Symmetrization とその応用

– Baernstein の $*$-function の方法 –

小中澤 聖二
藤解 和也
柳原 宏

Topics in Complex Analysis 1994

序

Baernstein のいわゆる $*$-function method(最近では I-function とも呼ぶ) は, 複素函数論の様々な分野における極値問題, 特に極値函数が何らかの意味で対称性を持つと予想できる問題を解く上で有効である. (cf. Baernstein [8], 本書 Part I). $*$-function のアイデアを基本的な場合について述べてみよう. $u(z)$ を円環領域 $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ 上の函数で, 各 r, $r_1 < r < r_2$ について $u(re^{i\theta})$ は θ について可積分とする. このとき

$$u^*(re^{i\theta}) := \sup_E \int_E u(re^{it})\,dt$$

とおく. ここで sup は $(-\pi, \pi]$ の可測部分集合で $|E| = \mathrm{meas}(E) = 2\theta$ をみたす全ての E に渡り, とるものとする. この u^* は symmetric decreasing rearrangement と深い関係がある. 実際 $u^\#(re^{i\theta})$ を $u(re^{i\theta})$ の symmetric decreasing rearrangement とすると

$$u^*(re^{i\theta}) = u^I(re^{i\theta}) := \int_{-\theta}^{\theta} u^\#(re^{it})\,dt$$

となり, u^* は $u^\#$ の不定積分として定義される u^I と等しい (cf. Appendix A, C). さて $*$-function method の基本定理として " u が劣調和であれば u^* も $A^+ = \{z = re^{i\theta} : r_1 < r < r_2,\ \ 0 < \theta < \pi\}$ で劣調和である". が成立する. 例えば S を単位円板 $\mathbb{D}$ 内の正規化された単葉函数族とし, $f \in S$ について原点に極を持つ $f(\mathbb{D})$ の Green 函数を $\mathbb{C} - f(\mathbb{D})$ においては 0 として拡張した函数を u としよう. また Koebe 函数について $k \in S$ について同様な操作を行って得られる函数を v とする. このとき $A = \{0 < |z| < \infty\}$ として u^* は A^+ で劣調和である. 一方 v は, A で調和であり対称性と $|\theta|$ に関する減少性から $v^*(re^{i\theta}) = \int_{-\theta}^{\theta} v(re^{it})\,dt$ が成り立ち, v^* も A^+ で調和となる. 従って $u^* - v^*$ は A^+ で劣調和となる. 詳しくは Part II で触れるが, $u^* - v^* \le 0$ が ∂A^+ で成立することが証明でき, 劣調和函数に関する最大値の原理から, $u^* \le v^*$ が結論できる. この結果を単位円板に持ち込むと

$$\int_{-\theta}^{\theta} (\log|f|)^\#(re^{it})\,dt \le \int_{-\theta}^{\theta} (\log|k|)^\#(re^{it})\,dt,\ \ 0 < \theta < \pi$$

が成り立つという結果を導くことができる. 一般に $\int_{-\theta}^{\theta} g^\#(t)dt \le \int_{-\theta}^{\theta} h^\#(t)dt$ が任意の $0 < \theta < \pi$ について成り立つとき Hardy-Littlewood の意味で h は g を majorize するというが, これは "$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(g(t))dt \le \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(h(t))dt$ が 任意の増加凸函数 Φ について成り立つ" と同値である. 従って

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|f(re^{it})|)\,dt \le \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|k(re^{it})|)\,dt \tag{1}$$

となる. この結果から $f \in S$ の $\{|z| = r\}$ における L^p ノルムが $f = k$ のとき最大となること等, 興味深い結果が数多く導かれる. (cf. [7], 本書 第 6 章).

