。 □

次に上記の関数方程式 $\varphi_c(p_c(z)) = (\varphi_c(z))^2$ を使うと φ_c は $\{z \in \mathbb{C} \mid G_c(z) > G_c(0)\}$ まで関数方程式を満たしたまま 1 価解析的に拡張でき、ここでは 1 対 1 になる。そこで $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ を external angle θ の external ray とすると $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は K_c まで到達するか(このときは 1 点に到達するか振動するか)、または途中で critical point のところで break up するかのどちらかである (Figure 3.2).



$0 = p_c$ の critical point = G_c の 1st. critical point.

Figure 3.2 external ray(K_c まで到達するものと break up するもの).

もし K_c が連結ならば(これは $0 \in K_c$ と同値 (Theorem 1.1.1)) $G_c(0) = 0$ で $\varphi_c: \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ は等角写像、即ち φ_c は $\mathbb{C} \setminus K_c$ の Riemann 写像となる。このとき external ray は

$$\mathcal{R}(\theta, K_c) = \varphi_c^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\},$$

また, equi-potential curve は

$$\varphi_c^{-1}\{|z| = \text{const} > 1\} = G_c^{-1}\{x = \text{const}\}.$$

更に K_c が局所連結のとき Carathéodory の定理より φ_c^{-1} は $\varphi_c^{-1}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{int } K_c$ と連続に拡張でき, $\varphi_c^{-1}(\zeta^2) = p_c(\varphi_c^{-1}(\zeta))$ が成立する. $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ が $z \in J_c = \partial K_c$ に到達するとき z は $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point であるという. そして $p_c(\mathcal{R}(\theta, K_c)) = \mathcal{R}(2\theta, K_c)$ が成立する.

3.1.2 Landing relation

z が $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point のとき θ は z の external angle であるとい

$$\theta \in \text{Angle}(z, K_c)$$

と書く. また z が $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point なら $p_c(z)$ は $\mathcal{R}(2\theta, K_c)$ の landing point である. ここで doubling map \mathcal{D} を

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ \theta &\mapsto 2\theta \pmod{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

により定義する. \mathcal{D} については次のことが基本的である:

Proposition 3.1.6. (1) θ が \mathcal{D} の周期点であることと, θ が分母が奇数の有理数であることは同値である.

(2) θ が \mathcal{D} に関して前周期的 (preperiodic) であることと, θ が分母が偶数の有理数であることは同値である.

(Proof): (1) θ が \mathcal{D} の周期点であるとする, ある $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$2^k \theta \equiv \theta \pmod{\mathbb{Z}}$$

となるので

$$\theta = \frac{r}{2^k - 1} \quad r \in \mathbb{Z}$$

即ち, θ は分母が奇数の有理数である. 逆に

$$\theta = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q: \text{奇数}$$

とする. まず

$$2^n p \equiv 2^m p \pmod{q}$$

を満たす自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ で $n > m$ なるものがとれる. 従って

$$2^n p - 2^m p = qr \quad r \in \mathbb{N} \quad \text{即ち} \quad 2^m(2^{n-m} - 1)p = qr$$

と書けるが, ここで q は奇数であるから r が 2^m で割り切れる. よって

$$(2^{n-m} - 1)\theta = \frac{(2^{n-m} - 1)p}{q} = \frac{r}{2^m} \in \mathbb{Z}$$

となり、従って

$$2^{n-m}\theta \equiv \theta \pmod{\mathbb{Z}}$$

であるから、 θ は \mathcal{D} の周期点である。

(2) θ が \mathcal{D} に関して前周期的 (preperiodic) であるとする。ある $k, l \in \mathbb{N}$ に対して

$$2^l \cdot 2^k \theta \equiv 2^k \theta \pmod{\mathbb{Z}}$$

となるので

$$\theta = \frac{r}{2^k(2^l - 1)} \quad r \in \mathbb{Z}$$

即ち、 θ は分母が偶数の有理数である。逆に

$$\theta = \frac{p}{2^n q} \quad n \in \mathbb{N} \quad q: \text{奇数}$$

とすると \mathcal{D} で写すと

$$\theta \mapsto 2\theta \mapsto 4\theta \mapsto \dots \mapsto 2^n \theta = \frac{p}{q}$$

であり $\frac{p}{q}$ は q が奇数だから (1) より周期点、即ち分母が偶数の θ は前周期的 (preperiodic) である。 \square

θ が \mathcal{D} に関して周期的で $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point z が存在するとき、 z は p_c に関して周期的であり z の周期は θ の周期の約数である。実際 $D^n(\theta) = \theta$ とすると

$$p_c^n(z) = p_c^n(\mathcal{R}(\theta, K_c)) = \mathcal{R}(D^n(\theta), K_c) = \mathcal{R}(\theta, K_c) = z$$

が成り立つ。例えば $\text{period}(\theta) = 6$, $\text{period}(z) = 2$ の場合は次のようである。

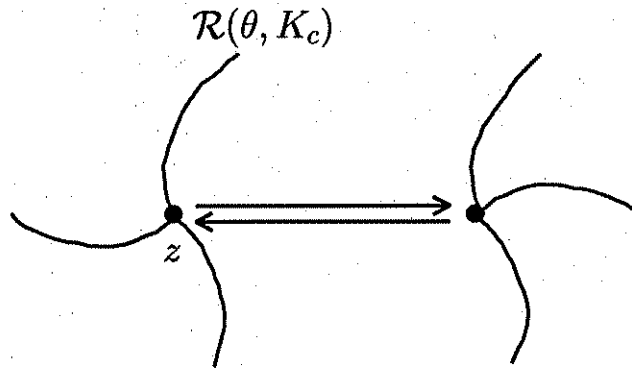


Figure 3.3

また landing point z は $\partial K_c = J_c$ の点であるので吸引的ではない。

Proposition 3.1.7. θ が \mathcal{D} に関して周期的であり、 $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ が critical point によって break up しないとする。このとき $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は $J_c = \partial K_c$ のある 1 点に到達する。この点は p_c の反発的または放物的な周期点である。

Remark 3.1.8. (1) Proposition 3.1.7 で J_c の連結性, 局所連結性は仮定していない.
 (2) θ が前周期的なときは $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は前周期的な点に land する ([Mi1, Corollary 18.4]).

(Proof): θ の周期を k , 即ち $2^k\theta \equiv \theta \pmod{\mathbb{Z}}$ とし, $\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\}$ 上に ζ_0, ζ_1, \dots を $\zeta_j^{2^k} = \zeta_{j-1}$ を満たすようにとる. そこで $z_j := \varphi_c^{-1}(\zeta_j)$ とすると

$$z_j \in \mathcal{R}(\theta, K_c) \quad (j = 0, 1, \dots), \quad p_c^k(z_j) = z_{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ (Figure 3.4 参照).

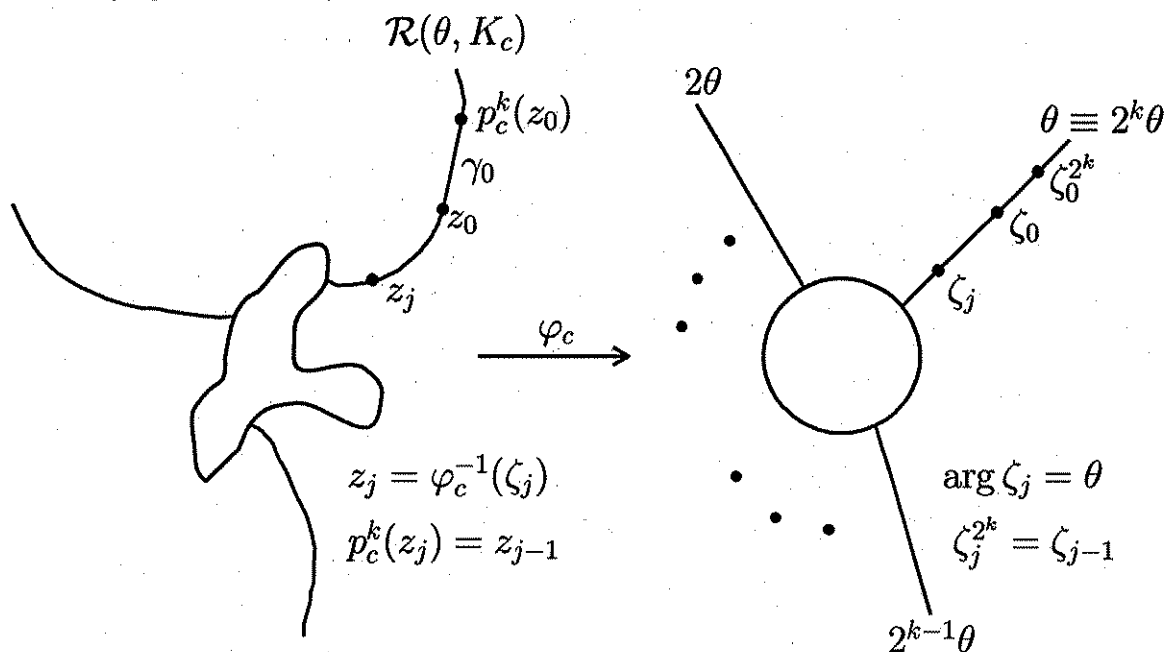


Figure 3.4

γ_0 を $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の z_0 と $p_c^k(z_0)$ を結ぶ部分, γ_j ($j = 1, 2, \dots$) を $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の z_j と z_{j-1} ($= p_c^k(z_j)$) を結ぶ部分とする. $\mathbb{C} \setminus K_c$ の Poincaré metric を考えると

$$\varphi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

は Poincaré metric に関して isometry であり, また一方で

$$p_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_c$$

は covering map だから Poincaré metric に関して local isometry である. よって γ_j と γ_{j-1} の Poincaré length は等しい. ところが Poincaré metric を $\lambda(z)|dz|$ と書くと

$$\lambda(z) \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow K_c)$$

であるが, 一方

$$\gamma_j \rightarrow K_c \quad (j \rightarrow \infty)$$

であるので

$$\gamma_j \text{ の Euclidean length } \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

即ち

$$|z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

となる. w を $\{z_j\}$ の集積点とすると, ある $j_n \in \mathbb{N}$, $j_n \nearrow \infty$ が存在して $z_{j_n} \rightarrow w$ となる. p_c^k を作用させると

$$p_c^k(z_{j_n}) \rightarrow p_c^k(w)$$

となる. 一方 $p_c^k(z_{j_n}) = z_{j_n-1}$ で $|z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0$ と $z_{j_n} \rightarrow w$ より $z_{j_n-1} \rightarrow w$ が得られる. 従って $p_c^k(w) = w$ となり $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の集積点は p_c^k の不動点であることがわかる (注: $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の集積点は $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ の集積点であることに注意 ($|z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0$ からわかる)). ところが

$$\{\mathcal{R}(\theta, K_c) \text{ の集積点}\} = \bigcap_{r_0 > 1} \overline{\varphi_c^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid 1 < r < r_0\}}$$

でありこれは右辺の表示から連結である. p_c^k の不動点は有限個しかないので結局この集合は1点だけからなる集合であり, ゆえに $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は $J_c = \partial K_c$ のある1点に到達し, この点は p_c の反発的または放物的な周期点である. \square

K_c が連結であるときはこの Proposition の逆, 即ち次の定理が成り立つ:

Theorem 3.1.9 (Douady(+ Yoccoz + Milnor)'s Landing Theorem [Mil, Theorem 18.2], [Pe1, p.787, Theorem B]). K_c は連結, また $z_0 \in K_c$ は反発または放物型周期点であるとする. このとき周期的な θ が存在し z_0 は $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ の landing point になる. \square

このとき z_0 の combinatorial rotation number が次のようにして定義できる. z_0 の周期を k とすると p_c^k は z_0 のまわりでは z_0 に land する external ray の cyclic order を保つ rotation であり

$$p_c^k : \mathcal{R}(\theta_i, K_c) \rightarrow \mathcal{R}(\theta_j, K_c), \quad j \equiv i + p \pmod{q}$$

とかける (Figure 3.5). そこで z_0 の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$ と定義する.

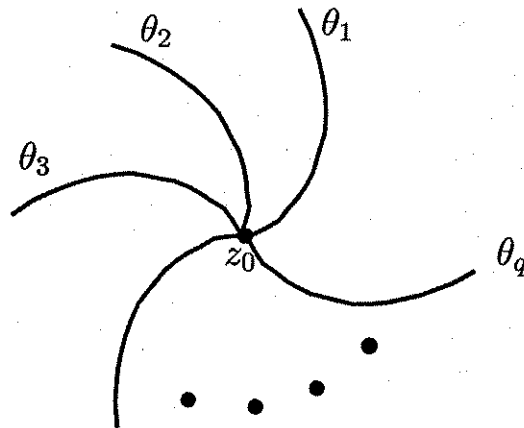


Figure 3.5

Remark 3.1.10. p_c は反発または放物型不動点 z_0 のまわりで z_0 に land する external ray の cyclic order を保つ rotation であるが φ_c で共役をとった doubling map \mathcal{D} は cyclic order を保たない.

Theorem 3.1.11 (Yoccoz inequality [H, Part I]). K_c は連結とし, z_0 を反発不動点, z_0 の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$, $\lambda = p'_c(z_0)$ ($= z_0$ の multiplier) とする. このときある普遍定数 $C > 0$ が存在し次が成立する:

$$\log \lambda \in \left\{ z \mid \left| z - \left(\frac{C}{q} + 2\pi i \frac{p}{q} \right) \right| < \frac{C}{q} \right\}.$$

□

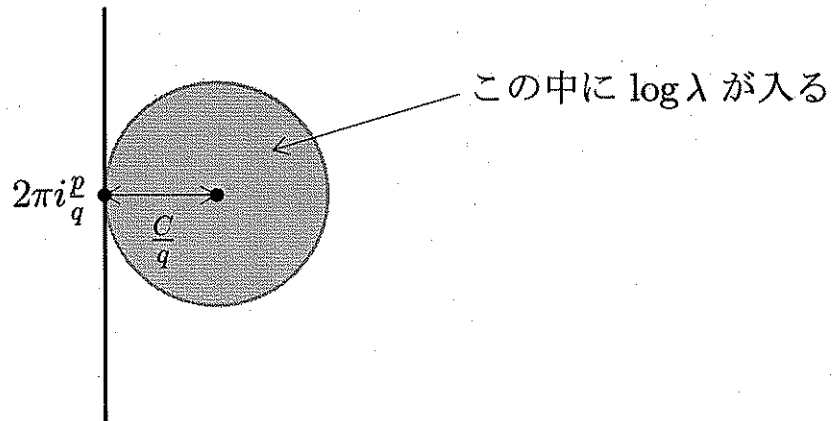


Figure 3.6

Remark 3.1.12. [H] にはもう少し詳しい形での Yoccoz inequality が書いてある. また [Pe1] も参照せよ.

