はじめに

本稿の目的はタイトルにあるとおり，Yoccoz，宍倉らによる，２次多項式の Julia 集合と Mandelbrot 集合の局所連結性および Lebesgue 測度に関する結果の解説である．手短かに言うと，２次多項式 $p_c(z) = z^2 + c$ が無限回くりこみ可能ではなく，すべての周期点が反発的であるとき

1. p_c の Julia 集合は局所連結であり (Theorem A)，測度 0 (Theorem C),
2. Mandelbrot 集合は c で局所連結であり (Theorem B)，またそのような c 全体は測度 0 (Theorem D),

という結果について解説する．用語を定義せずに述べるとたったこれだけなのだが，background から解説を試みたら予想以上に大部になってしまった．

本稿の構成は以下のとおりである：１章では本稿で証明する４つの定理 (Theorem A, B, C, D) の内容とそれらに関連する話題が述べられる．２章と３章は background としての証明の準備である．２章では双曲的部分集合，density，distortion，それに annulus の modulus の概念とそれらの性質が解説される．３章は Douady と Hubbard による，２次多項式族に関する理論とその基本的な結果の解説に当てられている．これら２つの章では定理の証明に直接には関係のない結果も書かれているが，いずれも複素力学系の background としては重要なものである．４章では Yoccoz によって導入された，２次多項式の Julia 集合に対する “partition” (Yoccoz puzzle) と，それに付随するτ-関数について解説する．これが証明の１番本質的なアイデアの部分である．以上の準備の下で，５章では Julia 集合に関する結果 (Theorem A, C) が，６章では Mandelbrot 集合に関する結果 (Theorem B, D) が証明される．

このノートはもともとは，1996 年 2 月 22 日と 23 日に京都大学に於いて行われた宍倉光広氏による連続講演の Lecture Note として書き始めたものであった．A4 で 30 枚足らずの手書きのノート ([*]) が頼りであったが，この連続講演では時間の都合もあって主に，局所連結性の証明で Yoccoz が導入した puzzle を用いた部分が解説されただけで，証明のそれ以外の部分や測度に関する結果の証明は outline がごく僅かに述べられただけであった．このため，[*] をそのまま TeX に直すだけでは読む側からすれば不完全さが目立つものになるように思えた．そうこうしているうちに中根静男氏から５，６年ほど前に宍倉氏が東京方面で行なった連続講義のノート ([**]) の存在を教えてもらい，そのコピーを送って頂いた．またその後，藤村雅代氏には同じ連続講義の自筆ノートを貸して頂いた．共に 80 ページにも及ぶものである．また，1996 年 12 月 2 日と 3 日には宍倉氏自身に証明の細部を教えて頂いたがこのときにとったノート ([* * *]) が A4 で約 30 枚であった．本稿はこれら３つのノートを元に証明をつけ加えつつまとめ上げたものである．元のノート [*] の内容は１，３，４章と６章の第１節だけであったが，[**] によって２章と Appendix をつけ加えることができ，また３，４，５章を補強することができた．５章の約半分と，６章の全体は，ほぼ全面的に [* * *] によっている．

本稿を完成するまでには実に多くの方々に助けて頂いた．まず第１に，宍倉光広氏にはお忙しい中，個人的に時間をとって頂いただけでなく，研究集会などでお会いする度に discussion をし，また原稿も見て頂いた．中根静男氏と藤村雅代氏のノートは非常に丁寧に

とってあり，大変役に立った．特に藤村氏の自筆ノートの図は３色，ときには４色のカラーで書かれており非常にわかりやすく，その多くを本稿の図として使わせてもらった．また藤村氏には [**] の一部分を TeX ファイルにしたものも送って頂いた（５，６年前にもこのノートと同じような試みがなされようとしたようである）．これは §2.2，§2.3，§3.1.2 それに appendix を書くときの大きな助けとなった．小森洋平氏には彼がとった [*] のノートのコピーを頂いた．自分がとり損なった部分が書かれてあったり，またいろいろと比較ができて大変助かった．石井豊氏には本稿を書きだした頃に１，３章の部分を見てもらい，いくつかのコメントを頂いた．時間がたつにつれてページ数が多くなってきてからは，他の人に原稿を読んで頂くのは迷惑かと思い，あまり見せることをしなかった．が，1997 年６月から７月にかけては３回にわたって京都大学で１章から５章第１節までの部分をセミナーで話させてもらった．そのときには谷口雅彦氏，須川敏幸氏，小森洋平氏，角大輝氏，奥山裕介氏の諸氏から誤植や証明の不備などを指摘して頂いた．この他にもいろいろな方々に様々なコメントや激励の言葉を頂いた．お世話になった方々のすべてに，この場をお借りして感謝申し上げたい．

時間をかけた甲斐あって大部にはなってしまったが，かなりわかりやすいノートに仕上がったと一応思っている．文章だけでは理解しにくい力学系特有の部分も，図を全部で 70 以上使うことによって理解しやすくしたし，また，証明も論文だったら省略するような部分もときには省略せず，かなり丁寧に詳しく書いたつもりである (一部の方々には，もしかしたら「冗長」と思われるかもしれないが…)．ただ，筆者の力量不足と情報不足のために Theorem B と D の証明の一部が outline のみになってしまったは多少，心残りである．完全に理解したい方は Theorem B については Hubbard による解説 ([**H**]) を参照して頂きたい．また Theorem D については宍倉氏本人による論文を待ちたいと思う．

最後に，このノートを作成するにあたり，いろいろな面でお世話になった谷口雅彦氏に特に感謝とお礼を申し上げたい．

(**) なお，この資料は，平成９年度文部省科学研究費補助金 基盤研究 (C)「クライン群の変形理論」(課題番号 09640162，研究代表者　お茶の水女子大　渡辺ヒサ子) の援助により作成されたものである．

1997 年 10 月 7 日

大阪府立大学　総合科学部　数理・情報科学科

木坂　正史

目 次

1 結果 **1**

1.1 結果 1

2 準備 (background) **7**

2.1 双曲的部分集合 (Hyperbolic Subset) 7

2.2 Density and Distortion 14

2.3 Annulus の modulus 32

3 Douady-Hubbard の $z^2 + c$ に関する理論 **47**

3.1 Julia 集合 47

3.1.1 G_c, φ_c, external ray 47

3.1.2 Landing relation 51

3.2 Mandelbrot 集合 56

4 Yoccoz の方法 **61**

4.1 Partition (puzzle) の構成 61

4.2 $\boldsymbol{\tau}$-関数と Combinatorial Divergence Theorem 70

5 Julia 集合に関する結果 — Theorem A, C の証明 **83**

5.1 証明の方針と概略 83

5.2 Theorem A の証明 88

5.3 Theorem C の証明 94

6 Mandelbrot 集合に関する結果—Theorem B, D の証明 **105**

6.1 Comparison Theorem (z-plane $\longleftrightarrow$ c-plane) 105

6.2 Theorem B の証明 111

6.3 Theorem D の証明 113

A Branner-Hubbard の３次多項式に関する理論 **119**

Chapter 1

結果

この章では本稿で証明する4つの定理 (Theorem A, B, C, D) の内容を述べ，またそれらに関連する結果について簡単に解説する．

1.1 結果

以下で主に扱うのは2次多項式 $p_c(z) := z^2 + c$ である．ここで z は相空間である複素平面 $\mathbb{C}$ の変数，$c \in \mathbb{C}$ はパラメーターである．一般の2次多項式は適当な affine 変換によりある $p_c(z)$ に共役になり，しかも $c_1 \neq c_2$ なら $p_{c_1}(z)$ と $p_{c_2}(z)$ は affine 変換では共役にならないことは容易に確かめられる．さて，一般に2次以上の多項式 $f(z)$ に対し，**充填 Julia 集合 (filled-in Julia set)** $\boldsymbol{K_f}$，**Julia 集合** $\boldsymbol{J_f}$，**Fatou 集合** $\boldsymbol{F_f}$ を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
K_f &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ が有界 }\},\\
J_f &:= \partial K_f (= \overline{\{\text{ 反発周期点 (repelling periodic points)}\}})\\
F_f &:= \widehat{\mathbb{C}} \setminus J_f.
\end{aligned}
$$

定義より K_f, J_f はコンパクトであり，F_f は開集合である．またこれらの集合はいずれも完全不変 (completely invariant) である．即ち，

$$f(K_f) = K_f = f^{-1}(K_f), \quad f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f), \quad f(F_f) = F_f = f^{-1}(F_f)$$

が成り立つ．K_f の連結性については次の結果が古くから知られている ([**Be**, p.202, Theorem 9.5.1; p.227, Theorem 9.8.1])：

Theorem 1.1.1 (Fatou [F], Julia [J]).
(1) K_f が連結であることと f の $\mathbb{C}$ 内のすべての critical points が K_f に属することは同値である．
(2) f の $\mathbb{C}$ 内のすべての critical point が $\mathbb{C} \setminus K_f$ に属するならば $J_f = K_f$ は Cantor 集合になる．

Remark 1.1.2. Theorem 1.1.1 (2) の逆は必ずしも成立しない．例えば Brolin によって次のことが示されている：

Theorem 1.1.3 (Brolin [Br, p.136, Theorem 13.8]). f を３次多項式とし，ω_1, ω_2 を f の２つの critical point とする．もし $f(\omega_1)$ が反発不動点であり $\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus K_f$ ならば $J_f = K_f$ は Cantor 集合となる．

ちなみに Fatou は Theorem 1.1.1 (2) の逆が成り立つと予想していた ([**F**, p.84])．また次のことが知られているので，Theorem 1.1.1 とあわせると，３次多項式については Julia 集合が Cantor 集合になるための必要十分条件が与えられていることになる．

Theorem 1.1.4 (Branner-Hubbard [BH, p.273, Theorem 5.2]). f を３次多項式とし，ω_1, ω_2 を f の２つの critical point とする．$\omega_1 \in K_f$ かつ $\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus K_f$ であるとき，$K(\omega_1)$ を ω_1 を含む K_f の連結成分とすると，$J_f = K_f$ が Cantor 集合となるための必要十分条件は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(K(\omega_1)) \neq K(\omega_1)$ となることである．

Appendix にある Theorem A.0.1 も参照せよ．また多項式の Julia 集合が Cantor 集合になるための条件に関しては次の予想がある：

Conjecture (Branner-Hubbard [BH, p.324, Conjecture 12.9]). f を多項式とする．J_f が Cantor 集合になるための必要十分条件は $\omega \in K_f$ なる f の任意の critical point と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(K(\omega)) \neq K(\omega)$ となることである．ただし $K(\omega)$ は ω を含む K_f の連結成分である．

２次多項式 $p_c(z)$ の場合は $\mathbb{C}$ 内の critical point は 0 だけであるから，Theorem 1.1.1 の (1), (2) のどちら一方だけが必ずおこる．そこで **Mandelbrot 集合 $\mathcal{M}$** を

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ が連結 }\} = \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \in K_c\}$$

で定義する．ただし $J_c := J_{p_c}$, $K_c := K_{p_c}$ である．

次に，本稿で扱う主結果を述べるために定義をいくつか述べる．

Definition 1.1.5. p_c が **くりこみ可能 (renormalizable)** であるとは $0 \in U \Subset V$ (即ち，$\overline{U} \subset V$) を満たす単連結領域 U, V と自然数 $k \geq 2$ が存在し，次が成立することをいう：

(i) $p_c^k : U \to V$ は proper (即ち，任意のコンパクト集合 $K \subset V$ に対して $(p_c^k)^{-1}(K) \subset U$ がコンパクト) で 2 対 1 の写像,

(ii) 任意の $n \geq 0$ に対し $p_c^{nk}(0) \in U$.

k をくりこみの**周期**という．また p_c が**無限回くりこみ可能 (infinitely renormalizable)** とは無限個の周期 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ に対応してくりこみ可能であることをいう．

Remark 1.1.6. 条件 (i) は $p_U := p_c^k|U$ としたとき (p_U, U, V) が２次の polynomial-like mapping ([**DH2**, p.294, Definition]) であることを，条件 (ii) は polynomial-like mapping (p_U, U, V) の充填 Julia 集合 K_{p_U} が連結であることを示す．また，２次の polynomial-like mapping のことを quadratic-like mapping ともいう．

例えば $\mathcal{M}$ の “コピー”(Figure 1.1 参照) に入る c に対しては最低１回はくりこみ可能である (注：実は p_c がくりこみ可能であることと，c が $\mathcal{M}$ の “コピー”に属することとは同値である).

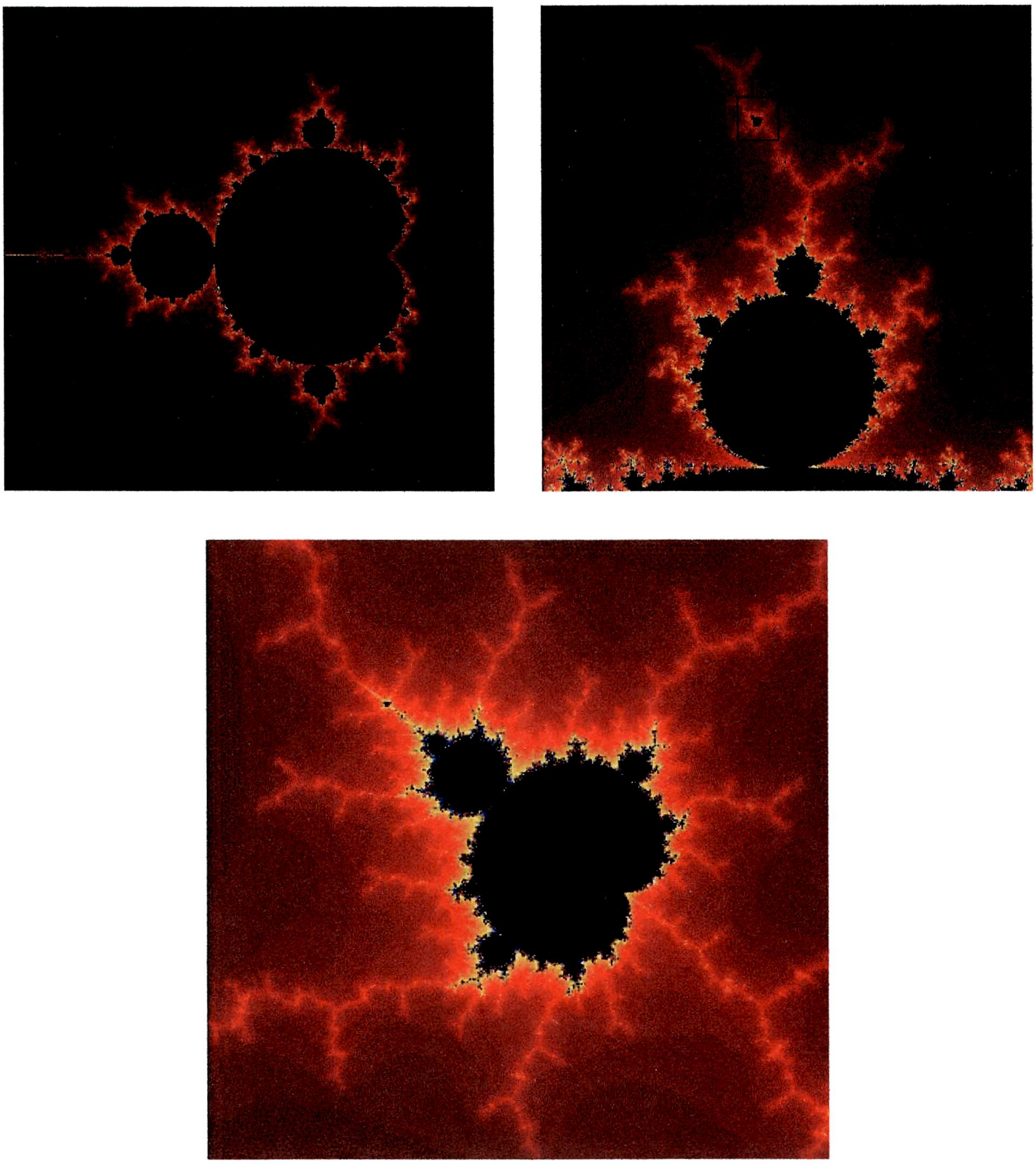

Figure 1.1 Mandelbrot 集合とその “コピー”.

Definition 1.1.7. コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ が $\boldsymbol{x \in X}$ **で局所連結**とは x の ($\mathbb{C}$ での) 基本近傍系 $\{U_n\}$ (即ち，$x \in \operatorname{int} U_n$, $\operatorname{diam} U_n \to 0$) で $U_n \cap X$ が連結になるものが存在することをいう．また，X のすべての点で局所連結であるとき $\boldsymbol{X}$ **は局所連結**であるという．

ここで条件 **(NIR)**, **(APR)** を

(NIR)：p_c は無限回くりこみ可能ではない (<u>N</u>ot <u>I</u>nfinitely <u>R</u>enormalizable),

(APR)：すべての周期点は反発的 (<u>A</u>ll <u>P</u>eriodic points are <u>R</u>epelling),

とすると，主結果は以下のとおりである：

Theorem A (Yoccoz). $c \in \mathcal{M}$ で (NIR), (APR) ならば $J_c = K_c$ は局所連結.

Theorem B (Yoccoz). $c \in \mathcal{M}$ で (NIR) ならば $\mathcal{M}$ は c で局所連結.

