第二部

Quasiregular 写像論入門

中西 敏浩 (静岡大学理学部)

まえがき

このノートは quasiregular 写像(以下、qr 写像と省略)の理論への入門のために書かれたものである。qr 写像は擬等角写像と正則写像との合成であるから [LV1973, Chap. VI](ただし Lehto-Virtanen の本では quasiconformal function なる用語が使われている) その位相的性質は正則写像のそれと本質的には変わらないが、3 次元以上になると平面 qr 写像にはない現象が見られるようになる。例えば $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ 上の局所同相 qr 写像は大域的に単射になってしまうという Zorich の定理や Rickman による Picard の定理のアナロジーにおいて除外値の個数は(少なくとも 3 次元の場合) dilatation にも依存するという事実がある。筆者が qr 写像に興味を抱くようになったのは、今述べた「整関数が 2 つの除外値をもてば定数写像である」という Picard の定理と類似の結果が高次元でも成り立つことを知ったからである(なおこのノートには述べていないが Picard の大定理に対応する定理も成り立つ)。[MRV1970] における除外値集合の capacity が 0 であるという定理でさえ不思議だったので、その驚きはなおさらであった。現在に至っても 4 次元以上でも除外値の個数が dilatation に依存して増大するかという問題を含め不明な点が多く、近い将来 Picard-Rickman の定理における除外値の意味が明らかになることを大いに期待している。

このノートの作成にあたっては Picard-Rickman の定理を頂点とする曲線族の modulus を用いる手法で得られる結果を纏めていたが、その準備中に Rickman 自身による本 [RI1993] が出版された。内容が重複していることをお断りしておく。それでもこのノートを読んでくださる人のことを考えて、できるだけ selfcontained な記述をするように心がけた。しかし別の手法でないと証明できない事項については、それを仮定しているところがある(たとえば、第 1 章におけるほとんどの結果、4.15, 4.17, 4.29, 6.4 における定理、Theorem 9.2 の証明の一部など)。Poleckii-Väisälä の不等式という強力な道具がその後の展開を支配していることから、その証明と準備にページ数を割き過ぎてしまい、なかなか qr 写像がでてこないという仕儀となってしまったが、入門書という性格上この面倒な箇所はことさら丁寧に書いたつもりである。Poleckii-Väisälä の不等式を応用して得られる華やかな諸定理は興味を持たれた読者の各自の勉強のために残しておくことにする。同じく曲線族の modulus を用いる手法で扱うことができるがこのノートでは割愛した話題として Martio-Srebro, Tukia による Möbius 群の作用に関して保型的な qr 写像の研究がある。最後の文献表はこのノートで引用した論文・書物に限らず高次元 qr 写像に関した文献を年代順に並べたもので、この方面の研究者の便宜に供したい。もちろん遺漏も数多くあると思う。また平面 qr・qc 写像に関する文献を含めようと思うと Teichmüller 空間についての論文を交えざるを得ず、そうするとあまりにも量が膨大となるため必要なものを除いては記載しなかった。

最後にこのノートの執筆を勧めてくださった谷口雅彦氏に感謝するとともに、完成まで長年待たせてしまったことに深くお詫び申し上げる次第である。

中西敏浩

目 次

記号表.

n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ 内の中心 x 半径 r の球 $\{y : |y-x| < r\}$ を $B^n(x,r)$, その境界である $n-1$ 次元球面 $\{y : |y-x| = r\}$ を $S^{n-1}(x,r)$ で表わす。簡単のために原点を中心にもつときは $B^n(r) = B^n(0,r)$, $S^{n-1}(r) = S^{n-1}(0,r)$ と書く。単位球・単位球面に対しては特別に $\mathbf{B}^n$, $\mathbf{S}^{n-1}$ と記すこともある。また次元に関する了解があるときは n などは省略することがある。

$\dot{\mathbf{R}}$　$\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ すなわち $\mathbf{R}$ の 2 点コンパクト化

$\complement A$　(全体集合があらかじめ知られているとき) 集合 A の補集合

$\overline{A}$　集合 A の閉包。

$\mathrm{int}A$　集合 A の内点集合。

ただし、$B^n(x,r)$ あるいは第 2 章で登場する $U(x,f,r)$ といった領域については、その閉包を $\overline{B^n}(x,r)$, $\overline{U}(x,f,r)$ と記す。

$A+B$　集合 $A, B \subset \mathbf{R}^n$ に対して $\{a+b : a \in A, b \in B\}$

Ω_n　n 次元単位球 $\mathbf{B}^n$ の体積 $\pi^{n/2}\Gamma(1+n/2)$

ω_{n-1}　$n-1$ 次元単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ の面積 $n\Omega_n$

1　トポロジーと積分論からの準備

1.1. $G \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ を領域、$f : G \to \mathbf{R}^n$ を連続写像とする。部分集合 $A \subset G$, $y \in \overline{\mathbf{R}^n}$ に対して次を定義する。

$$\begin{aligned} N(y,f,A) &= \operatorname{card}(A \cap f^{-1}(y)) \\ N(f,A) &= \sup\{N(y,f,A) : y \in \overline{\mathbf{R}^n}\} \end{aligned}$$

以下登場する種々の「位相的量」は f が連続であれば定義できるが、ここで我々が扱うのはが向きを保ち、開かつ離散 (すなわち各 $y \in \mathbf{R}^n$ に対して $f^{-1}(y)$ は離散集合) の場合であり、そのときはこれらの「位相的量」はより容易に定義できる。そこで以下 f **は向きを保ち、開かつ離散であると仮定する。** このとき

$$i(x,f) = \lim_{r \to 0} N(f, B(x,r))$$

を f の $x(\in G)$ における局所位相指数という。

$$B_f = \{x \in G : i(x,f) \geq 2\}$$

の各点を f の分岐点という。$x \in G \setminus B_f$ ならば f は x で局所同相である。位相次元について $\dim B_f \leq n-2$ であり、したがって $G \setminus B_f$ は連結である。 $J(G)$ で $\overline{D}$ が G のコンパクト部分集合となる領域 D 全体の族とする。$D \in J(G), y \in fD \setminus f\partial D$ に対して $D \cap f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$ のとき

$$\mu(y,f,D) = \sum_{j=1}^{k} i(x_j, f)$$

を三つ組 (y,f,D) の位相指数 (写像度) という。後での都合上 $y \notin f\partial D \cup fD$ のとき $\mu(y,f,D) = 0$ とおく。

1.2. Lemma. [MRV1969, Lemma 2.12] (f は向きを保ち、開かつ離散であると仮定する。)
(1)　$D \in J(G)$ のとき、すべての $y \in \complement f\partial D$ に対して $N(y,f,D) \leq \mu(y,f,D)$, すべての $y \in \complement f(\partial D \cup (D \cap B_f))$ に対して $N(y,f,D) = \mu(y,f,D)$.
(2)　$A \subset G$ がコンパクトならば $N(f,A) < \infty$.
(3)　$D \in J(G)$ が $\partial fD = f\partial D$ をみたせば (すなわち D が次の章でいうノーマル領域ならば) $\mu(y,f,D)$ は $y \in fD$ に対して一定で $N(f,D) = \mu(y,f,D)$.(このとき $\mu(y,f) = \mu(y,f,D)$ とかく。)
(4)　G の任意の点 x に対して次の条件をみたす近傍 V が存在する: U が x の近傍で $U \subset V$ ならば $N(f,U) = i(x,f)$

Lemma 1.3. [MRV1969, Lemma 2.14] $f : G(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ は向きを保ち、開かつ離散であると仮定する。 f が点 $x_0 \in G$ で微分可能ならば、その Jacobian について $J(x_0,f) \geq 0$ であり、$x_0 \in B_f$ ならば $J(x_0,f) = 0$ である。A が G の Borel 部分集合で f が A 上 a.e. に微分可能ならば

$$\int_A J(x,f)\,dm(x) \leq \int_{\mathbf{R}^n} N(y,f,A)\,dm(y). \tag{1.4}$$

1.5. Remark 連続写像 $f: G \to \mathbf{R}^n$ に対する $\mu(y, f, D)$, ($y \notin f(\partial D)$、$D \in J(G)$) の定義についてはたとえば [BORI1983] を見よ。位相指数の重要な性質はホモトピー不変性である。すなわち、連続写像 $f_t(x) = f(x,t): \overline{D} \times [0,1] \to \mathbf{R}^n$ とすべての t について $y \notin f_t(\partial D)$ をみたす点 y について $\mu(y, f_t, D)$ は t に依らない一定の整数である。

1.6. 擬加法的集合関数 U を $\mathbf{R}^n$ の開部分集合とする。$\mathcal{B}(U)$ を U の Borel 部分集合族とする。$q \geq 1$ とする。集合関数 $\varphi: U \to \dot{\mathbf{R}}$ が $q-$擬加法的であるとは、$\mathcal{B}(U)$ に属する集合に対して次の条件がみたされるときにいう。

(1) $\varphi(A) \geq 0$.
(2) $A \subset B$ ならば $\varphi(A) \leq \varphi(B)$.
(3) A がコンパクトならば $\varphi(A) < \infty$.
(4) $A_1, ..., A_k$ が disjoint で $A_i \subset A$ ならば

$$\sum_{1}^{k} \varphi(A_i) \leq q\varphi(A).$$

以上の条件より不等式 (4) が可算個の disjoint な Borel 部分集合に対しても成り立つ。$q-$擬加法的集合関数 φ の $x \in U$ における上微係数・下微係数を次のように定める。

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}'(x) &= \lim_{h \to 0} \sup_{\mathrm{diam}(Q) < h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)}, \\
\underline{\varphi}'(x) &= \lim_{h \to 0} \sup_{\mathrm{diam}(Q) < h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)},
\end{aligned}$$

ただし Q は $x \in Q \subset U$ をみたすすべての開 cube と開球をうごく。

Lemma 1.7. [MRV1969, Lemma 2.3] φ を開集合 U 上の $q-$擬加法的集合関数とするとき
(1) $\overline{\varphi}', \underline{\varphi}'$ は Borel 関数である。
(2) a.e. に $\underline{\varphi}'(x) \leq \overline{\varphi}'(x) < \infty$
(3) 開集合 $V \subset U$ に対して

$$\int_V \underline{\varphi}' dm \leq q\varphi(V).$$

2 ノーマル領域.