Corollary 3.1.13 ([H, p.479, Corollary 4.4]). p_c が indifferent cycle で multiplier が $e^{2\pi i t}$ となるものを持つとする. t が無理数なら M は c で局所連結である.

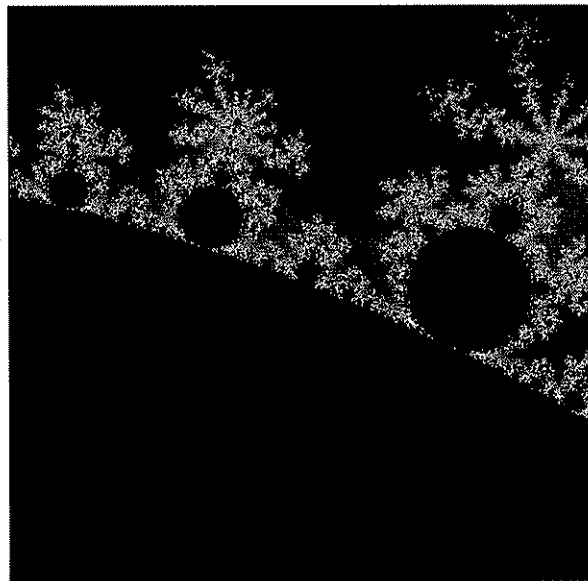


Figure 3.7

(Outline of the Proof) : $\lambda z + z^2$ の形のものに対し Yoccoz inequality を適用する. その結果を変数パラメーターの変換により $z^2 + c$ にもっていく. \square

$k \in \mathbb{N}$ に対し k を割る周期を持つ周期点の個数は $p_c^k(z) = z$ より 2^k 個である. 一方 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の doubling map \mathcal{D} については $2^k - 1$ 個しか存在しない. 特に $k=1$ のとき \mathcal{D} の唯一の不動点 $\theta = 0$ に対応する $p_c(z)$ の不動点を β -不動点, $p_c(z)$ のもう1つの不動点を α -不動点という.

Definition 3.1.14. $\theta, \theta' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ について θ と θ' が同値である ($\theta \simeq \theta'$) とは

$$\mathcal{R}(\theta, K_c) \text{ の landing point} = \mathcal{R}(\theta', K_c) \text{ の landing point}$$

が成立することである.

K_c が局所連結であるとする. Carathéodory の定理より任意の θ に対し $\mathcal{R}(\theta, K_c)$ は landing point を持つ. このとき

$$((\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\simeq, z^2) \underset{\text{top. conf.}}{\simeq} (J_c, p_c)$$

が成立する.

3.2 Mandelbrot 集合

Douady's principle

「dynamical plane (z -plane) で耕して parameter plane (c -plane) で収穫する」

これは2次多項式の複素力学系においては, 個々の $p_c(z)$ の dynamical plane (z -plane) で得た性質 (Julia 集合に関する性質) から parameter plane (c -plane) の性質 (Mandelbrot 集合の性質) がわかることを端的に表現したものである. これに従ってまず $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ について考察していくことにしよう. $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ は $0 \notin K_c$ と同値でこれはまた $G_c(0) > 0$ と同値である. このとき φ_c は $\{z \mid G_c(z) > G_c(0)\}$ で定義されており, $G_c(c) = 2G_c(0) > G_c(0)$ であるから $\Phi(c) := \varphi_c(c)$ が定義できる. すると

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

でありこれは

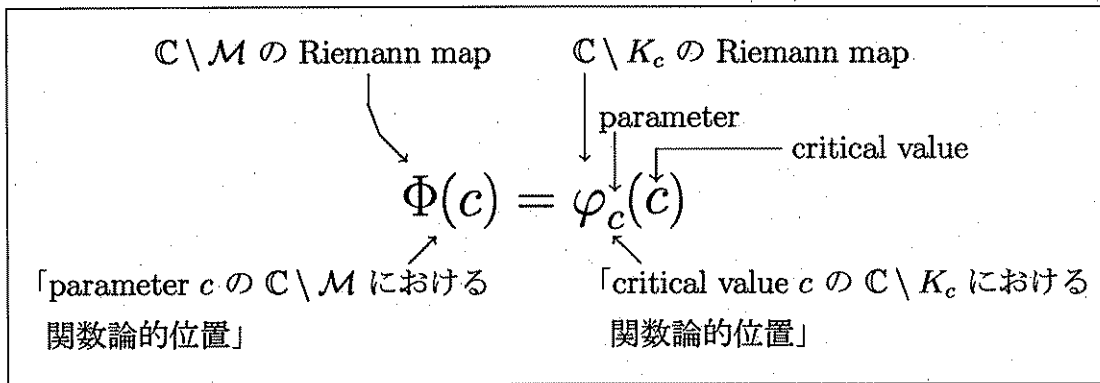
1. Φ : 解析的,
2. $\frac{\Phi(c)}{c} \rightarrow 1 \quad (c \rightarrow \infty)$,
3. proper (即ち, $c \rightarrow \partial\mathcal{M}$ のとき $\Phi(c) \rightarrow \partial\mathbb{D}$), 従って Φ は branched covering. また, ∞ の近傍では1対1,

を満たす. 従って

Theorem 3.2.1 (Douady-Hubbard [DH1]). Φ は $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ の Riemann 写像である.

Corollary 3.2.2 (Douady-Hubbard [DH1]). \mathcal{M} は連結である.

Riemann 写像 $\Phi(c) = \varphi_c(c)$ は次のように解釈することができる.



Definition 3.2.3. Mandelbrot 集合の external ray $\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M})$ を

$$\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M}) = \Phi^{-1}\{re^{2\pi i\theta} \mid r > 1\},$$

で定義する. また $c \in \mathcal{M}$ が $\mathcal{R}(\theta, \mathcal{M})$ の landing point のとき θ は c の external angle であるとい

$$\theta \in \text{Angle}(c, \mathcal{M})$$

と書く.

$c \rightarrow \partial\mathcal{M}$ のときについては後述の Douady-Hubbard の定理 (Theorem 3.2.8) 参照.

次に \mathcal{M} 自身について考察する. 2章で述べたことなどから次の3つは同値である:

1. p_c が双曲的 (hyperbolic) (or 拡大的 (expanding), 公理 A (Axiom A)) である (即ち, ある $N \geq 1$ が存在し J_c 上で $\|(p_c^N)'\| \geq 2$ が成り立つ).
2. $p_c^n(0) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) または $p_c^n(0) \rightarrow$ 吸引周期軌道 ($n \rightarrow \infty$).
3. $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ または p_c が吸引周期点を持つ.

もし吸引周期点が存在すれば, 複素力学系の一般論から少なくとも1つの critical value の軌道がこの cycle に収束するので, p_c については吸引周期軌道の個数は高々1個 (= p_c の critical value の個数) である. また, 吸引周期点は摂動によってこわれない (残り続ける) ので p_c が双曲的かつ $c \in \mathcal{M}$ ならば $c \in \text{int } \mathcal{M}$ である. そこで...

Definition 3.2.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{c \in \mathbb{C} \mid p_c \text{ が吸引周期点を持つ}\} \\ &= \{c \in \mathcal{M} \mid p_c \text{ が双曲的}\} \subset \text{int } \mathcal{M} \end{aligned}$$

とおき, \mathcal{H} の連結成分を M の双曲成分 (hyperbolic component) と呼ぶ. H を双曲成分の1つとすると $c \in H$ に対し p_c の吸引周期軌道の周期は c によらず一定である. これを双曲成分 H の周期と呼ぶ. そこで multiplier map “mul” を

$$\text{mul} : H \ni c \mapsto (p_c \text{の吸引周期点の multiplier (eigenvalue)}) \in \mathbb{D}$$

と定義する.

mul については次が成り立つ ([CG, p.134, Theorem 2.1]) :

Theorem 3.2.5 (Douady-Hubbard [DH1]). 各双曲成分に対し multiplier map $\text{mul} : H \rightarrow \mathbb{D}$ は全単射であり, 高々1点を除いて境界点の近傍まで拡張できる.

Remark 3.2.6. 「高々1点」の例外がおこるのはもちろん, H が main cardioid およびその “コピー” にあたる双曲成分の場合である.

Definition 3.2.7. $(\text{mul})^{-1}(0)$ を双曲成分 H の center, $(\text{mul})^{-1}(1)$ を root と呼ぶ.

Figure 3.8 は main cardioid (= 周期1の双曲成分) と, その左に続く周期2の双曲成分の center と root を示している.

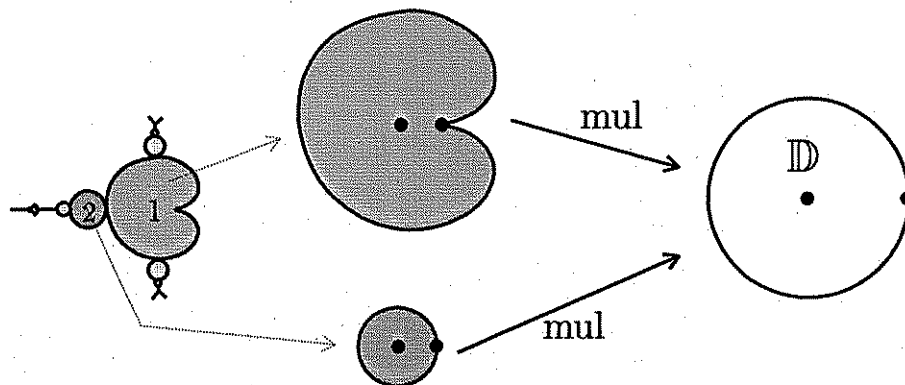


Figure 3.8 双曲成分の root と center.

次に, $c \in \mathcal{H}$ のとき z_0 を周期 k の吸引周期点とし

$$A(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid p_c^{nk}(z) \rightarrow z_0 \ (n \rightarrow \infty)\}$$

とおき, これを z_0 の吸引領域 (basin) と呼ぶ. 更に $A^*(z_0)$ を $A(z_0)$ の z_0 を含む連結成分 (immediate basin) とすると $\psi : A^*(z_0) \rightarrow \mathbb{D}$ なる等角写像で次の図式が可換になるものがただ1つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} A^*(z_0) & \xrightarrow{p_c^k} & A^*(z_0) \\ \psi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{g} & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & g(z) \end{array}$$

ただし $g(z)$ は $g(0) = 0, g(1) = 1$ を満たす. ψ は $\partial A^*(z_0)$ まで同相写像として拡張できる. multiplier map のときと同様に $\psi^{-1}(0)$ を immediate basin の center, $\psi^{-1}(1)$ を root という. Immediate basin の root は実は $\partial A^*(z_0)$ の一番周期の低い周期点になる.

Theorem 3.2.8 (Douady-Hubbard [DH1]).

(1) p_c について 0 が前周期的とする (このとき $c \in \partial \mathcal{M}$) と,

$$\text{Angle}(c, K_c) = \text{Angle}(c, \mathcal{M})$$

でこの集合は空ではなく有限個の (doubling map \mathcal{D} について) 前周期的な角度 $\theta_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ からなる (Figure 3.9-1 参照).

(2) $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が前周期的のとき, ある c が存在して 0 が p_c について前周期的であり $\theta \in \text{Angle}(c, \mathcal{M})$ が成立する.

(3) $c \in \mathcal{H}$ で H を c を含む双曲成分とする. また c' を H の root, $c \in A^*(z_0)$, z_1 を $A^*(z_0)$ の root とする. このとき $p_{c'}$ は放物型周期点 z'_0 を持ち,

$$\text{Angle}(c', \mathcal{M}) \subset \text{Angle}(z_1, K_c) = \text{Angle}(z'_0, K_{c'})$$

が成立する. また H の周期が 1 でないときは

$$\text{Angle}(c', \mathcal{M}) = \{\theta \in \text{Angle}(z_1, K_c) \mid \theta \text{ は } A^*(z_0) \text{ に隣接}\}$$

が成立する (Figure 3.9-2 参照).

(4) θ が周期的ならば, ある双曲成分の root c が存在し, $\theta \in \text{Angle}(c, \mathcal{M})$ が成立する.