Theorem C (Lyubich [Ly1, p.1, Theorem], 宍倉). $c \in \mathcal{M}$ で (NIR), (APR) ならば $\mathrm{Leb}(J_c) = 0$ (ただし Leb は 2 次元 Lebesgue 測度を表す).

Theorem D (宍倉). $\mathrm{Leb}(\{c \in \partial\mathcal{M} \mid \text{(NIR)}\}) = 0$.

ちなみに次の予想は非常に有名である：

Conjecture (MLC). <u>M</u>andelbrot 集合は局所連結 (<u>L</u>ocally <u>C</u>onnected).

K_c，$\mathcal{M}$ の局所連結性は非常に重要である．例えば次の結果はよく知られている：

Theorem 1.1.8 (Douady-Hubbard [DH1]). K_c が局所連結ならば

$$(\partial K_c, p_c) \simeq (S^1/_\sim, z^2)$$

である．(Theorem 2.1.11 参照)

Theorem 1.1.9 (Douady-Hubbard [DH1]). $\mathcal{M}$ が局所連結ならば

$$\{c \in \mathcal{M} \mid p_c \text{ は双曲的 (hyperbolic)}\}$$

は $\mathcal{M}$ の中で稠密である.

Remark 1.1.10. (1) 写像の双曲性 (hyperbolicity) については §2.1 で解説する.

(2) Julia 集合，Mandelbrot 集合に関して以下の事実が知られている：p_c は反発的でない周期軌道を高々 1 つしか持たない．反発的でない周期軌道は以下で見るとおり，attracting, parabolic, irrationally indifferent であるかのいずれかである.

1. $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ (即ち，p_c が反発的でない周期軌道を持たない場合) ならば J_c は Cantor 集合，双曲的 (hyperbolic) で $\mathrm{Leb}(J_c) = 0$ である (Theorem 2.2.1)．更に詳しく $0 < \text{H-dim}\, J_c < 2$ であることもわかる (ただし H-dim は Hausdorff 次元をあらわす) ([**Su**, p.742, Theorem 4]).

2. p_c が吸引周期点 (attracting periodic point) (即ち，$f^k(z_0) = z_0$，$|(f^k)'(z_0)| < 1$) をもてば $\mathrm{int}\, K_c \neq \emptyset$ であり，J_c は J-stable([**MSS**, p.199, Definitions, Theorem B]) である．またこのとき $c \in \mathrm{int}\, \mathcal{M}$ (双曲成分 (hyperbolic component)) であり，K_c と J_c は共に局所連結 ([**DH1**]) で $\mathrm{Leb}(J_c) = 0$ である.

3. p_c が放物型周期点 (parabolic periodic point) (即ち，$f^k(z_0) = z_0$, $|(f^k)'(z_0)| = 1$, $(f^k)'(z_0)$ は 1 のべき根) を持てば $c \in \partial(\mathcal{M}$ の双曲成分) で，$\mathcal{M}$ は c で局所連結となる ([**H**, p.506, Theorem 14.6]). またこのとき K_c は局所連結であり，$\mathrm{Leb}(J_c) = 0$ となる.

4. p_c が無理的中立周期点 (irrationally indifferent periodic point) (即ち，$f^k(z_0) = z_0$, $|(f^k)'(z_0)| = 1$, $(f^k)'(z_0)$ は 1 のべき根ではない) を持つときは，K_c は局所連結になることもあるし (Petersen [**Pe2**, p.163, Theorem A]) ならないこともある (Douady-Sullivan :「多項式 f が Cremer point (即ち，無理的中立周期点で線型化可能でないもの) を持てば K_f は局所連結ではない」([**Su**, p.749, Theorem 8])). ちなみに

$$\mathrm{Leb}(\{c \in \mathcal{M} \mid p_c \text{ が中立周期点を持つ }\}) = 0$$

である (なぜなら，上記の集合は real algebraic curve の可算和で表現される).

5. p_c が無理的中立周期点を持つとき，int K_c が空でない (resp. 空である) ことと，この周期点が線型化可能 (resp. 線型化可能でない) であることは同値である. 線形化可能のための十分条件には Siegel, Brjuno, Yoccoz らの仕事が，線形化不可能な例は Cremer が挙げている (詳しくは [**Mi1**, §8] を参照せよ).

6. $c \in \mathcal{M}$ で p_c が無理的中立周期点を持つならば $\mathcal{M}$ は c において局所連結である ([**H**, p.468, Theorem I.C]. 証明には Yoccoz inequality (§3.1.2, Theorem 3.1.11) が使われる.

(3) 複素 1 次元写像に関するいくつかの予想と，それらに対応する (と思われる) 実単峰写像 (real unimodal map) に関する予想について簡単に述べる. 各々の対応を表にまとめると以下のようになる：

	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
(i)	J_f : 局所連結	wandering interval の非存在
(ii)	$\mathrm{Leb}(J_f) = 0$	wild attractor の非存在
(iii)	hyperbolic map が $\mathcal{M}$ で dense	hyperbolic map が unimodal map の中で dense
(iv)	$\mathrm{Leb}(\partial\mathcal{M}) = 0$	$\mathrm{Leb}(\{c \in \mathbb{R} \mid p_c$ が双曲的でなく，Collet-Eckmann 条件を満たさない $\} = 0$

(ii) に関して wild attractor (定義は [**BKNvS**, p. 97, 98] を参照) の存在については $p_c(z) = z^2 + c$ のときは存在しないことが (Lyubich [**Ly2**, p.529, §4]), $z^{2n} + c$ で n が十分大のときには存在することが Bruin-Keller-Nowicki-van Strien らによって知られている ([**BKNvS**, p.99, Main Theorem]). また (iv) にある Collet-Eckmann 条件とは f を C^1-級の実単峰写像，c をその critical point とするとき

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(c)| > 0$$

が成り立つことを言う.

Chapter 2

準備 (background)

この章では1章で述べた4つの定理を証明するために必要な概念と，それらについて成り立つ結果を解説する.

2.1 双曲的部分集合 (Hyperbolic Subset)

この節では一般の有理写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に対する双曲的部分集合 (hyperbolic subset) と f の双曲性 (hyperbolicity) を定義し，f の双曲性に関する古典的な Fatou の結果 (Theorem 2.1.4) と，後に Theorem C を証明するときに使うことになる Proposition 2.1.5 を示す．ただし，$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は Riemann 球面を表す．なお，一般の有理写像 f に対する Julia 集合，Fatou 集合は

$$
\begin{aligned}
F_f &:= \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } z \text{ のある近傍で正規族をなす}\},\\
J_f &:= \widehat{\mathbb{C}} \setminus F_f.
\end{aligned}
$$

で定義され，これらは f が多項式写像のときは1章で述べたものと一致する.

Definition 2.1.1. $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が f の**双曲的部分集合 (hyperbolic subset)** であるとは，X がコンパクト部分集合であって次の2つの条件を満たすことをいう：

(i) $f(X) \subseteq X$,

(ii) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し X 上で $\|(f^N)'\| \geq 2$ となる.

ここで $\|\cdot\|$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の球面距離 (spherical distance) に関する写像の微分のノルムである．また，J_f が双曲的部分集合であるとき $\boldsymbol{f}$ **は双曲的 (hyperbolic** or **expanding** or **Axiom A)** であるという.

Remark 2.1.2. (1) $f(X) \subsetneq X$ となることもある．例えば反発不動点 p とその逆像 q とからなる集合 $X = \{p, q\}$ を考えればよい (Figure 2.1).

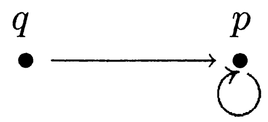

Figure 2.1

(2) 上記定義の条件 (ii) は次の条件と同値である：

ある定数 $C > 0$ と $\lambda > 1$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|(f^n)'\| \geq C\lambda^n$.

従って，条件 $\|(f^N)'\| \geq 2$ の "2" には特に意味はない.

(3) 双曲的部分集合であるという性質は距離のとり方にはよらない.

(4) 双曲的部分集合 X は定義にある条件 (ii) より f の critical point を含まない．また $X \subset J_f$ であることが次のようにして容易にわかる：

(Outline of the Proof) : $\widetilde{X} := X \cap F_f \neq \emptyset$ とすると $f(\widetilde{X}) \subseteq \widetilde{X}$ である．適当に座標変換をして $\mathbb{C}$ の問題にして考えると，U を $U \subset F_f$ を満たす $\widetilde{X}$ の近傍としたとき，$n_i \nearrow \infty$ が存在して $\{f^{n_i}|U\}$ はある極限関数 g に広義一様に収束する．よって $(f^{n_i})' \to g'$ となり，従って $\|(f^{n_i})'\|$ は有界となるので矛盾である. □

Example 2.1.3. $f(z) = z^2$ のとき

$$S^1 = \{z \mid |z| = 1\} = J_f$$

は f の双曲的部分集合である.

この節では次の 2 つの命題を示すのが目標となる：

Theorem 2.1.4 (Fatou). 有理写像 f のすべての critical point が吸引周期軌道に吸引されるならば，f は双曲的である.

Proposition 2.1.5. $A = (A_{ij})$ を成分が 0 または 1 の $N \times N$ 行列，$U_i \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を開集合で $^{\#}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus U_i) \geq 3$ なるもの (即ち，U_i は双曲型 Riemann 面) とする．また，$A_{ij} = 1$ のときには解析的な写像 $g_{ij} : U_j \to U_i$ で

$$f \circ g_{ij} = \mathrm{id}, \quad \overline{g_{ij}(U_j)} \subset U_i$$

を満たすものが存在すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \Sigma_A &:= \{\underline{x} := (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \{1, 2, \ldots, N\},\ A_{x_n x_{n+1}} = 1\}, \\ \theta(\underline{x}) &:= \bigcap_{n \geq 1} g_{x_1 x_2} \circ g_{x_2 x_3} \circ \cdots \circ g_{x_n x_{n+1}}(U_{x_{n+1}}) \end{aligned}$$

とすると次が成立する：

(1) $\theta(\underline{x})$ は 1 点.　(2) $\theta : \Sigma_A \to \widehat{\mathbb{C}}$ は (Hölder) 連続.

(3) $\theta(\Sigma_A) =: X$ は f の双曲的部分集合.

Proposition 2.1.5 のような状況は，例えば次のように２次多項式で Julia 集合が Cantor 集合になる場合におこる：

Example 2.1.6. $p_c(z) = z^2 + c$ で $|c| >> 1$ のとき，Figure 2.2 のように領域 D を 0 を内部に含み $c = p_c(0)$ を内部に含まないようにとり，$p_c^{-1}(D) := D_1 \cup D_2$，$g_1 := (p_c|D_1)^{-1}$，$g_2 := (p_c|D_2)^{-1}$ とすると g_1，g_2 は縮小写像で,

$$J_f = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup g_{x_1} \circ g_{x_2} \circ \cdots \circ g_{x_n}(D) \right)$$

は Cantor 集合になる．このとき $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$U_1 = U_2 := D$，$g_{ij} := g_i$ とおくと $X = J_f$ である.

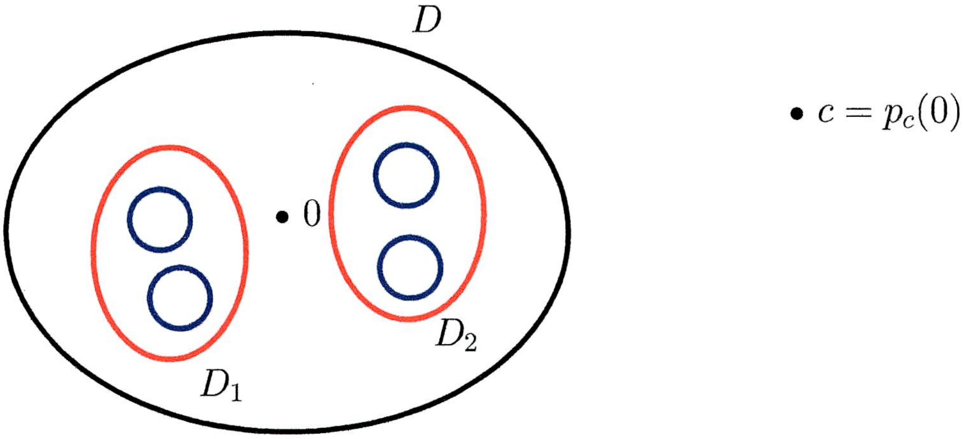

Figure 2.2

ここでこれらの命題の証明に必要な Poincaré metric と Schwarz's Lemma について簡単に解説しておく．S を Riemann 面，$\widetilde{S}$ を S の universal covering space とすると，一意化定理より S は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} := \{z \mid |z| < 1\}$ のいずれかに等角同値となる．S が $\mathbb{D}$ と等角同値になるとき S は**双曲型 (hyperbolic)** であるという．このとき射影 $\pi : \widetilde{S} \to S$ を用いて $\widetilde{S} \simeq \mathbb{D}$ 上の Poincaré metric $\dfrac{|dz|}{1 - |z|^2}$ (注：これは Möbius 変換で不変) から S 上の Poincaré metric を誘導することができる．これらの metric に関する Schwarz's Lemma は次のとおりである：

Lemma 2.1.7 (Schwarz's Lemma). S_1, S_2 を双曲型 Riemann 面，$f : S_1 \to S_2$ を解析的写像とする．このとき次のどちらか１つが成立する：

(i) $\widetilde{f} : \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_2$ は Poincaré 距離に関して等長写像 (isometry) である (注：f 自身は局所等長写像 (local isometry)).

(ii) $x, y \in S_1$，$x \neq y$ ならば $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ が成立する．ただし，d は Poincaré 距離を表す. □

Remark 2.1.8. (i), (ii) のいずれにせよ $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ である．また (ii) の場合には K を S_1 の任意のコンパクト集合とすると，ある定数 $0 < \lambda < 1$ が存在して任意の $x, y \in K$ に対して

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

が成り立つ．

Schwarz's Lemma の簡単な応用としては次のようなものが挙げられる：

Proposition 2.1.9. $i : (S_1, d_1) \hookrightarrow (S_2, d_2)$ を双曲型 Riemann 面間の包含写像とすると

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \quad x, y \in S_1$$

が成立する．特に，$S_1 \subset S_2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ とすると各々の Poincaré metric $\lambda_1(z)|dz|$, $\lambda_2(z)|dz|$ に対して $\lambda_2(z) \leq \lambda_1(z)$ が成立する． □

証明は Schwarz's Lemma からほとんど自明である．この Proposition の使い方の例を 1 つ挙げておく：

Example 2.1.10. $D \subset \mathbb{C}$ を開集合で双曲型である (即ち，$^{\#}(\mathbb{C} - D) \geq 2$) とする．$z \in D$ に対し z と ∂D との Euclid 距離を $\delta(z) := \mathrm{distance}(z, \partial D)$，$D$ の Poincaré metric を $\lambda_D(z)|dz|$ と書くことにする．すると $z_0 \in D$ に対し

$$\Delta := \{z \mid |z - z_0| < \delta(z_0)\} \subset D$$

であり，Δ の Poincaré metric は

$$\frac{\dfrac{1}{\delta(z_0)}|dz|}{1 - \left(\dfrac{|z - z_0|}{\delta(z_0)}\right)^2}$$

なので Proposition 2.1.9 より

$$\lambda_D(z) \leq \frac{\dfrac{1}{\delta(z_0)}|dz|}{1 - \left(\dfrac{|z - z_0|}{\delta(z_0)}\right)^2},$$

特に $z = z_0$ として

$$\lambda_D(z_0) \leq \frac{1}{\delta(z_0)}$$

なる評価が成り立つ．

(Proof of Theorem 2.1.4) : まず，開集合 $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ で $\overline{f^{-1}(U)} \subset U$ を満たし $f: f^{-1}(U) \to U$ が covering になるものの存在を示す (例 : z^2+c, $|c| << 1$ の場合は U としては $S^1 = \partial\mathbb{D}$ を含む annulus を取ればよい).

z_0 を周期 p の吸引周期点とすると z_0 の適当に小さい近傍 $\Delta(z_0)$ (disk でよい) を

$$\overline{f^p(\Delta(z_0))} \subset \Delta(z_0)$$

を満たすようにとれる．更に $\{z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}\}$ を z_0 を含むサイクルとすると各点 z_i の近傍 $\Delta(z_i)$ が

$$\overline{f(\Delta(z_i))} \subset \Delta(z_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \quad (\text{ただし } z_p = z_0)$$

を満たすようにもできる．そこで

$$V_0 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z:\text{吸引周期点}} \overline{\Delta(z)}$$

とし，帰納的に

$$V_{n+1} := f^{-1}(V_n)$$

とすると $f: V_{n+1} \to V_n$ であり，$\Delta(z)$ の取り方から $\overline{V_{n+1}} = \overline{f^{-1}(V_n)} \subset V_n$ が成り立つ．また，仮定より f のすべての critical point は吸引周期点に吸引されるので，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ をとれば任意の critical point ω は

$$f^N(\omega) \in \bigcup_{z:\text{吸引周期点}} \overline{\Delta(z)}$$

を満たす (注 : f の critical point は有限個である)．従って

$$V_N = f^{-N}(V_0) = f^{-N}\Bigg(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z:\text{吸引周期点}} \overline{\Delta(z)}\Bigg)$$

は critical point を 1 つも含まない．よって $f: V_N \to V_{N-1}$ は covering map になる．そこで $U := V_{N-1}$ と取ればよい．この U は双曲型 Riemann 面である．