2.1. $G \subset \mathbf{R}^n$ を領域とし、以下 $f : G \to \mathbf{R}^n$ は連続な開写像とする。閉包が G でコンパクトとなる集合 E にたいして $\partial fE \subset f\partial E$ がなりたつ。$D \in J(G)$ に対して

$$\partial fD = f\partial D \tag{2.2}$$

が成り立つとき Dは f のノーマル領域とよばれる。[1]

2.3. $D \in J(G)$ が開写像 f のノーマル領域ならば $f : D \to fD$ は閉写像である。

2.4. $x \in G$ に対し x の近傍 D がノーマル領域で、しかも $D \cap f^{-1}f(x) = \{x\}$ であるとき D を x のノーマル近傍という。

2.5. Lemma (ノーマル領域の判定条件). $f : G \to \mathbf{R}^n$ は開写像、$U \subset \mathbf{R}^n$ は領域とし D を $f^{-1}U$ の一つの連結成分とする。このとき $D \in J(G)$ ならば D はノーマル領域で、$fD = U, U \in J(fG)$.

Proof. f は開写像だから $\partial fD \supset f\partial D$ をしめせばよい。任意の $y = f(x) \in f\partial D$, $x \in \partial D$ に対して $x \notin f^{-1}D$ が成り立つ。なぜなら、もしそうでないと x の十分小さい近傍が $f^{-1}U$ に含まれることになり D が $f^{-1}U$ の成分であることに矛盾する。よって $y = f(x) \notin U \supset fD$. $\overline{D}$ はコンパクトだから $f\overline{D} = \overline{fD}$. すると $y \in f\overline{D} \setminus fD = \overline{fD} \setminus fD = \partial fD$ で D はノーマル領域である。さらに $f\partial D \cap U = \emptyset$ もいえた。このことから $fD = U \cap f\overline{D}$ は U の開かつ閉部分集合となり $fD = U$ である。最後に $\overline{U} = \overline{fD} = f\overline{D}$ はコンパクトだから $U \in J(fD)$.

2.6. Lemma. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を開写像、D を G のノーマル領域とする。もし E が fD に含まれる領域または連続体[2]ならば f は $D \cap f^{-1}D$ の各成分を E 全体に写す。さらに F が fD のコンパクト部分集合ならば $D \cap f^{-1}F$ はコンパクトである。

Proof. 任意の $E \subset fD$ に対して (2.2) より $f^{-1}E \cap \partial D = \emptyset$, $D \cap f^{-1}E = \overline{D} \cap f^{-1}E$が成立する。とくに F が fD のコンパクト部分集合ならば $D \cap f^{-1}F$ はコンパクトである。

E が領域のとき $D \cap f^{-1}E$ の各成分 A は $f^{-1}E$ の一つの成分であり、$\overline{A} \subset \overline{D}$ はコンパクトゆえ $A \in J(G)$. Lemma 2.5 より $fA = E$. E がコンパクトのとき $D \cap f^{-1}E$ はコンパクトであることは上で述べたが、つぎに f が開写像 $D \cap f^{-1}E \to E$ を定めることををいう。$g = f|_D, A = D \cap f^{-1}E$ とおく。$gA = E, A = g^{-1}gA$ に注意する。X を A の開部分集合とすると D の開部分集合 $\tilde{X}$ があって $X = \tilde{X} \cap A$ とかける。$g(x) \in g\tilde{X} \cap gA, x \in \tilde{X}$ に対して $x \in g^{-1}gA = A$ だから $g(x) \in g(\tilde{X} \cap A)$. すなわち、$g\tilde{X} \cap gA \subset g(\tilde{X} \cap A)$. 逆の包含関係は明らかだから $g(X) = g\tilde{X} \cap gA = g\tilde{X} \cap E$. $g\tilde{X}$ は g が開写像であることより開集合で gX は E の開部分集合となる。したがって $g = f|_D$ は開写像 $D \cap f^{-1}E \to E$ を定義する。$D \cap f^{-1}E$ の各成分 A_0 はコンパクト集合の閉部分集合として D の

[1] 条件 (2.2) が成立しない例として、たとえば、$G = \mathbf{C} = \mathbf{R}^2, f(z) = e^z$, $D = \{x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 3\pi\}$ とおくと $D \in J(G)$ かつ $\partial fD = \{re^{i\theta} : r = 1, e, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. 一方、$f\partial D = \partial fD \cup \{x : 1 < |x| < e\}$ となる。

[2] $\mathbf{R}^n$ の部分集合が2点以上を含むコンパクト連結集合であるとき連続体という。

閉部分集合。(2.3) より g は閉写像でもあるので gA_0 は E の開かつ閉部分集合。よって E が連続体ならば $gA_0 = E$.

2.7. Notation. $f : G \to \mathbf{R}^n$ と $r > 0$ に対し, $f^{-1}B^n(f(x), r)$ の x-成分 (すなわち x を含む成分) を $U(x, f, r)$ であらわす。

2.8. Lemma. $f : G \to \mathbf{R}^n$ は離散かつ開である写像とする。このとき $\lim_{r\to 0} \operatorname{diam}(U(x, f, r)) = 0$ が任意の $x \in G$ について成り立つ。もし $U(x, f, r) \in J(G)$ なら $U(x, f, r)$ はノーマル領域で $fU(x, f, r) = B^n(f(x), r) \in J(f(G))$.

Proof. 任意に与えられた $x \in G, \epsilon > 0$ に対し、x の近傍 V を $V \in J(G)$, $\operatorname{diam}(V) < \epsilon$ かつ $\overline{V} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ をみたすようにとれば $0 < r < \operatorname{dist}(f(x), f\partial V)$ のとき $U(x, f, r) \subset V$. よって $r \to 0$ のとき $\operatorname{diam}(U(x, f, r)) \to 0$. 残りの主張は (2.5) から従う。

2.9. Corollary. $f : G \to \mathbf{R}^n$ が離散かつ開である写像ならば任意の $x \in G$ はノーマル近傍をもつ。

2.10. Exercise. 開写像 f と $D \in J(G)$ に対して $\partial fD \subset f\partial D$ が成り立つことをしめせ。また (2.3) の主張を証明せよ。

2.11. Notation. $\overline{\mathbf{R}^n} \setminus R$ が 2 つの成分 C_0, C_1 からなる $\overline{\mathbf{R}^n}$ の領域 $R = R(C_0, C_1)$ を ring とよぶ。

2.12. Lemma. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を離散かつ開である写像とする。各 $x \in G$ に対し正数 σ_x が存在して $0 < r < \sigma_x$ のとき次が成り立つ。
(1) $U(x, f, r)$ は x のノーマル近傍。
(2) $U(x, f, r) = U(x, f, \sigma_x) \cap f^{-1}B^n(f(x), r)$
(3) $r < \sigma_x$ ならば $\partial U(x, f, r) = U(x, f, \sigma_x) \cap f^{-1}S^n(f(x), r)$
(4) $\overline{\mathbf{R}^n} \setminus U(x, f, r)$ は連結。
(5) $\overline{\mathbf{R}^n} \setminus \overline{U}(x, f, r)$ は連結。
(6) $0 < r < s \leq \sigma_x$ のとき $\overline{U}(x, f, r) \subset U(x, f, s)$ で $U(x, f, s) \setminus \overline{U}(x, f, r)$ は ring になる。

Proof. x のノーマル近傍 D をひとつ選ぶ (Corollary 2.9)。次に σ_x を $0 < \sigma_x < \operatorname{dist}(f(x), f\partial D)$ および $U(x, f, \sigma_x) \subset B^n(x, t) \subset D$ がある $t > 0$ にたいして成立するように取る。(1) は Lemma 2.6 からいえる。以下 $U = U(x, f, r), U_0 = U(x, f, \sigma_x)$ および $V = fU = B(f(x), r)$ とかく。
(2) の証明。$U_0 \cap f^{-1}V$ の成分は U のみである。実際 U 以外の成分 W が存在すれば Lemma 2.6 より f は W を V 全体に写し、W は $f(x)$ の f による逆像を含む。しかしノーマル近傍の定義より $D \cap f^{-1}(x) = \{x\}$ だからこれは矛盾である。よって (2) がいえた。
(3) の証明。$z \in U_0 \cap f^{-1}\partial V$ とすると f は開写像だから z の任意の近傍は $f^{-1}V$、すなわち (2) より U と交わる。よって $z \in \partial U$ で $U_0 \cap f^{-1}\partial V \subset \partial U$ がいえる。逆の包含関係をしめすには Lemma 2.5 から U が f のノーマル領域であることがわかるので $f\partial U = \partial fU = \partial V$, よって $\partial U \subset U_0 \cap f^{-1}\partial V$.
(4) の証明。$U \subset B^n(x, t) \subset D$ の仮定から $\complement U$ の成分 E で $\complement D$ と交わるものがただ一つ存在す

る。$E=\complement U$ をしめせばよい。まず $F=\complement U\setminus E$ が nowhere dense であることをいう。$F\subset D$ で Lemma 2.6 より $f^{-1}V\cap D=U$ だから $fF\cap V=\emptyset$. f は開写像だから $\partial fF\subset f\partial F\subset f\partial U=\partial V$. fF は有界集合ゆえ $fF\subset\partial V$. 再び f が開写像であることをつかって $\mathrm{int}F=\emptyset$ で F は nowhere dense である。よって $U_1=\complement E$ とおくと $\overline{U_1}=\overline{U}$. $F\subset U_1$ で、もう一度 f が開写像であることから $fU_1\subset\mathrm{int}\overline{U}=V$, すなわち、$fF\subset V$. したがって $F=\emptyset$ であり $\complement U=E$.
(5), (6) の証明。$r<s$ のとき $\overline{U}(x,f,r)=U_0\cap f^{-1}\overline{B^n}(f(x),r)\subset U(x,f,s)$ は以上の考察よりわかる。すると $\complement\overline{U}(x,f,r)=\cap_{r<s<\sigma_x}\complement U(x,f,s)$ は連結である。よって (5) と (6) の前半がしめせた。$A=U(x,f,s)\setminus\overline{U}(x,f,r)$ の補空間の成分は $\overline{U}(x,f,r)$ と $\complement U(x,f,s)$ で、(5) と $U(x,f,s)$ の定義より、どちらの集合の補空間も $\overline{\mathbf{R}^n}$ を分離しない。Phragmén-Brouwer の定理から A は連結で ring になることがわかる。

2.13. 上の Lemma の証明における Phragmén-Brouwer の定理とは、A と B が $\overline{\mathbf{R}^n}, n>1$ の disjoint な閉集合で、どちらも $\overline{\mathbf{R}^n}$ の 2 点 x,y を分離しないならば $A\cup B$ もこれら 2 点を分離しないことを主張するものである ([HY1961, p.359]).

