補題 6.3 の証明: $\{h_\nu\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n\}_{\nu=1}^\infty$ を D 上 C^∞-級かつ $\overline{D}$ 上で f を一様近似するような連続函数の列とする. $a \notin f(\partial D)$ であるから, 最初の有限項を捨てることにより, $a \notin h_\nu(\partial D)$ として良い. 補題 7.3 より, $|y_\nu - a| < 1/\nu$ かつ $(y_\nu, h_\nu, D) \in T^n_{\mathrm{reg}}$ を満たす y_ν が存在する. $f_\nu := h_\nu - y_\nu + a$ とおくとき, $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が求める函数列である. □

§.8 qr 写像は向きを保つ

G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域とする. 連続写像 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ は, G の任意の相対コンパクト部分領域 D と任意の $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ に対して $\mu(y, f, D) \geq 1$ となるとき, **向きを保つ**という. この節の目的は次の定理を示すことである.

定理 8.1 qr 写像は向きを保つ.

補題 8.1 U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ とすると, U の任意の可測部分集合 E に対して $f(E)$ も可測であり,

$$|f(E)| \leq \int_E |J_f(x)|\, dx.$$

証明: $P := \{x \in U\colon J_f(x) \neq 0\}$ とおくと, P は開集合であり, Sard の定理より $f(U \setminus P)$ は零集合である. さて 各 $x \in P$ に対して 適当な正数 $d(x)$ を選べば, f の球 $B(x; 2d(x))$ への制限は微分同相写像になる. このとき Lindelöf の被覆定理より, P 内の可算個点 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を選んで, $\{B(x_\nu; d(x_\nu))\}_{\nu=1}^\infty$ が P の開被覆になるようにできる.

$$E_0 := E \setminus P, \qquad E_{\nu+1} := E \cap B(x_{\nu+1}; d(x_{\nu+1})) \setminus \cup_{j=1}^{\nu} E_j$$

とおくと, $\{E_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ は互いに素な可測集合であり, $\cup_{\nu=0}^\infty E_\nu = E$. さらに被覆の作り方より $f(E_\nu)$, $\nu \geq 1$, は可測であり, $|f(E_0)| \leq |f(U \setminus P)| = 0$ であるから, $f(E_0)$ も可測である. よって $f(E) = \cup_{\nu=0}^\infty f(E_\nu)$ は可測になる. そこで良く知られた微分同相写像についての変数変換を用いると

$$|f(E)| \leq \sum_{\nu=1}^\infty |f(E_\nu)| = \sum_{\nu=1}^\infty \int_{E_\nu} |J_f(x)|\, dx = \int_E |J_f(x)|\, dx$$

となる. □

補題 8.2 U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とし, $f \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R}^n) \cap C^0(U)$ は U 上ほとんどいたる所で $J_f \geq 0$ を満たしているとする. このとき $\overline{D} \subset U$ となるような任意の $(a, f, D) \in T^n$ に対して $\mu(a, f, D) \geq 0$.

証明: f を平滑化することにより, $\lim_{\nu\to\infty}\|f_\nu - f\|_{\infty,\overline{D}} = \lim_{\nu\to\infty}\|f_\nu - f\|_{1,n,D} = 0$ を満たす $C^0(\overline{D},\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(D)$ 内の列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ をつくる. $\|f_\nu - f\|_{\infty,\overline{D}} < d := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(a, f(\partial D))$ として良い. $P_\nu := \{x\in D\colon J_{f_\nu}(x)\le 0\}$ とおき, 補題 8.1 を用いると

$$\begin{aligned}|f_\nu(P_\nu)| \le \int_{P_\nu}|J_{f_\nu}(x)|\,dx &= \frac{1}{2}\int_D |J_{f_\nu}(x)| - J_{f_\nu}(x)\,dx\\ &\to \frac{1}{2}\int_D |J_f(x)| - J_f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

そこで補題 7.3 と併せれば, 各 ν に対して $a_\nu \notin f_\nu(P_\nu)$ かつ $(a_\nu, f_\nu, D)\in T^n_{\mathrm{reg}}$ となるような $a_\nu\in B(a;d)$ が存在することがわかる. このとき各 $x\in f_\nu^{-1}(a_\nu)$ において $J_{f_\nu}(x)>0$ であることから, (6.1) より $\mu(a_\nu, f_\nu, D)\ge 0$. 一方 a と a_ν は $\mathbb{R}^n\setminus f_\nu(\partial D)$ の同じ連結成分内に含まれるから, 写像度の性質 6.5 より $\mu(a,f_\nu,D)=\mu(a_\nu,f_\nu,D)\ge 0$. よって $\mu(a,f,D) := \lim_{\nu\to\infty}\mu(a_\nu,f_\nu,D)\ge 0$. □

補題 8.3 D を $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域, $D_1, \dots, D_m$ を互いに素であるような D の部分領域とする. また $f\in C^0(\overline{D},\mathbb{R}^n)\cap W^{1,n}_{loc}(D)$ は D 上ほとんどいたる所で $J_f\ge 0$ を満たしているとする. このとき $(a,f,D)\in T^n$ かつ $(a,f,D_j)\in T^n$, $1\le j\le m$, を満たすような任意の a に対して

$$\mu(a,f,D) \ge \sum_{j=1}^m \mu(a,f,D_j).$$

証明: $D_{m+1}, D_{m+2}, \dots$ を $D\setminus\cup_{j=1}^m \overline{D}_j$ の連結成分への分解とする. $f^{-1}(a)\cap D$ は $D\setminus\cup_{j=1}^m\partial D_j = \cup_{j\ge 1}D_j$ 内のコンパクト集合であるから, 有限個の $D_1, \dots, D_k$, $k\ge m$, によって覆うことができる. そこで写像度の性質 6.2 と補題 8.2 より

$$\mu(a,f,D) = \sum_{j=1}^k \mu(a,f,D_j) \ge \sum_{j=1}^m \mu(a,f,D_j)$$

となり, 主張を得る. □

定理 8.1 の証明: G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域とし, $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ を K-qr 写像とする. また D を G において相対コンパクトな部分領域とし, $y_0\in f(D)\setminus f(\partial D)$ とする. このとき $S := f^{-1}(y_0)\cap\overline{D}$ は空でないコンパクト集合であり, 仮定から $S\subset D$ である. $x_0\in\partial S$ をひとつ固定し, $\overline{B}(x_0;2d)\subset D$ および $f(\overline{B}(x_0;2d))\cap f(\partial D)=\emptyset$ を満たすような $d>0$ をとる.

さて先ず $P := \{x\in B(x_0;d)\colon J_f(x)>0\}$ とおくと, P が可測であることは明らかであるが, さらに $|P|>0$ となる. というのはもし P が零集合であるとすると, $B(x_0;d)$ 上ほと

んどいたる所で $J_f = 0$ となる. f は K-qr であるから, $|f'| \le \sqrt{n}\|f'\| \le \sqrt{n}K^{1/n}J_f^{1/n} = 0$ となるので, Sobolev の埋蔵定理 (定理 3.2) より f は $B(x_0; d)$ 上で定値 $y_0 = f(x_0)$ をとることになり, $B(x_0; d) \subset S$. しかしこれは $x_0 \in \partial S$ に反する.

qr 写像 f はほとんどすべての $x \in G$ において形式的微分 $f'(x)$ が f の微分であるので, 点 $x_1 \in P$ を適当にとると, x_1 の近くにおいては

$$f(x) = A(x) + \varepsilon(x)|x - x_1|,$$

$$\text{ここに, } A(x) := y_1 + f'(x_1)(x - x_1), \quad y_1 := f(x_1), \quad \varepsilon(x) = o(1)$$

という Affine 写像による一次近似が可能である. $\det f'(x_1) = J_f(x_1) > 0$ であるから, 線型写像 $f'(x_1)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は非特異であって, $\lambda := \min\{|f'(x_1)x|\colon |x| = 1\} > 0$ となる. さらに, 適当な $d_1 \in (0, d)$ をとると, $x \in B := B(x_1; d_1)$ ならば $|\varepsilon(x)| < \lambda/2$ であるようにできる. このとき, (y_1, f, B) と (y_1, A, B) は共に T^n の元であり, これらは T^n の元としてホモトープである. そこで補題 8.3 と写像度の性質 6.1, 6.3 より

$$\mu(y_1, f, D) \ge \mu(y_1, f, B) = \mu(y_1, A, B) = 1.$$

y_0 と y_1 は $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ の同じ連結成分内にあるので, 性質 6.5 より

$$\mu(y_0, f, D) = \mu(y_1, f, D) \ge 1.$$

故に qr 写像は向きを保つ. □

§.9 qr 写像は零集合を零集合にうつす

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 G から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 f は G 内の任意の零集合を零集合にうつすとき, **条件 N を満たす**という. この節では次の定理を示す.

定理 9.1 qr 写像は条件 N を満たす.

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 G から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 f は, G において相対コンパクトな任意の領域 D と任意の $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ に対して, ある正数 δ が存在し, 連続写像 $g\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ が $\|f - g\|_{\infty, \overline{D}} < \delta$ を満たすならば, $y \in g(D)$ となるとき, **安定 (stable)** であるという.

定理 9.1 は以下のふたつの定理から直ちに従う.

定理 9.2 qr 写像は安定である.