この $*$-function method は, 最初は値分布論における, spread relation を解く為に導入され, その後 Baernstein 本人により, 上で見たような単葉函数論への応用等がなされ, 他にも数多くの結果が様々な函数論の研究者により得られてきた. また高次元への拡張については Weitsman の [77], [78] 等の論文がある. この 2 つの論文では楕円型の偏微分方程式の比較定理への応用が述べられている. 注目すべきは, 長年の Baernstein 自身の研究により作用素 $u \mapsto u^*$ が劣調和性を保存するという定理の証明の手法が洗練され, はじめは実 2 次元に依存した方法であったのが, n 次元への拡張にも直ちに有効であり, かつ他の種類の symmetrization(Schwarz, Spherical, Steiner, cap, etc.) についても使える方法に進化を遂げたことである. 特に最新の [14] には, この拡張された基本定理と Weitsman [77] のアイデアの一般化により楕円型のみならず放物型の微分方程式の比較定理の証明も行えるということが述べられている. このような比較定理を証明する方法として, 今までは等周不等式と幾何学的測度論の余面積定理等の大道具を使う論文が殆どであり, しかも数ある symmetrization の中でも一番簡単な Schwarz symmetrization について述べたものが多かった. 最近 A. Alvino, P. -L. Lions, and G. Trombetti [3] により, 大道具を使うこと無しに比較定理を証明する新しい方法が発表され, このような現状に対する不満も過去のものとなりつつあるが, Baernstein の $*$-function method も [3] で述べられた手法に匹敵する大道具を使わない elemantary な方法ということができる.

ここで本書の構成を簡単に述べよう. Part I(柳原) では様々な symmetrization について, 定義と基本的な性質をまとめる. 次に様々な symmetrization について I-function を定義し, 劣調和性保存定理を導くときに基本的な役割を演ずる不等式を証明する. そしてこの基本不等式を用いて (k, n)-cap symmetrization についての I-function の majorization についての基本定理を証明し, 最後に偏微分方程式の比較定理への応用について, 簡単に触れる. ここで Part I では $\mathbb{R}^n$ における symmetrization の不定積分である I-function を扱うが I-function と $*$-function は一致するのであるから, Part I の $(1, 2)$-cap symmetrization の結果は直ちに, Part II での函数論への応用に用いることができることに注意しておこう. 実際の歴史的な順番は Part I と前後するが, Part II では, Baernstein の $*$-function の函数論への応用をまとめる. 内容は, まず Baernstein の値分布論についての Spread Conjecture の解決とその周辺を述べ (藤解), 次に単葉函数論についての応用を前記の $f \in S$ についての積分不等式 (1) を中心に述べる (小中澤).

最後に, 本書は平成 6 年度科学研究費補助金 · 総合研究 (A) 「多様体上のポテンシャル論の総合的研究」(課題番号 06302011, 代表者 広島大学総合科学部 水田 義弘) から補助を受け, 研究集会の為の資料として作成された.

目 次

第I部

Symmetrization の基礎理論

第1章　Symmetrization

この節では, rearrangement と symmetrization の定義と簡単な性質を後で必要となる事柄に絞ってまとめる. 函数の rearrangement については Chong and Rice [23] が最も詳しい. 数列の rearangement については Marshall and Olkin [59] が詳しく参考になる. 両者を簡単に解説しているものとして [48] があるが, 少々読みにくい. symmetrization とその応用に関しての成書としては, [68], [17], [54] が挙げられよう.

1.1　Decreasing rearrangement の定義

$\mathbb{R}$ で実数の全体を表わすとし, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ で, $\mathbb{R}$ の位相的 Borel 加法族 (つまり全ての open subset を含む最小の σ-加法族) を表わす. また $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. つまり, X を集合とし, $\mathcal{F}$ を X 上の σ-加法族で μ を $(X, \mathcal{F})$ 上の (正) 測度とする. さて可測函数 $f : X \to \mathbb{R}$ が与えられているとしよう. (正確には $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可測と言うべきだが, 以後単に可測と言うことにする.) このとき f により $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度 $\mu \circ f^{-1}$ が次のようにして定まる.

$$\mu \circ f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

これを f の像測度, または分布と言う. 一般に 2 つの可測函数 f, g (異なる可測空間の上で定義されていても良い) の像測度が等しい時, f, g は互いに equimeasurable であると言う.