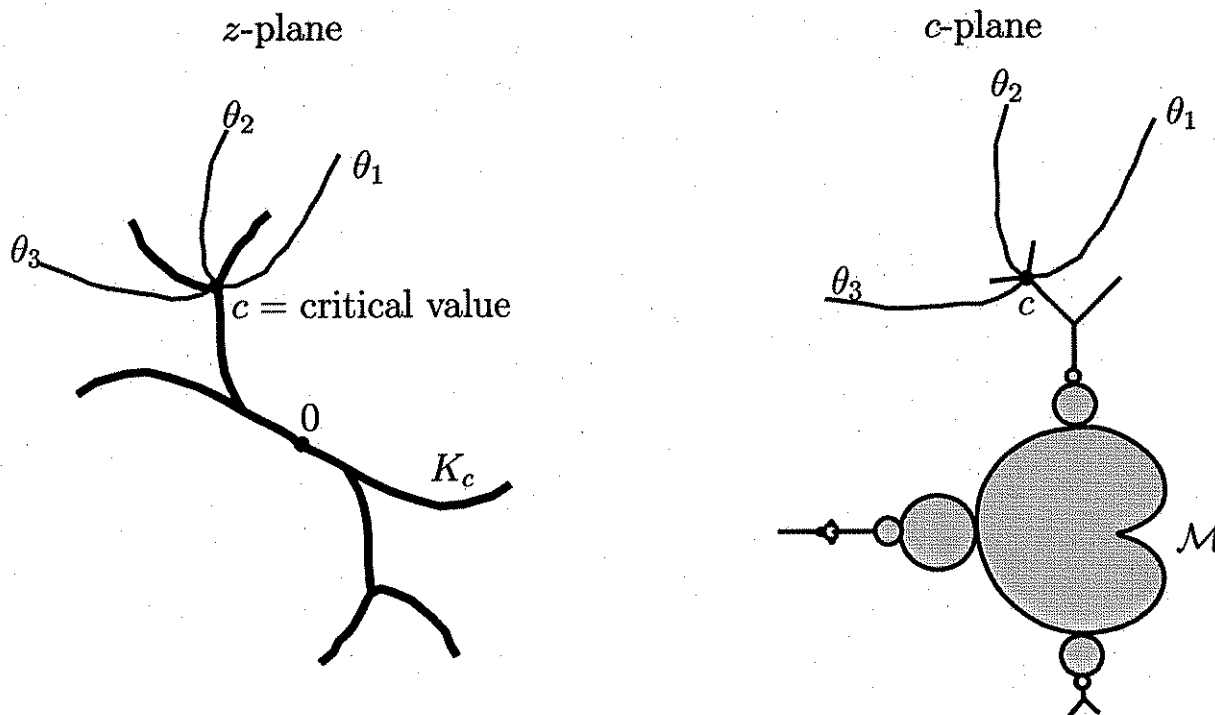


Figure 3.9-1

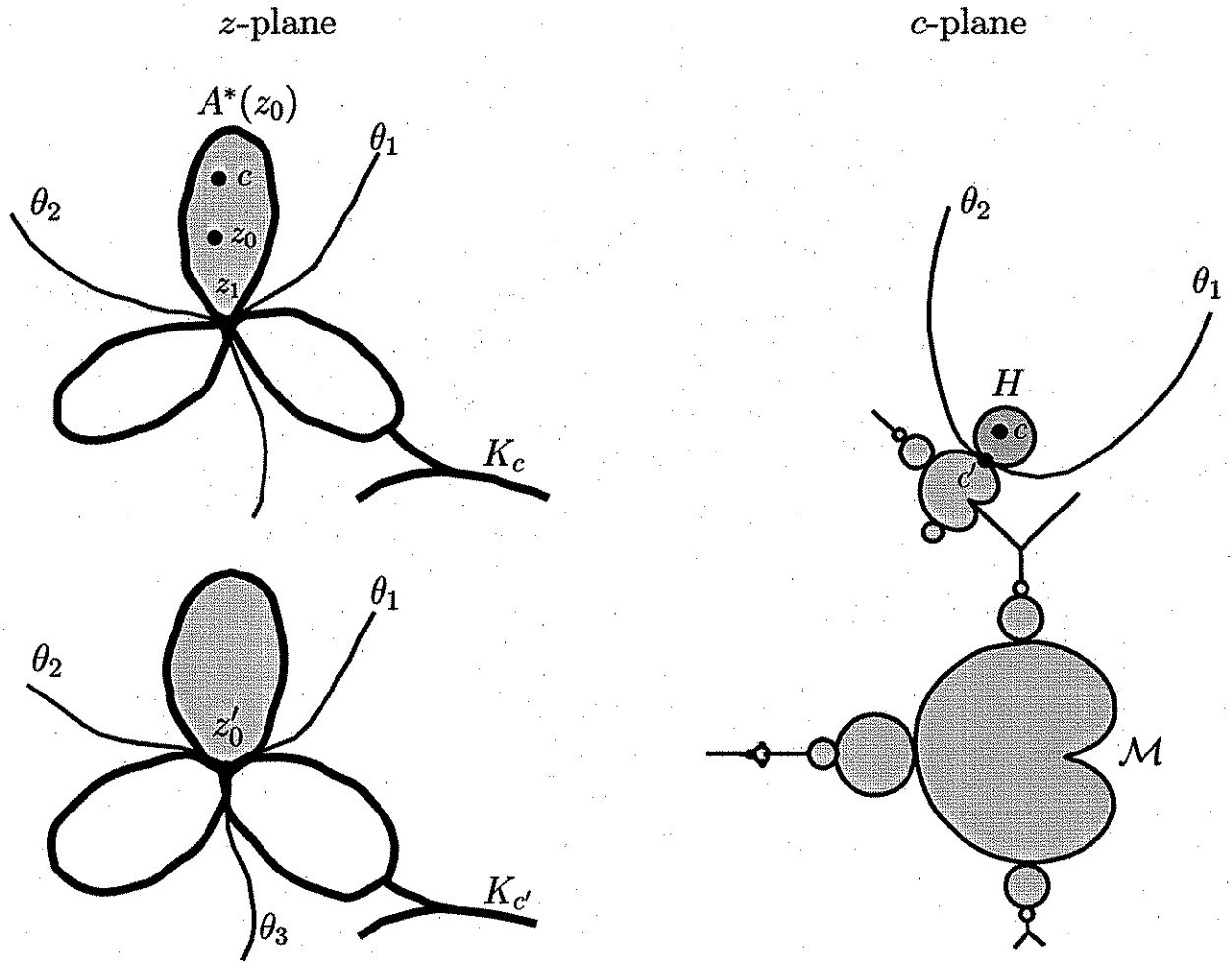


Figure 3.9-2

Remark 3.2.9. Figure 3.9-1, 3.9-2 の M は一部を拡大, 誇張して描いてある.

Chapter 4

Yoccoz の方法

この章では Yoccoz によって導入された、2次多項式の Julia 集合に対する “partition” (Yoccoz puzzle) と、それに付随する τ -関数について解説する。

4.1 Partition (puzzle) の構成

Theorem A, C の証明のために K_c の “partition(puzzle)” というものを構成する。一般の「無限回くりこみ可能ではない場合」についてはこの節の最後で述べることにして、以下では最も簡単な「(1回も)くりこみ可能でない場合」の partition の構成について述べる。

以下では $c \in M \setminus \overline{\text{cardioid}}$ (即ち、 K_c は連結でかつ p_c の不動点は反発的) と仮定する。 p_c の2つの不動点を §3.1.2 で定義したように $\{\alpha, \beta\}$ とし、 β が $\mathcal{R}(0, K_c)$ の landing point であるとする。そこでまず、equi-potential curve を1つ選んで固定して Γ_0 を

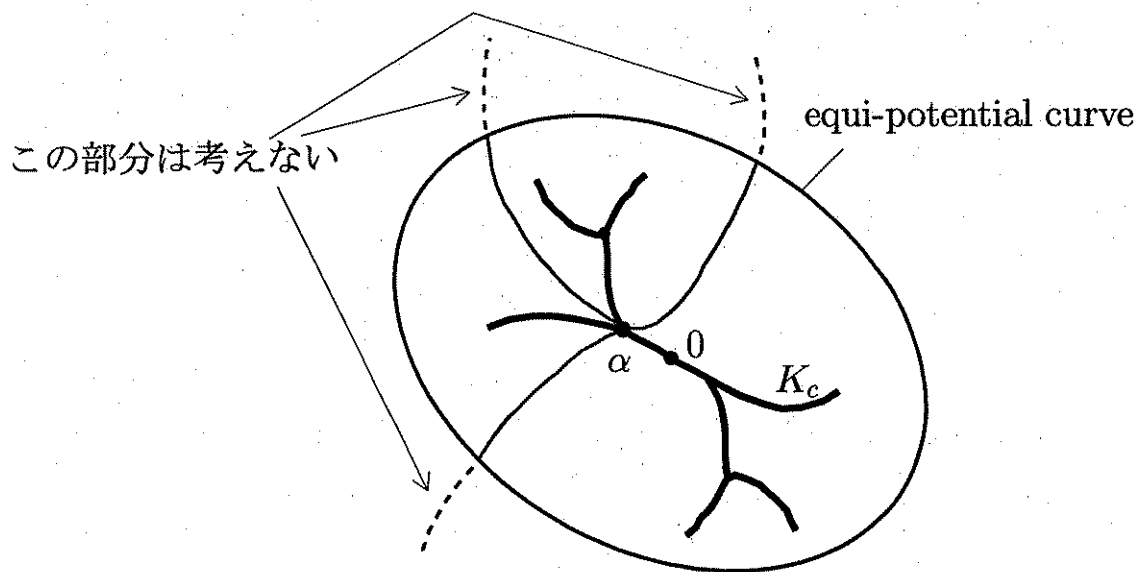


Figure 4.1 α の external rays と 1 つの equi-potential curve.

$$\Gamma_0 := \bigcup (\alpha \text{ の external ray}) \bigcup (1 \text{ つの equi-potential curve})$$

とする。ただし、 ∞ に延びている external ray のうち、この equi-potential curve の外側にある部分は考えないことにする (忘れる!?) (Figure 4.1). 次に $\Gamma_n := p_c^{-n}(\Gamma_0)$ とし

$$\mathcal{P}_n := \{ \mathbb{C} \setminus \Gamma_n \text{ の } K_c \text{ と交わる連結成分} \}$$

とする。そこで $x \in K_c \setminus \Gamma_n$ のとき x を含む \mathcal{P}_n の元を $P_n(x)$ と書き x を含む n -piece (または depth n の (puzzle) piece) という。 $P_n(x)$ は単連結である。このことは

$$\mathcal{P}_n = \{ p_c^{-1}(P) \text{ (} P \in \mathcal{P}_{n-1} \text{) の連結成分} \}$$

であることから帰納的に理解できる。

[Mc, p.133, Figure 8.3] には $p_i(z) = z^2 + i$ (注: $i = \sqrt{-1}$) について 0-piece から 4-piece までをコンピューターで計算して表した図がある。以下の Figure 4.2-1~5 は一般に Γ_0 から始めて $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ がどのようになっていくかを α の combinatorial rotation number が $\frac{1}{3}$ のときについて模式的に示したものである。

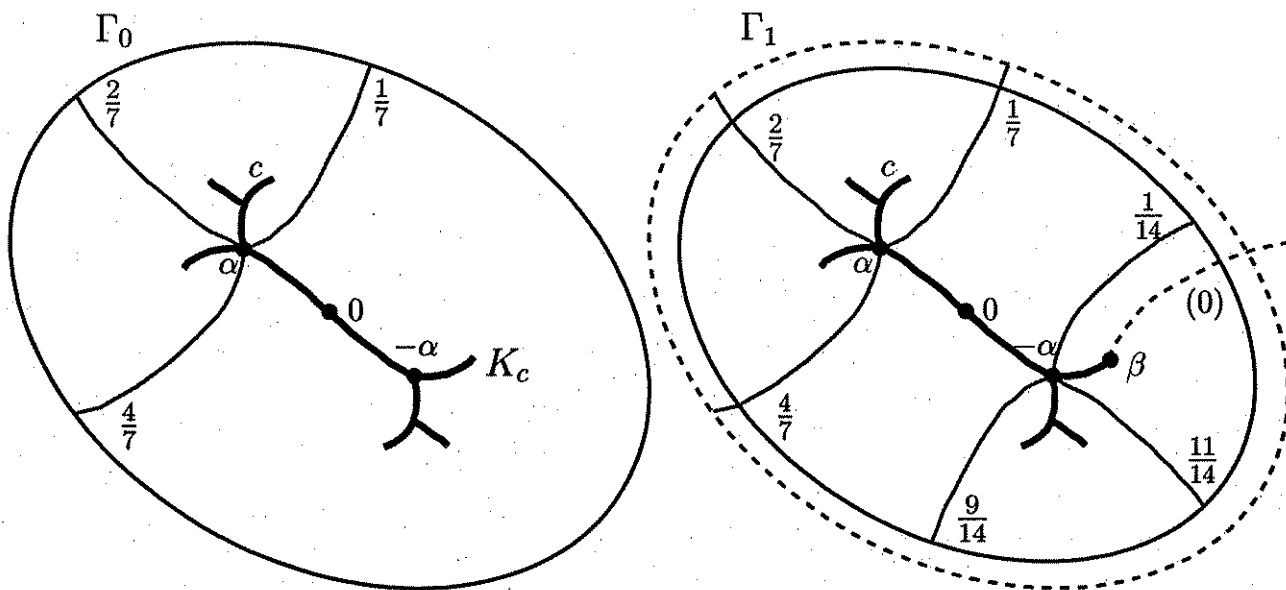


Figure 4.2-1 Γ_0 と Γ_1 .