定理 9.3 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域とする．もし $f \in W^{1,n}_{loc}(G, \mathbb{R}^n) \cap C^0(G)$ が安定であるならば, f は条件 N を満たす．さらに G の任意の可測部分集合 E に対して, $|f(E)|$ は可測であって,

$$|f(E)| \leq \int_E |J_f(x)|\, dx \tag{9.1}$$

が成立する．

定理 9.2 の証明： f を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 G から $\mathbb{R}^n$ への qr 写像, D を G において相対コンパクトな領域とし, $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$ とする．qr 写像は向きを保つ (定理 8.1) から, $\mu(y, f, D) > 0$ である．そこで, $\delta := \operatorname{dist}(y, f(\partial D)) > 0$ とおくと, 連続写像 $g \colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ が $\|g - f\|_{\infty, \overline{D}} < \delta$ を満たすならば, 補題 6.1 と写像度の性質 6.1 より, $\mu(y, g, D) = \mu(y, f, D) > 0$. 性質 6.4 を用いると, ここから $y \in g(D)$ が得られる．故に qr 写像 f は安定である． $\square$

定理 9.3 の証明には以下の補題を利用する．

補題 9.1 U が $\mathbb{R}^n$ の超平面内の開集合であるならば, 任意の $f \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R}^n) \cap C^0(U)$ に対して, $|f(U)|_n = 0$ である．

証明： Q を $\overline{Q} \subset U$ となるような $(n-1)$-次元開立方体とする．U はこのような立方体の可算和で表すことができるので, $|f(Q)|_n = 0$ を示したら十分である．Q を ν^{n-1} 個に等分してできる $(n-1)$-次元開立方体を Q_j, $1 \leq j \leq \nu^{n-1}$, とすると, Sobolev の埋蔵定理の系 3.4 より, $f(\overline{Q}_j)$ は半径 $C\nu^{-1/n}\|f'\|_{n,Q_j}$ の n-次元閉球内にあることがわかる．ここに C は ν, j に依らない正定数である．よって

$$|f(Q)|_n \leq \sum_{j=1}^{\nu^{n-1}} |f(\overline{Q}_j)|_n \leq \Omega_n C^n \nu^{-1} \sum_{j=1}^{\nu^{n-1}} \|f'\|^n_{n,Q_j} = \Omega_n C^n \nu^{-1} \|f'\|^n_{n,Q}.$$

$\nu \to \infty$ として, $|f(Q)|_n = 0$ が得られる． $\square$

補題 9.2 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, $a \in G$ とし, $f \in W^{1,n}_{loc}(G, \mathbb{R}^n) \cap C^0(G)$ とする．このとき $\overline{Q}(a; r) \subset G$ であるようなほとんどすべての $r > 0$ に対して $f(\partial Q(a; r))$ は零集合である．

証明： $1 \leq j \leq n$ なる整数 j と実数 h に対して, $G_{j,h} := \{x \in G \colon x_j = h\}$ とおき, x_j-軸への自然な射影を p_j とする．定理 1.1 より $f \in \mathrm{ACL}^n(G)$ であって, 絶対連続写像の定義から任意の j, $1 \leq j \leq n$, とほとんどすべての $h \in p_j(G)$ に対して f の $G_{j,h} (\neq \emptyset)$ への制限は $\mathrm{ACL}^n(G_{j,h})$ になる．そこで再び定理 1.1 と先の補題 9.1 より主張が成立するのがわかる． $\square$

補題 9.3 U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし, $f \in C^0(U, \mathbb{R}^m)$ とすると, F_σ-集合の f による像は可測である. 特に開集合の f による像は可測である. さらにもし f が条件 N を満たすならば, 可測集合の f による像も可測である.

証明: U が σ-コンパクトであるから, 任意の F_σ-集合 F は U 内のコンパクト集合の列 $\{A_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の和集合で表すことができる. f が連続であるから, 各 $f(A_\nu)$ はコンパクト, 従って可測集合となり, $f(F) = \bigcup_{\nu=1}^\infty f(A_\nu)$ も可測となる.

次に後半の主張であるが, 任意の可測集合 E は F_σ-集合 F と零集合 E_0 を用いて, $E = F \cup E_0$ と表すことができる. そこで f が条件 N を満たすならば, $f(E_0)$ は零集合, 従ってやはり可測となる. よって $f(E) = f(F) \cup f(E_0)$ も可測である. □

補題 9.4 $\{E_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を G の可測部分集合の単調増大列とし, $E := \cup_{\nu=1}^\infty E_\nu$ とする. もし各 ν に対して $f(E_\nu)$ が可測であり, 不等式 (9.1) が各 E_ν に対して成立するならば, $f(E)$ も可測であり, E に対しても (9.1) が成立する.

証明: $\{f(E_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ は可測集合の単調増大列であり, $f(E) = \cup_{\nu=1}^\infty f(E_\nu)$ であるから, $f(E)$ は可測である. そこで Lebesgue の単調収束定理より

$$|f(E)| = \lim_{\nu\to\infty} |f(E_\nu)| \le \lim_{\nu\to\infty} \int_{E_\nu} |J_f(x)|\, dx = \int_E |J_f(x)|\, dx$$

を得る. □

単調収束定理の代りに Lebesgue の収束定理を用いれば, 次のことがわかる.

補題 9.5 $\{E_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を G において相対コンパクトな可測部分集合の単調減少列とし, $E := \cap_{\nu=1}^\infty E_\nu$ とする. もし各 ν に対して $f(E_\nu)$ が可測であって, 不等式 (9.1) が E_ν に対して成立するならば,

$$|\cap_{\nu=1}^\infty f(E_\nu)| \le \int_E |J_f(x)|\, dx.$$

特に $f(E)$ が可測であるならば, E に対しても (9.1) が成立する.

定理 9.3 の証明: 先ず $Q = Q(a; r)$ を G において相対コンパクトであってかつ, $f(\partial Q)$ が零集合であるような n-次元開立方体としたとき, $\overline{Q}$ に対して (9.1) が成立することを示そう. f_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, を f の $1/\nu$-平滑化とし, χ, χ_ν をそれぞれ $f(\overline{Q})$, $f_\nu(\overline{Q})$ の特性函数とすると,

$$\lim_{\nu\to\infty} \chi_\nu(y) = \chi(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial Q) \tag{9.2}$$

が成り立つ. 実際 (9.2) は, $y \notin f(\overline{Q})$ である場合には f_ν が f に $\overline{Q}$ 上で一様収束していることよりわかり, $y \in f(Q)$ である場合にはこの一様収束性と f が安定であることよりわかる. そこで (9.2) と仮定 $|f(\partial Q)| = 0$ より $\mathbb{R}^n$ 上ほとんどいたるところで $\lim \chi_\nu = \chi$ となるから,

$$|f(\overline{Q})| = \lim_{\nu\to\infty} |f_\nu(\overline{Q})|$$

を得る. 一方補題 8.1 より

$$|f_\nu(\overline{Q})| \le \int_{\overline{Q}} |J_{f_\nu}(x)|\, dx$$

であり, $\nu \to \infty$ のとき右辺は $\int_{\overline{Q}} |J_f(x)|\, dx$ に収束するので, (9.1) が成立するのがわかる.

次に $Q = Q(a; r)$ を単に G において相対コンパクトな n-次元開立方体とする. 補題 9.2 を用いて閉立方体の単調減少列 $\{\overline{Q}(a; r_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ で $|f(\partial Q(a; r_\nu))| = 0$ でありかつその共通部分が $\overline{Q}$ となるようなものをとれば, 補題 9.5 から (9.1) が $\overline{Q}$ に対しても成立するのがわかる. ここから特に $|f(\partial Q)| = 0$ も従うことを注意する.

さて開集合は互いに素な可算個の立方体 $\{Q_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の閉包の和集合として表すことができる. ここまでの結果より各 $f(\partial Q_\nu)$ は零集合であるから, Q_ν の有限個の和集合についても (9.1) が成立している. そこで補題 9.3, 9.4 より開集合に対して (9.1) が成り立ち, さらに補題 9.5 からコンパクト集合に対して, 再度補題 9.4 を用いれば, F_σ-集合に対してもやはり (9.1) が成立することがわかる.

f が条件 N を満たすことを示そう. $E \subset G$ を零集合とする. $\overline{E} \subset G$ であるとして良い. $\overline{O}_1 \subset G$, $E \subset O_\nu$ かつ $|O_\nu| < 1/\nu$ なる開集合の単調減少列 $\{O_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ をひとつとると, $\cap_{\nu=1}^\infty O_\nu$ は零集合になるから, 補題 9.5 より $|\cap_{\nu=1}^\infty f(O_\nu)| = 0$. ここから $f(E)$ が零集合であることがわかる.

最後に一般の可測集合は零集合と F_σ-集合の和に分解できるから, 以上の考察と補題 9.3, 9.4 より (9.1) が一般の可測集合に対して成立するのがわかる. □

§.10 容量と Hausdorff 測度

$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合 A と A を含む開集合 U に対して, A のある近傍上で 1 に等しくかつ $0 \le u \le 1$ を満たす函数 $u \in C_0^\infty(U)$ 全体の成す集合を $\widetilde{W}(A; U)$ で表し, A の U に関する (等角) 容量を

$$\mathrm{Cap}(A; U) := \inf\{\|u'\|_n^n : u \in \widetilde{W}(A; U)\}$$

で定義する[13]. 次の命題は容量の定義から容易にわかる.

[13]前にも注意したように $C_0^\infty(U)$ の元の定義域は $\mathbb{R}^n$ 全体と考えている. 従って容量の定義にある $\|u'\|_n^n$ の積分範囲は $\mathbb{R}^n$ 全体であるが, これは u' の台を含むどんな集合上であっても良い.

命題 10.1 (a) $A_1 \subset A_2 \subset U_1 \subset U_2$ ならば

$$\mathrm{Cap}(A_1; U_2) \le \mathrm{Cap}(A_2; U_1).$$

(b) 容量は相似変換で不変である. 即ち, 任意の相似変換 σ に対して

$$\mathrm{Cap}(\sigma(A); \sigma(U)) = \mathrm{Cap}(A; U).$$

例 10.1 $R > 1$ としたとき

$$\mathrm{Cap}(\overline{\mathbb{B}}; B(R)) \ge \frac{\omega_{n-1}}{(\log R)^{n-1}}. \tag{10.1}$$

証明: $u \in \widetilde{W}(\overline{\mathbb{B}}; B(R))$ とすると, 任意の $\zeta \in \mathbb{S}$ に対して

$$\begin{aligned}
1 = |u(R\zeta) - u(\zeta)| &= \left| \int_1^R \frac{du(t\zeta)}{dt}\, dt \right| \le \int_1^R |u'(t\zeta)|\, dt \\
&\le \left(\int_1^R [|u'(t\zeta)| t^{(n-1)/n}]^n\, dt \right)^{1/n} \left(\int_1^R [t^{-(n-1)/n}]^{n/(n-1)}\, dt \right)^{(n-1)/n} \\
&= \left(\int_1^R |u'(t\zeta)|^n t^{n-1}\, dt \right)^{1/n} (\log R)^{(n-1)/n}.
\end{aligned}$$

故に

$$(\log R)^{1-n} \le \int_1^R |u'(t\zeta)|^n t^{n-1}\, dt$$

この式を $\mathbb{S}$ 上で積分すれば (10.1) を得る. □

実は上の不等式 (10.1) において等号が成立する. しかしこのことは後の議論で用いないので, その証明を省略する.