次に $\pi: \mathbb{D} \to U$ を U の universal covering map とする．U の Poincaré metric をとって考えると，解析的写像 $G_i: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\operatorname{Im} G_i \subsetneqq \mathbb{D}$ を満たすものが存在し，Schwarz's Lemma よりこれは Poincaré metric に関して弱い意味で縮小写像となる (次の可換図式参照) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{D} & \xleftarrow{\quad G_i \quad} & & & \mathbb{D} \\
\pi\downarrow & & & \swarrow & \downarrow\pi \\
U & \hookleftarrow & f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U
\end{array}$$

もとの f に戻って考えればこのことは f が U の Poincaré metric に関して弱い意味で拡大写像であることを示す (注 : コンパクト集合上では真に拡大的である)．U の作り方から

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus U \subset F_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus J_f$$

である．従って

$$J_f \subset \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(U)$$

である．よって f は U の Poincaré metric を コンパクト集合 J_f に制限したものに関して真に拡大的，即ち，J_f 上で

$$\|f'\| \geq \lambda > 1$$

となる定数 $\lambda > 1$ が存在する．これは f が双曲的であることを示している． □

(Proof of Proposition 2.1.5) : (1) 各 U_i は双曲型 Riemann 面であるから Poincaré metric を持ち，$g_{ij} : U_j \to U_i$ は Schwarz's Lemma より弱い意味での縮小写像になる．そこで

$$K_i := \bigcup_{A_{ij}=1 \text{ となる } j} \overline{g_{ij}(U_j)} \subset U_i$$

とすると K_i はコンパクトであるから g_{ij} は K_j 上真に縮小写像であり，その縮小率を $\lambda_j < 1$ とし，$\lambda := \max_{1\leq j\leq N} \lambda_j$ とする．$\underline{x} := (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$ とすると

$$g_{x_n x_{n+1}}(U_{x_{n+1}}) \subset K_{x_n} \subset U_{x_n}, \quad g_{x_{n-1}x_n} \circ g_{x_n x_{n+1}}(U_{x_{n+1}}) \subset g_{x_{n-1}x_n}(U_{x_n}) \subset K_{x_{n-1}}, \ldots$$

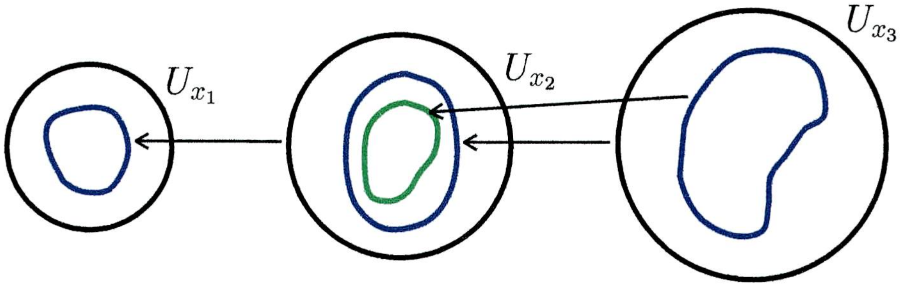

Figure 2.3

となるので (Figure 2.3)，U_{x_1} の Poincaré metric に関して

$$\text{diam}\ (g_{x_1x_2} \circ g_{x_2x_3} \circ \cdots \circ g_{x_nx_{n+1}}(U_{x_{n+1}})) \leq C\lambda^n \to 0$$

となる．

$$g_{x_1x_2}(U_{x_2}) \supset \overline{g_{x_1x_2} \circ g_{x_2x_3}(U_{x_3})} \supset g_{x_1x_2} \circ g_{x_2x_3}(U_{x_3}) \supset \cdots$$

であるから $\theta(\underline{x})$ は 1 点である．

(2) Σ_A 上の距離を次のように定義する：$\underline{x} := (x_n)_{n=1}^{\infty}$，$\underline{y} := (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$ に対して

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \begin{cases} 2^{-n} & x_n \neq y_n,\ x_j = y_j \quad (1 \leq j < n) \\ 0 & \underline{x} = \underline{y} \end{cases}.$$

さてここで $d(\underline{x},\underline{y}) = 2^{-n}$ であるとすると

$$\theta(\underline{x}),\ \theta(\underline{y}) \in g_{x_1x_2} \circ g_{x_2x_3} \circ \cdots \circ g_{x_{n-2}x_{n-1}}(U_{x_{n-1}})$$

なので

$$d_{\text{spherical}}(\theta(\underline{x}),\theta(\underline{y})) \le C'\lambda^n = C'(2^{-n})^{\frac{-\log\lambda}{\log 2}} = C'd(\underline{x},\underline{y})^\alpha, \quad \alpha := \frac{-\log\lambda}{\log 2}$$

となり $\theta : \Sigma_A \to \widehat{\mathbb{C}}$ は (Hölder) 連続になる.

(3) ある正の定数 C_1, $C_2 > 0$ が存在して任意の i に対して

$C_2 \cdot$(球面距離) $\le$ (U_i 上の Poincaré metric を K_i に制限したもの) $\le C_1 \cdot$(球面距離)

が成り立つので

$$2 \cdot \frac{C_1}{C_2} \le \left(\frac{1}{\lambda}\right)^N$$

を満たす $N \in \mathbb{N}$ をとれば，球面距離に関し X 上で

$$\frac{\|f^N(x) - f^N(y)\|}{\|x-y\|} \ge \frac{\frac{1}{C_1}|f^N(x) - f^N(y)|}{\frac{1}{C_2}|x-y|} \ge \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1}{\lambda^N} \ge 2$$

となる．よって

$$\|(f^N)'\| \ge 2$$

が成り立つ. □

最後に双曲的部分集合の応用として，多項式が双曲的であるときに成り立つ次の結果を簡単に述べておく：

Theorem 2.1.11. d 次多項式 f が双曲的であり，K_f は連結であるとする．このとき半共役写像 $\gamma_\infty : S^1 \to \partial K_f = J_f$ で

$$f \circ \gamma_\infty(t) = \gamma_\infty(dt), \quad t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

を満たすものが存在する．また特に J_f は局所連結である.

(Outline of the Proof) : $\gamma_0 := \{Re^{2\pi it} \mid t \in [0,1]\}$ を原点中心の十分大きな円周とする．$\gamma_n : S^1 \to \mathbb{C} - K_f$ が定義されたとき $\gamma_{n+1}(t)$ を

$$f \circ \gamma_{n+1}(t) = \gamma_n(dt)$$

を満たすように構成できる (covering による lift で構成する．Figure 2.4 参照)．この γ_n がある連続曲線 γ_∞ に一様収束することがおおよそ次のようにして示される：f は双曲的であるから J_f のある近傍 U と $N \in \mathbb{N}$ が存在して U 上 $\|(f^N)'\| > \frac{3}{2}$ となる．十分大きな任意の n に対しては $\gamma_n \subset U$ となるので

$$\sup_{t\in S^1} d(\gamma_{n+N}(t), \gamma_{n+N-1}(t)) \le \frac{2}{3} \cdot \sup_{t\in S^1} d(\gamma_n(t), \gamma_{n-1}(t))$$

となる．この評価から結果が従う．

この後 $\gamma_\infty : S^1 \to \partial K_f = J_f$ であることが示せる．このとき γ_∞ が半共役写像の条件を満たすのは構成法から明らかであり，また $J_f = \gamma_\infty(S^1)$ であるから J_f は局所連結である． □

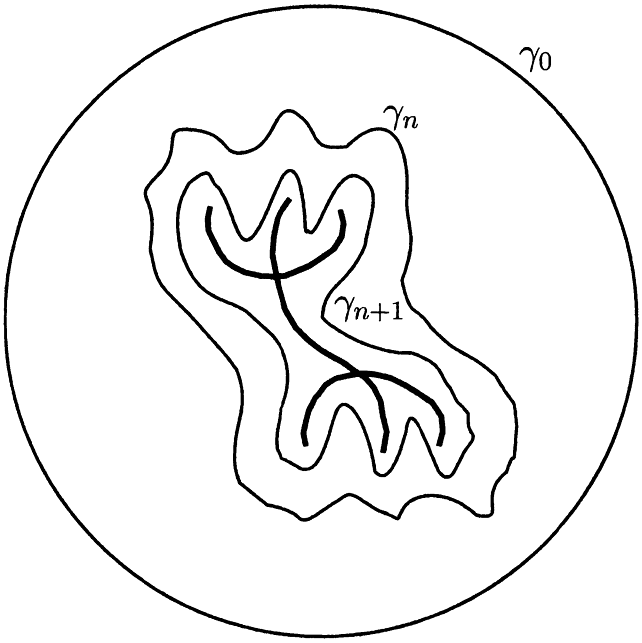

Figure 2.4 γ_∞ の構成法.

2.2 Density and Distortion

可測集合 $X \subset \mathbb{C}$ に対し X の Lebesgue 測度を $|X|$ で表すことにする．この節の目標は次の定理を示すことである：

Theorem 2.2.1. f が有理写像で X が f の双曲的部分集合ならば，$|X| = 0$ である．特に，f が双曲的ならば $|J_f| = 0$ である．

証明には次に定義する density と distortion の概念とその基本性質を適用する：

Definition 2.2.2. 可測集合 $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$ に対し $0 < |Y| < \infty$ のとき

$$\mathrm{density}(X, Y) := \frac{|X \cap Y|}{|Y|}$$

とし，$x_0 \in \mathbb{C}$ に対し x_0 中心，半径 r の円板を $\mathbb{D}_r(x_0)$ と書くことにする．

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{density}(X, \mathbb{D}_r(x_0))$$

が存在するとき，これを，X の x_0 での **density (密度)** とよび，$\mathrm{density}(X, x_0)$ と書く．また $\mathrm{density}(X, x_0) = 1$ となる点 x_0 を X の **density point** という．

この density に関して基本的なのが次の定理である：

Theorem 2.2.3 (Lebesgue's Density Theorem). $|X| > 0$ である可測集合 $X \subset \mathbb{C}$ に対しては X のほとんどすべて (almost all) の点 x について，

$$\mathrm{density}(X, x) = 1$$

が成立する．即ち，X のほとんどすべての点は X の density point である (Figure 2.5 参照).

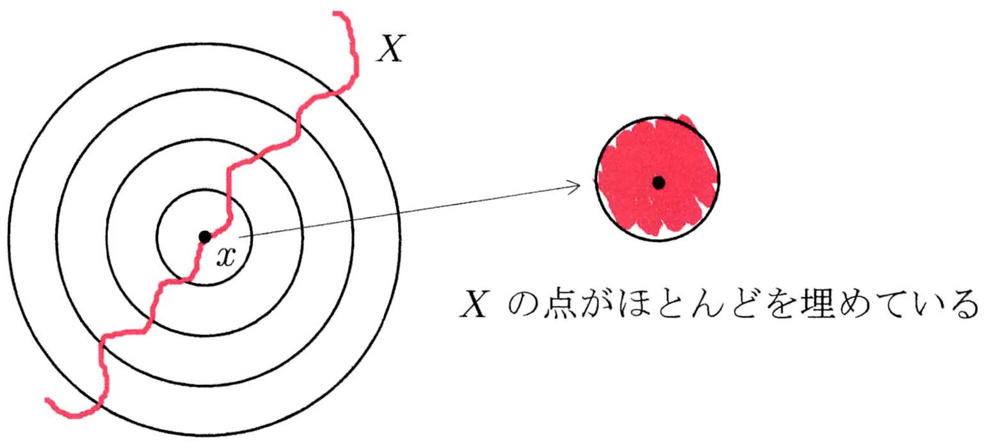

Figure 2.5 Density point.

Definition 2.2.4. $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ を開集合，$f : D_1 \to D_2$ を等角写像 (conformal map) (= 解析的 (analytic) かつ全単射) とする．

$$\mathrm{dist}(f, D_1) := \sup_{z_1, z_2 \in D_1} \left| \log |f'(z_1)| - \log |f'(z_2)| \right|$$

を f の D_1 における **distortion (歪み)** という．また 1-form

$$\eta f := \frac{f''(z)}{f'(z)} dz$$

を f の **nonlinearity** という．

この distortion と nonlinearity に関しては次の基本性質が成立する：

Proposition 2.2.5.

(1) $D_1 \xrightarrow{f} D_2 \xrightarrow{g} D_3$ で f, g が conformal であるとき次の評価が成立する：

$$\mathrm{dist}(g \circ f, D_1) \leq \mathrm{dist}(f, D_1) + \mathrm{dist}(g, D_2).$$

(2) f^* を 1-form の pull-back，即ち $a(y)dy$, $y = f(x)$ のとき $f^*(a(y)dy) := a(f(x))f'(x)dx$ とすると

$$\eta(g \circ f) = \eta f + f^*(\eta g).$$

(3)

$$\mathrm{dist}(f, D_1) \leq \sup_{\gamma:\mathrm{arc} \subset D_1} \left| \int_\gamma \eta f \right|$$

が成立する．特に $D_1 = \mathbb{D}_r(z_0)$ (円板) のときは次のようになる：

$$\mathrm{dist}(f, \mathbb{D}_r(z_0)) \leq 2r \cdot \sup_{z \in \mathbb{D}_r(z_0)} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|.$$

(4) $z_1, z_2 \in D_1$ とすると次の評価式が成立する：

$$e^{-\mathrm{dist}(f,D_1)}|f'(z_1)| \leq |f'(z_2)| \leq e^{\mathrm{dist}(f,D_1)}|f'(z_1)|.$$

(Proof)： (1) $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ の両辺の log をとると

$$\log(g \circ f)'(z) = \log g'(f(z)) + \log f'(z)$$

を得る．これと distortion の定義から結果は容易に従う．

(2)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z) &= g'(f(z)) \cdot f'(z) \\ (g \circ f)''(z) &= g''(f(z))(f'(z))^2 + g'(f(z))f''(z) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \eta(g \circ f) &= \frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'} dz \\ &= \frac{g''(f(z))}{g'(f(z))} f'(z)dz + \frac{f''(z)}{f'(z)} dz \end{aligned}$$

となる．これに f^* の定義を代入すれば結果が得られる．

(3) γ を z_1 と z_2 を D_1 内で結ぶ arc とすると ηf は正則な 1-form であるから γ のとり方によらずに

$$\int_\gamma \eta f = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz = \log f'(z_2) - \log f'(z_1)$$

が成り立つ．ここで log は共通の適当な branch であり，この値は branch のとり方によらない．更に

$$|\log f'(z_2) - \log f'(z_1)| \geq \left| \log \left| \frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \right| \right| = |\log|f'(z_1)| - \log|f'(z_2)||$$

であるから結果が成り立つ.

次に後半部分を示す. まず $\int_\gamma \eta f$ が γ の端点にしかよらないことから

$$\sup_{\gamma:\mathrm{arc}\subset\mathbb{D}_r(z_0)} \left|\int_\gamma \eta f\right| = \sup_{\gamma:\text{線分}\subset\mathbb{D}_r(z_0)} \left|\int_\gamma \frac{f''(z)}{f'(z)}dz\right|$$

である. また

$$\left|\int_\gamma \frac{f''(z)}{f'(z)}dz\right| \le \int_\gamma \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| |dz| \le \left\{\sup_{z\in\mathbb{D}_r(z_0)} \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\right\} \cdot \int_\gamma |dz|$$

であり

$$\sup_{\gamma:\text{線分}\subset\mathbb{D}_r(z_0)} \int_\gamma |dz| = 2r$$

であるから与式が成り立つ.

(4) $|f'(z_1)| \le |f'(z_2)|$ として示せば十分である. このとき最初の不等式は自明. また後半は distortion の定義から

$$\log|f'(z_1)| - \log|f'(z_2)| \le \mathrm{dist}(f, D_1)$$

であるから成り立つ. □

また, distortion と density には次のような関係がある :

Proposition 2.2.6. $f : D_1 \to D_2$ を等角写像, $X \subset \mathbb{C}$ を可測集合とし,

$$d_1 = \mathrm{density}(X, D_1), \quad d_2 = \mathrm{density}(f(X), D_2)$$

とすると (Figure 2.6 参照) 次の不等式が成立する :

$$\frac{d_1}{d_1 + e^{2\mathrm{dist}(f,D_1)}(1-d_1)} \le d_2 \le \frac{e^{2\mathrm{dist}(f,D_1)}d_1}{e^{2\mathrm{dist}(f,D_1)}d_1 + (1-d_1)}.$$

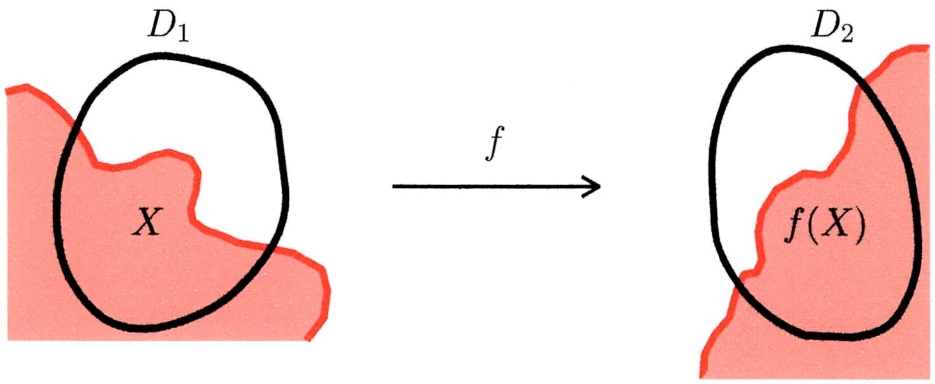

Figure 2.6

(Proof) :

$$P := X \cap D_1, \quad Q := X^c \cap D_1 = D_1 - X$$

とおくと，積分の変数変換公式と積分の平均値定理より

$$|f(P)| = \iint_P |f'(z)|^2 dxdy = a|P|, \quad |f(Q)| = \iint_Q |f'(z)|^2 dxdy = b|Q|$$

と書ける．ここで定数 a, b は

$$\inf_{z\in P} |f'(z)|^2 \le a \le \sup_{z\in P} |f'(z)|^2, \quad \inf_{z\in Q} |f'(z)|^2 \le b \le \sup_{z\in Q} |f'(z)|^2$$

を満たす．よって

$$e^{-2\mathrm{dist}(f,D_1)} \le \frac{a}{b} \le e^{2\mathrm{dist}(f,D_1)} \tag{2.1}$$

である．さて

$$d_1 = \frac{|P|}{|P| + |Q|}$$

であるから

$$d_2 = \frac{|f(P)|}{|f(P)| + |f(Q)|} = \frac{a|P|}{a|P| + b|Q|} = \frac{\frac{a}{b}d_1}{\frac{a}{b}d_1 + (1 - d_1)} \tag{2.2}$$

と書ける．(2.1) で $\frac{a}{b}$ が増大すれば d_2 も増大することが容易にわかるので，(2.1) の $\frac{a}{b}$ の評価を (2.2) に適用して与不等式を得る． □

Remark 2.2.7. この Proposition は,「distortion が有界で $d_1 \to 1$ ならば $d_2 \to 1$」という形で以後使われる (Theorem 2.2.1 の証明を見よ).