不動点 α の逆像は α と $-\alpha$ であることに注意せよ。Figure 4.2-1 中の $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots$ などの分数は puzzle piece の境界をなす external ray の angle を表している。また Γ_1 の図には β に land する、angle 0 の external ray も参考のために点線で書き込んである。また $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ の図の各々の中に “c” とあるのは critical value c の位置が、angle が $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$ の external ray と equi-potential curve で囲まれる piece の中にあることを示しているだけで、更に K_c の中でどの位置にあるかまでは特定していない。どの位置にあるかは Γ_4 以降で重要になってくる。実際、 Γ_3 において Figure 4.2-2 のイ、ロ、ハの 3 つの piece のうちどこに critical value c があるかによって Γ_4 の形は以下のように異なってくる：

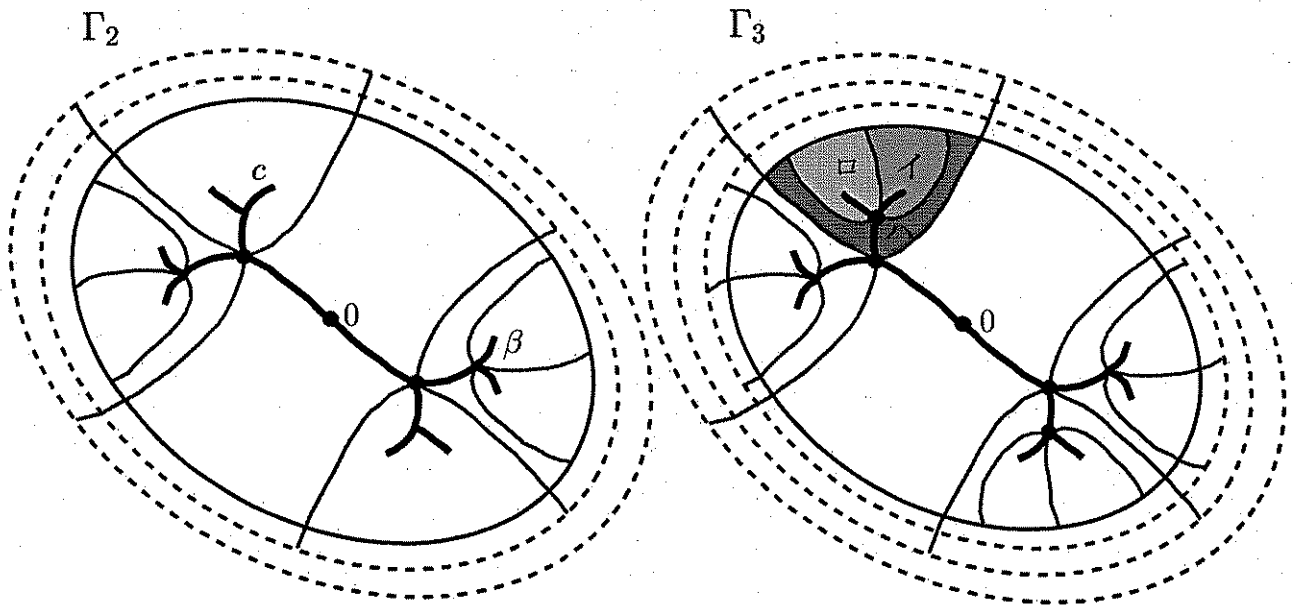


Figure 4.2-2 Γ_2 と Γ_3 .

イ

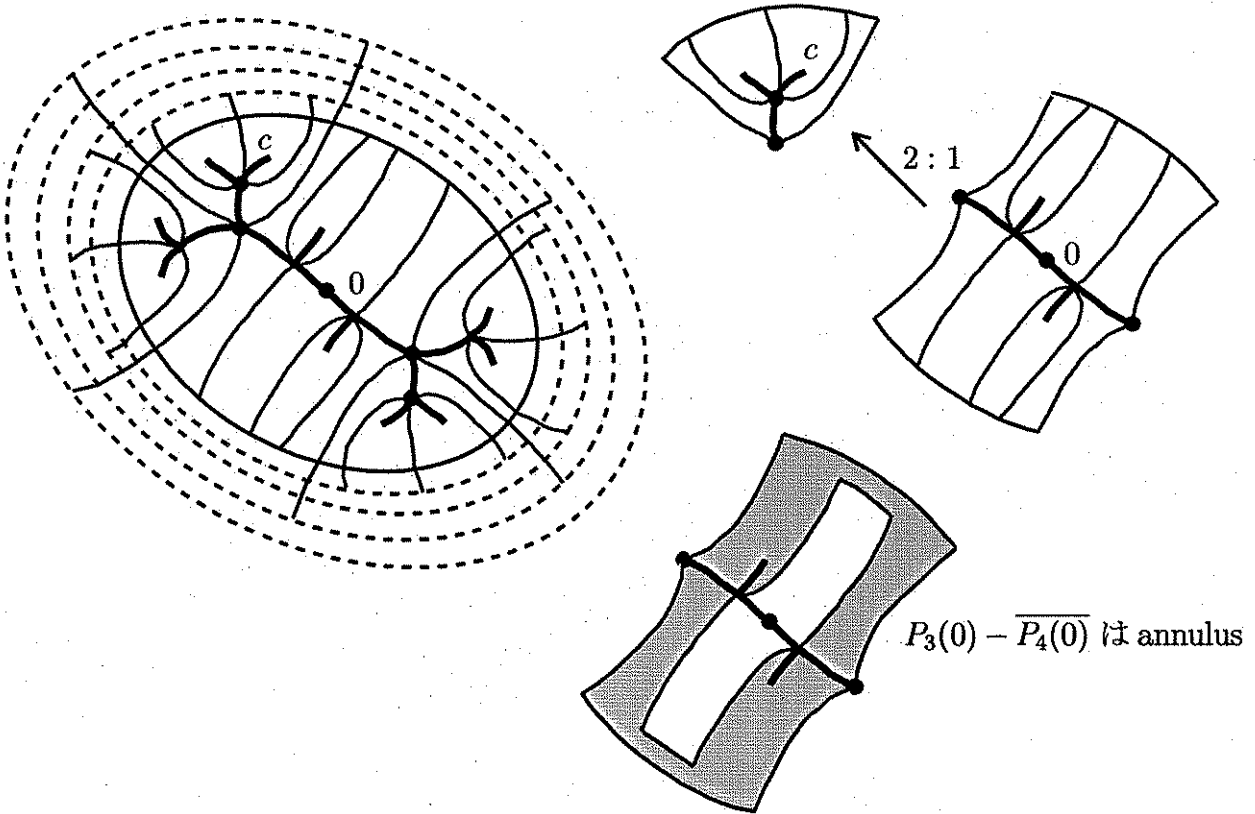


Figure 4.2-3 Γ_4 (イの場合).

イの場合 Figure 4.2-3 にあるように $P_3(0) - \overline{P_4(0)}$ が annulus になることに注意せよ. 後述のように (Lemma 4.1.2) これは f がくりこみ可能でないことに起因する.

ロ

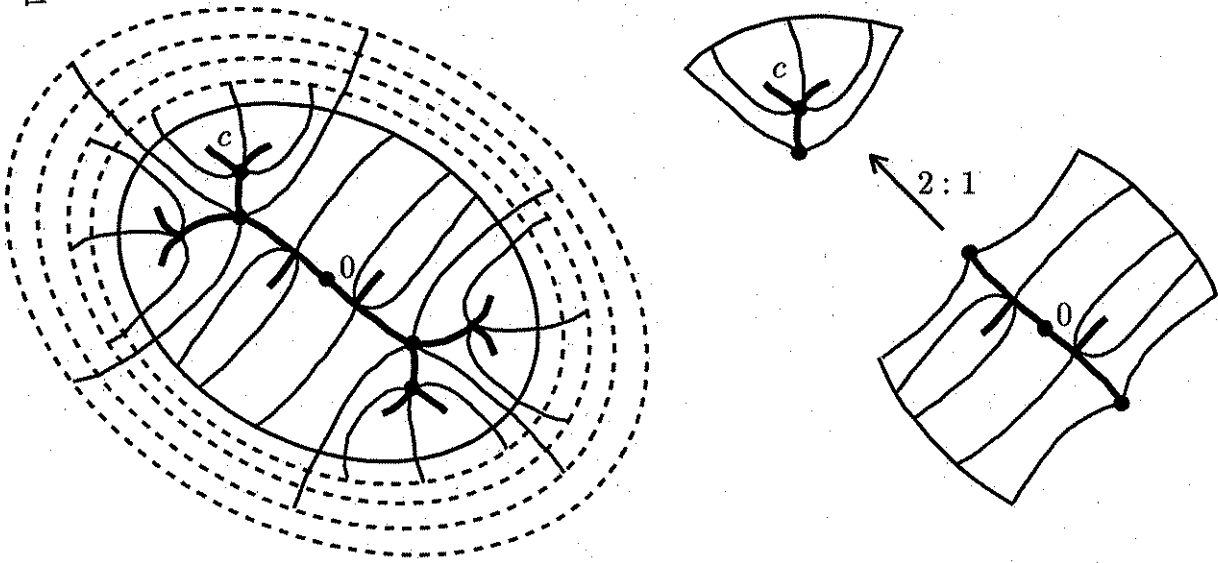


Figure 4.2-4 Γ_4 (ロの場合).

ロの場合もイの場合と同様に $P_3(0) - \overline{P_4(0)}$ は annulus になる.

ハ

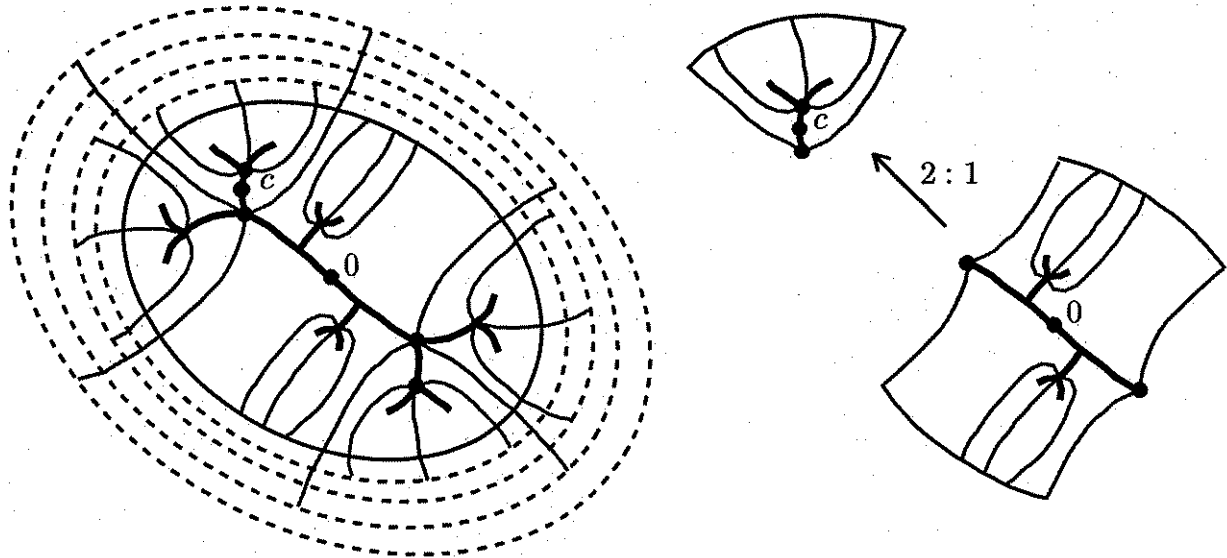


Figure 4.2-5 Γ_4 (ハの場合).

ハの場合にはまだ annulus は現れない.

さて、次の Lemma は基本的である：

Lemma 4.1.1. $x \in K_c \setminus \Gamma_n$ のとき $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結.

(Proof) : Figure 4.2-1~5 からわかるように、一般に1つの puzzle piece の境界は次の Figure 4.3 にあるように2つの external ray と1つの equi-potential が交互に現れるようになっている (厳密には帰納法により理解できる). またこの境界と K_c とは明らかに2つの external rays の交点 (= 共通の landing point) でのみ交わる (注 : equi-potential curve $\subset F_c$, external ray $\subset F_c$, external ray の landing point $\in J_c$ である).

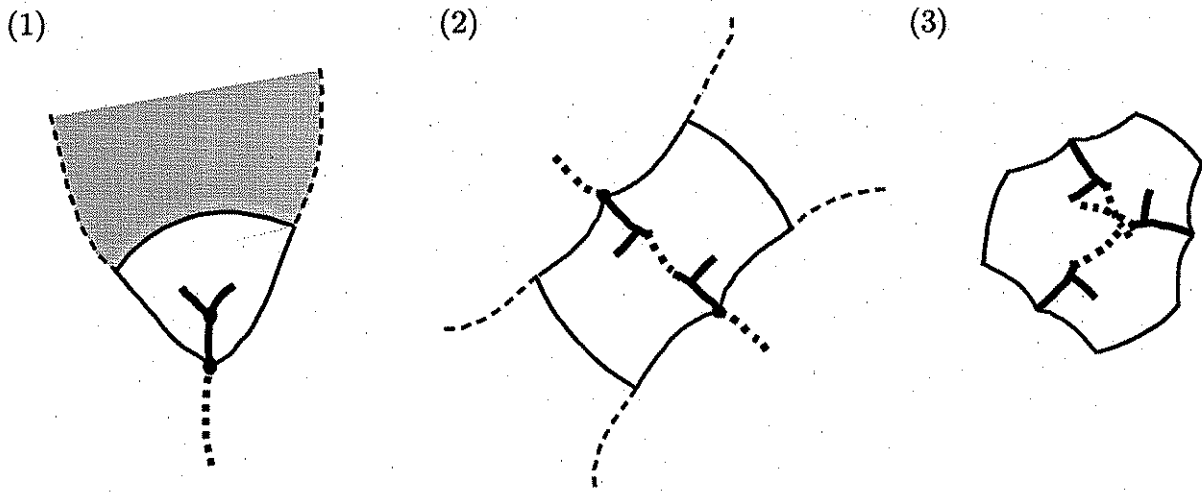


Figure 4.3 いろいろな puzzle piece $P_n(x)$ と $\overline{P_n(x) \cap K_c}$.
(piece 内の K_c の点で点線で示されている部分は実は piece 内で1つにつながっている)

さて、例えば Figure 4.3 (1) の場合に $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ が連結でないと仮定し、 K_1 を2つの external ray の交点を含む $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ の連結成分、 $K_2 := \overline{P_n(x) \cap K} \setminus K_1$ とすると $K_2 \neq \emptyset$ である。このとき external ray が ∞ まで延びていることと、Figure 4.3 (1) の dot がかけてある部分には K_c の点が存在しないことから K_2 の $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ における連結成分は K_c の連結成分にもなることになる。これは K_c が連結であることに反する。従ってこの場合 $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結である。Figure 4.3 (2), (3), 更に一般の場合も全く同様の議論で証明することができる。つまり $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ が連結でないと仮定すると、 K_c 自身が連結でないことになり矛盾を生じるのである。 \square

以後簡単のため $p_c = f$ と書くことにする。 $K_c \setminus \Gamma_n = K_c \setminus \bigcup_{j=0}^n f^{-j}(\alpha)$ であり、ここで

$$K^* := K_c \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\alpha)$$

とおくと $x \in K^*$ なら Lemma 4.1.1 より $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は x の連結な近傍となる。よってもし $\text{diam } P_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が示せれば x で K_c は局所連結であるといえることになる。

Lemma 4.1.2 (Separation Lemma). f がくりこみ可能でないとする。このときある $N > 1$ が存在し $P_{N+1}(0) \subset P_N(0)$ が成立する。

(Proof) : α -不動点の combinatorial rotation number を $\frac{p}{q}$ とする.

$$\mathbb{C} \setminus \{\alpha \text{ の external rays}\} := Q^{(0)} \cup Q^{(1)} \cup \dots \cup Q^{(q-1)}, \quad f^i(0) \in Q^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

とすると (Figure 4.4), $1 \leq i \leq q-1$ に対し $f: Q^{(i)} \rightarrow Q^{(i+1)}$ (ただし $Q^{(q)} = Q^{(0)}$) は同相写像となる.