補題 10.1 任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u'(y)(x-y)}{|x-y|^n}\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

証明: $\zeta \in \mathbb{S}$ とすると,

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{du(x+t\zeta)}{dt}\, dt = -\int_0^\infty u'(x+t\zeta)\zeta\, dt.$$

両辺を $\mathbb{S}$ 上で積分し, 変数変換を行えば, 補題の主張を導くことができる. □

補題 10.2 U が $\mathbb{R}^n$ の面積有限な開部分集合であるとき, n と U のみに依る正定数 $C(n,U)$ が存在して, 任意の $p \in [1,\infty]$ と任意の $u \in C_0^\infty(U)$ に対して

$$\|u\|_p \le C(n,U)\|u'\|_p.$$

証明: $1 \le p < \infty$ とすると, 補題 10.1, Hölder の不等式および補題 3.2 を用いることにより

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\le \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_U \frac{|u'(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \\
&\le \frac{1}{\omega_{n-1}} \Big(\int_U \frac{|u'(y)|^p}{|x-y|^{n-1}}\,dy\Big)^{1/p} \Big(\int_U \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}\Big)^{1-1/p} \\
&\le \frac{C_1(n,U)^{1-1/p}}{\omega_{n-1}} \Big(\int_U \frac{|u'(y)|^p}{|x-y|^{n-1}}\,dy\Big)^{1/p},
\end{aligned}$$

ここに $C_1(n,U) := n\Omega_n^{1-1/n}|U|^{1/n}$. そこで Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
\int_U |u(x)|^p\,dx &\le \frac{C_1(n,U)^{p-1}}{\omega_{n-1}^p} \int_U dx \int_U \frac{|u'(y)|^p}{|x-y|^{n-1}}\,dy \\
&\le \frac{C_1(n,U)^{p-1}}{\omega_{n-1}^p} \int_U |u'(y)|^p\,dy \int_U \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \\
&\le \frac{C_1(n,U)^p}{\omega_{n-1}^p} \int_U |u'(y)|^p\,dy.
\end{aligned}$$

$p = \infty$ の場合も同様である. □

命題 10.2 コンパクト集合 A がある有界開集合 $U_0 \supset A$ に対して $\mathrm{Cap}(A;U_0) = 0$ となるならば, 任意の開集合 $U \supset A$ に対して $\mathrm{Cap}(A;U) = 0$.

証明: $\eta \in \widetilde{W}(A;U)$ をひとつとって固定し, $M := \|\eta'\|_\infty$ とおく. 各 $u \in \widetilde{W}(A;U_0)$ に対して $\eta u \in \widetilde{W}(A;U)$ であって, $|(\eta u)'| = |\eta u' + \eta' u| \le |u'| + M|u|$ であるから, 補題 10.2 を用いると

$$\mathrm{Cap}(A;U)^{1/n} \le \|(\eta u)'\|_n \le \|u'\|_n + M\|u\|_n \le (1 + MC(n,U_0))\|u'\|_n.$$

よって $\mathrm{Cap}(A;U) \le (1 + MC(n,U_0))^n\,\mathrm{Cap}(A;U_0) = 0$ となる. □

上のふたつの命題 10.1 と 10.2 よりコンパクト集合 A についての条件 $\mathrm{Cap}(A;U) = 0$ は A を含む有界開集合 U の取り方に依らない. そこである有界開集合 $U_0 \supset A$ に対して $\mathrm{Cap}(A;U_0) = 0$ が成立するとき, A は**容量 0** であるという. 例 10.1 と命題 10.1 から次の系が直ちに従う.

系 10.1 容量 0 のコンパクト集合には内点がない.

実はさらに上の系よりも強い事実が成立することがわかっている. その事実を述べるために Hausdorff 測度を定義する.

$\alpha > 0$ とし, E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. 半径が正数 ε より小さいような可算個の開球による E の開被覆を **ε-被覆**という. E の ε-被覆 $\{B(c_\nu; r_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ に関する和 $\sum_{\nu=1}^\infty r_\nu^\alpha$ の ε-被覆を動かしたときの下限を $\Lambda_\alpha^\varepsilon(E)$ とし,

$$\Lambda_\alpha(E) := \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_\alpha^\varepsilon(E)$$

と定める. $\Lambda_\alpha(E)$ を集合 E の **α-次元 Hausdorff (外) 測度**と呼ぶ. Λ_α が実際に外測度の条件を満たすことは容易にわかる. そして次の定理が成立する.

定理 10.1 容量 0 のコンパクト集合の α-次元 Hausdorff 測度は任意の正数 α に対しても 0 である.

この定理の証明はこの節の最後に行なう.

Hausdorff 測度の定義において, 部分集合の被覆を ε-被覆に限らないで単に可算個の開球による開被覆を用いて同様に定義される外測度を λ_α で表わす. 明らかに $\lambda_\alpha \leq \Lambda_\alpha$ である.

系 10.2 A が容量 0 のコンパクト集合であるならば, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ とほとんどすべての $r > 0$ に対して $S(x; r) \cap A = \emptyset$.

証明: 定理 10.1 によれば, A の 1-次元 Hausdorff 測度は 0 である. よって $\lambda_1(A) \leq \Lambda_1(A) = 0$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^\infty B(c_\nu; r_\nu) \quad かつ \quad \sum_{\nu=1}^\infty r_\nu < \varepsilon$$

を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $\{c_\nu\}$ と正数列 $\{r_\nu\}$ が存在している. このとき

$$\begin{aligned} |\{r > 0 \colon S(x; r) \cap A \neq \emptyset\}| &\leq |\{r > 0 \colon S(x; r) \cap \cup_{\nu=1}^\infty B(c_\nu; r_\nu) \neq \emptyset\}| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^\infty 2r_\nu < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

ε は任意であるから, 主張が成立する. □

補題 10.3 容量 0 のコンパクト集合 A, A を含む有界開集合 U に対して, 非負値 $L^n(U)$-函数 v で

$$\int_U \frac{v(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy = \infty, \qquad \forall x \in A$$

を満たすものが存在する.

実は上の補題の逆も成立する. 即ちこの補題は容量 0 のコンパクト集合の特徴付けを与えている. しかしこの事実を後の議論で用いないのでその証明は省略する.

証明: $\mathrm{Cap}(A;U) = 0$ であるから, $\widetilde{W}(A;U)$ 内の列 $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ で $\|u'_\nu\|_n < 2^{-\nu}\omega_{n-1}$ を満たすものがある. $v_\nu := |u'_\nu|/\omega_{n-1}$ とおくと, 補題 10.1 より

$$|u_\nu(x)| = \frac{1}{\omega_{n-1}}\left|\int_U \frac{u'_\nu(y)(x-y)}{|x-y|^n}\,dy\right| \le \int_U \frac{v_\nu(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

そこで, $v := \sum_{\nu=1}^\infty v_\nu$ とすると, $v \ge 0$ かつ $v \in L^n(U)$ であり, $x \in A$ ならば

$$\int_U \frac{v(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy = \sum_{\nu=1}^\infty \int_U \frac{v_\nu(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy \ge \sum_{\nu=1}^\infty |u_\nu(x)| = \infty.$$

以上で補題は証明された. □

補題 10.4 U を $\mathbb{R}^n$ 内の有界開集合, v を非負値 $L^n(U)$-函数とし, $\alpha > 0$ とする. このとき

$$\int_U \frac{v(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy = \infty$$

なる任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sup_{r>0} \frac{1}{r^\alpha}\int_{B(x;r)\cap U} v(y)^n\,dy = \infty \tag{10.2}$$

が成立する.

証明: $U \subset B(x;R)$ となるような $R > 0$ をとり, $1 \le p \le n$ とする.

$$V_p(r) := \int_{B(x;r)\cap U} v(y)^p\,dy$$

とおくと, V_p は $[0,\infty)$ において絶対連続であって

$$V'_p(r) := \int_{S(x;r)\cap U} v(\zeta)^p\,d\zeta.$$

また Hölder の不等式より

$$V_1(r) \leq V_n(r)^{1/n} |B(x;r)|^{(n-1)/n} = C_1(n) r^{n-1} V_n(r)^{1/n}$$

が成立している.

さて, もし式 (10.2) が成立しないならば, 適当な正定数 M をとると, すべての $r > 0$ に対して, $V_n(r) \leq Mr^\alpha$ となるから, $V_1(r) \leq C_2(n,M) r^{n-1+\alpha/n}$. そこで部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\int_U \frac{v(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy &= \int_0^R r^{1-n} V_1'(r)\,dr \\ &= [r^{1-n}V_1(r)]_0^R - (1-n)\int_0^R r^{-n} V_1(r)\,dr \\ &\leq C_2(n,M) R^{\alpha/n} + \frac{nC_2(n,M)}{\alpha} R^{\alpha/n} < \infty.\end{aligned}$$

以上より補題は証明された. □

補題 10.5 O を有限個の開球 $B(x_\nu; r_\nu)$, $1 \leq \nu \leq N$, の和集合としたとき, $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合 I を適当に選べば, $B(x_\nu; r_\nu)$, $\nu \in I$, は互いに素でありかつ, $O \subset \cup_{\nu \in S} B(x_\nu; 3r_\nu)$ とできる.

証明: $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$ として良い. 先ず $B(x_1; r_1)$ と交わりをもつ $B(x_\nu; r_\nu)$, $2 \leq \nu \leq N$, をすべて捨てる. 残った球の内で 1 より大きくて一番小さな添字を持つ球に対して同様な操作を行い, 捨てる球が無くなるまで続ける. 最終的に残った球の添字の集合を I とすると, この I が補題の条件を満足する. □

補題 10.6 任意の正数 α と $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 E に対して, $\lambda_\alpha(E) = 0$ ならば $\Lambda_\alpha(E) = 0$.