さて各 $t \in \mathbb{R}$ について (t, ∞) の測度を $\mu \circ f^{-1}$ で測ることにより, f の分布函数 $\beta_f(t)$ が得られる. つまり

$$\beta_f(t) = \mu(f > t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}), \ \ t \in \mathbb{R}$$

である. このとき $\beta_f(t)$ は $[0, \mu(X)]$ に値を持つ右連続な減少函数である. 但し, Part I において減少とは "任意の $t_1 < t_2$ について $\beta_f(t_1) \geq \beta_f(t_2)$" が成り立つという広義の意味で用い, "$>$ " が成り立つ時は, 狭義減少と言うことにする. また増加, 狭義増加についても同じである.

定義 1.1.1 一般に 2 つの可測函数 f と g (異なる測度空間上の函数でも良い) について

$$\beta_f(t) = \beta_g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ時, f と g は互いに *rearrangement* であると言う.

一見すると互いに rearrangement とは, 分布函数が等しいということであるから, f, g が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に誘導する分布 (像測度) が等しいこと, つまり equimeasurable である

と思いがちだが, これは正しくない. 例えば $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ とおいて $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の下で考えれば, $\beta_f(t)=\beta_g(t)=+\infty$, $\forall t\in\mathbb{R}$ となるが, 明らかに f, g の誘導する分布は互いに異なる. そこでこれから考える函数は全て

仮定 1
$$\beta_f(t)<+\infty,\ \forall\, t>\text{ess inf}\, f$$

という仮定をみたすものだけを扱うことにする. f が非負で $f\in L^p(X,\mathcal{F},\mu)$, $0<p<+\infty$ のときこの仮定がみたされることに注意しておく. また $\mu(X)<+\infty$ のときには, この仮定は当然満たされ, "互いに rearrngement $\Longleftrightarrow$ equimeasurable" が成り立つ.

注意 1.1.2 *f, g がそれぞれ可測空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ 上の可測函数で, 互いに rearrangement で, かつともに* **仮定 1** *を満たすとする. このとき $\text{ess inf}\, f=\text{ess inf}\, g(=m)$ で $\mu\circ f^{-1}((a,b])=\nu\circ g^{-1}((a,b])$ が, 任意の $m\le a<b\le\infty$ について成り立つ, つまり f, g が $(m,\infty]$ に誘導する測度は等しい. 従って ϕ が, $\phi(m)=0$ を満たす Borel 可測な函数とすると,*

$$\int_X\phi(f(x))\,d\mu(x)=\int_Y\phi(g(y))\,d\nu(y)$$

が成り立つ. これは積分の定義から容易にわかる.

定義 1.1.3 可測空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の可測函数 f で **仮定 1** をみたすものについて

$$f^*(s)=\begin{cases}\text{ess sup}\, f, & s=0\\ \inf\{t\in\mathbb{R}:\beta_f(t)\le s\}, & s\in(0,\mu(X))\\ \text{ess inf}\, f, & s=\mu(X)\end{cases}$$

とおく. 但し $\inf\mathbb{R}=-\infty$, $\inf\emptyset=+\infty$ とする. $f^*(s)$ を f の *decreasing rearrangement* と呼ぶ.

f^* は減少で f と互いに rearrangement である. これらの性質を命題の形にまとめ, 証明を与えておこう. 勿論 f は **仮定 1** をみたすとする.