Lemma 2.2.8. $X \subset \mathbb{C}$ を $\mathrm{int}\, X = \emptyset$ であるコンパクト集合とすると，任意の $r_0 > 0$ に対してある定数 $C < 1$ が存在して，任意の $r \ge r_0$ と任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{density}(X, \mathbb{D}_r(z)) \le C$$

が成立する．

(Proof) :

$$C := \sup_{(r,z)\in\{r\ge r_0\}\times\mathbb{C}} \mathrm{density}(X, \mathbb{D}_r(z))$$

としたとき $C < 1$ であることを示せばよい．もし $C = 1$ であったとすると点列 $(r_n, z_n) \in \{r \ge r_0\} \times \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$ で

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{density}(X, \mathbb{D}_{r_n}(z_n)) = 1$$

を満たすものが存在する．X はコンパクト，特に有界であるからこのとき $r_n \to \infty$, $z_n \to \infty$ のいずれも起こり得ない．従って必要なら適当に部分列をとって $(r_n, z_n) \to (R_0, z_0)$ となっているとしてよい．このとき $R_0 \neq 0$ であり，また

$$\mathrm{density}(X, \mathbb{D}_r(z)) = \frac{|X \cap \mathbb{D}_r(z)|}{|\mathbb{D}_r(z)|}$$

は (r, z) について連続であるから

$$\frac{|X \cap \mathbb{D}_{R_0}(z_0)|}{|\mathbb{D}_{R_0}(z_0)|} = 1$$

が成り立つ．X がコンパクト，特に閉集合であることを考慮すると，これから X は内点をもつことになり仮定に反する．よって $C < 1$ である．□

Lemma 2.2.9. 有理写像 f の双曲的部分集合 X が $\infty \notin X$ を満たすとする．このときある定数 $\rho > 0$ と $C_1 > 0$ が存在し，任意の $0 < r < \rho$ なる r と任意の $z \in X$ に対して $f|\mathbb{D}_r(z)$ は単射であり，しかも

$$\mathrm{dist}(f, \mathbb{D}_r(z)) \le C_1 \cdot r$$

が成立する．

(Proof) : 双曲的部分集合の定義より X はコンパクトであり，また f の critical point を含まない．従って X の近傍 U で $\overline{U}$ が critical point を含まないものがとれる．また仮定より $\overline{U} \subset \mathbb{C}$, $\infty \notin \overline{U}$ であるとしてよい．任意の $z \in X$ に対してある $r = r(z) > 0$ が存在して $f|\mathbb{D}_r(z)$ が単射となる．X はコンパクトであるから X はこのような $U_r(z)$ の有限個 $U_{r_i}(z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ で被覆される．そこで $\rho' := \min_{1 \le i \le k} r_i > 0$ とする．このとき

$$C_1 := 2 \cdot \sup_{z \in \overline{U}} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|, \quad \rho := \min(\rho', \mathrm{distance}(X, \partial U))$$

とおくと，$0 < r < \rho$ なら $\mathbb{D}_r(z) \subset U$，即ち $\mathbb{D}_r(z)$ は critical point を含まず，また $f|\mathbb{D}_r(z)$ は単射である．また残りの主張は Proposition 2.2.5 (3) からただちに従う．□

Lemma 2.2.10. $f : \mathbb{D}_r(z_0) \to D' \subset \mathbb{C}$ が conformal であり，ある $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)$ で

$$|f(z_1) - f(z_0)| \ge \rho$$

となる点が存在するなら

$$\mathbb{D}_{e^{-C} \cdot \rho}(f(z_0)) \subset f(\mathbb{D}_r(z_0))$$

が成立する．ただし $C = \mathrm{dist}(f, \mathbb{D}_r(z))$ である．

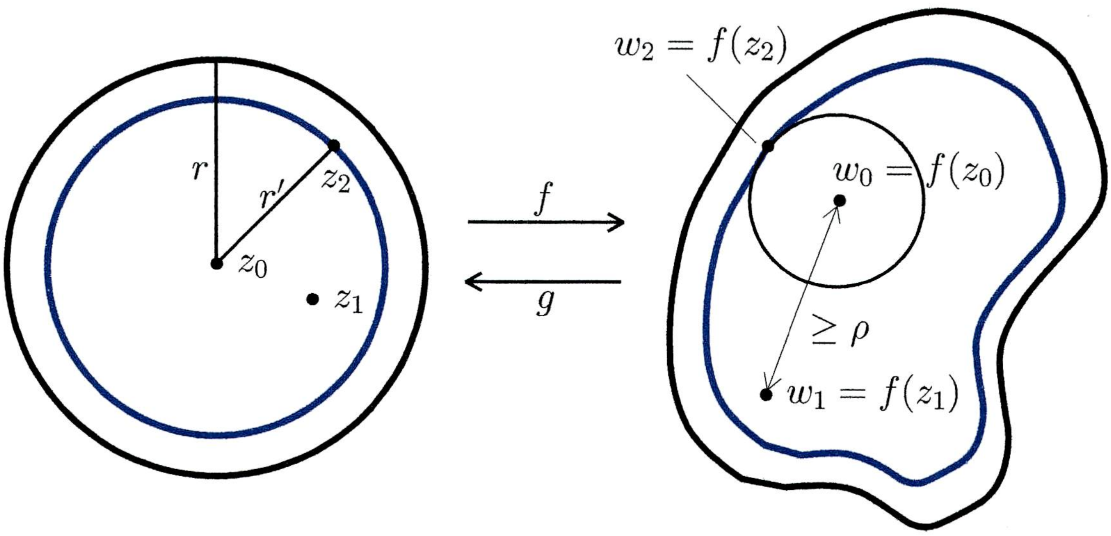

Figure 2.7

(Proof) : $|z_0 - z_1| < r' < r$ を満たす r' を1つとる．f は conformal であるから逆写像が存在するのでそれを g とする．また

$$|z_0 - z_2| = r', \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_1) = w_1, \quad f(z_0) = w_0,$$

であるとする．ただし z_2 は $|f(z) - f(z_0)|$ が最小になるような $\{z \mid |z - z_0| = r'\}$ 上の点とする (Figure 2.7)．このとき次の評価が成り立つ (ただし，式中の積分の積分路は w_0 と w_2 を結ぶ線分とする)：

$$\begin{aligned} |z_2 - z_0| \;=\; r' &= |g(w_2) - g(w_0)| \\ &= \left| \int_{w_0}^{w_2} g'(u)du \right| \\ &\leq \int_{w_0}^{w_2} |g'(u)||du| \\ &= \int_{w_0}^{w_2} \frac{|du|}{|f'(g(u))|} \\ &\leq \frac{e^C}{|f'(g(u_1))|}|w_0 - w_2| \end{aligned}$$

ただし u_1 は $f(\mathbb{D}_r(z_0))$ 内の任意の点であり，Proposition 2.2.5 (4) の評価を用いた．従って

$$|w_2 - w_0| \geq r'|f'(g(u_1))|e^{-C} \tag{2.3}$$

が成り立つ．一方，次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} \rho &\leq |f(z_0) - f(z_1)| \\ &\leq \left\{ \max_{v \in \text{「}z_0\text{と}z_1\text{を結ぶ線分」}} |f'(v)| \right\} \cdot |z_0 - z_1| \\ &\leq |f'(v_0)| \cdot r' \end{aligned} \tag{2.4}$$

ただし v_0 は (2.4) の２番目の式中の max の値をとる点である．従って u_1 を $g(u_1) = v_0$ を満たすような点としてとると，(2.3) と (2.4) の評価式から

$$|w_2 - w_0| \geq \rho e^{-C}$$

を得る．w_2 の定義からこれは

$$\mathbb{D}_{e^{-C}\cdot\rho}(f(z_0)) \subset f(\mathbb{D}_{r'}(z_0))$$

であることを示している．$r' < r$ であったから

$$\mathbb{D}_{e^{-C}\cdot\rho}(f(z_0)) \subset f(\mathbb{D}_r(z_0))$$

が成り立つ． □

以上の結果を用いると Theorem 2.2.1 を証明するための鍵となる次の Main Lemma が示せる：

Lemma 2.2.11 (Main Lemma). f の双曲的部分集合 X に対し，以下の条件を満たすような正の定数 δ, ε, $C > 0$ が存在する：$0 < r < \delta$ なる任意の r と任意の $z \in X$ に対し，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して

(i) $f^n|\mathbb{D}_r(z)$ は単射,

(ii) $\mathrm{dist}(f^n, \mathbb{D}_r(z)) \leq C$,

(iii) $f^n(\mathbb{D}_r(z)) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(f^n(z))$.

Remark 2.2.12. この Lemma は，どんなに小さな $\mathbb{D}_r(z)$ も f の iteration によって一定のサイズ ε まで引き伸ばされ，しかもその間の distortion は z と r によらないある定数 C でおさえられる，ということを示している (Figure 2.8 参照).

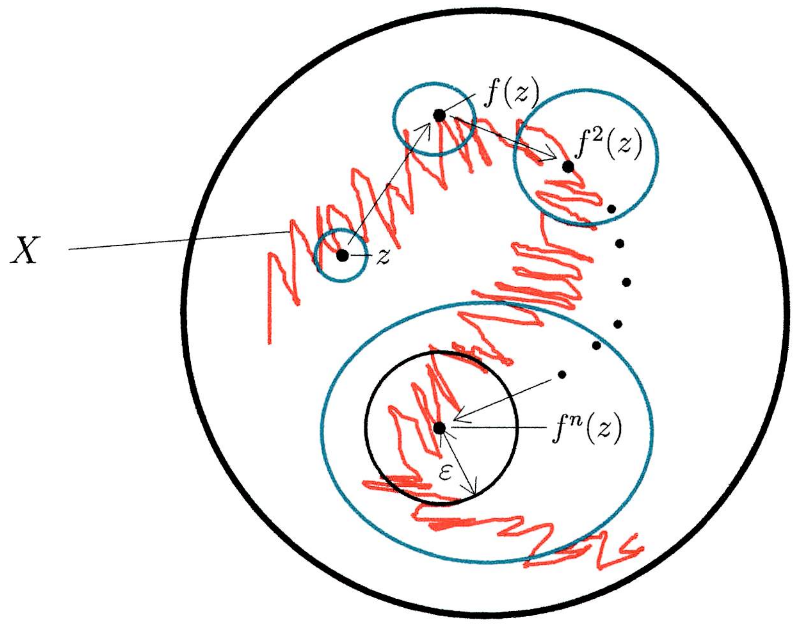

Figure 2.8

(Proof) : X は双曲的部分集合なので，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して X 上 $\|(f^N)'\| \geq 2$ となるわけであるが，簡単のため以下では X 上 $\|f'\| \geq \lambda > 1$ となる場合を考える．一般の場合は f の代わりに，適当な $N_0 \in \mathbb{N}$ をとって f^{N_0} について考察すればよい．

まず Xに対し Lemma 2.2.9 を満たすような定数 $\rho > 0$, $C_1 > 0$ がとれる．この ρ を小さくとり直すことにより

$$\lambda_1^{-1} := e^{C_1 \cdot \rho} \cdot \lambda^{-1} < 1$$

となるようにできる．よって δ としてはこの ρ をとればよい (注 : 以下では δ とは書かず，ρ と書くことにする)．そこで

$$C := \frac{2\rho C_1}{1 - \lambda_1^{-1}} \left(= 2\rho C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1^j} \right)$$

と定義し，また

$$D_j := f^j(\mathbb{D}_r(z)), \quad 0 < r < \rho, \quad j = 0, 1, \cdots$$

とおく．すると $D_0 \xrightarrow{f^n} D_n$ が conformal となり，しかも

$$f^j(z) \in D_j \subset \mathbb{D}_\rho(f^j(z)) \ (0 \leq j < n), \quad D_n \not\subset \mathbb{D}_\rho(f^n(z)) \tag{2.5}$$

を満たすような自然数 n が存在することが示せる．実際，n を大きくしていくと $f^n : D_0 \to D_n$ が conformal でなくなるか (即ち，1 対 1 でなくなる)，または $D_n \not\subset \mathbb{D}_\rho(f^n(z))$ となる．いずれにせよある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $D_m \not\subset \mathbb{D}_\rho(f^m(z))$ となる．よって (2.5) を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．そして $f|D_j$ $(0 \leq j < n)$ は単射であるから (ρ は $z \in X$ のとき $f|\mathbb{D}_\rho(z)$ が単射になるようなものであった)，$f^n|D_0$ は単射，即ち conformal である (ただし，$f^{n+1}|D_0$ は単射ではないかもしれない)．

すると Proposition 2.2.5 (1) より

$$\mathrm{dist}(f^n, D_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{dist}(f, D_j)$$

が成り立つ．また Lemma 2.2.9 より

$$\mathrm{dist}(f, D_j) \leq \mathrm{dist}(f, \mathbb{D}_{\tilde{r}}(f^j(z))) \leq C_1 \cdot \tilde{r} \leq C_1 \cdot \mathrm{diam}\ D_j$$

が得られる．ただし $\tilde{r} > 0$ は

$$D_j \subset \mathbb{D}_{\tilde{r}}(f^j(z)) \subset \mathbb{D}_\rho(f^j(z)), \quad \tilde{r} < \mathrm{diam}\ D_j$$

を満たすものである．更に

$$\mathrm{diam}\ D_j \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-j-1} \cdot \mathrm{diam}\ D_{n-1} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{n-j-1} \cdot \mathrm{diam}\ D_{n-1} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{n-j-1} \cdot 2\rho$$

なる評価が成り立つので，以上のことから

$$\mathrm{dist}(f^n, \mathbb{D}_r(z)) = \mathrm{dist}(f^n, D_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} 2\rho C_1 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{n-j-1} \leq C$$

が成立する.

以上で (i) と (ii) が示せた. 次に (iii) を以下で示す. $\mathrm{dist}(f^n, D_0) \le C$ でありまた, $D_n \not\subset \mathbb{D}_\rho(f^n(z))$ であるから, ある $z_1 \in D_0$ で $f^n(z_1) \notin \mathbb{D}_\rho(f^n(z))$ となるものが存在する. 従って Lemma 2.2.10 から

$$\mathbb{D}_{e^{-C}\cdot\rho}(f^n(z)) \subset f^n(D_0)$$

であることがわかる. 即ち, $e^{-C} \cdot \rho =: \varepsilon$ とすればよい (Figure 2.9). □

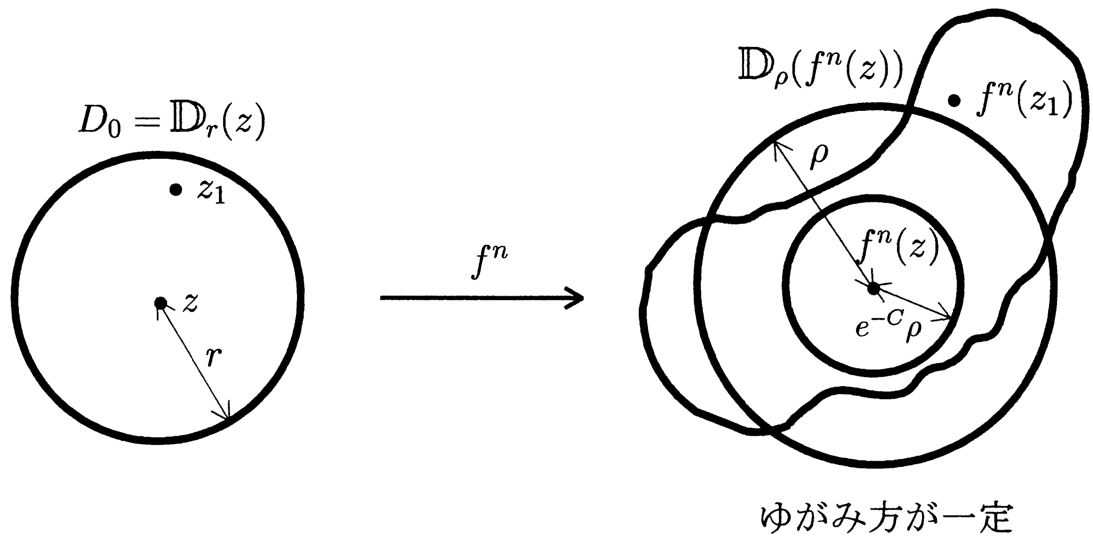

Figure 2.9

Main Lemma を用いるとこの節の目標であった Theorem 2.2.1 は次のように示される：

(Proof of Theorem 2.2.1)： まず, $\mathrm{int}X = \emptyset$ であることを示す. X は双曲的部分集合であるから $X \subset J_f$ である. $\mathrm{int}X \neq \emptyset$ とすると, 有理写像の基本的性質 ([**Be**, p.65, Theorem 4.1.2; p.69, Theorem 4.2.5]) から

$$\#\left(\widehat{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\ge 0} f^n(\mathrm{int}X)\right) \le 2$$

である. しかも $\bigcup_{n\ge 0} f^n(\mathrm{int}X) \subset X$で X はコンパクト, 特に閉集合だから $X = \widehat{\mathbb{C}}$ となる. すると X は f の critical point を含むことになり矛盾. よって $\mathrm{int}X = \emptyset$ である.