3 ACL 写像

3.1. ここでは特に断わらないかぎり n−cube というときには、座標軸と平行な辺をもつものとする。すなわち $Q = \{(x_1, ..., x_n) : a_i < x_i < b_i, i = 1, ..., n\}$ の形の集合とする。

3.2. Definition $\mathbf{R}_i^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) : x_i = 0\} \subset \mathbf{R}^n, P_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_i^{n-1},\ i = 1, ..., n$ を直交射影とする。$\mathbf{R}^n$ の開集合 U で定義された関数 $g : U \to \mathbf{R}$ が ACL(absolutely continuous on lines) であるとは g は連続かつ任意の open n−cube Q, $\overline{Q} \subset U$に対して $\overline{Q}$ 内の座標軸に平行なほとんどすべての (以後 a.e. のと書く) 線分上絶対連続であるときにいう。最後の条件をもう少しくわしく述べると P_iQ の点 z に対し $J_z = P_i^{-1}(z) \cap \overline{Q}$ を定めると、J_z上 g が絶対連続でない $z \in P_iQ$ 全体が $n-1$ 次元 Lebesgue 測度 0 の集合であるということである。g が ACL ならば a.e. に偏微係数 $\partial g/\partial x_i,\ i = 1, ..., n$ をもつが、これらがすべて局所 L^p− 可積分関数 $(p \geq 1)$ であるとき、g は ACL^p であるという。 qr 写像の理論で必要とするのは ACL^n の概念である。$\mathbf{R}^n$ の開集合 U で定義された写像 $g : U \to \mathbf{R}^m$ が ACL^p であるとは、$g = (g_1, ..., g_m)$ の各座標関数 g_i が ACL^p であるときにいう。

3.3. Sobolev 空間 $W^1_{p,loc}(G, \mathbf{R}^n)$、すなわち、各成分関数 f_i およびそれらの (weak derivative の意味での) すべての偏導関数が局所 L_p 可積分となる写像 $f = (f_1, ..., f_n) : G \to \mathbf{R}^n$ のなす空間に対し、$\mathrm{ACL}^p(G, \mathbf{R}^m) = W^1_{p,loc}(G, \mathbf{R}^n) \cap C^0(\Omega, \mathbf{R}^n)$ が成り立つ [RI1993, Proposition 1.2.].

3.4. $f : G \to \mathbf{R}^n$ を離散かつ開である写像とする。 $Q \in J(G)$ を n−cube とする。 Borel 集合 $A \subset P_iQ$ に対して $\varphi_i(A, Q) = m_n(f(Q \cap P_i^{-1}A))$ を定めると $A \mapsto \varphi_i(A, Q)$ は $q = N(f, Q)$ (q が有限であることは Lemma 1.2. (2) を見よ) に対し q−擬加法的集合関数になる (1.6 参照)。次に Agard [AGA1969] の結果の拡張した、写像が ACL^n に属するための判定条件を与える。

3.5. Lemma. $f : G \to \mathbf{R}^n$ は離散かつ開である写像で任意の $D \in J(G)$ に対して次のような定数 c_D が存在するとする。$Q \subset D$ を open n−cube、$1 \leq i \leq n$、$z \in P_iQ$ とすると $Q \cap P_i^{-1}(z)$ 上の disjoint な閉区間 $\Delta_1, ..., \Delta_k$ について

$$(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{diam}(f\Delta_j))^n \leq c_D \overline{\varphi_i}'(z, Q)(\sum_{i=1}^{k} m_1(\Delta_j))^{n-1} \tag{3.6}$$

このとき f は ACL^n である。

Proof. $Q \in J(G), \overline{Q} \subset G$ を open n−cube とする。$\overline{Q} \cap P_i^{-1}(z)$ 上の disjoint な区間列 $\Delta_1, ..., \Delta_k$ に対しても (3.6) が成立することが極限操作をおこなうことよりわかる。よって f は ACL である。次に f が ACL^n であることを示す。cube の座標軸についての対称性より、ここでは $|\partial_n f|^n$ $(\partial_n f = \partial f/\partial x_n)$ が Q 上可積分であることだけを示しておく。 正整数 j_0 を $0 < 1/j_0 < \mathrm{dist}(Q, \partial G)$ となるように選ぶ。$j \geq j_0$ に対し

$$0 \leq g(x) = |\partial_n f|,\ g_j(x) = (2/j)^{-1} \int_{-1/j}^{1/j} g(x + te_n)dt$$

とおく。ここで $e_n=(0,...,0,1)$ である。f が $\overline{Q}\cap P_i^{-1}(z)$ 上絶対連続であるとき、$x\in\overline{Q}\cap P_i^{-1}(z)$ に対して $g_j(x)$ が定義できる。したがって a.e. $x\in\overline{Q}$ に対して $g_j(x)$ が定義できる。$Q=Q_0\times J, Q_0=P_iQ,\ J=(a,b)$ とし、Q の点 x を $(z,t), z\in Q_0, t\in J$ によっても表わすことにする。

$$E=\{x=(z,t):\limsup g_j(x)\neq g(x),\ \liminf g_j(x)\neq g(x)\}$$

とおくと、これは Borel 可測集合である。a.e. の $z\in Q_0$ に対し $(a-1/j,b+1/j)$ 上 $t\mapsto f(z,t)$ は絶対連続であり Lebesgue の定理から a.e. $t\in J$ に対して $g_j(z,t)\to g(z,t)\ \ (j\to\infty)$ である。よって E の z における切口 $E_z=\{(z,t)\in E:t\in J\}$ は a.e.$z\in Q_0$ について 1 次元測度 0 をもつ。Fubini の定理によって

$$m_n(E)=\int_{Q_0}m_1(E_z)dm_{n-1}=\int_J m_{n-1}(E_t)dm_1=0$$

ここで E_t は E の t における切口 $E_t=\{(z,t)\in E:z\in Q_0\}$ である。最後の等式より a.e.$t\in J$ について E_t の (n-1) 次元測度は 0 である。よって a.e. $u\in J$ に対し $g_j(z,t)\to g(z,t), (j\to\infty)$ が a.e. $z\in Q_0$ についていえる。このような u を固定し Q の Borel 部分集合 E と $j>j_0$ に対し集合函数 $F_j(E)=\varphi_n(E,Q_0\times(u-1/j,u+1/j))$ を定義する。F_j は $q=N(f,D), D=Q_0\times(a-1/j_0,b+1/j_0)$ に対して $q-$擬加法的である。もし $\overline{F}'_j(z)<\infty$ ならば (3.6) より対応 $t\mapsto f(z,t)$ は $[u-1/j,u+1/j]$ 上絶対連続であり、その全変動量は $(c_D\overline{F}'_j(z)(2/j)^{n-1})^{1/n}$ を超えない。その結果

$$g_j(z,u)^n=\left(\frac{j}{2}\int_{u-1/j}^{u+1/j}|\partial_n f(z,t)|dt\right)^n\leq c_D\overline{F}'_j(z)j/2$$

これを $z\in Q_0$ 上積分すると Lemma 1.7 (3) より

$$\int_{Q_0}g_j(z,u)^n dm_{n-1}(z)\leq\frac{1}{2}c_Dq^2jF_j(Q_0)=\frac{1}{2}c_Dq^2jm(f(Q_0\times(u-1/j,u+1/j))). \tag{3.7}$$

Borel 集合 $E\subset J$ に対し $\psi(E)=m(f(Q_0\times E))$ とおく。ψ は J 上の $q-$擬加法的集合函数である。$j\to\infty$ とすると (3.6) と Fatou の補題から

$$\int_{Q_0}g(z,u)^n dm_{n-1}(z)\leq c_Dq^2\overline{\psi}'(u).$$

$u\in J$ 上でこれを積分して再び Lemma 1.7 (3) を用いると

$$\int_Q g^n dm_n\leq c_Dq^4\psi(J)=c_Dq^4m_n(fQ).$$

したがって g^n は Q 上可積分である。

3.8. Remark. Lemma 3.5 で (3.6) における n を任意の p で書き換えると f が ACL^p であるための判定条件を得る。ただしここでは $p=n$ の場合の結果しか用いない。

4 曲線族の modulus

4.1. Notation. (1) $\mathbf{R}$ 上の区間 I から $\mathbf{R}^n$ への連続写像を曲線または弧(path) とよぶ。I が閉区間の場合には、その意味合いをもたせるために閉弧(closed path) とよぶが、端点の像が一致しないかぎり閉曲線とはいわないことにする。 (2) 二つの曲線 γ_1, γ_2 の parametrization の仕方が平行移動の差しかないとき、すなわちある $t_0 \in \mathbf{R}$ があって $\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0)$ であるときは、これらの曲線は断わらないかぎり同一のものと思う。 (3) 曲線 γ_1 が曲線 $\gamma_2 : I \to \mathbf{R}^n$ の I のある部分区間への制限と (3) の意味で同じとなるとき γ_1 は γ_2 の部分弧(subpath) といい、$\gamma_1 \subset \gamma_2$とかく。

4.2. Γ を $\overline{\mathbf{R}^n}$ における曲線族とする。$F(\Gamma)$ を次の条件をみたすすべての非負 Borel 函数 $\rho : \mathbf{R}^n \to \dot{\mathbf{R}}^1$ の集合とする:

$$\int_\gamma \rho ds \geq 1$$

がすべての locally rectifiable な (4.23 参照) $\gamma \in \Gamma$ に対して成り立つ。$p \geq 1$ に対して

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \int_{\mathbf{R}^n} \rho^p dm_n$$

とおく。$F(\Gamma)$ を Γ の許容(admissible) 関数族とよぶ。$F(\Gamma) = \emptyset$ のときは $M_p(\Gamma) = \infty$ とおく。ただし $F(\Gamma) = \emptyset$ であるのは Γ が constant path を含むときにかぎる。なぜなら、すべての $\gamma \in \Gamma$ が non-constant ならば $\rho \equiv \infty$ は $F(\Gamma)$ に属するからである。$M_p(\Gamma)$ を Γ の $p-$modulus とよぶ。とくに $p = n$ のときは単に Γ の modulus とよび $M(\Gamma)$ とかく。$M(\Gamma)^{1-n}$ を Γ の extremal length(極値的長さ) という[3]。

4.3. 曲線族の modulus に関する次の性質は基本的である。

(1) $M_p(\emptyset) = 0$,

(2) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ならば $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$,

(3) $M_p(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \leq \sum_i^\infty M_p(\Gamma_i)$.