証明: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\lambda_\alpha(E)$ の定義より, 可算個の開球 $\{B(c_\nu; r_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ で条件

$$E \subset \bigcup_{\nu=1}^\infty B(c_\nu; r_\nu) \quad \text{かつ} \quad \sum_{\nu=1}^\infty r_\nu^\alpha < \varepsilon^\alpha$$

を満たすものが存在する. このとき特に $r_\nu < \varepsilon$. つまりこの開球の族は E の ε-被覆になるので, $\Lambda_\alpha^\varepsilon(E) \leq \varepsilon^\alpha$. よって $\Lambda_\alpha(E) = 0$. □

定理 10.1 の証明： A を容量 0 のコンパクト集合とする. A を含む有界開集合 U をひとつとり, 補題 10.3 の主張にある非負値 $L^n(U)$-函数を v とする. $t > 0$ とすると, v の取り方と補題 10.4 より, 任意の $x \in A$ に対して正数 $r(x)$ を適当に選ぶと

$$\int_{B(x;r(x))\cap U} v(y)^n \, dy \geq tr(x)^\alpha$$

とできる. このとき $\cup_{x\in A} B(x; r(x))$ はコンパクト集合 A の被覆になっているから, 有限個の $x_\nu \in A$, $1 \leq \nu \leq N$, で $A \subset \cup_{1\leq\nu\leq N} B(x_\nu; r(x_\nu))$ となるようなものを選び出すことができる. さらに補題 10.5 を用いれば, 添字の部分集合 I を適当にとり, $B(x_\nu; r(x_\nu))$, $\nu \in I$, が互いに素でかつ $A \subset \cup_{\nu\in S} B(x_\nu; 3r(x_\nu))$ が成立するようにできる. そこで

$$\lambda_\alpha(A) \leq \sum_{\nu\in I} (3r(x_\nu))^\alpha \leq \sum_{\nu\in I} \frac{3^\alpha}{t} \int_{B(x_\nu;r(x_\nu))\cap U} v(y)^n \, dy \leq \frac{3^\alpha}{t} \|v\|_{n,U}^n.$$

正数 t の任意性から $\lambda_\alpha(A) = 0$ が従い, 補題 10.6 から A の α-次元 Hausdorff 測度は 0 になる. □

§.11 qr 写像は離散かつ開写像である

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 G 上で定義された連続写像 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ は, 任意の $y \in f(G)$ に対して $f^{-1}(y)$ が G の離散集合になるとき, **離散写像**であるという. この節では非定値 qr 写像が離散かつ開であることを示す.

補題 11.1 G を $\mathbb{R}^n$ 内の領域, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ を非定値 qr 写像とし, $b \in f(G)$ とする. このとき任意の $a \in f^{-1}(b)$ に対して a を中心とする球 B でコンパクト集合 $\overline{B} \cap f^{-1}(b)$ の容量が 0 になるようなものが存在する.

この補題の証明は第 15 節で行う.

定理 11.1 非定値 qr 写像は離散写像である.

証明： f を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 G から $\mathbb{R}^n$ への非定値 qr 写像とし, $b \in f(G)$ とする. 任意の点 $a_0 \in f^{-1}(b)$ をとる. 補題 11.1 および系 10.2 より, a_0 を中心とする球 B で $\overline{B} \subset G$ かつ $\partial B \cap f^{-1}(b) = \emptyset$ となるようなものが存在している. さて $f^{-1}(b) \cap B$ から任意に有限個の点 $a_1, \ldots, a_k$ をとったとき, 各 a_j を中心とする互いに素な球 B_j で $B_j \subset B$ かつ $\partial B_j \cap f^{-1}(b) = \emptyset$ となるようなものが存在する. このとき (b, f, B), $(b, f, B_j) \in T^n$ かつ $b = f(a_j) \in f(B_j)$ であるから, qr 写像が向きを保つ (定理 8.1) ことと補題 8.3 より

$$k \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(b, f, B_j) \leq \mu(b, f, B).$$

即ち $^{\#}(f^{-1}(b)\cap B)\le \mu(b,f,B)<\infty$. よって $a_0\in f^{-1}(b)$ は $f^{-1}(b)$ の集積点ではない. ところで $f^{-1}(b)$ は閉集合であるから, これは $f^{-1}(b)$ が離散集合であることを意味する. □

定理 11.2 非定値 qr 写像は開写像である.

証明: G を $\mathbb{R}^n$ の領域, $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ を非定値 qr 写像とし, $U\subset G$ を任意の開集合とする. b を $f(U)$ 内の任意の点とし, $a\in f^{-1}(b)$ をひとつとると, 補題 11.1 と系 10.2 より, a を中心とする球 B で $b\notin f(\partial B)$ かつ $\overline{B}\subset U$ を満たすものが存在する. このとき, $(b,f,B)\in T^n$ かつ $b=f(a)\in f(B)$ であるから, 定理 8.1 より, $\mu(b,f,B)\ge 1$. 写像度の性質 6.5 より, b のある近傍 $V\subset\mathbb{R}^n\setminus f(\partial B)$ 上で $\mu(\cdot,f,B)\ge 1$. そこで性質 6.4 より, $V\subset f(B)\subset f(U)$. 故に b は $f(U)$ の内点となるから, $f(U)$ は開集合である. 以上より f は開写像である. □

§.12 Sobolev 空間の部分族

この節では後の非線型ポテンシャル論の議論において利用する Sobolev 空間 $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ の部分族 $W_0^{1,n}(U|A)$, $W_+^{1,n}(U|A)$ 等を定義し, その性質を調べる.

この節を通して, U は $\mathbb{R}^n$ 内の開集合, A は U の閉包 $\overline{U}$ 内の閉集合であるとする. A のある近傍上で $u=0$ となる函数 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の成す集合の $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ に関する閉包を $W_0^{1,n}(U|A)$ で表す. 特に $W_0^{1,n}(U|\partial U)$ は $W_0^{1,n}(U)$ とも表す. この定義から明らかに $W_0^{1,n}(U|A)$ は $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ の閉部分空間であり, 特に $W_0^{1,n}(U)$ は $C_0^\infty(U)$ の $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ に関する閉包である. さらにこの空間 $W_0^{1,n}(U)$ は $C_0^\infty(U)$ の $W^{1,n}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ に関する閉包とみなすこともできるので, $W_0^{1,n}(U)$ の元は $\mathbb{R}^n$ 全体において定義されていると考える. $\operatorname{supp}u\cap A=\emptyset$ となるような $u\in W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ はすべて $W_0^{1,n}(U|A)$ に含まれることが平滑化によりわかる.

補題 12.1 $u\in W_0^{1,n}(U)$ が U 上ほとんどいたる所で $u'=0$ となるならば, $u=0$.

証明: U が連結である場合に証明すれば十分である. 先ず, 平滑化を考えることにより, u は定数函数であることがわかる. このとき $u\in W^{1,n}(U)\subset L_1(U)$ であるから, $u=0$ であるかまたは U が面積有限になる. U が面積有限であるとき, $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を u に $W^{1,n}(U)$-収束する $C_0^\infty(U)$ 内の列とし, Hölder の不等式と補題 10.2 を u_ν に適用して, $\|u_\nu\|_{1,U}\le C_1(n,U)\|u_\nu\|_{n,U}\le C_2(n,U)\|u'_\nu\|_{n,U}$. 極限をとることにより $\|u\|_{1,U}\le C_2(n,U)\|u'\|_{n,U}=0$. 従って, U が面積有限の場合も $u=0$ となる. □

補題 12.2 D を $\mathbb{R}^m$ 内の凸領域とし, $f \in W^{1,n}_{loc}(U, D)$ とする. このとき $h \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ の微分が有界であるならば, $h \circ f \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R})$ であって, $(h \circ f)' = h' \circ f f'$.

証明: A を U 内の任意のコンパクト集合とする. f の ε-平滑化 f_ε は $\|\cdot\|_{1,n,A}$-ノルムに関して f に収束している. そこで部分列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を選んで, さらに f_ν が f に A 上ほとんどいたる所で収束するようにできる. 任意の $x_1, x_2 \in D$ に対して $|h(x_1) - h(x_2)| \leq \|h'\|_{\infty,D}|x_1 - x_2|$ が成立するので,

$$\|h \circ f_\nu - h \circ f\|_{1,A} \leq \|h'\|_{\infty,D}\|f_\nu - f\|_{1,A} \to 0. \tag{12.1}$$

また $|(h' \circ f_\nu - h' \circ f)f'| \leq 2\|h'\|_{\infty,D}|f'|$ であり, $h' \circ f_\nu f'$ は $h' \circ f f'$ に A 上ほとんどいたるところで収束しているので, Lebesgue の収束定理を用いると,

$$\begin{aligned} \|h' \circ f_\nu f'_\nu - &h' \circ f f'\|_{n,A} \\ &\leq \|h' \circ f_\nu (f'_\nu - f')\|_{n,A} + \|(h' \circ f_\nu - h' \circ f)f'\|_{n,A} \\ &\leq \|h'\|_{\infty,D}\|f'_\nu - f'\|_{n,A} + \|(h' \circ f_\nu - h' \circ f)f'\|_{n,A} \to 0. \end{aligned} \tag{12.2}$$

故に $h \circ f \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R})$ である.

さて任意の $\phi \in C_0^\infty(U, \mathbb{R})$ に対して

$$\int_U h' \circ f_\nu(x) f'_\nu(x)\phi(x)\,dx = -\int_U h \circ f_\nu(x)\phi'(x)\,dx$$

が成立しているから, $\nu \to \infty$ とすると, (12.1) と (12.2) より

$$\int_U h' \circ f(x) f'(x)\phi(x)\,dx = -\int_U h \circ f(x)\phi'(x)\,dx.$$

以上で補題は証明された. □

集合 E の特性函数を χ_E で表す. 特に閉区間 $[0, \infty)$ の特性函数である Heaviside の函数を $\mathbf{1}$ で表す.

補題 12.3 $u \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R})$ ならば, $u^+ := \max\{u, 0\} \in W^{1,n}_{loc}(U, \mathbb{R})$ であって, $(u^+)' = \mathbf{1} \circ u u'$.

証明: $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とすると,

$$\int_0^\infty x\psi'(x)\,dx = -\int_0^\infty \psi(x)\,dx.$$

つまり超函数の意味で $(x^+)' = \mathbf{1}$ が成立している．そこで $x \mapsto \mathbf{1}(x+\varepsilon)$ および $x \mapsto (x+\varepsilon)^+$ の ε-平滑化をそれぞれ h_ε, H_ε とおくと, $h_\varepsilon = H'_\varepsilon$, $0 \le h_\varepsilon \le 1$ かつ, h_ε は $\mathbf{1}$ に $\mathbb{R}$ 上で各点収束する．また

$$|H_\varepsilon - x^+| \le |H_\varepsilon - (x+\varepsilon)^+| + |(x+\varepsilon)^+ - x^+| \le 2\varepsilon.$$

ところで補題 12.2 より, 任意の $\phi \in C_0^\infty(U)$ に対して

$$\int_U H_\varepsilon \circ u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_U h_\varepsilon \circ u(x) u'(x)\phi(x)\,dx$$

であるから, $\varepsilon \to 0$ とすることによって

$$\int_U u^+(x)\phi'(x)\,dx = \int_U x^+ \circ u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_U \mathbf{1} \circ u(x)u'(x)\phi(x)\,dx$$

故に補題は証明された． □

系 12.1 各実数 k に対して $u \in W^{1,n}_{loc}(U,\mathbb{R})$ は $\{x \in U : u(x) = k\}$ 上ほとんどいたる所で $u' = 0$.