そこで以下では $|X| > 0$ と仮定して矛盾を導く. X に対して Main Lemma を満たす定数 δ, ε, $C > 0$ が存在するのでそれをとり固定する. Lemma 2.2.8 で $r_0 = \varepsilon$ とすると

$$\mathrm{density}(X, \mathbb{D}_r(z)) \le C_2 < 1, \quad (r \ge \varepsilon,\ z \in \mathbb{C}) \tag{2.6}$$

となるような定数 C_2 が存在する. また Lebesgue's Density Theorem (Theorem 2.2.3) より X の density point z_0, 即ち, 点 $z_0 \in X$ で

$$\mathrm{density}(X, z_0) = 1$$

となるものが存在する．更に Main Lemma より任意の $0 < r < \delta$ に対してある $n = n(r) \in \mathbb{N}$ で $f^n|\mathbb{D}_r(z_0)$ が単射で

$$f^n(\mathbb{D}_r(z_0)) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(f^n(z_0)), \quad \mathrm{dist}(f^n, \mathbb{D}_r(z_0)) \leq C$$

となるものが存在する．z_0 は density point であったから

$$\frac{|X \cap \mathbb{D}_r(z_0)|}{|\mathbb{D}_r(z_0)|} \to 1 \quad (r \to 0)$$

従って Proposition 2.2.6, Remark 2.2.7 より

$$\mathrm{density}(f^{n(r)}(X), f^{n(r)}(\mathbb{D}_r(z_0))) \to 1 \quad (r \to 0)$$

が成り立ち，これと $f^{n(r)}(X) \subset X$ より

$$\mathrm{density}(X, f^{n(r)}(\mathbb{D}_r(z_0))) \to 1 \quad (r \to 0)$$

が成り立つ．$|X| < \infty$ だからこれは

$$\left|f^{n(r)}(\mathbb{D}_r(z_0)) - X\right| \to 0 \ \ (r \to 0)$$

を示す．従って

$$\left|\mathbb{D}_\varepsilon(f^{n(r)}(z_0)) - X\right| \to 0 \ \ (r \to 0)$$

即ち

$$\mathrm{density}(X, \mathbb{D}_\varepsilon(f^{n(r)}(z_0))) \to 1 \ \ (r \to 0)$$

となり，これは (2.6) に反する． □

ここで単葉関数論における結果で，複素力学系でよく使われる Koebe's Distortion Theorem と Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem について簡単に説明しておく．

まず，Koebe's Distortion Theorem は次のとおりである ([**Po**, p.9, Theorem 1.3])：

Theorem 2.2.13 (Koebe's Distortion Theorem).
$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0)$ とし $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が univalent (単葉，即ち，analytic かつ 1 対 1) で $f(0) = 0$ を満たすとすると，次の評価が成立する：

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}|f'(0)| \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}|f'(0)|.$$ □

この定理からただちに次のことが従う：

Corollary 2.2.14 . $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ univalent のとき，f にはよらない定数 $C(r)$ が存在して

$$\mathrm{dist}(f, \mathbb{D}_r(0)) \leq C(r)$$

が成立する (実際，$C(r) = \left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^4$ ととれる)． □

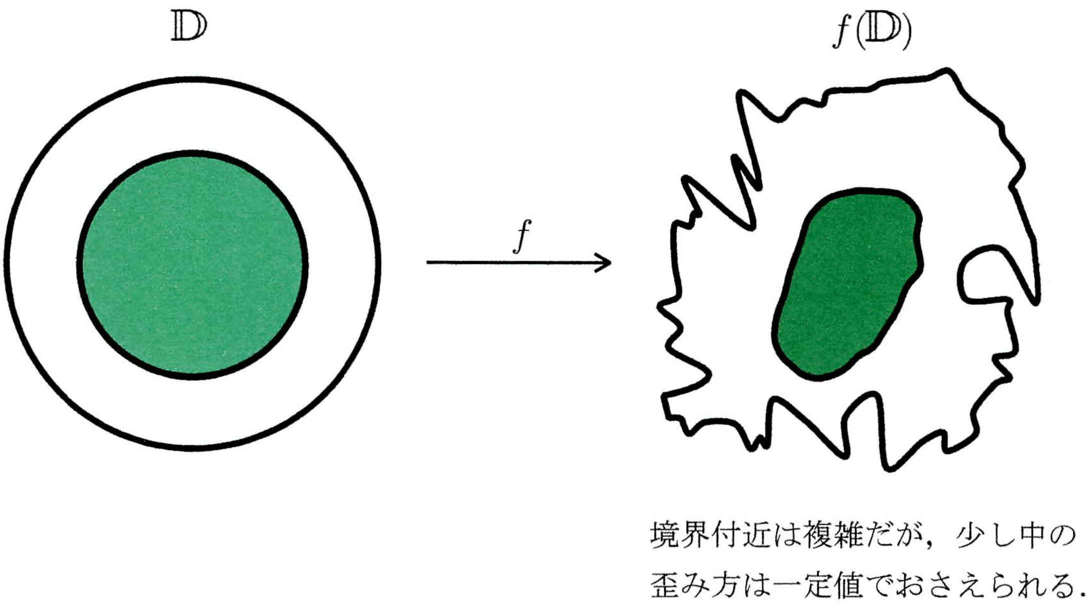

Figure 2.10 Koebe's Distortion Theorem.

また，Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem とは次のようなものである ([**Po**, p.9, Corollary 1.4])：

Theorem 2.2.15 (Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem).
$f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ が univalnet であるとき次が成立する：

$$f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}_{\frac{1}{4}|f'(0)|}(f(0)). \qquad \square$$

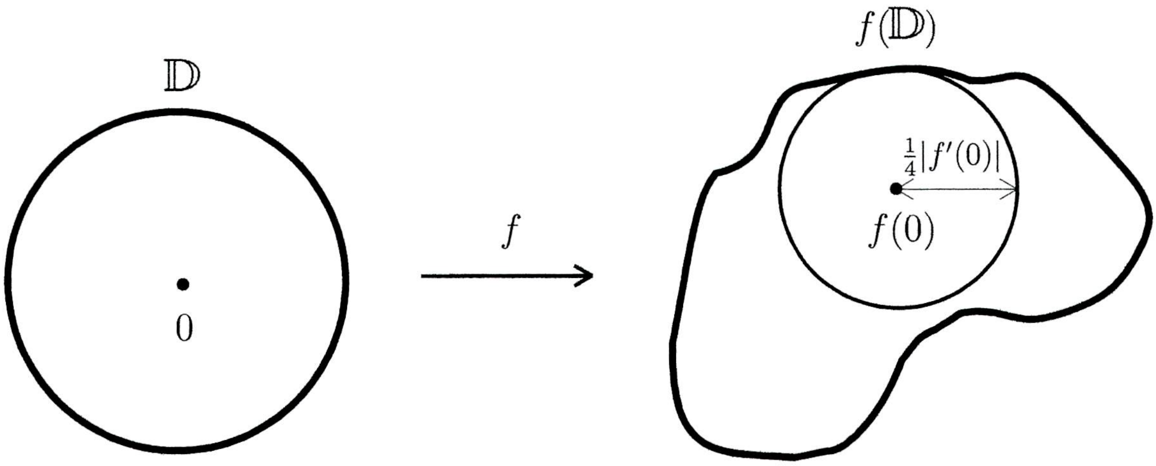

Figure 2.11 Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem.

有理写像 f の逆写像 f^{-n} の branch は，もし存在すれば自動的に univalent であるから，これらの定理を適用する対象になることに注意しておく．

次にこれら 2 つの定理の応用を 1 つずつ述べる．まず，Koebe's Distortion Theorem の応用として次の定理が挙げられる：

Theorem 2.2.16. f を有理写像とし，また $z_0 \in J_f$ で $J_f \neq \widehat{\mathbb{C}}$ とする．ある $\varepsilon > 0$, $r_j \searrow 0$ $(j \to \infty)$ と $n_j \nearrow \infty$ $(j \to \infty)$ で

- $f^{n_j}|\mathbb{D}_{r_j}(z_0)$ は injective,
- $f^{n_j}(\mathbb{D}_{r_j}(z_0)) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(f^{n_j}(z_0))$

となるものが存在するならば (Figure 2.12)，z_0 は J_f の density point ではない．即ち，density$(J_f, z_0) \neq 1$ である．

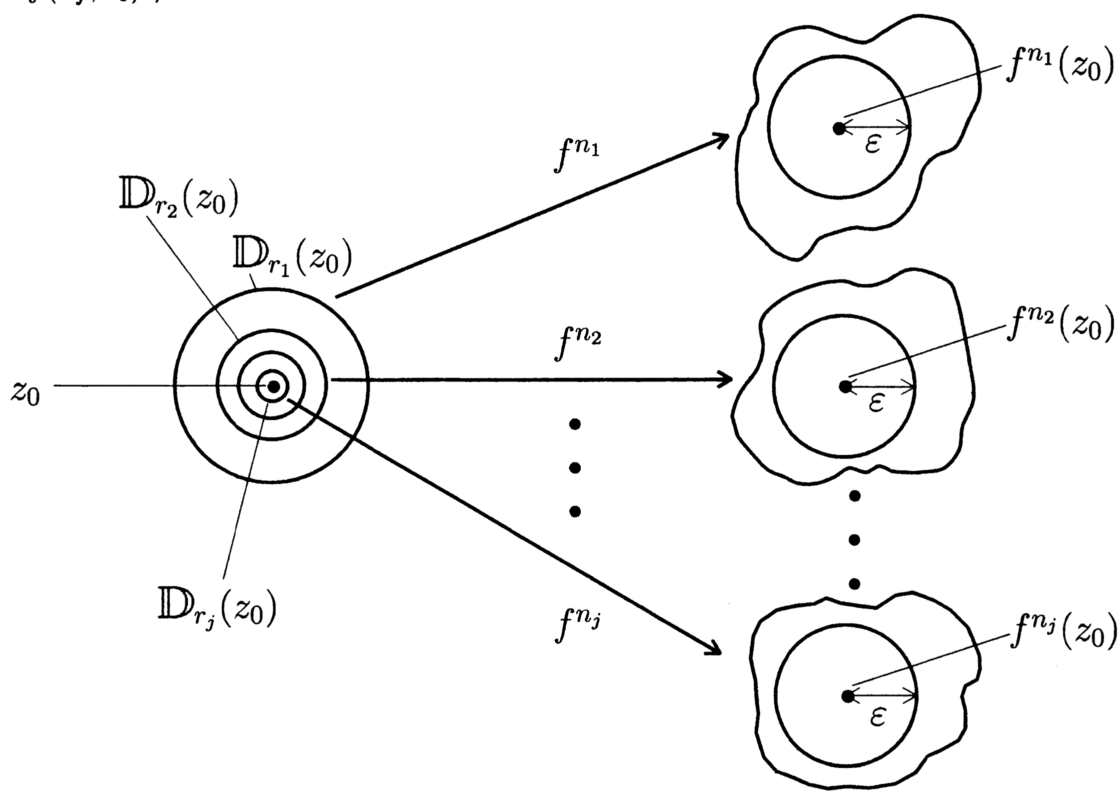

Figure 2.12 z_0 に縮んでいく円板の列 $\{\mathbb{D}_{r_j}(z_0)\}_{j=1}^{\infty}$ で，f の十分高い iteration によってある一定の大きさ (半径 ε) の円板を含むように，しかも injective にうつされるものが存在する．

Corollary 2.2.17 . $J_f \neq \widehat{\mathbb{C}}$ でありかつ $|J_f| > 0$ であるとする．このとき，z_0 が J_f の density point ならば，

$$\omega(z_0) \subset \bigcup_{c \in \{\text{crit. pts. of } f\}} \omega(c)$$

が成り立つ．ただし $\omega(z)$ は z の ω-limit set，即ち

$$\omega(z) := \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^j(z) \mid j \geq n\}}$$

である．

(Proof of Theorem 2.2.16) :

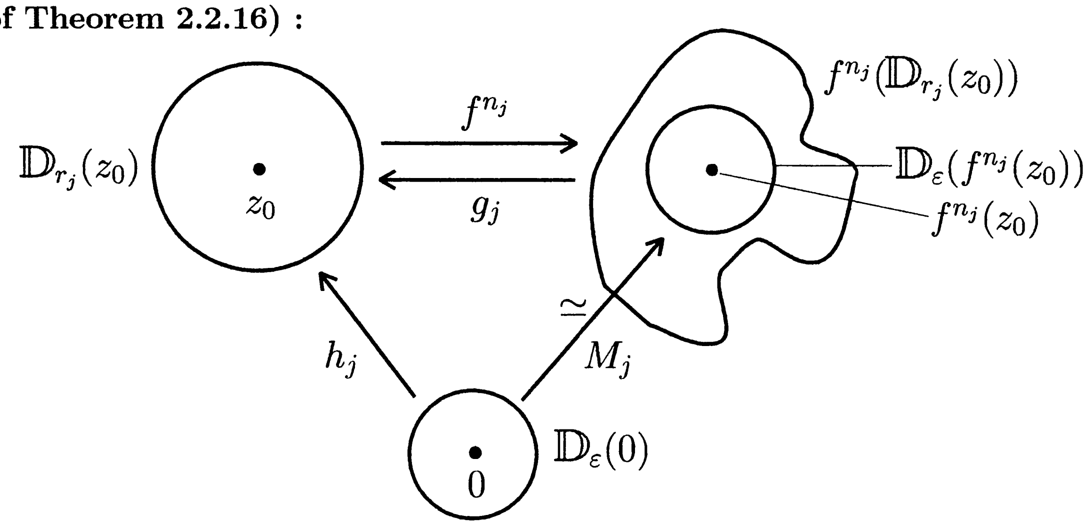

Figure 2.13

$z_0 \neq \infty$ とする．仮定より

$$g_j := \left(f^{n_j}|\mathbb{D}_{r_j}(z_0)\right)^{-1} : \mathbb{D}_\varepsilon(f^{n_j}(z_0)) \to \mathbb{C}$$

が存在する．また Möbius 変換 M_j で球面距離に関して

$$M_j(0) = f^{n_j}(z_0), \quad M_j(\mathbb{D}_\varepsilon(0)) = \mathbb{D}_\varepsilon(f^{n_j}(z_0))$$

を満たすものが存在する．そこで

$$h_j := g_j \circ M_j : \mathbb{D}_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$$

とすると (Figure 2.13) これは univalnet なので Koebe's Distortion Theorem より $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ なる ε' に対して j によらない定数 C が存在して

$$\mathrm{dist}(h_j, \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \leq C \tag{2.7}$$

が成り立つ．また，Lemma 2.2.8 より，ある定数 $C' < 1$ が存在して j によらずに

$$\mathrm{density}(J_f, \mathbb{D}_{\varepsilon'}(f^{n_j}(z_0))) \leq C' < 1$$

が成り立つ．ここで M_j は等長写像なので

$$\mathrm{density}(M_j^{-1}(J_f), \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \leq C' < 1 \tag{2.8}$$

が成り立つ．(2.7), (2.8) と Proposition 2.2.6 より，ある定数 C'' が存在して

$$\mathrm{density}(h_j(M_j^{-1}(J_f)), h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) = \mathrm{density}(J_f, h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \leq C'' < 1 \tag{2.9}$$

が成り立つ．一方，$\rho_j \searrow 0$ を

$$\mathbb{D}_{\rho_j}(z_0) \subset h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \subset \mathbb{D}_{C'''\rho_j}(z_0)$$

を満たすものとすると，Koebe's Distortion Theorem より定数 C''' は $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ のみに依存するようにとれる．この包含関係から

$$\text{density}(\widehat{\mathbb{C}}-J_f,\mathbb{D}_{C'''\rho_j}(z_0))=\text{density}(\widehat{\mathbb{C}}-J_f,h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)))\cdot\text{density}(h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)),\mathbb{D}_{C'''\rho_j}(z_0))$$