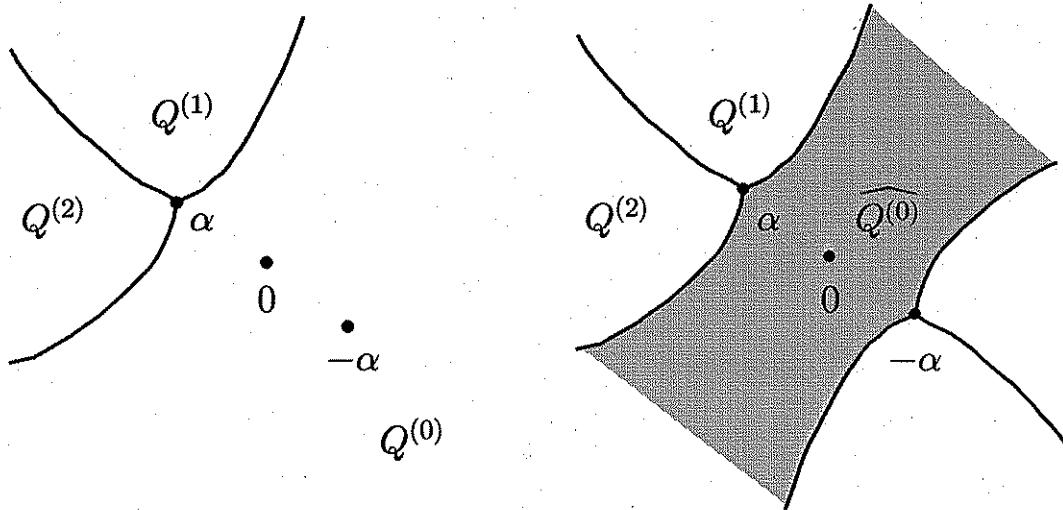


Figure 4.4

また $\widehat{Q^{(0)}} := f^{-1}(Q^{(1)}) \subset Q^{(0)}$ とおくと $f: \widehat{Q^{(0)}} \rightarrow Q^{(1)}$ は 2 対 1 の branched covering になる. このとき 次のことが成り立つ:

Lemma 4.1.3. $f^{nq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}} \quad (n = 0, 1, \dots)$ であれば f はくりこみ可能である.

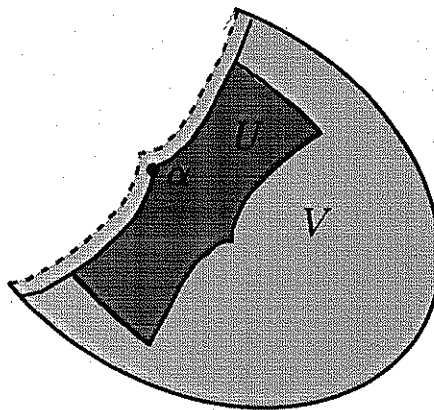


Figure 4.5

(Proof of Lemma 4.1.3) : $0 \in \widehat{Q^{(0)}} \subset Q^{(0)}$ であり (Figure 4.4) $f^q: \widehat{Q^{(0)}} \rightarrow Q^{(0)}$ は

$$\widehat{Q^{(0)}} \xrightarrow{f} Q^{(1)} \xrightarrow{f} Q^{(2)} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} Q^{(q-1)} \xrightarrow{f} Q^{(q)} = Q^{(0)}$$

と考えると 2 対 1 の branched covering であることがわかる. 従って Figure 4.5 のように $\widehat{Q^{(0)}}$ の境界の一部を構成している, α に land している external rays を点線のように少し外側に修正し, また適当な equi-potential curve で切った領域の組を考えると $f^{nq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}}$ ($n = 0, 1, \dots$) の仮定から f はくりこみ可能であるといえる. 即ち, Figure 4.5 の (f, U, V) について $U \Subset V$ であり, $f^q: U \rightarrow V$ は proper, 2 対 1 で, 任意の n に対して

$$f^{nq}(0) \in U \quad (n = 0, 1, \dots)$$

となるので, f は q を周期としてくりこみ可能である. □

さて, 証明すべき Lemma 4.1.2 では f はくりこみ可能ではないと仮定していたので, Lemma 4.1.3 より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f^{iq}(0) \in \widehat{Q^{(0)}} \quad (0 \leq i < n_0), \quad f^{n_0q}(0) \in Q^{(0)} - \widehat{Q^{(0)}}$$

が成り立つ. ここで $R := Q^{(0)} - \widehat{Q^{(0)}}$ とおくと R は単連結であり

$$f^i(0) \notin R \quad (0 \leq i < n_0q), \quad f^{n_0q}(0) \in R$$

が成り立つ. よって

$$f^{-(n_0q-1)}(R) = \coprod R_j$$

と disjoint union のかたちに表示され, 各 R_j は単連結であり ∂R_j は α の f による逆像 (= ある $k \in \mathbb{N}$ に対する, 集合 $f^{-k}(\alpha)$ の点) の external rays からなる. $f^{n_0q}(0) = f^{n_0q-1}(c) \in R$ であるから

$$c = f(0) \in f^{-(n_0q-1)}(R) = \coprod R_j$$

即ち, ある j_1 に対して $c \in R_{j_1} \subset Q^{(1)}$ が成り立つ. 以上のことから c と α は R_{j_1} の境界を構成する, α のある逆像 $\alpha' \in f^{-k}(\alpha)$ の external rays によって分離される (Figure 4.6). これらの更に逆像をとると Figure 4.6 にあるとおりの annulus が構成される. □

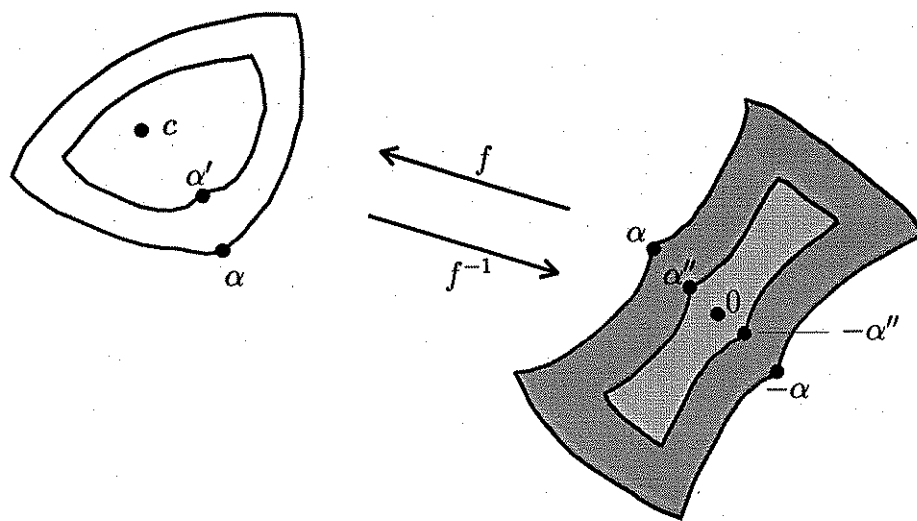


Figure 4.6 annulus の構成 ($f^{-1}(\alpha) = \pm\alpha$, $f^{-1}(\alpha') = \pm\alpha''$ である).

Lemma 4.1.2 にある N を **separation level** という.

$A_n(x) := P_n(x) - \overline{P_{n+1}(x)}$ と書くことにすると, Lemma 4.1.2 は f がくりこみ可能でないなら, ある n に対して $A_n(x)$ が annulus になることを示している. このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod } A_n(x) = \infty$ となるかどうかの問題となる. 実際, これが示されれば Lemma 2.3.11 から $\text{diam } P_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成立することがわかる.

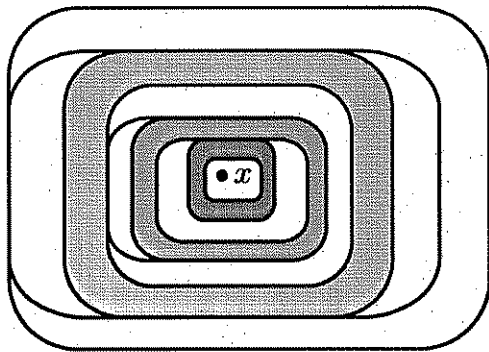
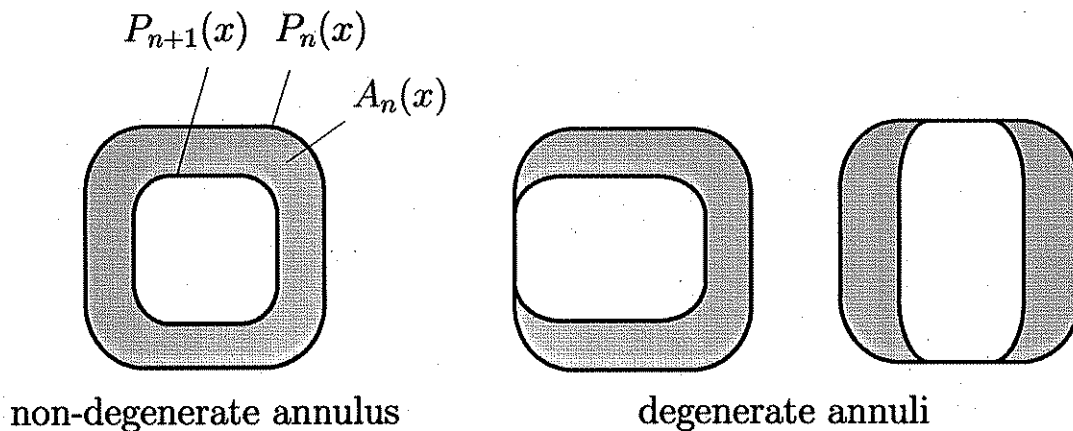


Figure 4.7 $P_n(x)$ と $A_n(x)$.

$x \in K^*$ としたときの puzzle piece $P_n(x)$ の持つ性質をまとめると以下のようになる:

1. $P_n(x) \supset P_{n+1}(x)$ であり, 写像 $f: P_n(x) \rightarrow f(P_n(x)) = P_{n-1}(f(x))$ は $0 \notin P_n(x)$ なら全単射, $0 \in P_n(x)$ なら 2 対 1 の branched covering.
2. $P_n(x)$ は単連結で, $\overline{P_n(x) \cap K_c}$ は連結.
3. $A_n(x) := P_n(x) - \overline{P_{n+1}(x)}$ とおくと, ある $N > 1$ が存在し $\overline{P_{N+1}(0)} \subset P_N(0)$ が成立する, 即ち $A_N(0)$ は非退化な annulus になる (ただし「 p_c はくりこみ可能でない」の条件の下).

ここで $A_n(x)$ が annulus でない, 即ち, 退化した annulus になるときは $\text{mod } A_n(x) := 0$ と定義する (Figure 4.8 参照).



non-degenerate annulus

degenerate annuli

Figure 4.8 $A_n(x)$ の形.

また f の $A_n(x)$ 上でのふるまいは critical point 0 の位置により次のように分類できる:

1. $0 \in \overline{P_{n+1}(x)}$ のとき

$f : A_n(x) \rightarrow A_{n-1}(f(x))$ で 2 対 1 の covering であり, $\text{mod } A_{n-1}(f(x)) = 2 \cdot \text{mod } A_n(x)$ が成り立つ (Lemma 2.3.9).

2. $0 \notin P_n(x)$ のとき

$f : A_n(x) \rightarrow A_{n-1}(f(x))$ は全単射でありこのときは $\text{mod } A_{n-1}(f(x)) = \text{mod } A_n(x)$ が成り立つ.

3. $0 \in A_n(x)$ のとき

$f : A_n(x) \rightarrow P_{n-1}(f(x))$ であるとしか言えない (あまり情報がない).

以上で説明してきたのは f が「(1 回も) くりこみ可能でない」場合の partition (puzzle) の構成であった. この節の最後に一般の「無限回くりこみ可能ではない」場合のときの partition (puzzle) の構成について簡単に説明しておく. Proposition のかたちで述べる前に次の用語を定義しておく:

Definition 4.1.4. (前) 周期点 z が点 $w_1 (\in K)$ と $w_2 (\in K)$ を分離するとは, w_1 と w_2 が $\mathbb{C} - \cup(z \text{ の external rays})$ の相異なる連結成分に属することをいう (Figure 4.9).

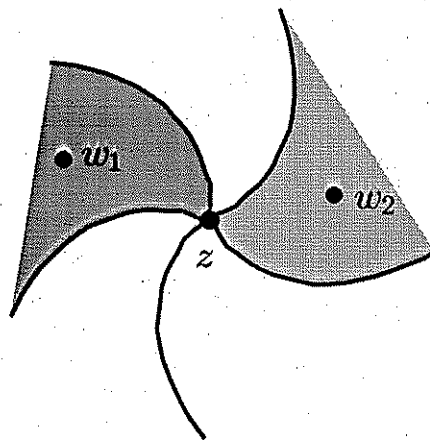


Figure 4.9 (前) 周期点 z が点 w_1, w_2 を分離する.