もし曲線族 Γ_2 の各 path が曲線族 Γ_1 に含まれる部分弧をもつとき、$\Gamma_2 > \Gamma_1$ とかく。このとき Γ_2 は Γ_1 によって minorize されるという。

(4) $\Gamma_2 > \Gamma_1$ ならば $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$ (不等号の向きが逆になる。)

4.4. Exercise. **4.3** の (1),(2),(3),(4) を証明せよ。

4.5. Notation. $G, E, F \subset \overline{\mathbf{R}^n}$ に対して G において E と F とを結ぶ non-constant な closed path 全体の族を $\Delta(E, F; G)$ で表わす。すなわち non-constant な closed path $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbf{R}^n}$ が $\Delta(E, F; G)$ に属するための条件は端点 $\gamma(a), \gamma(b)$ の一方は E に他方は F に含まれ、さらに $\gamma(t) \in G$, $a < t < b$ である。とくに $G = \overline{\mathbf{R}^n}$ のときは $\Delta(E, F; G)$ を簡単に $\Delta(E, F)$ とかく。

[3] Vuorinen の本 [VU1988] に従った。Väisälä の本 [V1971] では $M(\Gamma)^{-1}$ を extremal length とよんでいるので注意すること

4.6. modulus の計算例. [V1971]

(1) $\mathbf{R}^{n-1}$ の Borel 部分集合 E_1、 E_1 を he_n, $(e_n=(0,\dots,0,1),\ h>0)$ だけ平行移動した E_2 そして E_1 と E_2 にはさまれたシリンダー

$$G=\{x=(x_1,\dots,x_n):(x_1,\dots,x_{n-1})\in E, 0<x_n<h\}$$

を考える。$\Gamma \doteq \Delta(E_1,E_2;G)$ とするとき、

$$M_p(\Gamma)=\frac{m_{n-1}(E)}{h^{p-1}}=\frac{m_n(G)}{h^p}. \tag{4.7}$$

(2) $0<a<b<\infty$ とし、$G\subset\mathbf{R}^n$ をともに原点中心で半径がそれぞれ a と b の球面 $S(a), S(b)$ を境界にもつ spherical ring とする。G において $S(a)$ と $S(b)$ とを結ぶ曲線族 $\Gamma=\Delta(S(a),S(b);G)$ の modulus は

$$M(\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{1-n}, \tag{4.8}$$

ここで ω_{n-1} は $n-1$ 次元単位球面の面積である。このことは次の曲線族の modulus の特別な場合である。すなわち $Y\subset S=S(1)$ を Borel 集合とし、集合 $\{x:a<|x|<b, x/|x|\in Y\}$ 内で $S(a)$ と $S(b)$ とを結ぶ曲線族を Γ とおくと

$$M(\Gamma)=\mathcal{H}^{n-1}(Y)\left(\log\frac{b}{a}\right)^{1-n}. \tag{4.9}$$

$\mathcal{H}^{n-1}(Y)$ は Y の表面積 ($n-1$ 次元 Hausdorff 測度)。

4.10. Proposition. [V1971, 6.11] $\overline{\mathbf{R}^n}$, $(n\geq 2)$ の rectifiable でない曲線全体からなる族を Γ とするとき $M(\Gamma)=0$

4.11. Proposition [V1971, 7.9] 曲線族 Γ のすべての non-constant 曲線が 1 点 $x_0\in\overline{\mathbf{R}^n}$, $(n\geq 2)$ を通るとき $M(\Gamma)=0$

4.12. Grötzsch ring と Teichmüller ring $R=R(C_0,C_1)$ を ring とする (定義は 2.11 を見よ)。このとき $\mathrm{cap}R=M(\Delta(C_0,C_1))$ を R の capacity、

$$\mathrm{mod}R(C_0,C_1)=\left(\frac{M(\Delta(C_0,C_1))}{\omega_{n-1}}\right)^{1/(1-n)}$$

を R の modulus とよぶ (4.6 の例 (2) 参照。また capacity については 7.35 も見よ。) $R_1=R(C_{10},C_{11}), R_2=R(C_{20},C_{21})$ が ring で、$C_{20}\subset C_{10}, C_{21}\subset C_{11}$ のときは $\Delta(C_{10},C_{11})<\Delta(C_{20},C_{21})$ だから $\mathrm{mod}R_1\geq\mathrm{mod}R_2$ が成り立つ。

$\mathbf{R}$ の 2 点 a,b に対して $[a,b]$ を a と b を結ぶ線分、$[a,\infty]$ $(a\neq 0)$ で原点 0 から a を通る放射線上の a を始点にもつ半直線を表わすものとする。応用上重要な ring がある。 $s>1$ とする。$\overline{B^n}$

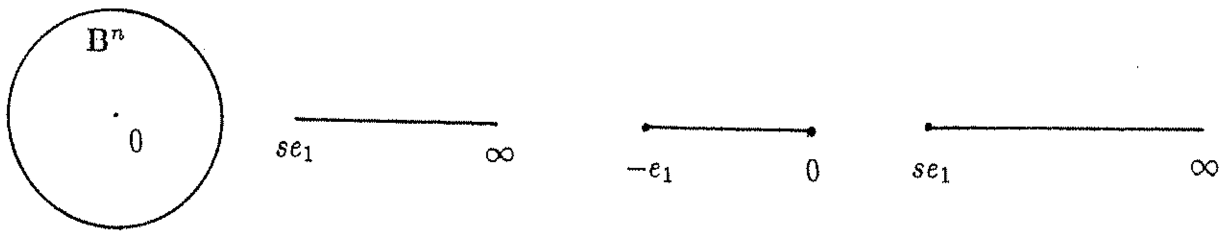
と $[se_1, \infty]$ を補集合成分にもつ ring $R_{G,n}$ を Grötzsch ring といい、その capacity を $\gamma_n(s)$ とかく。$[-e_1, 0]$ と $[se_1, \infty]$ を補集合成分にもつ ring $R_{T,n}(s)$ を Teichmüller ring といい、その capacity を $\tau_n(s)$ とかく:

$$\gamma_n(s) = \omega_{n-1}(\mathrm{mod} R_{G,n}(s))^{1-n}, \quad \tau_n(s) = \omega_{n-1}(\mathrm{mod} R_{T,n}(s))^{1-n}.$$

これらの ring の modulus のあいだに次のような関係がある ([VU1988]).

(4.13)
$$\gamma_n(s) = 2^{n-1}\tau_n(s^2 - 1).$$

$\gamma_n(s)$, は $s > 1$ について単調減少で、$\lim_{s\to 1+}\gamma_n(s) = \infty$, $\lim_{s\to\infty}\gamma_n(s) = 0$.



Grötsch ring　　　　Teichmüller ring

$0 < r < 1, K > 0$ に対して

(4.14)
$$\varphi_{K,n}(r) = \frac{1}{\gamma_n^{-1}(K\gamma_n(1/r))}$$

を定義する。

4.15. Lemma. $\varphi_{K,n} : [0,1] \to [0,1]$ は狭義単調増加関数で $\varphi_{K,n}(0) = 0$, $\varphi_{K,n}(1) = 1$、さらに

(4.16)
$$\varphi_{K,n}(r) = \lambda_n^{1-\alpha} r^\alpha, \quad \alpha = K^{1/(1-n)},$$

ここで

$$\log \lambda_n = \lim_{t\to\infty}(\log \Psi(t) - \log t).$$

λ_n の評価について $\lambda_2 = 4$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $(n \geq 3)$,

$$\lambda_n \leq 4\exp\left(\int_1^\infty \frac{a(n,s)}{s} ds\right); \; a(n,s) = -1 + \left(\frac{s^2+1}{s^2-1}\right)^{(n-2)/(n-1)}$$

などが知られている [G1961], [VU1988, Theorem 7.47]. 次の結果は spherical symmetrization の手法をもちいて Gehring らによって証明された。

4.17. Theorem. (Extremal ring としての Grötzsch ring, Teichmüller ring.)
(1) $E \subset \mathbf{B}^n$ を 2 点を含む連続体とするとき

(4.18)
$$\mathrm{cap}(\mathbf{B}^n, E) \geq \mathrm{cap}(\mathbf{B}^n, J[x,y]) = \gamma_n\left(\frac{1}{\tanh \frac{1}{2}\rho(x,y)}\right).$$

ここで $J[x,y]$ は x と y を結ぶ双曲的測地線分 (すなわち x,y を含み、かつに $\partial\mathbf{B}^n$ に直交する円上で x と y の間にある円弧)、$\rho(x,y)$ は x と y との双曲的距離。$\mathrm{cap}(\mathbf{B}^n,E)=M(\Delta(E,\overline{\mathbf{R}^n}\setminus\mathbf{B}^n))$, $\mathrm{cap}(\mathbf{B}^n,J[x,y])=M(\Delta(J[x,y],\overline{\mathbf{R}^n}\setminus\mathbf{B}^n))$. 特に $y=0$ ならば

$$\mathrm{cap}(\mathbf{B}^n,E)\geq\gamma_n\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{4.19}$$

(2) $R=R(E,F)$ を $\mathbf{R}^n$ 内の ring で $a,b\in E,c,\infty\in F,(a\neq b,c\neq\infty)$ とするとき

$$\mathrm{cap}R=M(\Delta(E,F))\geq\tau_n\left(\frac{|a-c|}{|a-b|}\right). \tag{4.20}$$

さらに modulus の等角不変性を用いれば $\overline{\mathbf{R}^n}$ 内の ring $R=R(E,F)$ に対して $a,b\in E,c,d\in F,(a\neq b,c\neq d)$ であるとき

$$\mathrm{cap}R\geq\tau_n\left(\frac{|a-c|}{|a-b|}\frac{|b-d|}{|c-d|}\right). \tag{4.21}$$