であることがわかるが，ここで z_0 が J_f の density point であるとすると

$$\text{density}(\widehat{\mathbb{C}}-J_f,\mathbb{D}_{C'''\rho_j}(z_0))\to 0\quad(j\to\infty)$$

である．また density$(h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)),\mathbb{D}_{C'''\rho_j}(z_0))$ は有界であるから結局

$$\text{density}(\widehat{\mathbb{C}}-J_f,h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)))\to 0\quad(j\to\infty)$$

が従う．これは

$$\text{density}(J_f,h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)))\to 1\quad(j\to\infty)$$

を意味するので (2.9) に矛盾する．よって z_0 は J_f の density point ではない． □

Remark 2.2.18. 上記の証明は背理法によったが，以下のようにして density$(J_f,\mathbb{D}_r(z_0))$ を直接評価することもできる：

(Another Proof of Theorem 2.2.16) :

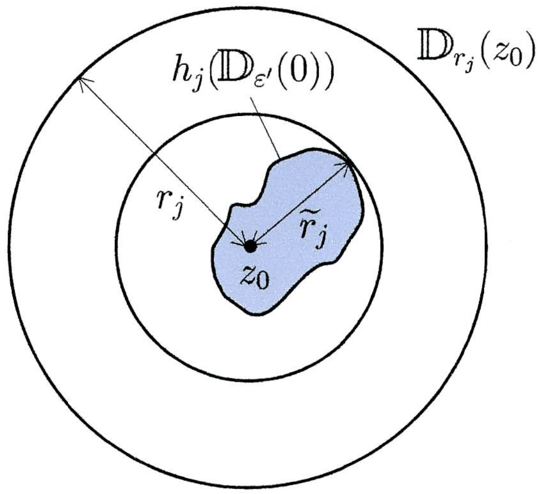

Figure 2.14

上記証明にあるように，ある定数 $C>0$，$0<C''<1$ が存在して j によらずに

$$\text{dist}(h_j,\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))\le C,\quad \text{density}(J_f,h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))\le C''<1$$

が成り立つ．ここで $0<\widetilde{r}_j<r_j$ を

$$\widetilde{r}_j:=\sup_{z\in\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)}|h_j(z)-z_0|$$

とすると (Figure 2.14) $r_j \to 0$ より $\widetilde{r}_j \to 0$ である．density$(J_f, \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0))$ を評価するためにまず density$(h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)), \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0))$ を下から評価する．

$$\widetilde{r}_j = \sup_{z \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)} |h_j(z) - h_j(0)| \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)} |h_j'(z)| \right) |z| \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)} |h_j'(z)| \right) \varepsilon'$$

であり，一方 Proposition 2.2.5 (4) の評価を使うと

$$\begin{aligned} |h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))| &= \iint_{\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)} |h_j'(z)|^2 dxdy \\ &\geq e^{-\mathrm{dist}(h_j, \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))} |h_j'(p)|^2 |\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)| \end{aligned}$$

を得る．ただし $p \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)$ は任意の点である．よって $h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \subset \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)$ に注意すると

$$\mathrm{density}(h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)), \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)) = \frac{|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \geq \frac{e^{-\mathrm{dist}(h_j, \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))} |h_j'(p)|^2 \pi \varepsilon'^2}{\pi((\sup_{z \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)} |h_j'(z)|)\varepsilon')^2} \tag{2.10}$$

である．ここで $p \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)$ は何であってもよいので，(2.10) で $p \in \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)$ に関して sup をとると結局

$$\mathrm{density}(h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)), \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0))) \geq e^{-\mathrm{dist}(h_j, \mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))} \geq e^{-C}$$

を得る．以上のことから

$$\begin{aligned} \mathrm{density}(J_f, \mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)) &= \frac{|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \cap J_f| + |(\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0) - h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))) \cap J_f|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \\ &\leq \frac{|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0)) \cap J_f| + |\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0) - h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \\ &\leq \frac{C''|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))| + |\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0) - h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \\ &= \frac{(C'' - 1)|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))| + |h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))| + |\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0) - h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \\ &= 1 - (1 - C'') \frac{|h_j(\mathbb{D}_{\varepsilon'}(0))|}{|\mathbb{D}_{\widetilde{r}_j}(z_0)|} \\ &\leq 1 - (1 - C'')e^{-C} \\ &< 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．$\widetilde{r}_j \to 0$ であったからこれは z_0 が J_f の density point ではないことを示している． □

(Proof of Corollary 2.2.17)： $\omega(z_0) \not\subset \cup\omega(c)$ と仮定すると

$$w_1 \in \omega(z_0) - \bigcup_{c \in \{\text{crit. pts.}\}} \omega(c)$$

なる点 ω_1 が存在する．即ち，自然数の列 $n_j \nearrow \infty$ で $f^{n_j}(z_0) \to w_1 \notin \cup\omega(c)$ となるものが存在する．

(i) $w_1 \notin \overline{\bigcup_{c\in\{\text{crit. pts.}\}} \{f^n(c) \mid n \geq 0\} \cup \{\infty\}}$ である場合：このとき単連結開集合 U で

$$U \cap \left[\overline{\bigcup_{c\in\{\text{crit. pts.}\}} \{f^n(c) \mid n \geq 0\}} \cup \{\infty\}\right] = \emptyset$$

であり

$$f^{n_j}(z_0) \to w_1 \in U \quad (j \to \infty)$$

となるものが存在する．このとき，f^{n_j} は branched covering で U 上 unramified である．したがって，写像 $g_j : U \to \mathbb{C}$ で

$$f^{n_j} \circ g_j = \mathrm{id}, \quad g_j(f^{n_j}(z_0)) = z_0$$

となるものが存在する．$\{g_j\}$ に Montel の定理を適用すると収束部分列 $\{g_{j_k}\}$，$g_{j_k} \to g$ $(k \to \infty)$ が得られるが，実はこの極限関数 g は定数関数である．なぜなら，もしそうでないとすると g は open map，よって z_0 の近傍を含む．

$$z_0 \in J_f = \overline{\{\text{ 反発周期点 }\}}$$

であるから z_0 の近傍には反発周期点がある．よってこの点で $g'_{j_k} \to 0$ となる (注： g_j は f^{-n_j} の 1 つの branch であった)．反発周期点は z_0 に集積するから一致の定理より $g' \equiv 0$，よって $g \equiv \text{const}$ となり矛盾を生じる (あるいは Hurwitz の定理から g は z_0 の近傍で injective であるはずなのに，微分が 0 になる点があることになり矛盾，と言ってもよい)．

以上より，適当な $\varepsilon > 0$, $r_j \searrow 0$ で Theorem 2.2.16 の仮定を満たすものが存在すると言える．従って z_0 は density point でないことになり，最初の仮定に矛盾する．

(ii) $w_1 \in \overline{\bigcup_{c\in\{\text{crit. pts.}\}} \{f^n(c) \mid n \geq 0\} \cup \{\infty\}}$ である場合：$w_1 \notin \cup\omega(c)$ であったからこのとき f の critical point が有限個しかないことを考慮すると $m \in \mathbb{N}$ と，ある critical point c に対して

$$w_1 = f^m(c)$$

となっていることがわかる．すると再び f の critical point が有限個しかないことから，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対しては $f^{-N}(w_1)$ はいかなる critical point の forward orbit の点も含み得ない (Figure 2.15 参照)．さて $w_1 \in \omega(z_0)$ であったから

$$f^{n_j}(z_0) \to w_1$$

となる部分列がとれる．よって適当な $w_2 \in f^{-N}(w_1)$ に対して

$$f^{n_j - N}(z_0) \to w_2$$

となる．つまり $w_2 \in \omega(z_0)$ である．しかもこの w_2 は

$$w_2 \notin \overline{\bigcup_{c\in\{\text{crit. pts.}\}} \{f^n(c) \mid n \geq 0\} \cup \{\infty\}}$$

を満たすので，これを w_1 の代わりに使えば後は (i) の場合と全く同じ議論が出来る． □

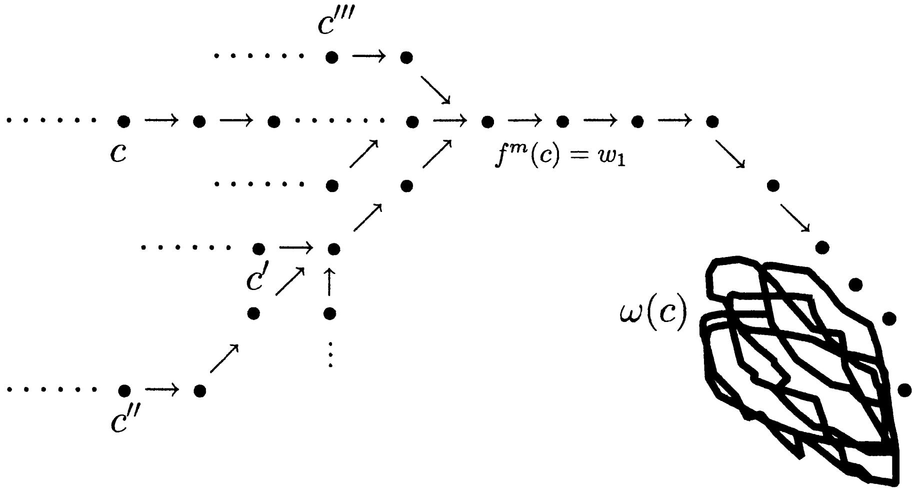

Figure 2.15 w_1 の逆像 (c, c', c'', c''' は critical points).

次に Koebe's $\frac{1}{4}$ Theorem の応用として次の Proposition を示す：

Proposition 2.2.19. $D \subset \mathbb{C}$ を双曲型である単連結開集合，$\delta(z) := \text{distance}(z, \partial D)$ (Euclid 距離)，$\lambda_D(z)|dz|$ を D の Poincaré metric とする．このとき次の評価が成立する：

$$\frac{1}{4\delta(z)} \leq \lambda_D(z) \leq \frac{1}{\delta(z)}.$$

Remark 2.2.20. 2 番目の不等号は Example 2.1.10 ですでに示したが，このとき D の単連結性は必要なかった．1 番目の不等号を示すのに D の単連結性を使う．

(Proof)： 1 番目の不等式を示す．任意の $z_0 \in D$ をとり固定する．D は双曲型であるから一意化定理から conformal map $f : \mathbb{D} \to D$ で $f(0) = z_0$ を満たすものが存在する．$z = f(\zeta)$ とすると，単連結領域の Poincaré metric の定義より，

$$\lambda_D(z)|dz| = \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2}$$

である．ここで

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta), \quad \lambda_D(z) \cdot \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{1}{1 - |\zeta|^2}$$

であるから $\zeta = 0$ として $\lambda(z_0)|f'(0)| = 1$，よって

$$\lambda_D(z_0) = \frac{1}{|f'(0)|}$$

を得る．一方 Koebe's $\frac{1}{4}$ 定理より

$$f(\mathbb{D}) = D \supset \mathbb{D}_{\frac{1}{4}|f'(0)|}(z_0)$$

が成り立つ．よって，

$$\delta(z_0) \geq \frac{1}{4}|f'(0)| = \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda_D(z_0)}$$

即ち

$$\frac{1}{4\delta(z_0)} \leq \lambda_D(z_0)$$

である． □

2.3 Annulus の modulus

この節では局所連結性と Lebesgue 測度が 0 であることを示すときに有用な annulus に関する理論を解説する．

Definition 2.3.1. Riemann 面 A が **annulus** であるとは A が 2 重連結 (即ち $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$) であることをいう．

Example 2.3.2. Annulus は様々な形で現れる．例えば次のようなものがある：

(1) 同心円環領域 (2) (3)

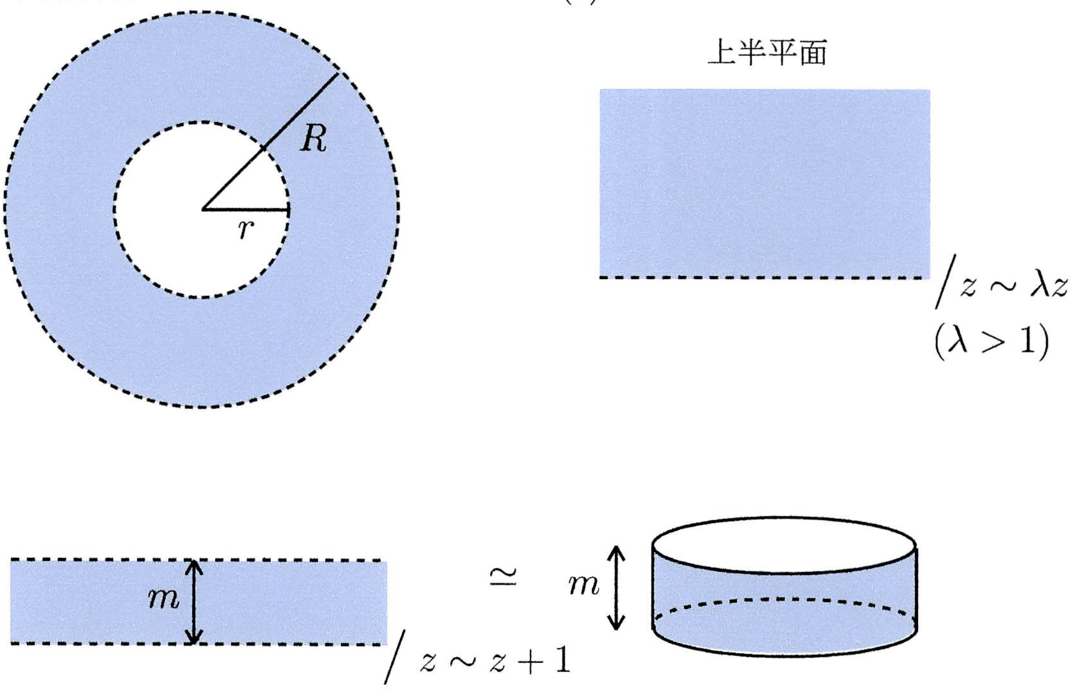

Figure 2.16 様々な annuli.

Remark 2.3.3. (1) $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が連結開集合 (即ち，領域) であるとき A が annulus であることと $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ がちょうど 2 つの連結成分を持つこととは同値である．

(2) A が annulus で $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ の各成分が 2 点以上含むとすると $0 < r < R < \infty$ を満たす定数 r, R が存在し，A は円環 $\{z \mid r < |z| < R\}$ と等角同値になる ([**Le**, p.10, §1.5]).

Definition 2.3.4. $A \subset \mathbb{C}$ を annulus とするとき A の **modulus mod $\boldsymbol{A}$** を

$$\mathrm{mod}\, A := \inf_{\rho} \mathrm{Area}_{\,\rho}(A) = \inf_{\rho} \iint_A \rho^2(z)dxdy$$

で定義する．ここで inf は非負値可測関数 $\rho : A \to \mathbb{R}$ で，A 内のすべての **essential curve** (即ち，Jordan curve で A 内で 0-homotopic ではない．Figure 2.17 参照) γ に対し $\int_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1$ となるものについてとる (このような ρ を A に関して**許容的 (admissible)** であるという).

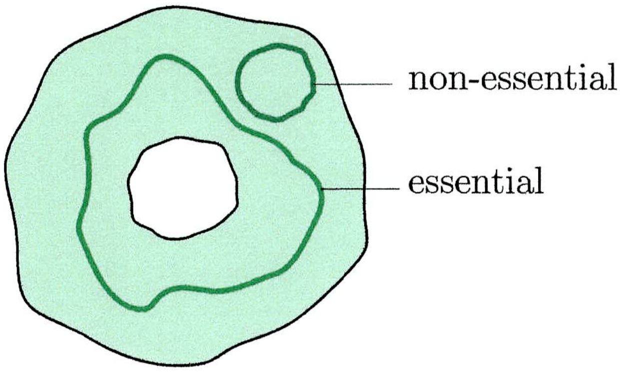

Figure 2.17 essential curve と non-essential curve.

Remark 2.3.5. (1)

$$\mathrm{mod}\, A = \inf_{\rho:\text{非負可測}} \frac{\displaystyle\iint_A \rho^2(z)dxdy}{\left(\displaystyle\inf_{\gamma:\mathrm{ess.}} \int_\gamma \rho(z)|dz|\right)^2}$$

と定義してもよい ([**Le**, p.10, §1.5], [**LV**, p.32, Theorem 6.1])．この表示から modulus は

$$\{\gamma \mid \gamma : A \text{ の essential curve}\}$$

という curve family の extremal length の逆数であると言える ([**LV**, p.22])．ただし，次の Remark 2.3.8 に注意せよ．

(2) Modulus の定義の中の Jordan curve γ を real analytic (or C^2, or C^∞ etc. $\cdots$) なものと仮定しても結果は同じである．

(3) 一般の Riemann 面としての annulus (即ち，$\mathbb{C}$ の部分集合に必ずしもならないもの) でも $\rho(z)|dz|$ を conformal metric に置き換え，$\iint \rho^2 dxdy$ を面積，$\int_\gamma \rho|dz|$ を長さで置き換えれば全く同様に modulus が定義できる．

Modulus に関してまず基本的なのが次に挙げる Lemma と Proposition である：

Lemma 2.3.6. Annulus A の modulus mod A は conformal invariant，即ち，A_1 と A_2 が解析的同型 (等角) ならば，

$$\mathrm{mod}\, A_1 = \mathrm{mod}\, A_2.$$

が成立する．

(Proof)： $f : (A_1, z) \to (A_2, w)$ を解析的同型写像とし，$\gamma \subset A_1$ を essential curve とすると $f(\gamma) \subset A_2$ も essential curve である．また $\rho(z)|dz| = \widetilde{\rho}(w)|dw|$ であるとすると $w = f(z)$ より

$$\widetilde{\rho}(w) = \frac{\rho(z)}{\left|\frac{dw}{dz}\right|} = \frac{\rho(z)}{|f'(z)|}$$

である．さて任意の essential curve $\gamma \subset A_1$ に対し $\int_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1$ となることと，任意の essential curve $\widetilde{\gamma} \subset A_2$ に対して $\int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\rho}(w)|dw| \geq 1$ となることとは同値である．更に

$$\iint_A \rho^2 dxdy = \iint_{A'} \widetilde{\rho}^2 dudv$$

も成り立つ．よって modulus の定義から mod $A_1 =$ mod A_2 が成り立つ． □

Lemma 2.3.7. $A = \{z \mid r < |z| < R\}$ $(0 \leq r < R \leq \infty)$ のとき

$$\text{mod } A = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}.$$

Remark 2.3.8. mod $A = \log \frac{R}{r}$ と定義している本もある ([**Le**, p.10, §1.5], [**LV**, p.31]).