このとき次のことが成り立つ:

Proposition 4.1.5 (Yoccoz). $f = p_c$ が (NIR) と (APR) を満たすとする. このときある周期点 α と α の逆像 $\alpha' \in f^{-n}(\alpha)$ であって以下の性質を持つものが存在する:

- (i) α は c と 0 を分離する. また, α は c と $f^j(\alpha)$ ($1 \leq j < \text{period}(\alpha)$) を分離する.
- (ii) α' は c と α を分離する. また, α は $f^j(\alpha')$ ($1 \leq j$) と 0 を分離しない.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $\alpha'' \in \cup_{j \geq 0} f^{-j}(\alpha)$ で 0 と $f^n(0)$ を分離するものが存在する. \square

Proposition 4.1.5 を用いると, 無限回くりこみ可能ではない場合には次のようにして partition (puzzle) を構成することができる: Γ_0 を 1 つの equi-potential curve C と $\{f^j(\alpha') \mid j \geq 0\}$ (α' は Proposition 4.1.5 にあるもの) の external rays の C の内部の部分の和集合とする. あとは以前に定義したやり方と全く同様に $\Gamma_n := f^{-n}(\Gamma_0)$ とし, $\mathcal{P}_n, P_n(x), K^*$ などと同様に定義される. このとき Proposition 4.1.5 (i) と (ii) より

$$\overline{P_1(0)} \subset P_0(0)$$

即ち, $A_0(0) := P_0(0) - \overline{P_1(0)}$ が non-degenerate annulus になることがわかる (Figure 4.10). また (3) からは任意の $n \geq 1$ に対して $j \geq 0$ が存在して $f^n(0) \notin P_j(0)$ が成り立つことがわかる.

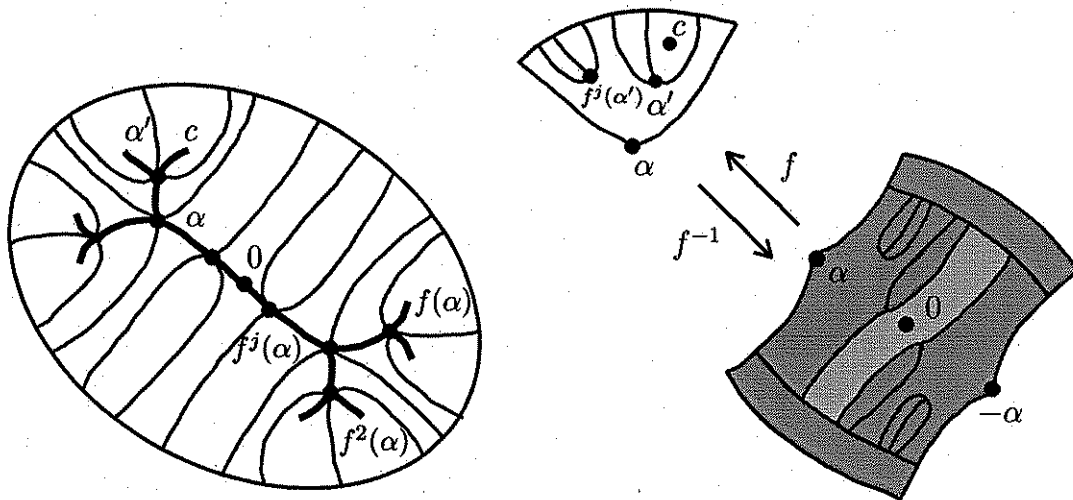


Figure 4.10

4.2 τ -関数と Combinatorial Divergence Theorem

τ -関数とは f と 1 つの partition から決まる $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ なる関数で (ただし $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする), 以下で見るように Axiom of recurrence を満たし, また Branner-Hubbard の Tableau に対応するものである (ちなみに名前は「return time」の “t” からか?).

Definition 4.2.1. τ -関数 $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ を次で定義する:

$$\tau(n) := \max\{-1\} \cup \{n - k \mid 1 \leq k \leq n, f^k(P_n(0)) = P_{n-k}(f^k(0)) \ni 0\}.$$

また

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{N} \mid \tau(n) = -1 \text{ or } \tau(n+1) \neq \tau(n) + 1\}$$

と定義する.

$\tau(n)$ の意味は次のとおりである: $P_n(0)$ を f で写していったとき k 回目で初めて $f^k(P_n(0)) = P_{n-k}(f^k(0))$ が critical point 0 を含んだとすると, $\tau(n) = n - k$ となる. またこのような k が存在しないときは $\tau(n) := -1$ と定義する (Figure 4.11). 標語的に「depth の max, iteration の min」と覚えておいてもよい.

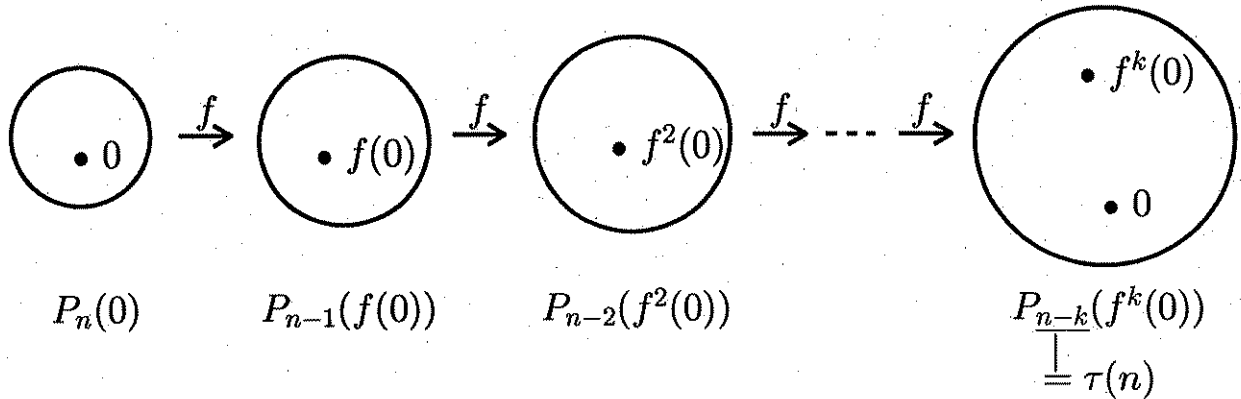


Figure 4.11 $\tau(n)$ の意味.

また $\tau(n)$ と $\tau(n+1)$ の関係を考察すると, Figure 4.12 を見ればわかるとおり

$$(a) 0 \in P_{\tau(n)+1}(f^k(0)), \quad (b) 0 \in P_{\tau(n)}(f^k(0)) - P_{\tau(n)+1}(f^k(0))$$

のどちらかであり, (a) の場合は $\tau(n+1) = \tau(n) + 1$, (b) の場合は $\tau(n+1) < \tau(n) + 1$ となる. このことから特に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$ となることがわかる.

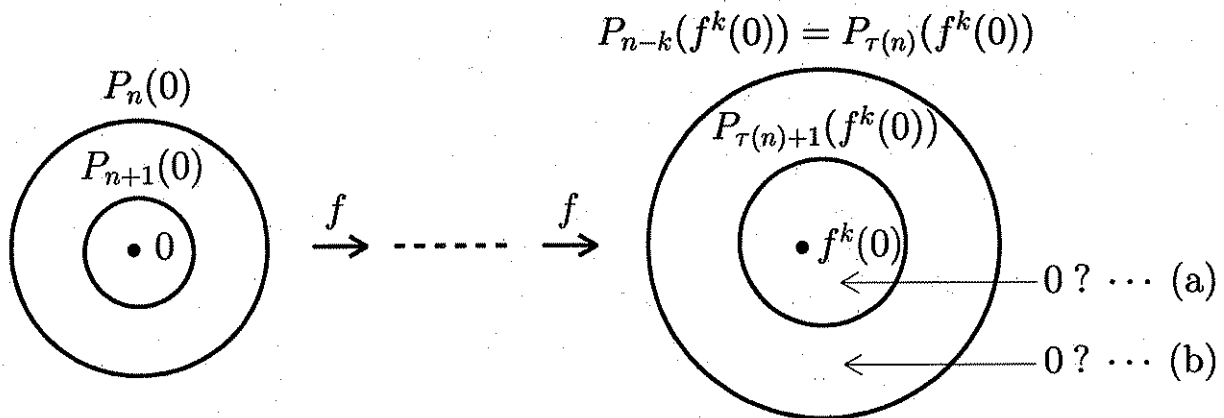


Figure 4.12

またこの考察から Σ は τ の値が n から $n+1$ にかけて増加しないような n 全体であるといえる.

Proposition 4.2.2. (1) (Axiom of recurrence) $n \in \Sigma$ なら $\tau(n+1) = 0$ or -1 または

$$\tau(n+1) = \tau^{k+1}(n) + 1 \quad (k \geq 1, \tau^k(n) \in \Sigma)$$

と表せる. また $\tau(1) = 0$ or -1 である.

(2) $\#\Sigma < \infty$ であるならば f はくりこみ可能である.

(3) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ であることと 0 が combinatorial に non-recurrent であること, 即ち, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $f^n(0) \notin P_N(0)$ ($n = 1, 2, \dots$) となることは同値である.

Remark 4.2.3. Axiom of recurrence の式は

$$\tau(n+1) = \tau(\tau^k(n)) + 1$$

と見る方がわかりやすい.

(Proof) : (1) $\tau(n) = -1$ なら $\tau(n+1) = 0$ or -1 となる. また $\tau(n) \geq 0$ であっても $\tau(n+1) = 0$ or -1 なら何もすることはない. $\tau(n+1) \geq 1$ であるとする. $n \in \Sigma$ の仮定から $k_1 := n - \tau(n)$ とおくと点 $0, f^{k_1}(0)$ と puzzle pieces $P_{\tau(n)}(f^{k_1}(0)) = P_{\tau(n)}(0), P_{\tau(n)+1}(f^{k_1}(0))$ の位置関係は Figure 4.13 の右上のようになる.

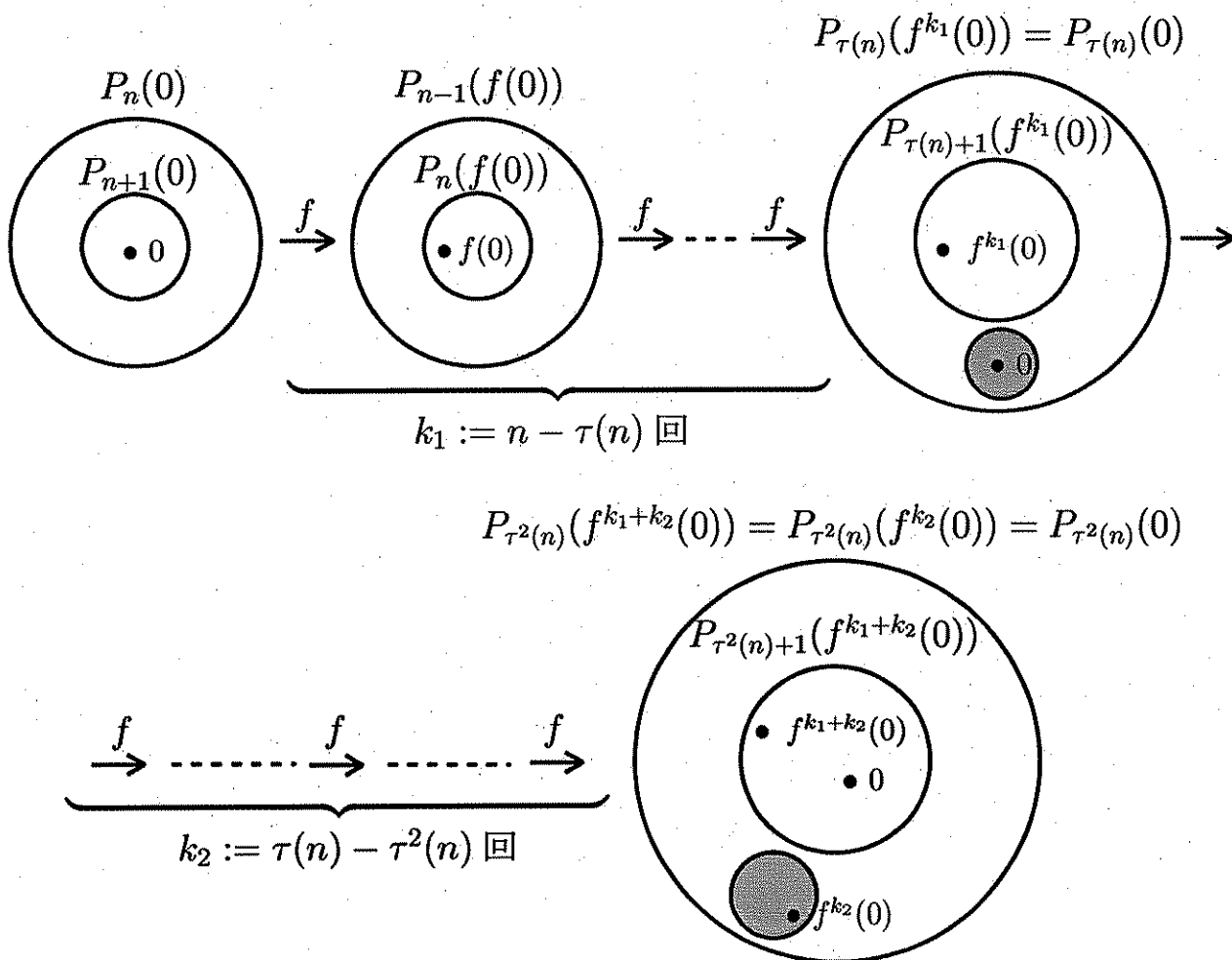


Figure 4.13

即ち, puzzle piece $P_{\tau(n)}(f^{k_1}(0))$ より depth が 1 つ上の piece $P_{\tau(n)+1}(f^{k_1}(0)) = f^{k_1}(P_{n+1}(0))$ を見ると, これは 0 を含まない.