命題 1.1.4 *$f^*(s)$ は, $(0,\mu(X))$ で有限値, 右連続, 減少函数である. また $\lim_{s\downarrow 0}f^*(s)=\text{ess sup}\, f$, $\lim_{s\uparrow\mu(X)}f^*(s)=\text{ess inf}\, f$ が成り立ち, $s=0$, $\mu(X)$ で連続である.*

証明.　まず任意の $s_0\in\mathbb{R}$ について $\{t\in\mathbb{R}:\beta_f(t)\le s_0\}$ は, $\emptyset$, $\mathbb{R}$ または $[t_0,+\infty)$ の形をしていることに注意する. 特に最後の場合 $t_0=\inf\{t\in\mathbb{R}:\beta_f(t)\le s_0\}=f^*(s_0)$ である. これは $\beta_f(t)$ が右連続で減少であることから容易にわかる. では $\text{ess sup}\, f=M$, $\text{ess inf}\, f=m$ とおいて, 次のように分類して証明を進めよう.

Case 1. $M=m$.
このとき f は至る所有限値ゆえ, この場合 $M=m\in\mathbb{R}$ であり, f は a.e. に定数函数である. また $t\ge M$ について $\beta_f(t)=0$ で $t<M$ について $\beta_f(t)=\mu(X)$. よって任意の $s\in(0,\mu(X))$ について $\{t\in\mathbb{R}:\beta_f(t)\le s\}=[M,\infty)$ となる. ここで両辺の inf をとることにより $f^*(s)\equiv M$ となり, 命題は明らかに成立する.

Case 2. $-\infty < m < M < +\infty$.
このときは, $t \geq M$ について $\beta_f(t) = 0$, $t > m$ について $\beta_f(t) < \mu(X)$, $t < m$ について $\beta_f(t) = \mu(X)$ となる．よって任意の $0 < s_1 < s_2 < \mu(X)$ について

$$[M, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s_1\} \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s_2\} \subset [m, \infty)$$

となるから, 各集合の inf をとることにより

$$M \geq f^*(s_1) \geq f^*(s_2) \geq m.$$

次に $s_0 \in (0, \mu(X))$ を任意にとり固定し

$$[t_0, \infty) = \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s_0\}$$

となる t_0 をとる．つまり $t_0 = f^*(s_0)$ である．このとき $\beta_f(t_0) \leq s_0$ と $t < t_0$ について $\beta_f(t) > s_0$ が成り立つ．任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \beta_f(t_0 - \varepsilon) - s_0 > 0$ とおくと, $s \in [s_0, s_0 + \delta)$ について $\beta_f(t_0 - \varepsilon) = s_0 + \delta > s$ より

$$[t_0, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \subset (t_0 - \varepsilon, \infty)$$

となる．よって $f^*(s_0) = t_0 \geq f^*(s) \geq t_0 - \varepsilon = f^*(s_0) - \varepsilon$. これは f^* が s_0 で右連続であることを示す．

今度は端点での連続性を示そう．任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \beta_f(M - \varepsilon) > 0$ とおくと, $0 < s < \delta$ をみたす s について

$$[M, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \subset (M - \varepsilon, \infty)$$

となり, $M \geq f^*(s) \geq M - \varepsilon$. これは $\lim_{s \downarrow 0} f^*(s) = M$ を示す．次に $s = \mu(X)$ での連続性を示す為に, $\mu_0 = \beta_f(m)$ とおく．$\mu_0 < \mu(X)$ ならば任意の $s \in (\mu_0, \mu(X))$ について

$$\{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} = [m, \infty)$$

が成り立ち, $f^*(s) \equiv m$ が区間 $(\mu_0, \mu(X))$ で成り立つ．よって $f^*(s)$ は $s = \mu(X)$ で連続である．$\mu_0 = \mu(X) < \infty$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \mu(X) - \beta_f(m + \varepsilon) > 0$ とおくと $\beta_f(m + \varepsilon) = \mu(X) - \delta < s < \mu(X)$ をみたす s について

$$[m + \varepsilon, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \subset (m, \infty)$$