4.22. (曲線の正則表現) $\gamma:I=[a,b]\to\mathbf{R}^n$ を rectifiable path 、$l(\gamma)$ をその長さとする。このとき弧長関数 (length function) $s_\gamma:I\to[0,l(\gamma)]$ が定義でき、 s_γ は単調非減少で、ある I の部分区間 $[c,d]$ で s_γ が定数値をとれば、$\gamma(t)$ は $[c,d]$ 上で定値である。したがって γ を $s_\gamma I=[0,l(\gamma)]$ を動く弧長パラメータで reparametrize することができる。すなわち曲線 γ^o が存在して
(1) $\gamma(t)=\gamma^o(s_\gamma(t))$,
(2) $l(\gamma^o|_{[0,s]})=s\quad(s\in s_\gamma I)$ をみたす。 γ^oを γ の弧長パラメータ表現あるいは正則表現 (normal representation) という。

4.23. Notation. I が開区間、または半開区間であるとき、path $\gamma:I=[a,b]\to\mathbf{R}^n$ が locally rectifiable であるとは、任意の閉部分区間 $I'\subset I$ に対して $\gamma|_{I'}$ が rectifiable であるときにいう。さらに $l(\gamma)=\sup_{I'}l(\gamma|_{I'})<\infty$ をみたすとき rectifiable であるといい、$l(\gamma)$ を γ の弧長という。このとき I の閉包 $\overline{I}$ で定義された closed path $\tilde{\gamma}:\overline{I}=[a,b]\to\mathbf{R}^n$ で $\tilde{\gamma}|_I=\gamma,\ l(\tilde{\gamma})=l(\gamma)$ をみたすものが一意的に定まる (I が開区間のときの証明は [V1971, Theorem 3.2] にある。I が半開区間の場合も同様にして証明できる)。$\tilde{\gamma}$ を γ の closed extension と呼ぶ。

4.24. (曲線上の絶対連続関数) $\gamma:I=[a,b]\to\mathbf{R}^n$ を rectifiable path とする。γ の像 (locus) $|\gamma|=\{\gamma(t):t\in I\}$ 上で定義された写像 $f:|\gamma|\to\mathbf{R}^m$ が $\underline{\gamma\text{ 上絶対連続}}$であるとは $f\circ\gamma^o:s_\gamma I\to\mathbf{R}^m$ が絶対連続であるときにいう。すなわち任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して互いに交わらない $s_\gamma I$ の部分区間列 $\{[s_i,\overline{s}_i]:i=1,...,p\}$ が

$$\sum_{i=1}^{p}(\overline{s}_i-s_i)<\delta \text{ をみたせば } \sum_{i=1}^{p}|f\circ\gamma^o(\overline{s}_i)-f\circ\gamma^o(s_i)|<\epsilon$$

であるということである。

4.25. Theorem (Fuglede の定理 [FUG1957]) $G \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とし、$g : G \to \mathbf{R}$ (または $\mathbf{R}^m$) は ACL^p であるとする。Γ を G に含まれる locally rectifiable な曲線族で、各 $\gamma \in \Gamma$ はその上で g が絶対連続でない閉部分弧をもつとする。このとき $M_p(\Gamma) = 0$

Proof. $g : G \to \mathbf{R}$ の場合を考えれば十分である。$\{G_m\}$ を G の exhaustion、すなわち $\overline{G_m}$ はコンパクトで $\overline{G_m} \subset G_{m+1}$, $G = \cup_{m=1}^{\infty} G_m$ をみたす開集合列とする。Γ_m を次の条件をみたす曲線 γ の族とする。

(1) γ は G_m に含まれる。

(2) Γ のある曲線 γ' が存在して、γ は γ' の閉部分弧である。

(3) γ はその上で g が絶対連続でないような部分弧を含む。

すると Γ_m の各曲線は rectifiable であり、 $\cup_{m=1}^{\infty}\Gamma_m < \Gamma$. したがって

$$M_p(\Gamma) \leq M_p(\cup\Gamma_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} M_p(\Gamma_m)$$

よって各 m に対して $M_p(\Gamma_m) = 0$ が成り立つことをいえばよい。

ρ_ϵ を Friedrichs の軟化子 (mollifier) とし $g_k = \rho_{1/k} * g$, $(k = 1, 2, ...)$ とおくと、g_k は C^∞-級かつ $k \to \infty$ のとき $\overline{G_m}$ 上一様に g に収束し、かつ $L^p(\overline{G_m})$ において $\partial g_k/\partial x_i \to \partial g/\partial x_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$ である。([MIZ1965, p.27, 補題 1.3、p.67 命題 2.4]). このときある部分列 $\{g_{k_j}\}$ が存在して $M_p(\Gamma_0) = 0$ をみたす曲線族 Γ_0 を除く G_m 内のすべての rectifiable な曲線 γ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \int_\gamma \left| \frac{\partial g_{k_j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ds = 0 \ i = 1, 2, ..., n \tag{4.26}$$

であることをしめす。議論は $i = 1$ から始めて i について順に繰り返し部分列を選んでいけばよいようになっているので $i = 1$ についてのみ (4.14) が成立することをしめす。部分列 $\{g_{k_j}\}$ を

$$\int_{G_m} \left| \frac{\partial g_{k_j}}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|^p dm < \left(\frac{1}{2}\right)^{j(p+1)}, \tag{4.27}$$

となるように選ぶ。$h_j = |\partial g_{k_j}/\partial x_1 - \partial g/\partial x_1|$ とおき、Γ_0 を G_m 内の rectifiable な曲線で (4.14) をみたさないもの全体とする。Γ_j, $j = 1, 2, .., $ を G_m 内の rectifiable な曲線で

$$\int_\gamma h_j ds > 2^{-j}$$

をみたすもの全体の族とすると、$2^j h_j \in F(\Gamma_j)$ だから (4.27) より

$$M_p(\Gamma_j) \leq 2^{pj} \int_{G_m} h_j^p dm < 2^{-j}.$$

任意の正整数 j に対して $\Gamma_0 \subset \cup_{j=i}^{\infty}\Gamma_i$ であるから、

$$M_p(\Gamma_0) \leq \sum_{j=i}^{\infty} M_p(\Gamma_i) < \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-i+1}$$

従って $M_p(\Gamma_0)=0$ である。

$M_p(\Gamma_m)=0$ をしめすには $\Gamma_m\subset\Gamma_0$ であることがいえればよい。いま $\Gamma_m\setminus\Gamma_0$ に含まれる曲線 γ が存在したとする。γ は rectifiable だから弧長パラメータで表わされるとしてよい。$\gamma(s)=(\gamma_1(s),\dots,\gamma_n(s))$ とおく。g_k は C^∞−級ゆえ $g_k\circ\gamma$ は絶対連続で $0\le s\le l(\gamma)$ に対して

$$g_k(\gamma(s))-g_k(\gamma(0))=\int_0^s(g_k\circ\gamma)'(s)ds=\int_0^s\sum_{i=1}^n\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\gamma(u))\gamma_i'(u)du \tag{4.28}$$

ここで a.e. $u\in[0,l(\gamma)]$ に対して $|\gamma_i'(u)|\le|\gamma'(u)|=1$. $k\to\infty$ のとき (4.28) の左辺は $g(\gamma(s))-g(\gamma(0))$ に収束する。他方 $\gamma\notin\Gamma_0$ だから $k\to\infty$ のとき

$$\left|\int_0^s\sum_{i=1}^n\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\gamma(u))\gamma_i'(u)du-\int_0^s\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_i}(\gamma(u))\gamma_i'(u)du\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^n\int_0^s\left|\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\gamma(u))-\frac{\partial g}{\partial x_i}(\gamma(u))\right||\gamma_i'(u)|\,du\le\sum_{i=1}^n\int_\gamma\left|\frac{\partial g_k}{\partial x_i}-\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|ds\to0$$

したがって

$$g(\gamma(s))-g(\gamma(0))=\int_0^s\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_i}(\gamma(u))\gamma_i'(u)du$$

このように積分表示できることが $g\circ\gamma$ が絶対連続であることをしめしている。すなわち g が γ 上で絶対連続であることがわかるが、これは曲線族 Γ_m に対する仮定に矛盾する。

最後に曲線族の modulus の下からの評価を与える非常に有用な結果を紹介するが、対称化 (symmetrization) から始めていろいろな準備が必要なので証明は省略することにする。詳しくは Väisälä の本 [V1971] の 9, 10 節を見よ。

4.29. Theorem. [V1971, Theorem 10.12] $0<a<b$ とし E,F を $\mathbf{R}^n$ の disjoint な部分集合で、すべての $t\in(a,b)$ に対して E,F はともに $S^{n-1}(t)$ と交わるとする。G を spherical ring $A=B^n(b)\setminus\overline{B^n}(a)$ を含む領域とするとき

$$M(\Delta(E,F;G))\ge b_n\log\frac{b}{a}. \tag{4.30}$$

ここで c_n は n のみに依存する定数である。$G=A$ かつ E,F が原点を通る直線 L と A との交わりの成分とするとき (4.30) で等号が成立する。したがって (4.30) の評価は sharp である。

5 Path lifting の問題

5.1. Path lifting. G を $\mathbf{R}^n$ の領域とし、$f: G \to \mathbf{R}^n$ を連続な light open 写像とする。$\beta; [a,b) \to \mathbf{R}^n$ を一つの path とし、$x_0 \in f^{-1}(\beta(a))$ とする。$\alpha: [a,c) \to G$ が β の x_0 を始点にもつ f-極大 (maximal) lifting であるとは、以下の条件がみたされるときにいう。

(1) $\alpha(a) = x_0$.

(2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$.