次に $P_{\tau(n)}(0)$ から始めて f で写していったときに puzzle piece が最初に 0 に遭遇するのは depth が $\tau(\tau(n)) = \tau^2(n)$ のときで, $k_2 := \tau(n) - \tau^2(n)$ とすると $\tau^2(n)$ の定義から

$$P_{\tau^2(n)}(f^{k_1+k_2}(0)) = P_{\tau^2(n)}(f^{k_2}(0)) = P_{\tau^2(n)}(0)$$

となる. また $f^{k_1+k_2}(0) \in P_{\tau^2(n)}(0)$ であるが, ここで depth が 1 つ上の piece を見ると $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_1+k_2}(0))$ は $P_{\tau^2(n)}(f^{k_1+k_2}(0))$ の部分集合で 0 を含むか含まないかのどちらかである. もし含めば (= Figure 4.13 右下の場合)

$$\tau(n+1) = \tau^2(n) + 1 = \tau^{1+1}(n) + 1$$

である. また更に $\tau(n) = \tau^1(n) \in \Sigma$ である. なぜなら 0 を含む, depth が $\tau(n)+1$ の piece $P_{\tau(n)+1}(0)$ は f^{k_2} によって $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_2}(0))$ に写り, これは 0 を含まない (即ち, Figure 4.13 右上の dot をつけた piece は右下の dot をつけた piece に写る. もしこうならず $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_2}(0))$ が 0 を含むと仮定すると, piece の写り方から f は 3 対 1 の写像になってしまうのでこれは f が 2 次多項式であることに矛盾). よって

$$\tau(\tau(n) + 1) \neq \tau(\tau(n)) + 1$$

である.

また, $P_{\tau^2(n)+1}(f^{k_1+k_2}(0))$ が 0 を含まなければ $\tau^3(n)$ を考えて同じ議論を繰り返すと $\tau(n+1) \geq 1$ としていたから, いつかは

$$\tau(n+1) = \tau^{k+1}(n) + 1 \quad (k \geq 1, \tau^k(n) \in \Sigma)$$

となる k を見いだすことができる ($\tau^k(n) \in \Sigma$ となる理由も同様である).

(2) $\#\Sigma < \infty$ であることと, 一般に $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$ であることから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $m \geq N$ に対して $\tau(m+1) = \tau(m) + 1$ が成立する (Figure 4.14 参照).

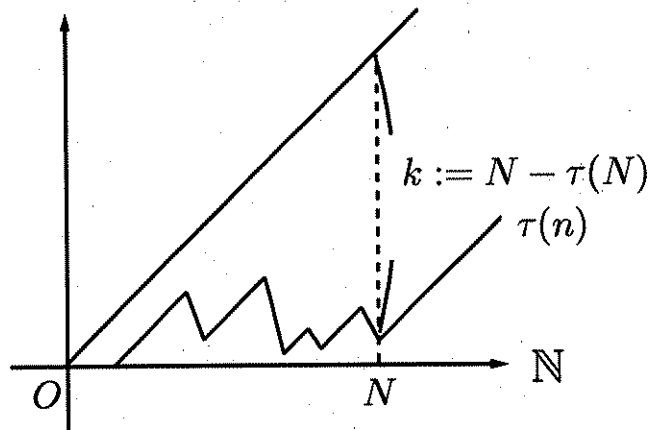


Figure 4.14

そこで $k := N - \tau(N)$ とするとまず,

$$f^k : P_N(0) \rightarrow P_{N-k}(f^k(0)), \quad P_N(0) \subset P_{N-k}(f^k(0))$$

となる. また任意の $m \geq N$ に対して $\tau(m+1) = \tau(m) + 1$ であることから

$$f^{nk}(0) \in P_N(0) \quad (n \geq 0)$$

がわかる (注: $m \geq N$ なら $m - \tau(m) \equiv k$ である). 従って

$$P_N(0) \Subset P_{N-k}(f^k(0)) \quad (\text{即ち, } P_{N-k}(f^k(0)) - \overline{P_N(0)} \text{ は annulus})$$

のときは f は k を周期としてくりこみ可能であると言える. また $P_N(0) \Subset P_{N-k}(f^k(0))$ でない, 即ち, $P_N(0)$ と $P_{N-k}(f^k(0))$ が境界を一部共有して $P_{N-k}(f^k(0)) - \overline{P_N(0)}$ が annulus にならない可能性も考えられるが, $P_N(0)$ と $P_{N-k}(f^k(0))$ の body を少し修正 (大きくする) して f^k を quadratic-like map にすることができるので (注: 詳しくは, §5.2 Theorem A の証明の最初の部分を見よ), やはり f は k を周期としてくりこみ可能である.

(3) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ のとき $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる. この N に対してある n_0 が存在して $f^{n_0}(0) \in P_N(0)$ となったとすると $P_N(0) = P_N(f^{n_0}(0))$, 即ち $0 \in P_N(f^{n_0}(0))$ が成り立つ. τ -関数の定義から $\tau(n)$ は「 $P_n(0)$ から出発して puzzle piece が 0 を含むときの最大の depth」であったから, $P_N(f^{n_0}(0)) = f^{n_0}(P_{N+n_0}(0))$ であることを考慮して $\tau(N+n_0)$ を考えると, このことは $N \leq \tau(N+n_0)$ であることを示している. これは N の定義に反する. 従って 0 は combinatorial に non-recurrent である.

逆に 0 が combinatorial に non-recurrent であるとする, ある $N \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(0) \notin P_N(0)$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つ. さて τ -関数の定義から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in P_{\tau(n)}(f^{n-\tau(n)}(0))$ となり, 従って $P_{\tau(n)}(f^{n-\tau(n)}(0)) = P_{\tau(n)}(0)$ が成り立つ. ここで $\tau(n) > N$ とすると $P_{\tau(n)}(0) \subset P_N(0)$ であるから $f^{n-\tau(n)}(0) \in P_N(0)$ となり, これは N の定義に反する. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau(n) \leq N$ が成り立つので $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau(n) < \infty$ である. \square

Remark 4.2.4. $\tau(n) = -1$ のときを, その代わりに $\tau(n) := 0$ と定義してしまっても大差はない. 宍倉氏は最近こちらの定義を採用している.

次に $\tau(n)$ が満たす基本的性質をいくつか見ていくことにする.

Lemma 4.2.5. (1) $\tau(n) \leq n - 1$, また一般に $\tau^k(n) \leq n - k$ ($k \in \mathbb{N}$) が成立する.

(2) $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$ が成立する.

(Proof): (1) k に関する帰納法で示す. まず $\tau(n) \leq n - 1$ は τ の定義から明らかである. 次に $k \in \mathbb{N}$ に対して $\tau^k(n) \leq n - k$ が成立していたとすると $k+1$ のとき

$$\tau^{k+1}(n) = \tau(\tau^k(n)) \leq \tau^k(n) - 1 \leq (n - k) - 1 = n - (k + 1)$$

となり, $k+1$ のときも成り立つ.

(2) Figure 4.12 のところで説明したとおりであるが, 念のためもう一度説明しておく. $\tau(n)$ の定義より $P_n(0)$ から出発して $n - \tau(n)$ 回目以前の iteration ではその像は 0 を含まない. また $P_{n+1}(0) \subset P_n(0)$ であるから $P_{n+1}(0)$ から出発してもやはり, その像は $n - \tau(n)$ 回目

以前の iteration では 0 を含まない. 一方, τ の定義から $P_{n+1}(0)$ は $n+1-\tau(n+1)$ 回目の iteration で 0 を初めて含む. 従って

$$n - \tau(n) \leq n + 1 - \tau(n + 1) \quad \text{即ち} \quad \tau(n + 1) \leq \tau(n) + 1$$

が成り立つ. □

Lemma 4.2.6 (中間値の定理). (1) $a < b, \tau(a) \leq v < \tau(b)$ ならば $a \leq m < b$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ で $\tau(m) = v, m \notin \Sigma$ なるものが存在する.

(2) $\sup \tau = \infty, \tau(a) \leq v$ ならば $a \leq m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ で $\tau(m) = v, m \notin \Sigma$ なるものが存在する.

(Proof): (1) $\tau(n)$ のグラフを考えればほぼ明らかである (Figure 4.15). $m \notin \Sigma$ 即ち $\tau(m+1) = \tau(m) + 1$ となることは Lemma 4.2.5 (2) から従う.

(2) (1) と同様である. □

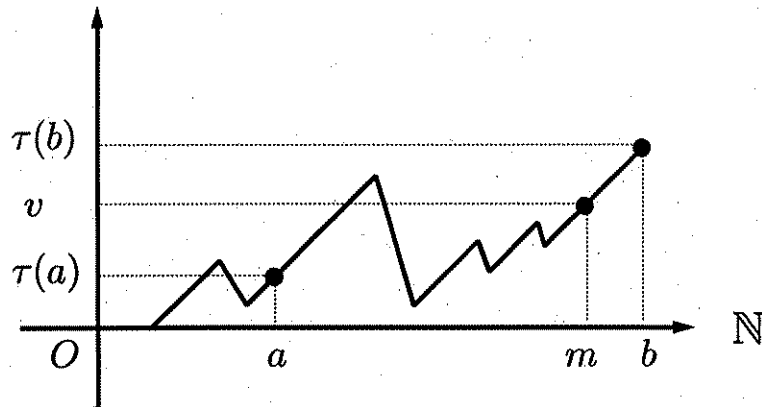


Figure 4.15 $\tau(n)$ に対する中間値の定理.

Proposition 4.2.7 (Branner-Hubbard, Yoccoz, Douady-Hubbard, 宍倉).

$\#\Sigma = \infty, \sup \tau = \infty$ であるとする. 次が成立する:

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\#(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) \geq 1$.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\#\tau^{-1}(n) \geq 2$.
- (3) $k = \sup(\tau^{-1}(n) \setminus \Sigma) < \infty$ ならば $(\bigcup_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}(k)) \cap \Sigma = \emptyset$.

(Proof): (1) $m := \inf \tau^{-1}(n+1) - 1$ とすれば $m \in \tau^{-1}(n) \setminus \Sigma$ である.

(2) $m := \inf \tau^{-1}(n), s := \inf([m, \infty) \cap \Sigma) \in \Sigma$ とすると定義より $m \leq s$. また $s \in \Sigma$ だから Proposition 4.2.2 (1) より

$$\tau(s+1) = 0, -1 \quad \text{または} \quad \tau(s+1) = \tau^{k+1}(s) + 1, \quad (k \geq 1, \tau^k(s) \in \Sigma)$$

である. $\tau(s+1) = 0, -1$ なら $\sup \tau = \infty$ の仮定と中間値の定理より主張は成り立つ. $\tau(s+1) = \tau^{k+1}(s) + 1$ なら $\tau^{k+1}(s) + 1 \leq n$ を示せばよい. Lemma 4.2.5 より $\tau^k(s) \leq s - k < s$, よって s の定義より $\tau^k(s) < m$, 従って m の定義より $\tau^{k+1}(s) < n$, 即ち, $\tau^{k+1}(s) + 1 \leq n$ となる.

(3) $(\cup_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}(k)) \cap \Sigma \neq \emptyset$ と仮定すると, ある $j_0 \in \mathbb{N}$ に対して $\tau^{-j_0}(k) \cap \Sigma \neq \emptyset$ としても $i = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ に対しては $\tau^{-i}(k) \cap \Sigma = \emptyset$ となるものが存在する. そこで $l \in \tau^{-j_0}(k) \cap \Sigma$ とすると $l \in \Sigma$ だから Lemma 4.2.2 (1) より

$$\tau(l+1) = 0, \text{ or } -1 \quad \text{または} \quad \tau(l+1) = \tau^{s+1}(l) + 1, \quad (s \geq 1, \tau^s(l) \in \Sigma)$$

となる s が存在する (注: (2) の証明で使った s とは異なる). ここでまず, $k < l$ となることに注意しておこう. これは l の定義と Lemma 4.2.5 から

$$\tau^{j_0}(l) = k \leq l - j_0 < l$$

となるからである.

さて $\tau(l+1) = 0$ or -1 なら矛盾である. なぜなら仮定より $\sup \tau = \infty$ だから中間値の定理より $l+1 < l'$ なる l' で $\tau(l') = n$ となり, $l' \notin \Sigma$ となるものが存在する. よって $l' \in \tau^{-1}(n) \setminus \Sigma$ であり, 一方, 先に注意した $k < l$ から $k < l'$ であるからこれは k の定義に反する.

$\tau(l+1) = \tau^{s+1}(l) + 1$ のときは, 背理法の仮定の下で $\tau(l+1) \leq n$ を以下で示す. これが示せば先に示した $\tau(l+1) = 0$ or -1 のときと同じ議論で同じ矛盾が出る. さてまず

$$\tau^i(l) \notin \Sigma \quad (1 \leq i \leq j_0) \quad (4.1)$$

である. なぜなら $\tau^i(l) \in \tau^{-(j_0-i)}(k)$ で $\tau^{-(j_0-i)}(k) \cap \Sigma = \emptyset$ であったから (4.1) が従う. すると, (4.1) と $\tau^s(l) \in \Sigma$ より $s \geq j_0 + 1$ であることがわかる. 一方,

$$\tau^s(l) = \tau^{s-(j_0+1)} \circ \tau \circ \tau^{j_0}(l) = \tau^{s-(j_0+1)} \circ \tau(k) = \tau^{s-(j_0+1)}(n) \quad (4.2)$$

であり, $\tau^s(l) \in \Sigma$ であるから, (4.2) と Lemma 4.2.5 の $\tau^t(n) \leq n - t$ を使うと

$$\tau(l+1) = \tau(\tau^s(l)) + 1 = \tau(\tau^{s-(j_0+1)}(n)) + 1 = \tau^{s-j_0}(n) + 1 \leq n - (s - j_0) + 1 \leq n$$

となる. ただし, 最後の不等号のところで $s \geq j_0 + 1$ を使った. よって $\tau(l+1) \leq n$ が示せた. \square

Definition 4.2.8. τ -関数に対して **weight function** $\mu(n)$ を次のように帰納的に定義する: 自然数 N を Lemma 4.1.2 (Separation Lemma) で存在が保証されている, $A_N(0)$ が annulus になるような N (separation level) とし, それを1つとり固定する. 次に $\mu(N) := 1$ と定義する. また $0 \leq n < N$ なる n に対しては $\mu(n) := 0$ と定義し, $N < n$ なる n に対しては帰納的に $\mu(n-1)$ まで決まったとき

$$\mu(n) := \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(\tau(n)) & \text{if } n \notin \Sigma \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって定義する.