よって $m + \varepsilon \geq f^*(s) \geq m$ が成り立つ．これは $\lim_{s \uparrow \mu(X)} f^*(s) = m$ を示す．$\mu_0 = \mu(X) = \infty$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について $A = \beta_f(m + \varepsilon)$ とおくと, $A < s < \mu(X) = \infty$ をみたす s について

$$[m + \varepsilon, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \subset (m, \infty)$$

よって $m + \varepsilon \geq f^*(s) \geq m$ が成り立ち, $\lim_{s \uparrow \mu(X)} f^*(s) = m$ となる．

Case 3. $-\infty < m < M = \infty$.
このときは任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\beta_f(t) > 0$ で $\lim_{t \uparrow \infty} \beta_f(t) = 0$. また $t < m$ について $\beta_f(t) = \mu(X)$ が成り立つ．この場合については, $f^*(s)$ が $s = 0$ で連続であることのみ

示せば良いであろう．残りは Case 2 の証明と同様である．さて任意の $A \in \mathbb{R}$ について, $\delta = \beta_f(A) > 0$ とおくと $0 < s < \delta$ をみたす s について

$$\emptyset \neq \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \subset (A, \infty)$$

となるから, $\infty > f^*(s) > A$ となる．よって $\lim_{s\downarrow 0} f^*(s) = \infty = M$.

Case 4. $-\infty = m < M < \infty$.
この場合は $t \geq M$ について $\beta_f(t) = 0$ で, $t < M$ について $0 < \beta_f(t) < \mu(X)$ が成り立つ．この場合につては $f^*(s)$ が $s = \mu(X)$ で連続であることのみ示せば良いであろう．残りは Case 2 の証明と同様に示せる．まず $\mu(X) < \infty$ のときは任意の $A < M$ について $\delta = \mu(X) - \beta_f(A) > 0$ とおくと $\beta_f(A) = \mu(X) - \delta < s < \mu(X)$ をみたす, s について

$$[A, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \neq \mathbb{R}$$

より, $A \geq f^*(s) > -\infty$ が成り立つ． これは $\lim_{s\uparrow\mu(X)} f^*(s) = -\infty = m$ を示す. $\mu(X) = \infty$ のときは, 任意の $A < M$ について $\beta_f(A) = B$ とおくと $B < s < \infty$ をみたす, s について

$$[A, \infty) \subset \{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s\} \neq \mathbb{R}$$

より $A \geq f^*(s) > -\infty$. これは $\lim_{s\uparrow\mu(X)} f^*(s) = -\infty = m$ を示す.

Case 5. $-\infty = m < M = \infty$.
この場合は, $0 < \beta_f(t) < \mu(X)$ が任意の t について成り立ち, $\lim_{t\uparrow\infty} \beta_f(t) = 0$, $\lim_{t\downarrow\infty} \beta_f(t) = \mu(X)$ が成り立つことに注意すれば, Case 2, 3, 4 での論法を適宜用いれば証明することができる． □

さて f^* は $[0, \mu(X)]$ 上の函数であるから, $[0, \mu(X)]$ の Lebesgue 測度に関する分布函数を考えることができる．このとき

命題 1.1.5 $\beta_f(t) \equiv \beta_{f^*}(t)$ が成り立つ.

証明. f^* の定義より, 任意の $s \in (0, \mu(X))$ と $t \in \mathbb{R}$ について $f^*(s) > t$ と $\beta_f(t) > s$ は同値. よって

$$\{s \in (0, \mu(X)) : f^*(s) > t\} = \{s \in (0, \mu(X)) : \beta_f(t) > s\} = (0, \beta_f(t))$$

となる． ここで最左辺, 最右辺の集合の Lebesgue 測度を比較すると $\beta_{f^*}(t) = \beta_f(t)$. □

注意 1.1.6 分布函数を $\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})$ で定義することがあるが, *Part I* での定義はこれと異なることに, 注意してほしい.