(3) $c < c' \leq b$ ならば $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ かつ $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$ をみたす path $\alpha' : [a,c') \to G$ は存在しない。

同様にして path $\beta; (a,b] \to \mathbf{R}^n$, $x_0 \in f^{-1}(\beta(b))$, に対して、β の x_0 を終点にもつ 極大 (maximal) f-lifting を定義する。ここでは離散かつ開である写像の場合に、あたえられた path の極大な path-lifting をみつけるという問題を扱う。

5.2. $f: X \to Y$ が離散でない、または開でないときは f に対する path-lifting が不可能である例。

(1) $I \times I$, (ここで $I = [0,1]$) の同値関係 $(x_1, y_2) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_2) = (x_2, y_2)$ または、$x_1 = x_2$ で $y_1 = 0, y_2 = 1$ あるいは $y_1 = 1, y_2 = 0$ (すなわち、上辺と下辺を同一視する) による商空間を X ((x,y) の同値類を $[(x,y)]$ で表わす。)、さらに $[(x_1,y_2)] \sim [(x_2,y_2)] \Leftrightarrow [(x_1,y_2)] = [(x_2,y_2)]$ または $x_1 = x_2 = 0$ という関係を付け加えて得られる商集合 (すなわち左辺を 1 点につぶした空間) を Y とおき、自然な射影 $f: X \to Y$ が開写像となるように Y に位相を与える。このとき、

$$\alpha(t) = (t, n(n+1)(t - 1/n)), \quad 1/(n+1) \leq t < 1/n, \ n = 1, 2, \ldots$$

で定まる曲線の Y への射影に端点を付け加えたものは f に対する path-lifting は不可能である。

(2)

$$J_n = \left\{ (x,y) : y = \frac{2(-1)^n}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} (x - \frac{1}{n}) + (-1)^n, \ \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}$$

とおき、$J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ とする。J は $\mathbf{R}$ と同相になるように位相をいれ、1 点集合 $\{(0,0)\}$ は開集合として $X = \{(0,0)\} \cup J$ とおく。$f: X \to [0,1]$ を x−成分への射影とすると、f は離散であるが開ではない。曲線 $[0,1]$ は X への f-lifting をもたない。

あるいは、

$$X = \{(x,0) : 0 < x < 1/2 \text{ または } 1/2 < x < 1\} \cup \{(1/2, 1)\}$$

に $\mathbf{R}^2$ の部分位相をいれ、$f: X \to (0,1)$ を x−成分への射影とすると、f は離散であるが開ではない。曲線 $[0,1]$ は X への f-lifting をもたない。

5.3. path lifting の極大列 $\beta; [a,b) \to \mathbf{R}^n$ を一つの path とし、$x_1, \ldots, x_k$ を $f^{-1}\beta(a)$ に属する相異なる点とする。$m = \sum_{i=1}^{k} |i(x_i, f)|$ とおく。このとき path $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\alpha_j : [a, c_j) \to G$, が β の f-lifting の極大列であるとは次の条件が成り立つときにいう。

(a) 各 α_j は β の極大 (maximal) f-lifting.

(b) $\mathrm{card}\{j : \alpha_j(a) = x_i\} = |i(x_i, f)|$, $(i = 1, ..., k)$.

(c) $\mathrm{card}\{j : \alpha_j(t) = x\} \leq |i(x, f)|$, $(x \in G, t \in [a, b))$.

path $\beta; (b, a] \to \mathbf{R}^n$ に対して $x_1, ..., x_k$ を終点にもつ β の f-lifting の極大列の定義も同様である。

5.4. Theorem. [RI1973] $f : G \to \mathbf{R}^n$ を離散かつ開である向きを保つ連続写像とする。曲線 $\beta : [a, b) \to \mathbf{R}^n$ (または $\beta : (b, a] \to \mathbf{R}^n$) を考える。$\{x_1, ..., x_k\} \subset f^{-1}(\beta(a))$ を異なる点からなる集合とするとき、β は $x_1, ..., x_k$ を始点にもつ (または終点にもつ) f-lifting の極大列をもつ。

Proof. (第一段階) まず次のことを仮定する。

(*) G の各点 x に対して、その ノーマル近傍 U が存在して、任意の曲線 $\gamma : [d, e) \to fU$ (または $\gamma : (e, d] \to fU$) は x を始点 (または終点) にもつ f-lifting の極大列 $(\tau_1, ..., \tau_r)$, $r = i(x, f)$, $\tau_\mu : [d, e) \to U$ (または $\tau_\mu : (e, d] \to U$) をもつ。

この仮定 (*) のもとに $x_1, ..., x_k$ を始点にもつ (または終点にもつ) f-lifting の極大列の存在を示す。ここでは $\beta : [a, b) \to \mathbf{R}^n$ として証明を与えるが、$\beta : (b, a] \to \mathbf{R}^n$ の場合も同様に証明できる。

$m = \sum_{i=1}^{k} i(x_i, f)$ とおく。A を次のような曲線の列 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ の集合とする。$\alpha_j : J_\alpha \to G$, $j = 1, ..., m$, は連続で
(1) $J_\alpha \subset [a, b)$ は連結、 $a \in J_\alpha$,
(2) $f \circ \alpha_j = \beta|_{J_\alpha}$, $j = 1, ..., m$,
(3) $\mathrm{card}\{j : \alpha_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$, $i = 1, ..., k$,
(4) $\mathrm{card}\{j : \alpha_j(t) = x\} \leq i(x, f)$, $x \in G$, $t \in J_\alpha$
このとき A は順序集合となる。順序は $\alpha, \alpha' \in A$ に対して $J_a \subset J_{\alpha'}$ かつ $\alpha_j = \alpha'_j|J_\alpha$, $j = 1, ..., m$, であるとき $\alpha \leq \alpha'$ であるとして定める。A は空ではない。なぜなら $\alpha_j : \{a\} \to G$, $(j = 1, ..., m)$ を $\mathrm{card}\{j : \alpha_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$ となるように与えると $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \subset A$ だからである。$E \subset A$ を空でない線形順序部分集合とする。$J_\sigma = \cup_{\alpha \in E} J_\alpha$ とし、$\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$, $\sigma_j : J_\sigma \to G$ を

$$\sigma_j(t) = \alpha_j(t) \quad (t \in J_\alpha \text{ のとき}),$$

で定めると $\sigma \in A$ は E の上界である。したがって Zorn の補題より A の極大元 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ が存在する。この α に対してある α_j が $\alpha_j(a)$ を始点とする β の maximal f-lifting であることを示そう。すべての $\alpha_j, j = 1, ..., m$ は β の maximal f-lifting でないと仮定する。このときある $c \in [a, b)$ があって $J_\alpha = [a, c)$ または $J_\alpha = [a, c]$ であるが後者が必ず成立する。なぜなら $J_\alpha = [a, c)$ のとき $\lim_{t \to c} f\alpha_j(t) = \lim_{t \to c} \beta(t) = \beta(c)$ であり、これから α_j は $\alpha_j : [a, c] \to G$ に連続拡張されることがしめされる。実際、まずもし任意のコンパクト部分集合 $K \subset G$ に対してある t_K が存在して $\alpha_j(t) \subset G \setminus K$, $t \geq t_K$ ならば α_j は β の maximal f-lifting であり矛盾である。よって $\alpha_j(t)$ は $t \to c$ のとき G 内に集積点 y をもつ。明らかに $y \in f^{-1}\beta(c)$ である。 f は discrete だから $\delta > 0$ を十分小さくとれば $f^{-1}\beta(c) \cap \overline{B}(y, \delta) = \{y\}$ となる。もし $\lim_{t \to c} \alpha_j(t)$ が存在しなければ、ある

$r<\delta$ と $t_m \to c$ が存在して $\alpha_j(t_m) \in S(y,r)$ となる。$\alpha_j(t_m)$ の集積点 z に対して $f(z)=\beta(c)$ となり矛盾。よって $\alpha_j(c)=y$ とおけば α_j は連続拡張 (それを同じ記号 α_j であらわす) $[a,c] \to G$ をもつ。

次に $t=c$ においても (4) の条件が成立することをみる。ある $j \in \{1,...,m\}$ に対して $x=\alpha_j(c)$ とかける点 $x \in G$ についてのみ考えればよい。U を x のノーマル近傍とし、t を $\beta(t) \in fU$ となるように十分 c の近くにとれば、$\{y_1,...,y_p\}=f^{-1}(\beta(t)) \cap U$ とおいたとき

$$i(x,f)=\mu(f,U)=\sum_{k=1}^{p} i(y_k,f) \geq \sum_{k=1}^{p} \mathrm{card}\{j:\alpha_j(t)=y_k\}$$

(1.1 参照) $t \to c$ として

$$i(x,f) \geq \mathrm{card}\{j:\alpha_j(t)=x\}$$

を得る。以上のことから $J_\alpha=[a,c]$ である。

$\{z_1,...,z_l\}=\{\alpha_j(c):j=1,...,m\}$, $v_s=\mathrm{card}\{j:\alpha_j(c)=z_s\}$, $r_s=i(z_s,f)$, $s=1,...,l$ とおく。いま番号をつけ直すことによって

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1(c) & = & \cdots & = & \alpha_{1+v_1}(c) & = & z_1 \\
\alpha_{v_1+1}(c) & = & \cdots & = & \alpha_{v_2}(c) & = & z_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\alpha_{v_{l-1}+1}(c) & = & \cdots & = & \alpha_m(c) & = & z_l
\end{array}$$

としてよい。U_s を仮定 $(*)$ をみたす z_s のノーマル近傍とする。$e>c$ を $\beta[c,e) \subset \cap_{s=1}^{l} fU_s$ となるようにとる。すると各 $s=1,...,l$ に対して曲線 $\tau_{s\mu}:[c,e) \to U_s$, $\mu=1,...,r_s$ で

(i) $f \circ \tau_{s\mu}=\beta|_{[c,e)}$

(ii) $\tau_{s\mu}(c)=z_s$, $\mu=1,...,r_s$

(iii) $\mathrm{card}\{\mu:\tau_{s\mu}(t)=x\} \leq i(x,f)$, $x \in U_s, t \in [c,e)$

をみたすものが存在する。(4) の条件より $v_s \leq r_s$ だから、$v_{s-1}<j \leq v_s$ のとき (ただし $v_0=0$ とする)

$$\overline{\alpha}_j(t)=\begin{cases} \alpha_j(t), & t \in [a,c); \\ \tau_{sj-v_{s-1}}(t) & t \in [c,e) \end{cases}$$

とおくと $\overline{\alpha}=(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_m)$ は A に属し、かつ $\alpha<\overline{\alpha}$ である。これは α の極大性に反する。以上のことから $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ のなかのある α_j は β の maximal f-lifting であることがわかった。

番号を付け替えて $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ の最初の m_1 個を除いた残りの曲線 $\alpha_{m_1+1},...,\alpha_m$ が β の maximal f-lifting であるもの全体とする。$\{x_1^1,...,x_{l_1}^1\}=\{\alpha_j(c):j=1,...,m_1\}$ とし、$\beta_1=\beta|_{[c,b)}$ とおく。上の議論を $\{x_1,...,x_m\}$ を $\{x_1^1,...,x_{l_1}^1\}$ に、β を β_1 に置きかえて同様に進める。A_1 をこれらに対して A と同様に定義された曲線の列の順序集合とし、$\alpha^1=(\alpha_1^1,...,\alpha_{l_1}^1)$ をその極大元とす