定義より特に $n \in \Sigma$ なら $\mu(n) = 0$ となることに注意せよ. また, この weight function の定義は次のように表現することもできる:

Proposition 4.2.9.

$$\mu(n) := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{if } \tau^k(n) = N, \tau^i(n) \notin \Sigma \ (i=0, 1, \dots, k-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(Proof): まずこの式において $\tau^k(n) = N$ となる k は存在するなら一意的であることを注意しておく. 実際,

$$\tau^{k_0}(n) = N = \tau^{k_1}(n), \quad k_0 < k_1$$

であったとすると Lemma 4.2.5 (1) を使って計算すると

$$N = \tau^{k_0}(n) = \tau^{k_1-k_0}(\tau^{k_0}(n)) = \tau^{k_1-k_0}(N) \leq N - (k_1 - k_0)$$

となるので矛盾を生じる. さて $\mu(n) \neq 0$ であるとする μ の定義より

$$\mu(n) = \frac{1}{2} \mu(\tau(n)), \quad n \notin \Sigma$$

である. Lemma 4.2.5 (1) より $\tau(n) \leq n-1$ であるから帰納的に $\mu(\tau(n))$ の値が決まってくる. $\mu(n) \neq 0$ だから定義より

$$\mu(n) = \frac{1}{2^2} \mu(\tau^2(n)), \quad \tau(n) \notin \Sigma$$

となる. 一般に $\tau^k(n) \leq n-k$ であるから $n > \tau(n) > \tau^2(n) > \dots$ と減少していき, 更に $\mu(n) \neq 0$ と仮定しているから, ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $\tau^k(n) = N$ となるしかない (注: もし, ある k で $\tau^k(n) < N < \tau^{k-1}(n)$ となるとすると, μ の定義より $\mu(n) = 0$ となってしまう). そしてこのとき確かに

$$\mu(n) = \frac{1}{2^k} \mu(N) = \frac{1}{2^k}, \quad \tau^k(n) = N, \tau^i(n) \notin \Sigma \ (i=0, 1, \dots, k-1)$$

が満たされている. □

$\mu(n)$ の意味はこの節の最後に述べることにして (Proposition 4.2.16), とりあえずこの節の目標である次の定理の証明をしておこう.

Theorem 4.2.10 (Combinatorial Divergence Theorem). $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ を Axiom of recurrence を満たす関数, $\mu(n)$ を weight function とする. このとき $\#\Sigma = \infty$, $\sup \tau = \infty$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成立する.

Remark 4.2.11. もともと τ -関数は2次多項式の力学系から定義されたものであったが、この定理は $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ が Axiom of recurrence を満たし、Lemma 4.2.5, 4.2.6 が成り立つ関数であれば何であってても成立する。そのときの weight function については、適当に $N \in \mathbb{N}$ を1つ決めて定義すればよく、また特に $\mu(N) = 1$ とする必要もない ($\mu(N) > 0$ なら何でもよい)。ここでは抽象的な扱いは避け、具体的な意味 (Proposition 4.2.16) をもたせるために先程のように μ を定義した。

(Proof): (i) $\#(\tau^{-1}(N) \setminus \Sigma) = \infty$ の場合:

$n_0 \in \tau^{-1}(N) \setminus \Sigma$ とすると、 μ の定義から $\mu(n_0) = \frac{1}{2}$ となる。このような n_0 が無限個存在するので $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$ となる (少なくとも $\frac{1}{2}$ を無限回加えることになるので...).

(ii) $\#(\tau^{-1}(N) \setminus \Sigma) < \infty$ の場合:

$k := \sup(\tau^{-1}(N) \setminus \Sigma)$ とおくと Proposition 4.2.7 (3) より

$$\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \tau^{-j}(k)\right) \cap \Sigma = \emptyset \quad (4.3)$$

である。(4.3) と Proposition 4.2.7 (2) より、任意の $l \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \tau^{-j}(k)$ に対して

$$\#\{\tau^{-1}(l) \setminus \Sigma\} \geq 2$$

であることがわかる。これから一般に

$$\#\{\tau^{-j}(k) \setminus \Sigma\} \geq 2^j$$

が従う。また、 μ の定義から $l \in \tau^{-j}(k) \setminus \Sigma$ なら $\mu(l) = \frac{1}{2^j}$ であり、更に

$$\tau^{-i}(k) \cap \tau^{-j}(k) = \emptyset, \quad (i \neq j)$$

である。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) &\geq \sum_{j \geq 1} \sum_{l \in \tau^{-j}(k) \setminus \Sigma} \mu(l) \\ &\geq \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2^j} \cdot 2^j \\ &= 1 + 1 + \dots = \infty \end{aligned}$$

となる。 □

さて次に各 $x \in K^*$ に対して τ -関数 τ_x と weight function μ_x を定義する。

Definition 4.2.12. 各 $x \in K^*$ に対して τ -関数 $\tau_x: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ を次で定義する:

$$\tau_x(n) := \max\{-1\} \cup \{n - k \mid 0 \leq k \leq n, f^k(P_n(x)) = P_{n-k}(f^k(x)) \ni 0\}.$$

また

$$\Sigma_x := \{n \in \mathbb{N}^* \mid \tau_x(n) = -1 \text{ or } \tau_x(n+1) \neq \tau_x(n) + 1\}$$

と定義する。

$\tau_x(n)$ の意味は $\tau(n)$ のときとほとんど同じで, $P_n(x)$ を f で写していったとき k 回目で初めて $f^k(P_n(x)) = P_{n-k}(f^k(x))$ が critical point 0 を含んだとすると, $\tau_x(n) = n - k$ となる. またこのような k が存在しないときは $\tau_x(n) := -1$ と定義するのである. ただし $n=0$ に対しては $P_0(x)$ が 0 を含んでいるかいないかによって $\tau_x(0) = 0$ または -1 とするので, τ_x の定義域は \mathbb{N} ではなく \mathbb{N}^* である. また定義より τ_x は τ とは違って iteration を考えることはできない.

以下に τ_x と τ との関係と τ_x の満たす性質を挙げておく.

Proposition 4.2.13. (1) $n \in \Sigma_x$ なら $\tau_x(n+1) = 0$ or -1 または

$$\tau_x(n+1) = \tau^{k+1}(\tau_x(n)) + 1 \quad (k \geq 0, \tau^k(\tau_x(n)) \in \Sigma)$$

とかける. また $\tau_x(0) = 0$ or -1 である.

(2) $\tau(n) = \tau_{f(0)}(n-1)$ である.

(3) $\tau_x(n+1) \leq \tau_x(n) + 1$, $\tau_x(n) \leq n$ が成立する.

(4) τ_x に関しても「中間値の定理」が成立する.

(Proof): (1) は Proposition 4.2.2 の証明と同様である. (2) は τ と τ_x の定義からほぼ明らかであろう. (3) は Lemma 4.2.5 の証明と同様にしてできる. また (4) も Lemma 4.2.6 と同様である. \square

Definition 4.2.14. τ_x に対して weight function μ_x を μ を用いて

$$\mu_x(n) := \mu(\tau_x(n))$$

と定義する.

Theorem 4.2.15 (Combinatorial Divergence Theorem for μ_x).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成立しているとする. このとき $\sup \tau_x = \infty$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_x(n) = \infty$$

が成立する.

(Proof): $\tau_x(0) = 0$ or -1 であり, また仮定より $\sup \tau_x = \infty$ であるから中間値の定理 (Proposition 4.2.13 (4)) より $n \geq 0$ である任意の n に対して $\tau_x(m) = n$ となる $m \in \mathbb{N} \setminus \Sigma_x$ が存在する. 従ってこの m に対しては weight function μ_x の定義から

$$\mu_x(m) = \mu(\tau_x(m)) = \mu(n)$$

が成り立つ. よって

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_x(m) = \sum_{m \in \mathbb{N} \setminus \Sigma_x} \mu_x(m) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) = \infty$$

が成り立つ. □

さて最後に μ と μ_x の意味について解説しておこう :

Proposition 4.2.16. (1) $\mu(n) > 0$ ならば $\text{mod } A_n(0) = \mu(n) \cdot \text{mod } A_N(0)$ が成立する.
 (2) $\mu_x(n) > 0$ ならば $\text{mod } A_n(x) = \mu_x(n) \cdot \text{mod } A_N(0)$ が成立する.

(Proof) : (1) 帰納法で証明する. $0 \leq n < N$ なる n については定義より $\mu(n) = 0$ であるから, 以下では $n \geq N$ とする. $n = N$ に対しては $\mu(N) = 1$ であったから主張は成り立つ. $\text{mod } A_n(0) = \mu(n) \cdot \text{mod } A_N(0)$ が $n = m - 1$ まで成り立つとして $n = m$ のときを考える. $\mu(m) = 0$ ならばやることは何もない. $\mu(m) = \frac{1}{2}\mu(\tau(m)) > 0$ とすると μ の定義より $m \notin \Sigma$, 即ち, $\tau(m) \neq -1$ であり, また

$$\tau(m+1) = \tau(m) + 1$$

であり, しかも $\mu(\tau(m)) > 0$ である. すると $P_m(0)$ を f で写していくと次のようになっている.

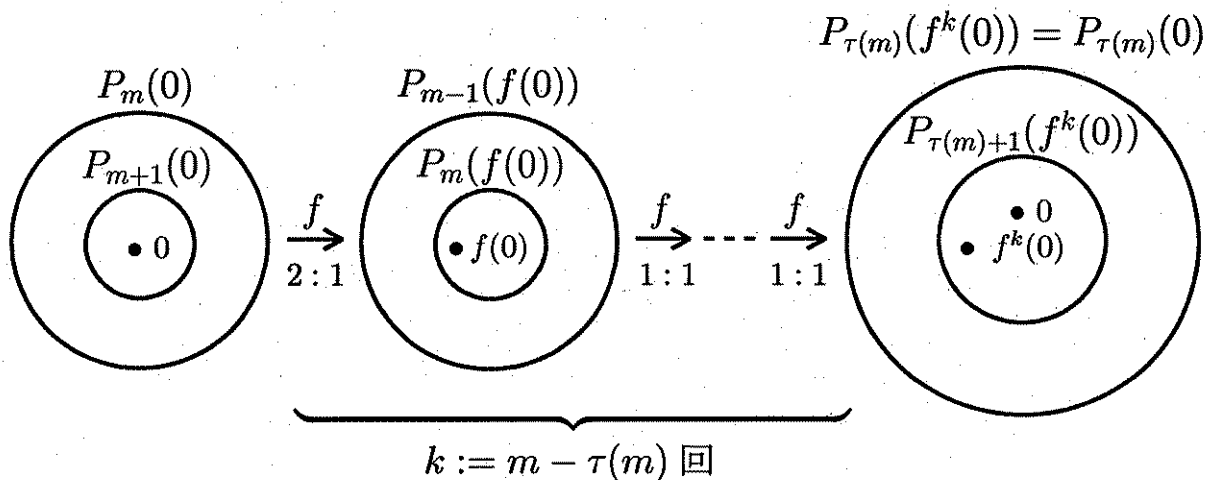


Figure 4.16

帰納法の仮定より

$$\text{mod } A_{\tau(m)}(0) = \mu(\tau(m)) \cdot \text{mod } A_N(0)$$

であり, また Figure 4.16 より

$$f^{m-\tau(m)} : A_m(0) \rightarrow A_{\tau(m)}(0)$$

は 2 : 1 の covering である. これにより modulus が 2 倍になる (Lemma 2.3.9) ことから

$$\text{mod } A_m(0) = \frac{1}{2} \text{mod } A_{\tau(m)}(0) = \frac{1}{2} \mu(\tau(m)) \cdot \text{mod } A_N(0) = \mu(m) \cdot \text{mod } A_N(0)$$

となり $n = m$ のときも成り立つ.

(2) この場合は帰納法ではなく、(1) を使って次のように直接示せる：

$$f^{n-\tau_x(n)} : A_n(x) \rightarrow A_{\tau_x(n)}(x) = A_{\tau_x(n)}(0)$$

は (1) の場合とは違って 1 : 1 の covering, 即ち, 解析同型である。よってこれにより modulus は保たれる (Lemma 2.3.6) ので

$$\text{mod } A_n(x) = \text{mod } A_{\tau_x(n)}(x) = \text{mod } A_{\tau_x(n)}(0)$$

である。更に仮定より $\mu_x(n) = \mu(\tau_x(n)) > 0$ であるから, (1) の結果から

$$\text{mod } A_{\tau_x(n)}(0) = \mu(\tau_x(n)) \cdot \text{mod } A_N(0) = \mu_x(n) \cdot \text{mod } A_N(0)$$

となる。 □

以上のことから, もし f の τ -関数が $\#\Sigma = \infty, \sup \tau = \infty$ を満たせば, Combinatorial Divergence Theorem と Proposition 4.2.16 (1) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod } A_n(0) = \infty$$

が従う。すると Proposition 2.3.11 とその証明の後にある説明から, J_f は $z=0$ で局所連結であるといえる。更に Theorem 4.2.15 と Proposition 4.2.16 (2) より $\sup \tau_x = \infty$ となる点 $z=x$ においても J_f は局所連結であることがわかる。Theorem A の証明の一部分はこのようにしてなされるのである。詳しくは5章以下で述べる。