(Proof): まず，幅 m の帯状領域が写像 $z \mapsto \exp(-2\pi i z)$ によって $A = \{z \mid r < |z| < R\}$ と解析的同型であるとすると (Figure 2.18 参照)

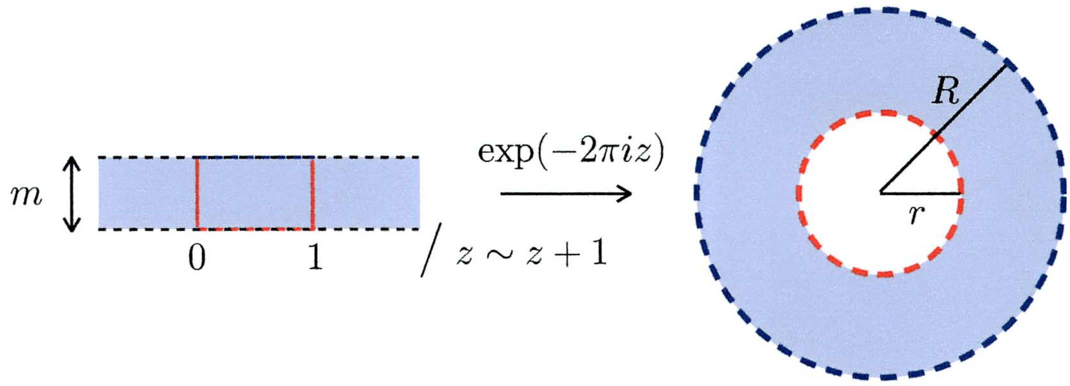

Figure 2.18

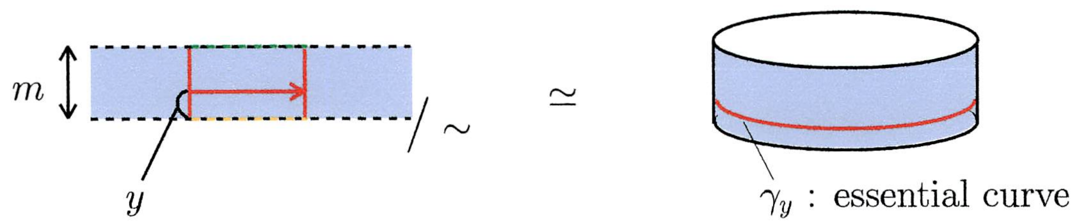

Figure 2.19

$r \cdot \exp(2\pi m) = R$ であるからこれから

$$m = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}.$$

である．Lemma 2.3.6 と Remark 2.3.3 (2) よりこの帯状領域の modulus が m であることを示せば十分である．そこで Figure 2.19 のような essential curve を γ_y，ρ を modulus の定義に現れる，annulus A に関して許容的な非負値関数とすると明らかに

$$1 \leq \int_{\gamma_y} \rho(z)|dz| = \int_0^1 \rho(x+iy)dx$$

である．この両辺を y で 0 から m まで積分すると

$$m \leq \int_0^m \int_0^1 \rho(x+iy)dxdy = \iint_A \rho(z)dxdy$$

となる．両辺を 2 乗して $\rho = 1 \cdot \rho$ とみて Cauchy-Schwartz の不等式を用いると

$$m^2 \leq \left(\iint_A \rho dxdy\right)^2 \leq \left(\iint_A 1^2 dxdy\right)\left(\iint_A \rho^2 dxdy\right) = m\left(\iint_A \rho^2 dxdy\right)$$

従って

$$m \leq \iint_A \rho^2 dxdy$$

を得る．よってこれから $m \leq \mathrm{mod}\ A$ がわかる．ところが $\rho \equiv 1$ のときは任意の essential curve γ に対し

$$1 \leq \int_\gamma \rho |dz|$$

であり (即ち，$\rho \equiv 1$ なる ρ は admissible)，かつ

$$\iint_A \rho^2 dxdy = m$$

であるから $\mathrm{mod}\ A = m$ である． □

Lemma 2.3.9. A_1, A_2 が annulus，$f : A_1 \to A_2$ が解析的で d 対 1 の covering であるとき，

$$\mathrm{mod}\ A_2 = d \cdot \mathrm{mod}\ A_1$$

が成立する．即ち，A_1，A_2 の一方の modulus がわかれば他方の modulus は covering degree のみで決定される．

(Proof) : $A_1 = \{z \mid 1 < |z| < R\}$，$A_2 = \{z \mid 1 < |z| < R'\}$ のとき示せば十分であるが，このとき明らかに $R' = R^d$，$f(z) = z^d$ と書くことができる． □

Proposition 2.3.10. A を annulus, $A_i \subset A$ $(i = 1, 2, \dots)$ を互いに disjoint で essential (即ち，A_i の essential curve は常に A の essential curve, $\pi_1(A_i) \cong \pi_1(A)$) な annulus とする (Figure 2.20 参照)．このとき modulus の間に次の評価が成立する：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i \leq \mathrm{mod}\ A.$$

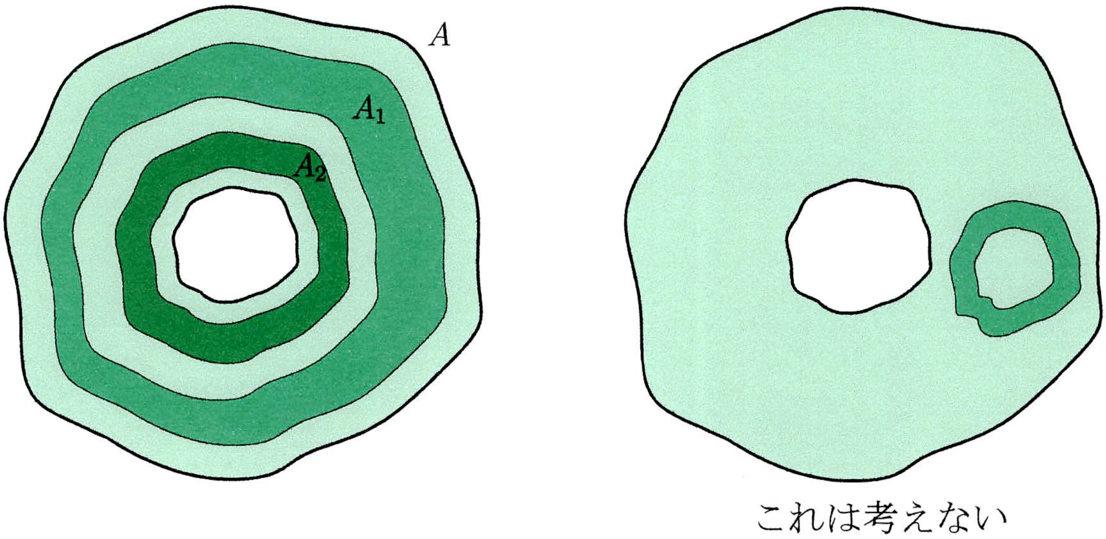

Figure 2.20

(Proof)： $\rho : A \to \mathbb{R}$ を非負可測関数で A に関して許容的なものとする．γ を A_i の essential curve とすると仮定より γ は A の essential curve にもなるので $\int_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1$ が成り立つ．即ち $\rho|A_i$ は A_i に関して admissible である．よって modulus の定義より

$$\mathrm{mod}\ A_i \leq \iint_{A_i} \rho(z)^2 dxdy$$

となる．よって

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{A_i} \rho(z)^2 dxdy = \iint_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \rho(z)^2 dxdy \leq \iint_A \rho(z)^2 dxdy.$$

ρ に関して inf をとると不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i \leq \mathrm{mod}\ A$$

が得られる． □

以上の基本性質を用いてこの節の目的である定理を証明しよう．第1に挙げるのは局所連結性を示すのに有用な次の Proposition である：

Proposition 2.3.11. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ を $\mathbb{C}$ の 有界領域に含まれる disjoint で nest している (即ち，任意の i に対して $A_{i+1} \subset A_i$の内側 となっている．Figure 2.21 参照) annuli の列とする．このときもし $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i = \infty$ ならば

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i\text{の内側}) = \{1\text{ 点 }\}$$

となる．ただし，**annulus *A* の内側**とは $\mathbb{C} \setminus A$ の有界な連結成分のこととする．

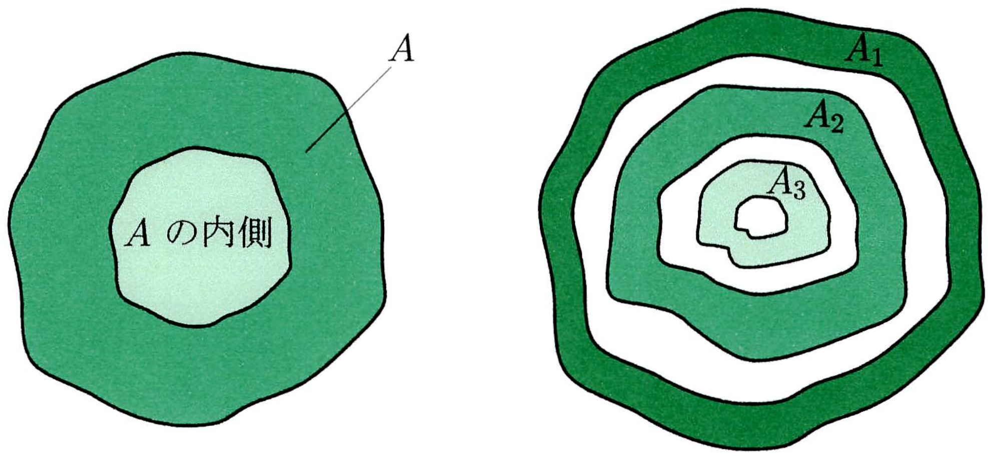

Figure 2.21

(Proof) : もし diam $A_i \to 0$ $(i \to \infty)$ でないとすると，$\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i$の内側$)$ は 2 点以上からなる連結なコンパクト集合となる．よってある annulus A で任意の i に対し A_i を essential なものとして含み，A の内側は 2 点以上含むものが存在する．このとき mod $A < \infty$ である．ところが一方，仮定より $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i = \infty$ であるからこれは Proposition 2.3.10 に反する． □

よって $X \subset \mathbb{C}$ の点 x における局所連結性を示すには $x \in X$ に対し nest している有界な annuli A_i の列で

- $x \in A_i$の内側,
- $(A_i$の内側$) \cap X$ が連結,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mod}\ A_i = \infty$,

となるものを構成すればよい．なぜならこのとき $\{A_i$の内側$\cap X\}_{i=1}^{\infty}$ は x の X における基本近傍系であり，しかも Proposition 2.3.11 より diam $(A_i$の内側$) \to 0$ となるからである．Julia 集合の局所連結性は，まず Julia 集合の partition を作り，力学系的性質から自然に現れる annuli の列がこれらの性質を満たすことを示すことによって証明される．

Theorem 2.3.12 (Modulus-Area inequality (McMullen [Mi2, p.39, Corollary A.8])). $A \subset \mathbb{C}$ を annulus，D を A の内側とするとき

$$\frac{|D|}{|A \cup D|} \leq e^{-4\pi \cdot \mathrm{mod}\ A}$$

が成立する．ただし，$|\cdot|$ は面積を表す．また等号成立は A が同心円からなるときに限る．

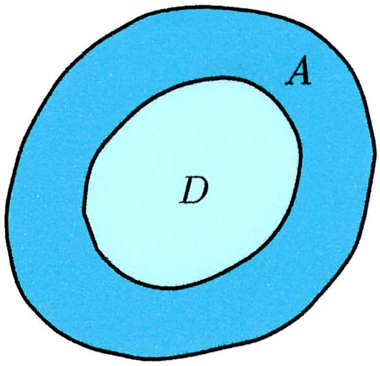

Figure 2.22 Annulus A とその内側 D.

(Proof)： 次の等周不等式が鍵となる：

Proposition 2.3.13 (等周不等式 (Isoperimetric inequality)). γ を smooth($= C^1$) Jordan curve, D_γ を γ が囲む領域 (即ち，$\mathbb{C} \setminus \gamma$ の有界成分) とすると

$$|D_\gamma| \leq \frac{1}{4\pi}(\text{length } \gamma)^2$$

が成立する．また等号は γ が円であるときのみ成立する． □

さて，$|D| = 0$ のときは自明なので以下では $|D| > 0$ とする．ρ として A 上の定数関数

$$\rho := \frac{1}{\sqrt{4\pi|D|}}$$

をとると，A の任意の essential C^1-Jordan curve γ に対して，$|D| \leq |D_\gamma|$ であることと等周不等式から

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| = \frac{\text{length } \gamma}{\sqrt{4\pi|D|}} \geq \frac{\text{length } \gamma}{\sqrt{4\pi|D_\gamma|}} \geq 1$$

が成り立つ．即ち，この ρ は A に関して許容的である．mod A の定義より

$$\mathrm{mod}\ A \leq \iint_A \rho(z)^2 dxdy = \frac{1}{4\pi|D|}\iint_A dxdy = \frac{|A|}{4\pi|D|},$$

従って

$$4\pi \cdot \mathrm{mod}\ A \leq \frac{|A|}{|D|},$$

となりゆえに

$$1 + 4\pi\cdot\text{mod } A \leq \frac{|D| + |A|}{|D|} = \frac{|D \cup A|}{|D|} \tag{2.11}$$

が成り立つ．次に $n \in \mathbb{N}$ を１つ任意に固定したとき A は

$$A = A_1 \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cdots \cup \overline{A_{n-1}} \cup A_n$$

と表される．ここで A_i は disjoint な A 内の essential annuli で mod $A_i = \frac{1}{n}\cdot$mod A を満たし，A_1 が１番内側，A_n が１番外側とする．これは A を標準的な annulus $\{z \mid 1 < |z| < R\}$ に等角に写す写像を f としたとき，標準的な annulus を同心円で区切ったものの f による逆像として得られる (Figure 2.23 参照).

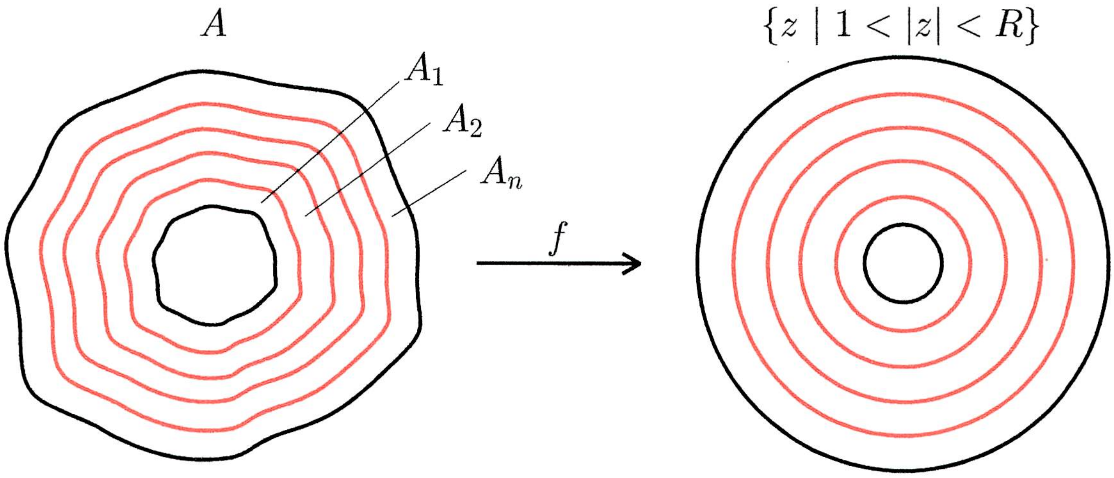

Figure 2.23 Annulus の分割.