ると、ある j_1 があって $\alpha^1_{j_1}$ は β の maximal f-lifting となる。$\alpha_j = \alpha^1_{j_1}$ となる α_j を一つみつけて、α_j の拡張を

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} \alpha_j(t), & t \in [a,c); \\ \alpha^1_{j_1}(t) & t \in [c,c_1) \end{cases}$$

とおくと α_j は β の maximal f-lifting となる。このようなプロセスを繰り返し行うことによって $x_1,...,x_s$ を 始点にもつ β の f-lifting の極大列を求めることができる。

(第二段階)　仮定 $(*)$ が成立することを局所位相指数に関する帰納法で証明する。$x \in G$ が $i(x,f)=1$ のとき $x \notin B_f$ だから f は x において局所同相 [MRV1969, Lemma2.12]. したがって、このときはあきらかに $(*)$ が成立する。

いま $1 \leq i(x,f) < r$ をみたすの点において仮定 $(*)$ が成立したとする。$x \in G$ を $i(x,f)=r$ をみたす点とする。U を x のノーマル近傍とし、$\gamma:[d,e) \to fU$ を $\gamma(d)=x$ をみたす曲線とする。$F=\{x \in U : i(x,f)=r\}$ とおく。F は閉集合である。(2.3) より fF は fU における閉集合で、$[d,e)\setminus\gamma^{-1}fF$ は開区間の可算和である。(a,b) をその一つの区間とし ($d \in \gamma^{-1}fF$ に注意)、$c \in (a,b)$ を一つ固定する。$\gamma' = \gamma|_{[c,b)}$, $\gamma'' = \gamma|_{(a,c]}$とおく。 $F \subset B_f$ で $\dim B_f \leq n-2$ だったから (第 1 章参照) $U \setminus F$ は領域であり [HY1961, Chap.IV, Sec. 5]、$f|_{U\setminus F}$ は仮定 $(*)$ をみたす。したがって第一段階の結果より γ' (および γ'') は $\{u_1,...,u_\mu\}$ を始点とする (あるいは終点とする) $f|_{U\setminus F}$-liftings の極大列をもつ。いま U は x のノーマル近傍としているから $\sum_{i=1}^{\mu} i(u_i,f)=i(x,f)=r$ である。次にこの極大列に含まれる liftings は $[c,d)$ 上 (あるいは $(a,c]$ 上) 全体で定義されることをみよう。たとえば γ' が maximal $f|_{U\setminus F}$-lifting $l:[c,t_1) \to U \setminus F$ で $c<t_1<b$ であるものをもつとする。

$$(U \setminus F) \cap f^{-1}(\gamma'(t_1)) = U \cap f^{-1}(\gamma'(t_1)) = \{v_1,...,v_\nu\}$$

とし、$V_1,...,V_\nu$ をそれぞれ $v_1,...,v_\nu$ のノーマル近傍でたがいに disjoint なものとする。t_2, $(c<t_2<t_1)$ を $\gamma'(t_2,t_1) \subset \cap fV_i$ となるようにとる。$f^{-1}(\cap fV_i) \cap (U \setminus F) \subset \cup V_i$ だから、ある i があって $l(t_2,t_1) \subset V_i$ である。

$$f \circ l(t) = \gamma'(t) \to \gamma'(t_1) \quad (t \to t_1)$$

だから、容易にわかるように $\lim_{t\to t_1} l(t)$ が存在して v_i に等しい。よって l の定義域は $[c,t_1]$ に拡張される。

$l(t_1) \in U \setminus F$ だから帰納法の仮定より $l(t_1)$ のある近傍 W と曲線 $\gamma'|_{[t_1,t_3)}:[t_1,t_3) \to fW$ に対して $l(t_1)$ を始点とする $\gamma'|_{[t_1,t_3)}$ の maximal f-lifting $l':[t_1,t_3) \to W$ が存在する。すると

$$l(t) = \begin{cases} l(t), & t \in [c,t_1); \\ l'(t) & t \in [t_1,t_3) \end{cases}$$

は γ' の f-lifting で l の拡張になっている。しかしこれは l が極大であることに矛盾する。　したがって極大列における $f|_{U\setminus F}$-liftings は $[c,d)$ 上 (あるいは $(a,c]$ 上) 全体で定義される。よって曲線 $\alpha_q:(a,b) \to U \setminus F$, $q=1,...,r$, が存在して

(i) $f \circ \alpha_q = \gamma|_{(a,b)}$

(ii) $\mathrm{card}\{q : \alpha_q(c)=u_i\} = i(u_i,f), \quad i=1,...,\mu$

(iii) $\operatorname{card}\{q : \alpha_q(c) = z\} \le i(z,f), \quad z \in U \setminus F,\ t \in (a,b)$

いま $[d,e)\setminus\gamma^{-1}fF = \cup(a_\lambda, b_\lambda)$ (開区間の disjoint 和) とし、各 (a_λ, b_λ) で上のように構成した曲線を α_{λ_q} , $q = 1,\dots,r,$ とおく。$t \in [d,e)\cap\gamma^{-1}fF$ とすると、$f(x_t) = \gamma(t)$ をみたす点が存在し、しかも $i(x,f) = i(x_t,f)$ だからそのような x_t はただ一つ存在する。そこで

$$\tau_q(t) = \begin{cases} \alpha_{\lambda_q}, & t \in (a_\lambda, b_\lambda); \\ x_t & t \in [d,e)\cap\gamma^{-1}fF \end{cases}$$

とおくと $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_r)$, $\tau_j : [d,e) \to U$ は x を始点とする $f|_{U\setminus F}$-liftings の極大列である。

終点に関する path lifting に対する証明も上と同様である。

極大 path-lifting の存在については f が離散でなくても lightness であることを仮定すれば十分である。最後に、そのことについて述べている、しかも Theorem 5.4 で得た f-lifting の挙動についても触れている補題を証明なしであたえる。

5.5. Lemma. ([MRV1971, Lemma 3.12]) $f : G \to \mathbf{R}^n$ を連続な light open 写像とする。$x_0 \in G$ とし $\beta : [a,b) \to \mathbf{R}^n$ を一つの path で $\beta(a) = f(x_0)$ かつ $\lim_{t\to b}\beta(t)$ が存在するか、または $t \to b$ のとき $\beta(t) \to \partial fG$ であるものとする。このとき β は $x_0 \in f^{-1}(\beta(a))$ を始点にもつ極大 path-lifting $\alpha; [a,c) \to G$ をもつ。もし $t \to c$ のとき $\alpha(t) \to x_1$ ならば $c = b$ かつ $f(x_1) = \lim_{t\to b}\beta(t)$ である。もしそうでなければ $t \to c$ のとき $\alpha(t) \to \partial G$ である。

6 Quasiregular 写像の定義

6.1. Quasiregular 写像の定義 G を $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の部分領域とする。$f = (f^1, f^2, ..., f^m)$: $G \to \mathbf{R}^m$ を、ある $p \geq 1$ に対して Sobolev 空間 $W^1_{p,loc}(G, \mathbf{R}^m)$ に属する写像とし、その Jacobi 行列を

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$$

$m = n$ のとき、その行列式を $J(x,f) = \det Df(x)$ で表わす。$f \in ACL^p(G)$ が weakly K-quasiregular, $1 \leq K < \infty$ であるとは

$$|f'(x)|^n \leq KJ(x,f) \ a.e. \text{ in } G \tag{6.2}$$

がみたされるときにいう。ここで $|f'(x)| = |Df(x)| = \max_{|h|=1} |Df(x)h|$ は $x \in G$ における f の Jacobi 行列の operator norm. $K_O(f)$ を (6.2) をみたす K の下限とし、これを f の outer dilatation とよぶ。もし $p = n$ (したがって $p \geq n$) ならば f を $K-$quasiregular mapping と呼ぶ。とくに $f : G \to f(G)$ が同相写像であるとき f を $K-$quasiconformal mapping とよぶ。以下 quasiregular mapping を qr 写像、quasiconformal mapping を qc 写像と書くことにする。f が qr 写像であるとき

$$J(x,f) \leq Kl(f'(x))^n a.e. \text{ in } G \quad l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |Df(x)h|$$

をみたすような K の最小値 $K_I(f)$ を f の inner dilatation とよぶ。$K_I(f) \leq K_O(f)^{n-1}, K_O(f) \leq K_I(f)^{n-1}$ である。$K(f) = \max\{K_I(f), K_O(f)\}$ を f の dilatation と呼び、$K(f) \leq K$ のとき f は $K-$quasiregular mapping であるという。G を $\overline{\mathbf{R}^m}$ の部分領域とする。写像 $f : G \to \overline{\mathbf{R}^m}$ が quasimeromorphic mapping (qm 写像) であるとは $f(G) = \{\infty\}$ または $f^* = f|G\setminus(f^{-1}(\infty) \cup \{\infty\})$ が qr 写像であるときにいう。このとき $K_I(f) = K_I(f^*), K_O(f) = K_O(f^*)$ とおく。

6.3. $f : G_1 \to G_2$ は K-qr 写像であるとする。$g : G_2 \to G_3$ が K'-qr 写像であるとき、合成写像 $g \circ f$ は KK'-qr 写像である。もっと詳しくいうと次式が成り立つ:

$$K_O(g \circ f) \leq K_O(f)K_O(g), \quad K_I(g \circ f) \leq K_I(f)K_I(g)$$

また f が $K-$qc 写像であるとき逆写像 f^{-1} は $K-$qc 写像である。

qr 写像がもつ重要な性質を証明なしに紹介する。詳しいことについては大竹氏の論説または Reshetnyak の本 [R1989] を参照のこと。

6.4.Theorem $f : G \to \mathbf{R}^n$ を非定数 qr 写像とするとき

(1) f は向きを保ち離散かつ開である。

(2) f は G の a.e. の点で微分可能で、かつ $J(x,f) > 0$ である。

(3) f は条件 (N) をみたす。すなわち G の測度 0 の部分集合を測度 0 の集合に写す。

(4) $m_n(B_f) = m_n(fB_f) = 0$

6.5. Examples. 以下、qr 写像の例をいくつか挙げよう。

6.6 $f(x) = x|x|^{\alpha-1}$ を考える。$f'(x) = |x|^{\alpha-3}(\delta_{ij}|x|^2 + (\alpha-1)x_ix_j)$ は対称行列である。$T = (x_ix_j)$ とおいてこの固有方程式を $\det((\lambda - |x|^{\alpha-1})I_n - (\alpha-1)|x|^{\alpha-3}T)$ を計算すると

$$(\lambda - |x|^{\alpha-1})^n - (\alpha-1)(\lambda - |x|^{\alpha-1})^{n-1}|x|^{\alpha-3}trT$$
$$= (\lambda - |x|^{\alpha-1})^{n-1}(\lambda - \alpha|x|^{\alpha-1})$$