証明: $k = 0$ の場合のみを証明すれば十分である．上の補題の証明において $\mathbf{1}(x+\varepsilon)$, $(x+\varepsilon)^+$ の ε-平滑化の代りに $\mathbf{1}(x-\varepsilon)$, $(x-\varepsilon)^+$ の ε-平滑化を用いると, $(u^+)' = \chi_{\{u>0\}}u'$ が得られる．よって $\chi_{\{u>0\}}u' = \chi_{\{u\ge 0\}}u'$. 故に $\{u(x) = 0\}$ 上ほとんどいたるところで $u' = 0$. □

系 12.2 u, $v \in W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ とすると, u^+, $u^- := \min\{-u, 0\}$, $|u|$, $\max\{u,v\}$, $\min\{u,v\}$ はすべて $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ の元である．

証明: $|u^+| \le |u|$ かつ $|(u^+)'| \le |u'|$ であるから, $u^+ \in W^1_n(U)$. 以下順次 $u^- = (-u)^+$, $|u| = u^+ + u^-$, $\max\{u,v\} = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$, $\min\{u,v\} = \frac{1}{2}(u+v-|u-v|)$ であることからわかる． □

補題 12.4 $W^{1,n}(U)$ 内の函数列 $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が u に $W^{1,n}(U)$-収束しているならば, 函数列 $\{u_\nu^+\}_{\nu=1}^\infty$, $\{u_\nu^-\}_{\nu=1}^\infty$, $\{|u_\nu|\}_{\nu=1}^\infty$ もそれぞれ u^+, u^-, $|u|$ に $W^{1,n}(U)$-収束する．さらに $W^{1,n}(U)$ 内の函数列 $\{v_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ も v に $W^{1,n}(U)$-収束しているならば, $\{\max\{u_\nu, v_\nu\}\}_{\nu=1}^\infty$, $\{\min\{u_\nu, v_\nu\}\}_{\nu=1}^\infty$ もそれぞれ $\max\{u,v\}$, $\min\{u,v\}$ に $W^{1,n}(U)$-収束する．

証明: 証明はすべて同様にできるから, 最初の主張のみ証明する. ところで u^+ に収束するような部分列が存在することを示せば充分である. なぜならば, u^+ のある近傍に属さないような部分列が存在したとすると, この部分列の適当な部分列が u^+ に収束することになり, 矛盾が生じるからである.

さて先ず $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は u に $L^1(U)$-収束しているので, 適当な部分列を選んだとして, $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は u にほとんといたる所で各点収束していると仮定してもよい. このとき系 12.1 および $U' := \{x \in U : u(x) \neq 0\}$ 上ほとんどいたる所で $\mathbf{1} \circ u_\nu \to \mathbf{1} \circ u$ となることと Lebesgue の収束定理より

$$\|(\mathbf{1} \circ u_\nu - \mathbf{1} \circ u)u'\|_{n,U} = \|(\mathbf{1} \circ u_\nu - \mathbf{1} \circ u)u'\|_{n,U'} \to 0.$$

また

$$\|\mathbf{1} \circ u_\nu(u'_\nu - u')\|_{n,U} \leq \|u'_\nu - u'\|_{n,U} \to 0.$$

従って補題 12.3 と三角不等式より

$$\|(u_\nu^+)' - (u^+)'\|_{n,U} = \|\mathbf{1} \circ u_\nu u'_\nu - \mathbf{1} \circ u u'\|_{n,U} \to 0.$$

一方

$$\|u_\nu^+ - u^+\|_{1,U} \leq \|u_\nu - u\|_{1,U} \to 0.$$

以上により補題は証明された. □

補題 12.5 $u, v \in W^{1,n}(U, \mathbb{R})$ が $0 \leq v \leq u$ を満たしているとき, $u \in W_0^{1,n}(U|A)$ ならば, $v \in W_0^{1,n}(U|A)$.

証明: 定義から u に $W^{1,n}(U)$-収束する $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内の函数列 $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ で各 u_ν の台が A と素であるようなものが存在している. $v_\nu := \min\{v, u_\nu\}$ とおくと, 系 12.2 より $v_\nu \in W^{1,n}(U)$. v_ν の台は u_ν の台に含まれるから, $v_\nu \in W_0^{1,n}(U|A)$. 補題 12.4 より $v_\nu \to \min\{v, u\} = v$. よって $v \in W^{1,n}(U|A)$. □

$u^- \in W^{1,n}(U|A)$ となるような $u \in W^{1,n}(U, \mathbb{R})$ 全体の成す集合を $W_+^{1,n}(U|A)$ で表す.

補題 12.6 集合 $W_+^{1,n}(U|A)$ は $W^{1,n}(U, \mathbb{R})$ において閉であって, $u, v \in W_+^{1,n}(U|A)$, $\lambda \geq 0$ とすると, $u + v$, λu, $\max\{u, v\}$, $\min\{u, v\} \in W_+^{1,n}(U|A)$. 即ち $W_+^{1,n}(U|A)$ は閉凸錐かつ束である.

証明: $W_+^{1,n}(U|A)$ が閉であることは, $W_0^{1,n}(U|A)$ が閉であることと補題 12.4 よりわかる.

次に $u,\ v \in W_+^{1,n}(U|A)$ とすると, 定義より $u^-,\ v^- \in W_0^{1,n}(U|A)$. さて一般に $0 \le (u+v)^- \le u^- + v^-$ であるから, 補題 12.5 より $(u+v)^- \in W_0^{1,n}(U|A)$, 即ち $u+v \in W_+^{1,n}(U|A)$. またさらに $\lambda \ge 0$ とすると, $(\lambda u)^- = \lambda u^-$, $(\max\{u,v\})^- = \min\{u^-,v^-\}$, $(\min\{u,v\})^- = \max\{u^-,v^-\} \le u^- + v^-$ であるから, 同様にして主張が成立するのがわかる. □

系 12.3 $u \in W_0^{1,n}(U|A)$ であることと, $u,\ -u \in W_+^{1,n}(U|A)$ であることは同値である.

証明: $u \in W_0^{1,n}(U|A)$ とすると, u に $W^{1,n}(U)$-収束する $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内の函数列 $\{u_\nu\}$ で $\operatorname{supp} u_\nu \cap A = \emptyset$ となるものが存在する. このとき $u_\nu^- \in W_0^{1,n}(U)$ と補題 12.4 および $W_0^{1,n}(U)$ が閉であることから, $u^- \in W_0^{1,n}(U)$. 即ち $u \in W_+^{1,n}(U)$. $-u$ に対しても同様である. 逆に $u,\ -u \in W_+^{1,n}(U|A)$ とすると, u^-, $u^+ = (-u)^- \in W_0^{1,n}(U|A)$. よって $u = u^+ - u^- \in W_0^{1,n}(U|A)$. □

補題 12.7 U が有界であるならば, $W_0^{1,n}(U|A)$ 内の任意の有界列は弱収束する部分列を含み, その弱極限も $W_0^{1,n}(U|A)$ の元である.

証明: $W_0^{1,n}(U|A)$ は Bansch 空間 $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ の強閉部分空間であるから, 弱閉である. 一方, 回帰的 Bansch 空間においては任意の有界弱閉集合は弱位相に関してコンパクトである. そこで系 3.2 より補題の主張が従う. □

補題 12.8 B も $\overline{U}$ 内の閉集合であるとき, $W_0^{1,n}(U|A) \cap W_0^{1,n}(U|B) = W_0^{1,n}(U|A \cup B)$.

証明: $u \in W_0^{1,n}(U|A) \cap W_0^{1,n}(U|B)$ とすると, u に $W^{1,n}(U)$-収束する $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内の函数列 $\{v_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\{w_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ で $\operatorname{supp} v_\nu \cap A = \operatorname{supp} w_\nu \cap B = \emptyset$ となるものが存在する. このとき $\min\{v_\nu^+, w_\nu^+\}$, $\min\{v_\nu^-, w_\nu^-\}$ の台は共に $A \cup B$ と素であるので, $W_0^{1,n}(U|A \cup B)$ に属し, 補題 12.4 より $\nu \to \infty$ のときそれぞれ u^+, u^- に $W^{1,n}(U)$-収束するので, u^+, $u^- \in W_0^{1,n}(U|A \cup B)$. 故に $u \in W_0^{1,n}(U|A \cup B)$. □

以下では $u, v \in W^{1,n}(U)$ が $u - v \in W_0^{1,n}(U|A)$ となることを, $u = v|A$ で表し, u と v は A 上において一致するということがある. また同様に $u - v \in W_+^{1,n}(U|A)$ となることを, $u \ge v|A$ で表すことがある. この節の結果より関係 $u = v|A$ が同値関係になり, 関係 $u \ge v|A$ が半順序になることがわかる.