D_i を A_i の内側，即ち，$\mathbb{C} \setminus A_i$ の有界成分とすると

$$\begin{aligned} D &= D_1 \subset D_1 \cup \overline{A_1} = D_2 \subset D_2 \cup \overline{A_2} = D_3 \subset \cdots \\ \cdots &\subset D_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}} = D_n \subset D_n \cup \overline{A_n} = D \cup \overline{A} =: D_{n+1} \end{aligned}$$

と表せる．一方 (2.11) は一般の annulus とその内側について成り立つので，各 annuli A_i に適用して

$$1 + 4\pi\cdot\text{mod } A_i \leq \frac{|D_i \cup A_i|}{|D_i|} = \frac{|D_{i+1}|}{|D_i|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

となるからこれらを掛け合わして

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + 4\pi\cdot\text{mod } A_i) \leq \frac{|D_{n+1}|}{|D_1|} = \frac{|D \cup A|}{|D|}.$$

また i によらずに mod $A_i = \frac{1}{n}\cdot$mod A であったから

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + 4\pi\cdot\text{mod } A_i) = \left(1 + \frac{4\pi\cdot\text{mod } A}{n}\right)^n \to e^{4\pi\cdot\text{mod } A} \quad (n \to \infty)$$

となるので与不等式は成り立つ. □

最後に示す次の Lemma は Lebesgue 測度が 0 であることを示すときに有用である：

Lemma 2.3.14. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$ のある有界領域に含まれる disjoint な annulus の集まりとし

$$X_\infty := \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{x \in D_A, A \in \mathcal{A}} \mathrm{mod}\ A = \infty \right\}$$

とおく. ただし D_A は annulus A の内側を表すとする. このとき

(1) 任意の $x \in X_\infty$ に対して次の (i), (ii) のうちいずれかが成立する：

(i) ある $A \in \mathcal{A}$ が存在して $x \in D_A$ で $\mathrm{mod}\ A = \infty$,

(ii) ある $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在して $x \in D_{A_n}$ で $\mathrm{diam}\ A_n \to 0$.

(2) $|X_\infty| = 0$ である.

(Proof)： (1) $x \in X_\infty$ とすると

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in D_A}} \mathrm{mod}\ A = \infty$$

である. ここで $\mathcal{A}$ の元は互いに disjoint であるから $\mathrm{mod}\ A = \infty$ となるものが無ければ, $A \in \mathcal{A}$ で $x \in D_A$ を満たすものは互いに nest していなければならない. これらの annuli の間には $A \cup D_A$ の包含関係によって順序 $A_1, A_2, \ldots$ がつけられて

$$A_{i+1} \subset D_{A_i}$$

とすることができる. もしも $\mathrm{diam}\ A_i \to 0$ でないとすると, ある annulus A で任意の A_i を essential annulus として含みしかも, $x \in D_A$ で D_A は 1 点ではないようなものが存在する. よって $\mathrm{mod}\ A < \infty$ となりこれは Proposition 2.3.10 に矛盾する.

(2) まず Figure 2.24 のような状況を考察してみよう. このとき Modulus-Area inequality(Theorem 2.3.12) から

$$\frac{|D_1|}{|D_1 \cup A_1|} \leq e^{-4\pi \cdot \mathrm{mod}\ A_1}, \quad \frac{|D_{1i}|}{|D_{1i} \cup A_{1i}|} \leq e^{-4\pi \cdot \mathrm{mod}\ A_{1i}} \quad i = 1, 2$$

が成り立ち, 更に

$$|D_{11} \cup A_{11}| + |D_{12} \cup A_{12}| \leq |D_1|$$

であることから

$$\frac{|D_{11}| + |D_{12}|}{|D_1 \cup A_1|} \leq e^{-4\pi \cdot \min\{\mathrm{mod}\ A_1 + \mathrm{mod}\ A_{11},\ \mathrm{mod}\ A_1 + \mathrm{mod}\ A_{12}\}}$$

が成立することがわかる．そこでこれを一般化した次の Proposition $(*)_n$ を帰納法でまず示す：

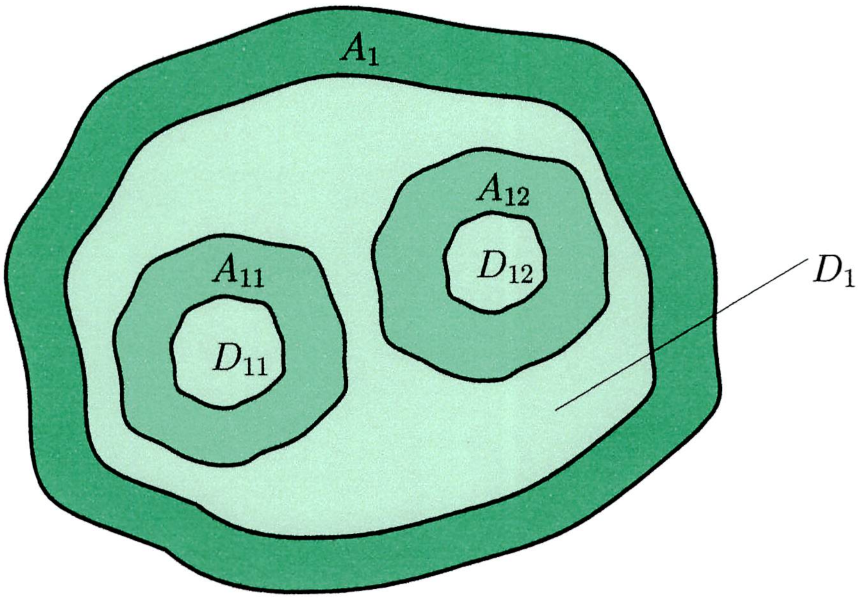

Figure 2.24

Proposition $(*)_n$. $\mathcal{A}'$ を $\mathbb{C}$ のある有界領域に含まれる disjoint な annulus の集まりで，任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して

$$^{\#}\{A \in \mathcal{A}' \mid x \in D_A\} \leq n$$

を満たすものとする．ただし D_A は A の内側である．このとき $c \geq 0$ に対して

$$X_c (= X_c(\mathcal{A}')) := \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}' \\ x \in D_A}} \mathrm{mod}\, A > c \right\}$$

とし，また

$$X^* (= X^*(\mathcal{A}')) := \{x \in \mathbb{C} \mid \text{ある } A \in \mathcal{A}' \text{について } x \in D_A\} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A$$

とすると (注：要するに X^*は $\mathcal{A}'$に属する annuli の内側をすべて埋めて得られる集合 (互いに交わらない円板の和集合) となる))，これらの集合の Lebesgue 測度について

$$\frac{|X_c|}{|X^*|} \leq e^{-4\pi c}$$

が成立する．

(Proof of Proposition $(*)_n$)： まず，$n=1$ のときは定義より $\mathcal{A}'$ の元は互いに nest してない (Figure 2.25 参照).

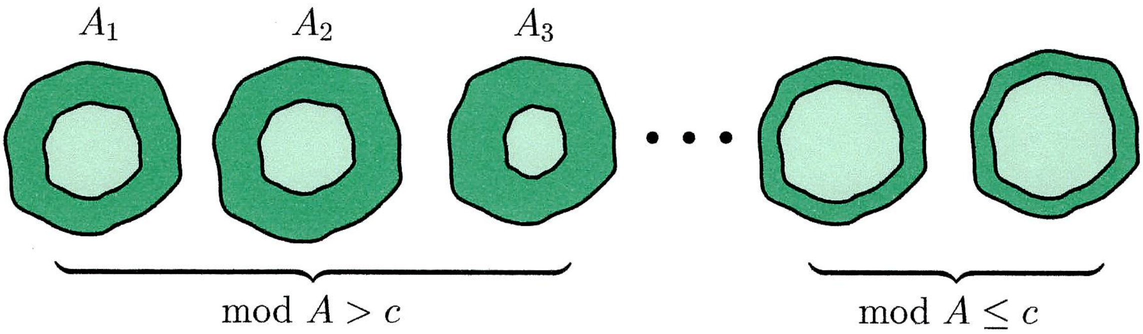

Figure 2.25 $n=1$ の場合.

mod $A > c$ となる A を順に $A_1, A_2, \ldots$ とすると Modulus-Area inequality より

$$\frac{|D_i|}{|D_i \cup A_i|} \leq e^{-4\pi \cdot \mathrm{mod}\ A_i} \leq e^{-4\pi c} \tag{2.12}$$

が成り立つ．ただし，D_i は annulus A_i の内側を表す．また $n=1$ のときは

$$X_c = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i, \quad X^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} D_A \cup A$$

となる．ただし，D_A は annulus A の内側を表す．よって

$$\frac{|X_c|}{|X^*|} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty}|D_i|}{\sum_{A\in\mathcal{A}'}|D_A \cup A|} \leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty}|D_i|}{\sum_{i=1}^{\infty}|D_i \cup A_i|}$$

を得る．さて一方，(2.12) から

$$|D_i| \leq e^{-4\pi c}|D_i \cup A_i|$$

であり $1 \leq i \leq m$ として和をとると

$$\sum_{i=1}^{m}|D_i| \leq e^{-4\pi c}\sum_{i=1}^{m}|D_i \cup A_i|$$

即ち

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}|D_i|}{\sum_{i=1}^{m}|D_i \cup A_i|} \leq e^{-4\pi c}$$

が成り立つ．従って $m \to \infty$ として与不等式を得る (注：ある有界領域に $\mathcal{A}'$ の任意の元は含まれるので $\sum_{i=1}^{\infty}|D_i|$, $\sum_{i=1}^{\infty}|D_i \cup A_i|$ は共に有限な値をとる．また $\{D_i\}$ が無限個あるとして証明したが，有限個のときも同様である).

次に $n-1$ まで正しいと仮定し，Proposition $(*)_n$ の条件を満たす $\mathcal{A}'$ が与えられたとする．このとき $\mathcal{A}'_{\text{outermost}}$, $\mathcal{A}''$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{\text{outermost}} &:= \{A \in \mathcal{A}' \mid A \subset D_{A'} \text{となる } A' \in \mathcal{A}' \text{が存在しない}\},\\ \mathcal{A}'' &:= \mathcal{A}' - \mathcal{A}'_{\text{outermost}}.\end{aligned}$$

更に $A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ に対して

$$\mathcal{A}''(A) := \{A' \in \mathcal{A}'' \mid A' \subset D_A\}$$

とすると (注：要するに $\mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ は $\mathcal{A}'$ の元 A で一番「外側」にあるもので，$\mathcal{A}''(A)$ はそのような A に囲まれる $\mathcal{A}'$ の元の集まりである．Figure 2.26 参照．)，$\mathcal{A}''(A)$ は Proposition $(*)_{n-1}$ の条件を満たす．

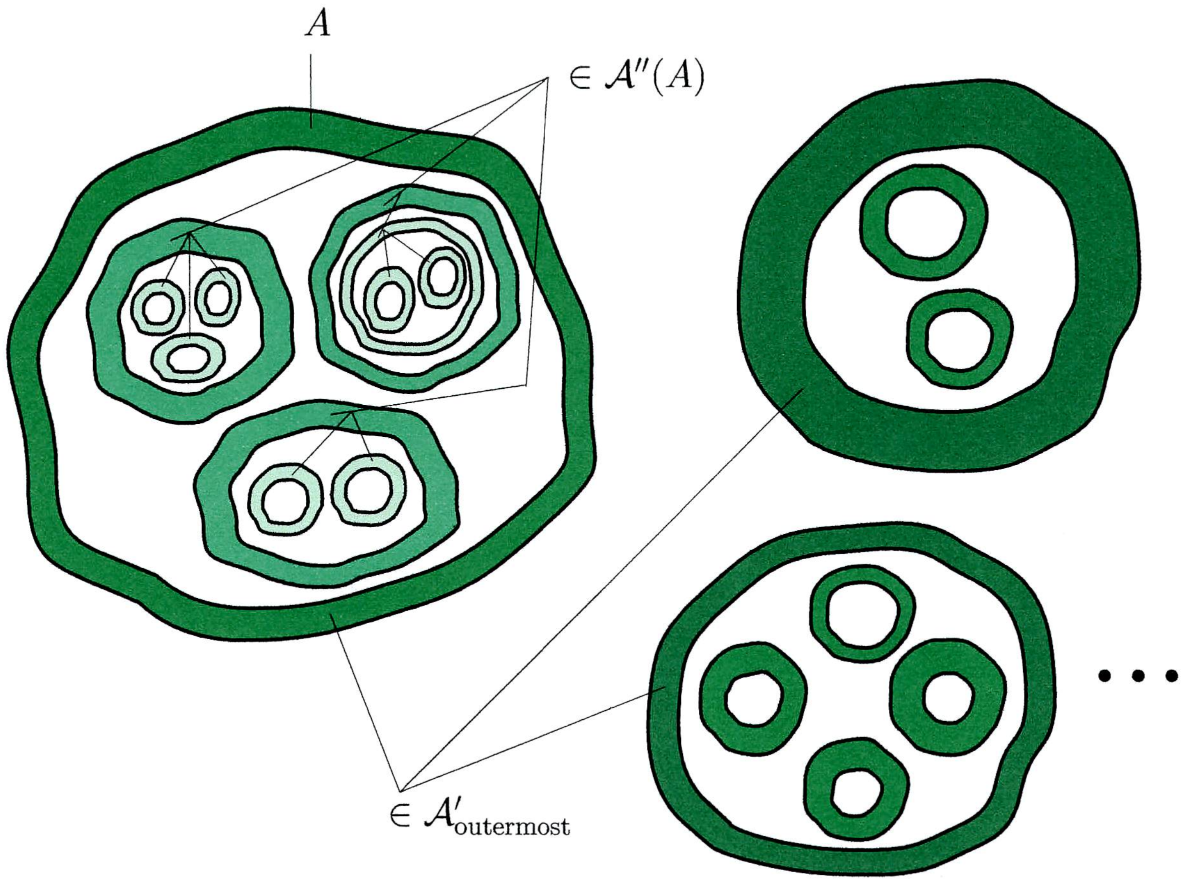

Figure 2.26 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ と $A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ に対する $\mathcal{A}''(A)$.

よって帰納法の仮定から $c' \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}|X_{c'}(\mathcal{A}''(A))| &\leq e^{-4\pi c'}|X^*(\mathcal{A}''(A))|\\ &\leq e^{-4\pi c'}|D_A| \qquad (2.13)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}$，$D_A$ は A の内側である．さて $A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ と $c \geq 0$ に対して $c < \text{mod } A$ のときは

$$|X_c(\mathcal{A}') \cap D_A| \leq |D_A| \leq e^{-4\pi(c - \text{mod } A)}|D_A|$$

が明らかに成り立つ．また $c \geq \text{mod } A$ のときは

$$\begin{aligned} X_c(\mathcal{A}') \cap D_A &= \left\{ x \in D_A \;\middle|\; \sum_{\substack{A' \in \mathcal{A}' \\ x \in D_{A'}}} \text{mod } A' > c \right\} \\ &= \left\{ x \in D_A \;\middle|\; \sum_{\substack{A' \in \mathcal{A}''(A) \\ x \in D_{A'}}} \text{mod } A' > c - \text{mod } A \ (\geq 0) \right\} \\ &= X_{c - \text{mod } A}(\mathcal{A}''(A)) \end{aligned}$$

と書けるから，(2.13) を $c' = c - \text{mod } A \geq 0$ として適用すると

$$\begin{aligned} |X_c(\mathcal{A}') \cap D_A| &= |X_{c-\text{mod } A}(\mathcal{A}''(A))| \\ &\leq e^{-4\pi(c - \text{mod } A)}|D_A| \end{aligned}$$

となる．結局，任意の $A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}$ と $c \geq 0$ に対して

$$|X_c(\mathcal{A}') \cap D_A| \leq e^{-4\pi(c - \text{mod } A)}|D_A|$$

が成り立つことがわかる．従って $X_c(\mathcal{A}')$ の定義から

$$X_c(\mathcal{A}') = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}} X_c(\mathcal{A}') \cap D_A$$

と書けることに注意すると

$$\begin{aligned} |X_c(\mathcal{A}')| &= \left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}} X_c(\mathcal{A}') \cap D_A \right| \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}} |X_c(\mathcal{A}') \cap D_A| \\ &\leq \sum_{A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}} e^{-4\pi(c - \text{mod } A)}|D_A| \\ &\leq \sum_{A \in \mathcal{A}'_{\text{outermost}}} e^{-4\pi c}|D_A \cup A| \qquad (\because \text{Modulus-Area inequality}) \\ &= e^{-4\pi c}|X^*(\mathcal{A}')| \end{aligned}$$

となり，n のときも成り立つことが示せた． □

この Proposition $(*)_n$ を用いると，Lemma 2.3.14 は次のように示される：$\mathcal{A}^{(n)} \subset \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の元で $\mathcal{A}_{\text{outermost}}$ の元から数えて n 番目以内のものの集合 (即ち，1 番外から数えて

nest している個数が n 個以内のものすべての集合) とすると，$\mathcal{A}^{(n)}$ は Proposition $(*)_n$ の仮定を満たすので

$$\frac{\left|X_c(\mathcal{A}^{(n)})\right|}{\left|X^*(\mathcal{A}^{(n)})\right|} \leq e^{-4\pi c}$$

が成り立つ．また $X^*(\mathcal{A}^{(n)}) = X^*(\mathcal{A})$ であり，また $X_c(\mathcal{A}^{(n)}) \nearrow X_c(\mathcal{A})$ $(n \to \infty)$ となるので $n \to \infty$ として

$$\frac{|X_c(\mathcal{A})|}{|X^*(\mathcal{A})|} \leq e^{-4\pi c}$$

が成り立つ．更に $X_c(\mathcal{A}) \searrow X_\infty(\mathcal{A})$ $(c \nearrow \infty)$ となるので，この式で $c \to \infty$ として

$$|X_\infty| = 0$$

を得る． □