固有値は $|x|^{\alpha-1}, \alpha|x|^{\alpha-1}$ であるから、たとえば $0 < \alpha < 1$ ならば $|f'(x)| = |x|^{\alpha-1}, l(f'(x)) = \alpha|x|^{\alpha-1}$. 一方 Jacobian は上の固有方程式の計算で特に $\lambda = 0$ を代入し $(-1)^n$ をかければ、$J_f(x) = \alpha|x|^{n(\alpha-1)}$. したがって

$$K_O = \alpha^{-1}, K_I = \alpha^{1-n}$$

となり $f(x)$ は α^{1-n}−qr 写像となる。この例は後に qr 写像に対する Liouville の定理などにおける extremal mapping として現れる。

6.7. ***k*-winding map.** $k \geq 2$ を自然数として $f_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を (x_1, x_2) 平面における極座標 (r, θ), $(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \arctan x_2/x_1)$ をもちいて対応 $(r, \theta, x_3, ..., x_n) \mapsto (r, k\theta, x_3, ..., x_n)$ を与える写像とする。

$$Df_k(x) = \begin{pmatrix} M_k & O_{2,n-2} \\ O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}, \ M_k = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r}\cos k\theta + \frac{x_2}{r}k\sin k\theta & \frac{x_2}{r}\cos k\theta - \frac{x_1}{r}k\sin k\theta \\ \frac{x_1}{r}\sin k\theta - \frac{x_2}{r}k\cos k\theta & \frac{x_2}{r}\sin k\theta + \frac{x_1}{r}k\cos k\theta \end{pmatrix}$$

であり、$J(x, f_k) = k$,

$$M_k^t M_k = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2 + k^2x_2^2}{r^2} & \frac{(1-k^2)x_1x_2}{r^2} \\ \frac{(1-k^2)x_1x_2}{r^2} & \frac{x_2^2+k^2x_1^2}{r^2} \end{pmatrix}.$$

よって $Df_k(x)^tDf_k(x)$ の固有値は 1 と k^2 で $|Df_k(x)| = k, l(f'(x)) = 1$、したがって $K_O(f_k) = k^{n-1}, K_I(f_k) = k$, よって f_k は k^{n-1}-qr 写像である。f_k を k-winding map と呼ぶ。f_k の分岐点集合は $B_{f_k} = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 = x_2 = 0\}$, その各点における局所位相位数は $i(x, f_k) = k$ である。

6.8. 注意 (x_1, x_2)-平面を複素平面 $(z = x_1 + ix_2)$ と同一視して写像 $g_k : (z, x_3, ..., x_n) \to (z^k, x_3, ..., x_n)$, $(n \geq 3)$ を定義するとき、これは qr 写像にならない。

6.9. Zorich の例 [ZO1967] 一点を除外値にもつ qr 写像 $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を構成しよう。$\mathbf{R}^3$ を平面の族 $x = i, y = j$, $(i, j$ は奇整数) によって合同な z 軸方向に無限に延びた四角柱 C たちに分割する。そうした C のひとつ $C_0 = \{(x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1\}$ から無限円柱 $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1\}$ への写像 g を $\mathbf{R}^2 \times \{z\}$ 平面における原点からの放射線方向への引き延ばしで定める。したがって、たとえば $x > y$ のとき $g(x, y, z) = (\sqrt{1 + (y/x)^2} \cdot x, \sqrt{1 + (y/x)^2} \cdot y, z)$ となり、このとき $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと

$$Dg(x, y, z) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x & y \\ -x^{-2}y^3 & x^{-1}(x^2 + 2y^2) \end{pmatrix}$$

ここで $\rho=(y/x)^2$ とおくと $J((x,y,z),g)=1+\rho$.

$$Dg(x,y,z)^t Dg(x,y,z)=\frac{1}{x^4}\begin{pmatrix} x^4-x^2y^2+y^4 & xy(x^2-2y^2) \\ xy(x^2-2y^2) & x^2(x^2+4y^2) \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda_\pm=2^{-1}(1+\rho)[(2+\rho)\pm\sqrt{\rho(4+\rho)}]$. よって $K(g)=(3+\sqrt{5})/2$ となり g は qc 写像である。次に

$$f(x,y,z)=\left(\frac{2e^z x}{1+x^2+y^2},\frac{2e^z y}{1+x^2+y^2},\frac{e^z(1-x^2-y^2)}{1+x^2+y^2}\right)$$

を定めると f は V を上半空間 $\mathbb{H}=\{(x,y,z):z>0\}$ に写し、V の閉包 $\overline{V}$ から $\overline{\mathbb{H}}\setminus\{0\}$ への同相写像に拡張できる。

$$Df(x,y,z)=e^z M,\quad M=\begin{pmatrix} -2x^2+2y^2+2 & -4xy & 2x(1+x^2+y^2) \\ -4xy & 2x^2-2y^2+2 & 2y(1+x^2+y^2) \\ -4x & -4y & (1-x^2-y^2)(1+x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ここで $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと $\det M=4(1+r^2)^4$,

$$M^t M=\begin{pmatrix} 4(1+r^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4(1+r^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r^2)^4 \end{pmatrix}$$

よって $|Df(x,y,z)|=2(1+r^2), l(f'(x,y,z))=(1+r^2)^2$ であり $K(f)=4$. 以上のことから $F=f\circ g:C_0\to\mathbb{H}$ は qc 写像で $\overline{C_0}$ から $\overline{\mathbb{H}}\setminus 0$ への同相写像への拡張される。F により四角柱の 4 つの稜は平面を 4 等分する原点からの放射線に写される。この写像を四角柱の面と $\partial\mathbb{H}$ における鏡像を繰り返すことによって写像 $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ に拡張することができる。F は周期 $2e_1,2e_2$ をもつ周期写像で、増大度は $|F(x,y,z)|<e^z$, かつ各四角柱の稜の点を位数 4 の分岐点に持つ。

上で構成した qr 写像は複素平面における指数関数の類似ともいえるもので、無限遠点を真性特異点にもつ。指数関数の場合と違って高次元の場合には真性特異点の近傍には必ず分岐点が存在することが知られている [MRV1971]。なおこの構成法は高次元空間へ容易に拡張できる。

6.10. Remark (高次元) 擬等角写像の興味深い例が [V1971, §16] にある。

6.11. qr 写像の特徴付け. 写像 $f:G\to\mathbf{R}^n$ が qr 写像であることを保証するための条件がいくつか知られていて、それらによって qr 写像の別の定義を与えることができる。以下それらのうちのいくつかを証明なしに紹介する。

$f:G\to\mathbf{R}^n$ を向きを保ち離散かつ開である連続写像とする。$x\in G, r\in(0,\operatorname{dist}(x,\partial G))$ に対して

$$\begin{aligned} l(x,f,r) &= \inf_{|x-y|=r}|f(y)-f(x)| \\ L(x,f,r) &= \sup_{|x-y|=r}|f(y)-f(x)| \end{aligned}$$

とおいて x における f の linear dilatation を

$$H(x,f)=\limsup_{r\to 0} L(x,f,r)/l(x,f,r)$$

で定義する。

6.12. Theorem (qr 写像の計量的定義 (I)) [MRV1969, Theorem 4.13] $f:G\to \mathbf{R}^n$ を向きを保ち離散かつ開である連続写像とする。このとき f が qr 写像であるための必要十分条件は (1) $H(x,f)$ が G 上局所有界、かつ (2) $G\setminus B_f$ の a.e. の点 x で $H(x,f)<M$ をみたす定数 M が存在することである。

次に inverse linear dilatation の有界性を用いた qr 写像の特徴付けを与える。$x\in G, r\in (0,\mathrm{dist}(f(x),\partial fG))$ に対して

$$\begin{aligned} l^*(x,f,r) &= \inf_{y\in\partial U(x,f,r)} |f(y)-f(x)| \\ L^*(x,f,r) &= \sup_{y\in\partial U(x,f,r)} |f(y)-f(x)| \end{aligned}$$

($U(x,f,r)$ の定義は 2.7 にある) とおいて x における f の inverse linear dilatation を

$$H^*(x,f)=\limsup_{r\to 0} L^*(x,f,r)/l^*(x,f,r)$$

で定義する。

6.13. Theorem (qr 写像の計量的定義 (II)) [MRV1969, Theorem 4.14] $f:G\to \mathbf{R}^n$ を向きを保ち離散かつ開である連続写像とする。このとき f が qr 写像であるための必要十分条件は (1) $H^*(x,f)$ が G 上局所有界、かつ (2) $G\setminus B_f$ の a.e. の点 x で $H^*(x,f)<M$ をみたす定数 M が存在することである。

次にノーマル・コンデンサーを用いた qr 写像の特徴付けを与える。コンデンサー $E=(A,C)$ (7.35 参照) において A が f のノーマル領域であるとき E をノーマル・コンデンサーと呼ぶ。さらに $A\setminus C$ が ring となるとき E は ringlike であるという。

6.14. Theorem. [MRV1969, Theorems 6.2 and 7.1] $f:G\to\mathbf{R}^n$ を向きを保ち離散かつ開である連続写像とする。このとき f が qr 写像であるための必要十分条件は $K\in[1,\infty)$ が存在して
(1) $\mathrm{cap}E\le KN(f,E)\mathrm{cap}fE$ がすべての G に含まれるノーマル・コンデンサー E について成り立つ。または
(2) $\mathrm{cap}fE\le K\mathrm{cap}E$ がすべての G に含まれるノーマル・コンデンサー E について成り立つ。
ここで (1), (2) において E をすべての ringlike なノーマル・コンデンサーに制限してもよい。

(1) をみたす K が得られれば $K_O(f)\le K$ であることが、また (2) をみたす K が得られれば $K_I(f)\le K$ であることがわかる (Capacity inequality 7.38 も参照)。