1.2 Decreasing rearrangement の基本的性質

この節では 2 章以降で用いる rearrangement の基本的な性質をまとめておこう．前節と同じく $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を可測空間とする.

命題 1.2.1 $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を *Borel* 可測函数とし, $\varphi(0) = 0$ とする. $f : X \to [0, \infty)$ を可測とし, $\mathrm{ess\,inf}\, f = 0$ で **仮定 1.** をみたすとする. このとき $\varphi \circ f \in L^1(X, \mu)$ と $\varphi \circ f^* \in L^1([0, \mu(X)), ds)$ は同値であり,

$$\int_X \varphi \circ f(x) d\mu(x) = \int_{[0,\mu(X))} \varphi \circ f^*(s) ds$$

が成り立つ.

証明. m_1 で 1 次元 Lebesgue measure を表わす. f, f^* の分布函数は, $(0, \infty)$ で一致し, 有限値であるから $\mu \circ f^{-1} = m_1 \circ f^{*-1}$ は $(0, \mu(X))$ で一致する. 従って $\varphi(0) = 0$ と積分の定義より上式の両辺の積分値は一致する. □

次の 2 つの命題は明らかであろう.

命題 1.2.2 f, g を X 上の可測函数でともに**仮定 1** を満たすとする. このとき $f(x) \geq g(x)$ μ-*a.e.* ならば $f^*(s) \geq g^*(s)$ $\forall s \in [0, \mu(X)]$.

命題 1.2.3 f は **仮定 1** を満たし $c > 0$ とすると $(cf)^* = cf^*$.

decreasing rearrangement と truncation の関係については次のようになる. $-\infty < A \leq B < \infty$ について

$$T_{A,B}f(x) = \begin{cases} B & \text{if } f(x) > B \\ f(x) & \text{if } A \leq f(x) \leq B \\ A & \text{if } f(x) < A \end{cases}$$

とおく.

命題 1.2.4 f が **仮定 1.** をみたすとすると $(T_{A,B}f)^* = T_{A,B}(f^*)$ が成り立つ.

証明. $\mathrm{ess\,inf}\, f < A \leq B < \mathrm{ess\,sup}\, f$ の時のみ示せば十分であろう. このとき $(T_{A,B}f)^*(0) = B = (T_{A,B}f^*)(0)$, $(T_{A,B}f)^*(\mu(X)) = A = (T_{A,B}f^*)(\mu(X))$ が成り立つことは命題 1.1.4 より容易にわかる.

$$\begin{aligned} \beta_{T_{A,B}f}(t) &= 0 \text{ for } t \leq B \\ \beta_{T_{A,B}f}(t) &= \beta_f(t) \text{ for } A \leq t < B \\ \beta_{T_{A,B}f}(t) &= \mu(X) \text{ for } t < A \end{aligned}$$

に注意すると $0 < s_0 < \mu(X)$ について $(T_{A,B}f)^*(s_0) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \beta_{T_{A,B}f}(t) \leq s_0\} = t_0$ とおくと, $A \leq t_0 \leq B$ である. $t_0 = B$ ならば $\beta_{T_{A,B}f}(B) = 0$ と $A < t < B$ について $\beta_f(t) = \beta_{T_{A,B}f}(t) > S_0$ が成り立つことから $f^*(s_0) \geq B$ よって $T_{A,\,B}(f^*)(s_0) = B$.

$A < t_0 < B$ のとき $\beta_f(t_0) = \beta_{T_{A,B}f}(t_0) \leq s_0$ と $A < t < t_0$ について $\beta_f(t) = \beta_{T_{A,B}f}(t) > s_0$ より $A < f^*(s_0) = t_0 = (T_{A,B}f)^*(s_0) < B$ より $T_{A,\,B}(f^*)(s_0) = (T_{A,B}f)^*(s_0)$.