§.13 汎函数 I_F とその極値函数

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．函数 $F: U \times M_{1,n} \to \mathbb{R}$ は，ある定数 $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ が存在して以下の条件 (F_1) - (F_4) を満たしているとき，U における n **型の変分核 (variational kernel of type** n**)** という．

(F_1) 任意の $\eta \in M_{1,n}$ に対して $F(\cdot, \eta)$ は可測である．

(F_2) ほとんどすべての $x \in U$ に対して $F(x, \cdot)$ は C^1-級の狭義凸函数である，つまり相異なる $\eta_1, \eta_2 \in M_{1,n}$ と $0 < t < 1$ に対して

$$F(x, t\eta_1 + (1-t)\eta_2) < tF(x, \eta_1) + (1-t)F(x, \eta_2).$$

(F_3) ほとんどすべての $x \in U$ と任意の $\eta \in M_{1,n}$ に対して

$$\alpha|\eta|^n \leq F(x, \eta) \leq \beta|\eta|^n.$$

(F_4) ほとんどすべての $x \in U$ と任意の $\eta \in M_{1,n}$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(x, \lambda\eta) = |\lambda|^n F(x, \eta).$$

なお条件 (F_1) と (F_2) より，任意の $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$ に対して $F(x, u'(x))$ およびその第二変数 η に関する微分

$$F_\eta(x, \eta) := {}^t\Big(\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta_1}, \ldots, \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta_n}\Big)$$

は x の函数として可測である[14]．

例 13.1 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 U 上で定義された K-qr 写像に対して，U 上の n 次正値対称行列値可測函数 θ_f を，$f'(x)$ が存在し $J_f(x) \neq 0$ かつ $\|f'(x)\|^n \leq KJ_f(x)$ となるような点 $x \in U$ においては

$$\theta_f(x) := J_f(x)^{2/n} f'(x)^{-1} ({}^t f'(x))^{-1}$$

と定め，それ以外の点 $x \in U$ においては $\theta_f(x)$ は n 次単位行列であると定義する．このとき

$$F(x, \eta) := (\eta\theta_f(x){}^t\eta)^{n/2}$$

は上記の条件 (F_1) - (F_4) を満たす．

特に，恒等写像に対する $F(x, \eta) := |\eta|^n$ は上記の条件 (F_1) - (F_4) を満たす．

[14] 例えば，伊藤 [7] 定理 11.3 の証明参照

証明： (F_1): $F(\cdot,\eta)$ の可測性は明らかである.

(F_2): 次に

$$F_\eta(x,\eta) = n(\eta\theta_f(x)^t\eta)^{n/2-1}\theta_f(x)^t\eta$$

より $F(x,\cdot)$ は C^1-級である. $\eta_1,\eta_2 \in M_{1,n}$ に対して $\langle\eta_1,\eta_2\rangle := \eta_1\theta_f(x)^t\eta_2$ とおくと, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積になり, これと合わせて $x \mapsto x^n$ の狭義凸性を用いれば

$$\begin{aligned} F(x,t\eta_1+(1-t)\eta_2) &= \langle t\eta_1+(1-t)\eta_2), t\eta_1+(1-t)\eta_2)\rangle^{n/2} \\ &= (t^2\langle\eta_1,\eta_1\rangle + 2t(1-t)\langle\eta_1,\eta_2\rangle + (1-t)^2\langle\eta_2,\eta_2\rangle)^{n/2} \\ &\le (t\langle\eta_1,\eta_1\rangle^{1/2} + (1-t)\langle\eta_2,\eta_2\rangle^{1/2})^n \\ &\le t\langle\eta_1,\eta_1\rangle^{n/2} + (1-t)\langle\eta_2,\eta_2\rangle^{n/2} \\ &= tF(x,\eta_1) + (1-t)F(x,\eta_2). \end{aligned}$$

等号成立は $\langle\eta_1,\eta_1\rangle = \langle\eta_2,\eta_2\rangle = \langle\eta_1,\eta_2\rangle$ の場合であるから, $\langle\eta_1-\eta_2,\eta_1-\eta_2\rangle = 0$, 即ち $\eta_1=\eta_2$.

(F_3): $\theta_f(x)$ が単位行列になるような $x \in U$ に対しては明らかである. そうでないような $x \in U$ に対しては, 適当な直行行列 O_1, O_2 を選ぶと,

$$O_1 f'(x) O_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

と表現できる. ここに, $0 < \gamma_1 \le \cdots \le \gamma_n = \|f'(x)\|$ である. よって

$$|\eta|/\gamma_n \le |\eta f'(x)^{-1}| \le |\eta|/\gamma_1.$$

さて $\|f'(x)\|^n \le KJ_f(x)$ であるから, $J_f(x)/\gamma_n^n \ge K^{-1}$. また

$$J_f(x) = \gamma_1\cdots\gamma_n \le \gamma_1\gamma_n^{n-1} \le \gamma_1\|f'(x)\|^{n-1} \le \gamma_1(KJ_f(x))^{(n-1)/n}$$

より $J_f(x)/\gamma_1^n \le K^{n-1}$. 故に $K^{-1}|\eta|^n \le F(x,\eta) \le K^{n-1}|\eta|^n$.

(F_4): これは明らかである. □

条件 (F_1) - (F_4) を満たす F に対して, 函数空間 $W^{1,n}(U,\mathbb{R})$ を定義域とする汎函数 I_F を

$$I_F(u,U) := \int_U F(x,u'(x))\,dx,$$

にて定める. 函数 $u \in W^{1,n}(U)$ が $v = u|\partial U$ なる任意の $v \in W^{1,n}(U)$ に対して

$$I_F(u,U) \le I_F(v,U)$$

を満たすとき, u を I_F の極値函数という.

定理 13.1 U が $\mathbb{R}^n$ 内の有界開集合であるならば, 各函数 $u_0 \in W^{1,n}(U)$ に対して, $u = u_0|\partial U$ を満たす I_F の極値函数 u が存在する.

証明: 函数列 $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を $u_\nu = u_0|\partial U$ および

$$I_F(u_\nu, U) \geq I_F(u_{\nu+1}, U) \to \inf\{I_F(v,U) \colon v = u_o|\partial U\}$$

であるような $W^{1,n}(U)$ 内の列とし, $v_\nu := u_\nu - u_0 \in W_0^{1,n}(U)$ とおく. $W_0^{1,n}(U)$ の定義と補題 10.2 および条件 (F_3) より

$$\begin{aligned}\|v_\nu\|_{1,n,U} &\leq C(n,U)\|v'_\nu\|_{n,U}\\ &\leq C(n,U)(\|u'_0\|_{n,U} + \|u'_\nu\|_{n,U})\\ &\leq C(n,U)(\|u'_0\|_{n,U} + \alpha^{-1/n} I_F(u_\nu, U)^{1/n})\end{aligned}$$

であるから, $\{v_\nu\}$ は有界列である. 補題 12.7 を用いて部分列を選んだとして, $\{v_\nu\}$ はある $v \in W_0^{1,n}(U)$ に弱収束しているとして良い. すると $v_\nu, v_{\nu+1}, \ldots$ の適当な有限凸一次結合

$$w_\nu := \sum_{j=\nu}^{k(\nu)} \mu_{\nu,j} v_j \qquad \Bigl(0 \leq \mu_{\nu,j} \leq 1, \quad \sum_{j=\nu}^{k(\nu)} \mu_{\nu,j} = 1\Bigr)$$

をとって, $\{w_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が v に強収束するようにできる[15]. このとき $u_0 + w_\nu = \sum_{j=\nu}^{k(\nu)} \mu_{\nu,j} u_j$ であり, $\{u_0 + w_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は $u := u_0 + v$ に強収束する. 特に, $u'_0 + w'_\nu$ は u' に $L^n(U)$-収束しているから, 再び部分列を選んだとして, ほとんどすべての $x \in U$ において $u'_0(x) + w'_\nu(x)$ は $u'(x)$ に収束しているとして良い. そこで Fatou の補題と条件 (F_2) を用いると

$$\begin{aligned}I_F(u,U) &\leq \liminf_{\nu\to\infty} I_F(u_0 + w_\nu, U)\\ &\leq \liminf_{\nu\to\infty} \sum_{j=\nu}^{k(\nu)} \alpha_{\nu,j} I_F(u_j, U)\\ &\leq \lim_{\nu\to\infty} I_F(u_\nu, U).\end{aligned}$$

以上より u が求める極値函数であることがわかった. □

[15]例えば, 竹之内 [19] 定理 32.3 参照

§.14 $\mathcal{A}$-調和函数

U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とし, 写像 $\mathcal{A}\colon U \times M_{1,n} \to \mathbb{R}^n$ は, ある定数 $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ に対して以下の条件 (A_1) - (A_5) を満たしているとする.

$$(\mathrm{A}_1)\qquad \begin{array}{c} \text{任意の } \eta \in M_{1,n} \text{ に対して } \mathcal{A}(\cdot,\eta) \text{ は可測であり,} \\ \text{ほとんどすべての } x \in U \text{ に対して } \mathcal{A}(x,\cdot) \text{ は連続である.} \end{array}$$

ほとんどすべての $x \in U$ および任意の $\eta, \eta_1, \eta_2 \in M_{1,n}$, $\eta_1 \neq \eta_2$, に対して

$$(\mathrm{A}_2)\qquad \eta\mathcal{A}(x,\eta) \geq \alpha|\eta|^n,$$

$$(\mathrm{A}_3)\qquad |\mathcal{A}(x,\eta)| \leq \beta|\eta|^{n-1},$$

$$(\mathrm{A}_4)\qquad (\eta_1 - \eta_2)(\mathcal{A}(x,\eta_1) - \mathcal{A}(x,\eta_2)) > 0,$$

$$(\mathrm{A}_5)\qquad \mathcal{A}(x,\lambda\eta) = |\lambda|^{n-2}\lambda\mathcal{A}(x,\eta).$$

前節の変分核の場合と同様に, $u \in W^{1,n}_{loc}(U)$ に対して $x \mapsto \mathcal{A}(x,u'(x))$ は可測であることが条件 (A_1) よりわかる.

函数 $u \in W^{1,n}_{loc}(U)$ は

$$(14.1)\qquad \int_U \phi'(x)\mathcal{A}(x,u'(x))\,dx = 0, \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(U)$$

を満たすとき, U において $\mathcal{A}$-調和であるという. 条件 (A_3) より定数函数は $\mathcal{A}$-調和である. また $\mathcal{A}$-調和函数と定数函数との和および $\mathcal{A}$-調和函数の定数倍も $\mathcal{A}$-調和である. $\mathcal{A}$ および u が滑らかなときは (14.1) は偏微分方程式

$$(14.2)\qquad \operatorname{div}\mathcal{A}(x,u'(x)) = 0$$

と同値である. 特に $n = 2$ かつ $\mathcal{A}(x,\eta) := {}^t\eta$, であるとき, この偏微分方程式は Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ になり, $\mathcal{A}$-調和函数は通常の調和函数になる. また $u \in W^{1,n}(U)$ ならば, $W^{1,n}_0(U)$ の定義と条件 (A_3) より, (14.1) は

$$(14.3)\qquad \int_U v'(x)\mathcal{A}(x,u'(x))\,dx = 0, \qquad \forall v \in W^{1,n}_0(U)$$

と同値であることがわかる.