$t_0 = A$ ならば $\beta_f(A) = \beta_{T_{A,B}f}(A) \leq s_0$ より $f^*(s_0) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \beta_f(t) \leq s_0\} \leq A$. よって $T_{A,B}(f^*)(s_0) = A$. □

1.3　Symmetrization の定義

さて本節において X は $\mathbb{R}^n$, n 次元単位球 $S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ または n 次元双曲空間 H^n のどれかを表わすとする．それぞれの場合について X に, 標準的な距離函数 $d(x, y)$ と, 測度 μ そして基準点 e を次のように与えておこう．

1. $X = \mathbb{R}^n$ のとき

$$
\begin{aligned}
&d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\
&\mu = n\text{-次元 Lebesgue 測度} \\
&e = (0, \ldots 0)
\end{aligned}
$$

2. $X = S^n$

$$
\begin{aligned}
&d(x, y) = \text{x, yを結ぶ最短の大円の長さ} \\
&\mu = \text{球面積測度} \\
&e = (1, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}
$$

   このとき x, y が対極の位置にあれば $d(x, y) = \pi$ となる．

3. $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ には $4(1 - |x|^2)^{-2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ で決まる Riemann 計量を入れ, d, μ は, この計量から誘導される距離と体積要素とする．

さて $r \geq 0$ について $B(r) = \{x \in X : d(x, e) < r\}$ とおく．可測集合 $\Omega \subset X$ で $\mu(\Omega) > 0$ について $\mu(B(r)) = \mu(\Omega)$ となる $r \geq 0$ をとる．このような r は一意に定まり, Ω の volume radius と呼ばれる．ここで $\Omega^\# = B(r)$ とおく．但し, $X = S^n$ で $\Omega = S^n$ のときのみは例外で $\Omega^\# = S^n$ とおく．特に $B(0) = \emptyset$ であるから, $\mu(\Omega) = 0$ ならば $\Omega^\# = \emptyset$ であることに注意しておこう．

さて Ω を X の可測部分集合で $\mu(\Omega) > 0$ とする．また $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は **仮定 1** をみたすとする．このとき $f^\# : \Omega^\# \to \mathbb{R}$ を

$$
f^\#(x) = f^*(\mu(B(d(e, x)))) \tag{1.3.1}
$$

で定義する．Part I では $f^\#$ を f の symmetric decreasing rearrangement または symmetrization と呼ぶ．また e を symmetrization の中心と呼ぶ．

命題 1.3.1 函数 $f^\#$ と f は互いに *rearrangement* であり, $f^\#$ は対称性と e からの距離についての減少性

$$
\begin{aligned}
f^\#(x_1) &= f^\#(x_2), \quad \textit{if} \quad d(x_1, e) = d(x_2, e) \\
f^\#(x_1) &\geq f^\#(x_2), \quad \textit{if} \quad d(x_1, e) \leq d(x_2, e)
\end{aligned}
$$

を持つ．

証明．上の等式と不等式は $f^*(s)$ の性質から明らかである．函数 $f^\#$ が f の rearrangement であることを示そう．まず $t_0 < \text{ess inf } f$ については $\beta_{f^\#}(t_0) = \beta_f(t_0) = \mu(\Omega)$．次

に $t_0 \geq \text{ess inf } f$ のときは $\beta_f(t_0) = \mu(B(r_0))$ となる $r_0 \in [0, \mu(\Omega)]$ をとる. f^* は右連続減少函数ゆえ,

$$\{s \in [0, \mu(\Omega)] : f^*(s) > t_0\} = [0, s_0)$$

となる s_0 がとれる. f^* と f の分布函数は一致するから, 上式の両辺の Lebesgue 測度を比較して $s_0 = \beta_{f^*}(t_0) = \beta_f(t_0) = \mu(B(r_0))$. このとき

$$\begin{aligned} \beta_{f^\#}(t_0) &= \mu(\{x : f^*(\mu(B(d(e,x)))) > t_0\}) \\ &= \mu(\{x : \mu(B(d(e,x))) \in [0, s_0)\}) \\ &= \mu(\{x : \mu(B(d(e,x))) \in [0, \mu(B(r_0)))\}) \\ &= \mu(B(r_0)) \\ &= \beta_f(t_0) \end{aligned}$$

である. □

symmetric decreasing rearrangement $f^\#$ は X が実際にはどの空間であるかに応じて, 様々な別名がある.