例 14.1 前節の条件 (F_1) - (F_4) を満たす変分核 F の第二変数に関する微分 F_η は上記の条件 (A_1) - (A_5) を満たす.

証明： 先ず (A_1) は明らかである.

次に

$$F(x,\eta+\eta_0)=F(x,\eta)+\eta_0F_\eta(x,\eta)+o(|\eta_0|) \tag{14.4}$$

であるから, $\eta_0:=t\eta$ とし, 条件 (F_4) を用いると,

$$\eta F_\eta(x,\eta)=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{t}F(x,\eta)=nF(x,\eta).$$

よって (A_2): $\eta F_\eta(x,\eta)\geq n\alpha|\eta|^n$ が成立する.

また $|F_\eta(x,\eta)|=\xi F_\eta(x,\eta)$ を満たすような $\xi\in M_{1,n}$, $|\xi|=1$, をとり, (14.4) において $\eta_0:=t|\eta|\xi$, $t>0$ とし, F の凸性を用いると

$$\begin{aligned}
t|\eta||F_\eta(x,\eta)| &= F(x,\eta+t|\eta|\xi)-F(x,\eta)+o(t)\\
&=(1+t)^nF\Big(x,\frac{\eta+t|\eta|\xi}{1+t}\Big)-F(x,\eta)+o(t)\\
&<[(1+t)^{n-1}-1]F(x,\eta)+(1+t)^{n-1}tF(x,|\eta|\xi)+o(t).
\end{aligned}$$

t で割った後, $t\to+0$ の極限を取り, (F_3) を利用すれば

$$|\eta||F_\eta(x,\eta)|\leq(n-1)F(x,\eta)+F(x,|\eta|\xi)\leq(n-1)\beta|\eta|^n+\beta|\eta|^n=n\beta|\eta|^n.$$

故に, (A_3) が成立する.

$\psi(t):=F(x,\eta'+t(\eta-\eta'))$ は C^1-級の狭義凸函数であるから, ψ' は狭義増加函数になるので

$$(\eta-\eta')(F_\eta(x,\eta)-F_\eta(x,\eta'))=\psi'(1)-\psi'(0)>0.$$

最後に (A_5) は 条件 (F_4) を η で微分することにより導きだされる. □

例 14.2 $F(x,\eta):=|\eta|^n$ のとき, $F_\eta(x,\eta)={}^t\eta n|\eta|^{n-2}$ であり, F_η-調和函数の例として,

$$x\mapsto{}^tax+c,\qquad x\mapsto c_1\log|x-a|+c_2$$

がある. ここで, $a\in\mathbb{R}^n$ および c, c_1, $c_2\in\mathbb{R}$ である.

証明： 共に単純な計算によって (14.2) が成立することが確かめられる. □

$\mathcal{A}$-調和函数の重要な性質の内で後に利用するものを述べておく[16].

[16]以下に述べる主張以外にも $\mathcal{A}$-調和函数に関する興味ある結果が知られています. それらについては Heinonen 他 [6] 等をご覧下さい.

定理 14.1 ($\mathcal{A}$-調和函数に対する最大値原理) $\mathcal{A}$-調和函数 $u, v \in W^{1,n}(U)$ が $u \geq v|\partial U$ を満たすならば, U 上ほとんどいたる所で $u \geq v$. 特に $u = v|\partial U$ ならば, U 上ほとんどいたる所で $u = v$.

証明: 仮定より $(u-v)^- \in W_0^{1,n}(U)$ であり, 補題 12.3 より $((u-v)^-)' = ((v-u)^+)' = \mathbf{1}(v-u)(v'-u')$ となるので, (14.3) より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U ((u-v)^-)'(x)[A(x,u'(x)) - A(x,v'(x))]\,dx \\ &= \int_{\{v>u\}} (v'(x) - u'(x))[A(x,u'(x)) - A(x,v'(x))]\,dx. \end{aligned}$$

条件 (A_4) を考慮すると, 上式は $\{v > u\}$ 上ほとんどいたる所で $u' = v'$ となること, 即ち U 上ほとんどいたる所で $((u-v)^-)' = 0$ を意味するので, 補題 12.1 より, $(u-v)^- = 0$. よって $u \geq v$ となる.

後半の主張は, 前半の主張と系 12.3 より従う. □

定理 14.2 ($\mathcal{A}$-調和函数の局所有界性) $\mathcal{A}$-調和函数は U において零集合上の値を無視すれば局所有界である.

残念ではあるが, この定理と次の Harnack 不等式の証明は省略する. 証明は Reshetnyak [14] の第三章第二節または Heinonen 他 [6] の第三章および第六章をご覧下さい.

定理 14.3 (Harnack 不等式) n と $\mathcal{A}$ のみに依る正定数 $C(n,\mathcal{A})$ が存在して, $B(a;2r) \subset U$ となるような任意の開球 $B(a;r)$ と任意の非負 $\mathcal{A}$-調和函数 u に対して

$$\operatorname{ess\,sup}\{u(x) \colon x \in B(a;r)\} \leq C(n,\mathcal{A}) \operatorname{ess\,inf}\{u(x) \colon x \in B(a;r)\}$$

が成立する.

次の定理は Harnack 不等式より従う.

定理 14.4 ($\mathcal{A}$-調和函数の連続性) 任意の $\mathcal{A}$-調和函数にほとんどいたるところ一致する連続函数が存在する.

以下 F は前節の条件 (F_1) – (F_4) を満たす変分核とし, 汎函数 I_F の極値函数と F_η-調和函数の関係について述べる.

補題 14.1 $u, v \in W^{1,n}(U)$ とすると, $I\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto I(t) := I_F(u+tv, U)$ は C^1-級の凸函数であり,

$$I'(t) = \int_U v'(x) F_\eta(x, u'(x) + tv'(x))\, dx. \tag{14.5}$$

証明: I が凸函数になることは, $F(x,\cdot)$ が凸であることよりわかる. 一方 I が C^1-級であって, その導関数 I' が (14.5) で与えられることは Lebesgue 積分の良く知られた結果である. □

この補題より直ちに次の定理が従う.

定理 14.5 汎函数 I_F の極値函数は F_η-調和である[17].

この定理と $\mathcal{A}$-調和函数に関する最大値原理 (定理 14.1) より次の系がわかる.

系 14.1 $u_0 \in W^{1,n}(U)$ としたとき, $u = u_0|\partial U$ を満たす I_F の極値函数は (存在すれば) 一意的である.

次の系は極値函数の存在定理 (定理 13.1) と定理 14.5 および最大値原理よりわかる.

系 14.2 U が $\mathbb{R}^n$ 内の有界開集合であるとき, F_η-調和函数 $v \in W^{1,n}(U)$ は U における I_F の極値函数である.

§.15 補題 11.1 の証明

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, (i,j) 成分が a_{ij} の余因子 Δ_{ji} であるような[18] n 次正方行列を $\operatorname{adj} A$ で表わし, A の余因子行列 (**adjoint matrix**) と呼ぶ. $\operatorname{adj} A$ は $A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n$ を満たす. ここに I_n は n 次単位行列である. 特に A が正則のとき, $\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1}$ である.

補題 15.1 f が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合から $\mathbb{R}^n$ への C^2-級写像であるとき, $\operatorname{adj} f'$ の各列ベクトル成分 Δ_j に対して $\operatorname{div} \Delta_j = 0$.

証明: 余因子の定義, 行列式の性質および偏微分順序の交換可能性を用いて直接計算することにより, 主張を得る. □

---

[17] 言い替えれば, (14.5) は極値函数に対する Euler-Lagrange の微分方程式であり, F_η-調和函数とは汎函数 I_F に対する停留函数である.

[18] Δ_{ij} でないことに注意.

系 15.1 U, V を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合, $f \in W^{1,n}_{loc}(U,V) \cap C^0(U)$ とするとき, $v \in C^\infty(V,\mathbb{R}^n)$ が $\operatorname{div} v = 0$ を満たすならば, 任意の $\phi \in C_0^\infty(U)$ に対して

$$\int_U \phi'(x) \operatorname{adj} f'(x) v \circ f(x)\, dx = 0.$$

証明: f_ν を f の $1/\nu$-平滑化とすると, $\operatorname{supp}\phi$ において $\operatorname{adj} f'_\nu$ は $\operatorname{adj} f'$ に $L^{n/(n-1)}$ 収束し, $v \circ f_\nu$ は $v \circ f$ に一様収束するので, f が C^∞-級の場合に示せば十分である. このとき前補題を用いると

$$\operatorname{div}[\operatorname{adj} f'(x) v \circ f(x)] = J_f(x)(\operatorname{div} v) \circ f(x)$$

が単純な計算によってわかるから, $\operatorname{div} v = 0$ より主張を得る. □

定理 15.1 f を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合 U から $\mathbb{R}^n$ の中への非定値 qr-写像, F を例 13.1 の方法で f から定められる変分核, $b \in \mathbb{R}$ とすると, $u(x) := \log|f(x) - b|$ は開集合 $U \setminus f^{-1}(b)$ において F_η-調和である.

証明: $b = 0$ として良い. 補題 12.2 を利用すると, $u \in W^{1,n}_{loc}(U \setminus f^{-1}(0))$ でありかつ

$$u'(x) = \frac{1}{|f(x)|^2} {}^t f(x) f'(x)$$

となることがわかる. ほとんどすべての $x \in U$ に対して $f'(x)$ が存在し, $J_f(x) = 0$ であるほとんどすべての x に対して $f'(x) = 0$ となっていることを用いると

$$F_\eta(x, u'(x)) = n \operatorname{adj} f'(x) \frac{f(x)}{|f(x)|^n}$$

が成り立つ. 一方 $v(y) := y/|y|^n$ は $\operatorname{div} v = 0$ を満たしているので, 系 15.1 より主張が従う. □

この定理と次の定理より補題 11.1 は直ちに導かれる.

定理 15.2 U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合, A を U において閉であるような真部分集合とし, F を第 13 節の条件 (F_1) - (F_4) を満たしているような変分核とする. もし $U \setminus A$ 上の F_η-調和函数 u で $\lim_{x \to U \cap \partial A} u(x) = \infty$ となるようなものが存在したら, A の任意の点 a に対して a を中心とする適当な閉球 $\overline{B}$ で $A \cap \overline{B}$ の容量が 0 になるようなものが存在する.

この定理の証明は, 証明に必要な事実を示した後で行う.

A を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, U_0 を A を含む有界な開集合とし, $U := U_0 \setminus A$ とおく. さらに $\mathcal{A}\colon U \times M_{1,n} \to \mathbb{R}^n$ を第 14 節の条件 (A_1) – (A_5) を満たしているような写像, $u \in W^{1,n}(U)$ を $\mathcal{A}$-調和函数とし, $v_0 \in \widetilde{W}(A; U_0)$ とする. このとき積分

$$\int_U v'(x)\mathcal{A}(x, u'(x))\,dx \tag{15.1}$$

の値は $v = v_0|\partial U$ なる $v \in W^{1,n}(U)$ に依らないことが (14.3) よりわかる. 積分 (15.1) の値を $\Omega(A, U_0, u, \mathcal{A})$ により表わす. B を $A \subset B \subset U_0$ であるようなコンパクト集合としたとき,

$$\Omega(B, U_0, u, \mathcal{A}) = \Omega(A, U_0, u, \mathcal{A})$$

が成立することは容易にわかる.

定理 15.3 A, U_0, U および $\mathcal{A}$ は上記の通りとし, δ を正定数とする. $\mathcal{A}$-調和函数 u, $v \in W^{1,n}(U)$ が $u \geq v + \delta|\partial A$ かつ $u = v|\partial U_0$ を満たしているとき,

$$\Omega(A, U_0, u, \mathcal{A}) \geq \Omega(A, U_0, v, \mathcal{A})$$

が成立する.

証明: $w := 1 - (u - v - \delta)^-/\delta$ とおき, $\phi \in \widetilde{W}(A; U_0)$ をひとつとる. 明らかに $\phi - 1 \in W_0^{1,n}(U|\partial A)$ であり, 仮定から $(u - v - \delta)^- \in W_0^{1,n}(U|\partial A)$ であるから, $\phi - w \in W_0^{1,n}(U|\partial A)$. 一方, 仮定より $u - v \in W_0^{1,n}(U|\partial U_0)$ であるから, $u - v$ に $W^{1,n}(U)$-収束し, 台が ∂U_0 と素であるような C^∞-函数の列をとって考えることにより, $\phi - w \in W_0^{1,n}(U|\partial U_0)$ がわかる. そこで補題 12.8 より $\phi - w \in W_0^{1,n}(U)$, 即ち $\phi = w|\partial U$. 補題 12.3 より $w' = \mathbf{1}(\delta + v - u)(u' - v')$ となることを考え合わせ, 条件 (A_4) を用いると

$$\begin{aligned}
\Omega(A, U_0, u, \mathcal{A}) - \Omega(A, U_0, v, \mathcal{A}) &= \int_U \phi'(x)[\mathcal{A}(x, u'(x)) - \mathcal{A}(x, v'(x))]\,dx \\
&= \int_U w'(x)[\mathcal{A}(x, u'(x)) - \mathcal{A}(x, v'(x))]\,dx \\
&= \int_{\{\delta + v \geq u\}} [u'(x) - v'(x)][\mathcal{A}(x, u'(x)) - \mathcal{A}(x, v'(x))]\,dx \geq 0
\end{aligned}$$

以上で主張が示された. □

定理 15.2 の証明: 先ず $a \in A$ が $U \cap \partial A$ に属する場合に主張を示す. B_1, B_2 を共に a を中心とする開球で, $\overline{B}_2 \subset B_1$, $\overline{B}_1 \subset U$ かつ $(B_1 \setminus \overline{B}_2) \cap (U \setminus A) \neq \emptyset$ となっているようなものとする. さらに S_1, S_2 をそれぞれ B_1, B_2 の境界とし, S_0 を a を中心とする球面で $(B_1 \setminus \overline{B}_2) \cap (U \setminus A)$ 内の点 a_0 を含んでいるようなものとする. 仮定と F_η-調和函数が連続である (定理 14.4) ことを用いると, A 上では $u := \infty$ と定めることにより U 全体に u を拡張すると, $u \colon U \to (-\infty, \infty]$ は連続になり, 特に B_1 において下に有界になる. F_η-調和函数と定数函数の和は F_η-調和函数であるので, B_1 において $u \geq 0$ として良い. $T > u(a_0)$ とし, $P_T := \{x \in B_1 \colon u(x) \geq T\}$, $Q_T := \overline{B}_2 \cap P_T$, $H_T := B_1 \setminus Q_T$, $G_T := B_1 \setminus P_T$ とおく. H_T, G_T は開集合であり, $a_0 \in G_T$ である. $u_T := \min\{u, T\}$ とおくと, $u_T \in W^{1,n}_{loc}(U) \cap C^0(U)$ であることがわかる.

$\phi \in \widetilde{W}(\overline{B}_2; B_1)$ をひとつとり, v_T を $v_T = T\phi|\partial H_T$ を満たす I_F の極値函数とする. 定理 14.5 と 定理 14.4 より v_T は H_T において連続であるとして良い. さらに最大値原理より H_T 上において $0 \leq v_T \leq T$ である. $v_T = T\phi|\partial H_T$ の定義から $v_T - T\phi$ に $W^{1,n}(H_T)$-収束する $C_0^\infty(H_T)$ 内の列 $\{w_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が存在する. このとき $\min\{T\phi + w_\nu, T\}$ は $W^{1,n}(H_T) \cap C^0(\overline{B}_1)$ に属し, $u_T + 1/\nu - \min\{T\phi + w_\nu, T\}$ は ∂G_T のある近傍上で正になる. よって $(u_T + 1/\nu - \min\{T\phi + w_\nu, T\})^- \in W_0^{1,n}(G_T)$. 系 12.2 と $W_0^{1,n}(G_T)$ が閉であることより, $\nu \to \infty$ として $(u_T - v_T)^- = (u_T - \min\{v_T, T\})^- \in W_0^{1,n}(G_T)$. 即ち $u_T \geq v_T|\partial G_T$ がわかった. ところで G_T 上では $u_T = u$ であるから, u_T は G_T 上の F_η-調和函数である. そこで最大値原理より G_T 上で $u_T \geq v_T$ となる. 特に $v_T(a_0) \leq u_T(a_0) = u(a_0)$ と T に依らない評価を得た. v_T は非負 F_η-調和函数であるので, Harnack 不等式を用いると T に依らない正定数 L により S_0 上で $v_T \leq L$ と評価できる.

$\Omega(T) := \Omega(Q_T, B_1, v_T, F)$ とおく. つまり $\Omega(Q_T, B_1, v_T, F)$ の定義と $\phi = v_T|\partial H_T$ より

$$\Omega(T) = \int_{H_T} \phi F_\eta(x, v_T')\,dx = \int_{H_T} \frac{v_T'(x)}{T} F_\eta(x, v_T')\,dx$$

である. 例 14.1 で計算したように $\eta F_\eta(x, \eta) \geq n\alpha|\eta|^n$ であることを用いると

$$\mathrm{Cap}(Q_T; B_1) \leq \lim_{\nu\to\infty} \int_{H_T} \left|\phi + \frac{w_\nu'(x)}{T}\right|^n dx = \int_{H_T} \left|\frac{u_T'(x)}{T}\right|^n dx \leq \frac{\Omega(T)}{n\alpha T^{n-1}}$$

となる. 一方 $\overline{B}_0$ を S_0 で囲まれた閉球として, $\phi_1 \in \widetilde{W}(\overline{B}_0; B_1)$ をひとつとり, $v = \phi_1|\partial(B_1 \setminus \overline{B}_0)$ を満たす I_F の極値函数を $v \in W^{1,n}(B_1 \setminus \overline{B}_0)$ とすると, 定理 15.3 より

$$\Omega := \Omega(\overline{B}_0, B_1, v, F) \geq \Omega(\overline{B}_0, B_1, v_T, F) = \Omega(Q_T, B_1, v_T, F) = \Omega(T)$$

となる. 以上から

$$\mathrm{Cap}(A \cap \overline{B}_2; B_1) \leq \mathrm{Cap}(Q_T; B_1) \leq \frac{\Omega}{n\alpha T^{n-1}}.$$

$T \to \infty$ とすることにより, $\mathrm{Cap}(A \cap \overline{B}_2; B_1) = 0$ を得た.

定理の主張を示すためには, A に内点が存在しないことを示せば良い. A の内部 A^0 が空でないとすると, $U \cap \partial A^0$ も空でない. a をこの集合内の点とすると, $a \in U \cap \partial A$ でもあるので, ここまでの結果より a 中心の閉球 $\overline{B}$ を適当に選ぶと, $A \cap \overline{B}$ の容量が 0 になる. しかしこれは $A \cap \overline{B}$ に内点が存在しない (系 10.1) ことになり, a のとり方に矛盾する. これで定理の主張はすべて証明された. □

参考文献

[1] R. A. Adams : *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] L. V. Ahlfors : *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, 1966.

[3] T. Aubin : *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, Springer-Verlag, 1982.

[4] V. M. Gol'dshtein and Yu. G. Reshetnyak : *Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[5] S. Granlund, P. Lindqvist and O. Martio : Conformally invariant variational integrals, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 43–73.

[6] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio : *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford University Press, 1993.

[7] 伊藤 清三：ルベーグ積分入門, 数学選書 **4**, 裳華房, 1963.

[8] S. Lang : *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, 1985.

[9] O. Martio : Partial differential equations and quasiregular mappings, Springer Lecture Notes **1508** (1992), 65–79.

[10] 松島 与三：多様体入門, 数学選書 **5**, 裳華房, 1965.

[11] 溝畑 茂：偏微分方程式論, 現代数学 **9**, 岩波書店, 1965.

[12] S. M. Nikol'skiĭ(ed.) : *Analysis III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 26, Springer-Verlag, 1991.

[13] Yu. G. Reshetnyak : Some geometric properties of functions and mappings with generalized derivatives, Siberian Math. J. **7** (1966), 704–732.

[14] Yu. G. Reshetnyak : *Space Mappings with Bounded Distortion*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. **73**, American Mathematical Society, 1989.

[15] S. Rickman : *Quasiregular Mappings*, Springer-Verlag, 1993.

[16] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1986.

[17] 佐武 一郎：線型代数学, 数学選書 **1**, 裳華房, 1958.

[18] E. M. Stein : *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[19] 竹之内 脩：函数解析, 近代数学講座 **13**, 朝倉書店, 1968.

[20] J. Väisälä : *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes **229**, Springer, 1971.

[21] M. Vuorinen : *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes **1319**, Springer, 1988.