1. $X = \mathbb{R}^n$ のとき Schwarz symmetrization

2. $X = S^n$ のとき spherical symmetrization

3. $X = H^n$ のとき hyperbolic symmetrization

さて $f^\#$ は形式的には n 変数の函数として定義されたが, 実質上は symmetrization の中心 e からの距離のみに依存する 1 変数の函数である. しかしながら, これでは粗すぎて精密な議論には不向きな場合がある. そこで n 変数全部について symmetrization を行うのではなく, 1 部の変数についてのみ行うことを考えよう. このような symmetrzation の例として Steiner symmetrization と cap symmetrization を定義しよう.

Stenier symmetrization

まず自然数 k, $1 \leq k \leq n-1$ と $m = n-k$ について $\mathbb{R}^n$ を分解し $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ とする. また μ_d で d-次元 Lebesgue 測度を表わすことにし, $\mathbb{R}^n$ の点を (x, y), $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ のように表わす. $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 可測部分集合 Ω と $y \in \mathbb{R}^m$ について y-切片 $\Omega(y)$ を

$$\Omega(y) = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in \Omega\}$$

とおく. $\Omega(y)$ は殆ど全ての y について k-次元 Lebesgue 可測である. そこで

$$Y = \{y : \Omega(y) \text{ は Lebsegue 可測で } \mu_k(\Omega(y)) > 0\}$$

とおく. $\Omega(y)$, $y \in Y$ について $\Omega^\#(y)$ を symmetrization の中心 e を $\mathbb{R}^k$ の原点 0 として $\mathbb{R}^k$ において $\Omega(y)$ に Schwarz symmetrization を施したものとする. また $\Omega^\#$ を

$$\Omega^\# = \bigcup_{y \in Y} \Omega^\#(y) \times \{y\}$$

と定義する．さて $f:\Omega\to\mathbb{R}$ を Lebesegue 可測な函数とする．このとき $f(x,y)$ は, 殆ど全ての $y\in Y$ について y を固定し x のみの函数とみて Lebesgue 可測である．ここで

$$\begin{aligned} Y_0 &= \{y\in Y:\ f(x,y) \text{ は } x \text{ のみの函数とみて} \\ &\qquad \text{Lebesgue 可測で}\textbf{仮定 1} \text{ を満たす}\} \end{aligned}$$

とおいて, $\mu_m(Y-Y_0)=0$ が成り立っていると仮定しよう．このとき

定義 1.3.2 各 $y\in Y_0$ について $f(x,y)$ を x のみの函数と考えて k 次元 *Schwarz symmetrization* してできる函数を $f^{\#}(x,y)$ で表わし, $f(x,y)$ の (k,n)*-Steiner symmetrization* と呼ぶ.

仮定より $f^{\#}$ は $\Omega^{\#}$ 上 a.e. に定義された函数である．また $f^{\#}$ は f の rearrangement である．実際, 非負函数についての Fubini の定理と $f(x,y)$, $f^{\#}(x,y)$ が $y\in Y_0$ を固定した時, x について, お互いに rearrangement であることから,

$$\begin{aligned} \beta_{f^{\#}}(t) &= \mu_n(\{(x,y)\in\Omega^{\#}: f^{\#}(x,y)>t\}) \\ &= \int_{Y_0}\mu_k(\{x\in\Omega^{\#}(y): f^{\#}(x,y)>t\}) \\ &= \int_{Y}\mu_k(\{x\in\Omega(y): f(x,y)>t\}) \\ &= \mu_n(\{(x,y)\in\Omega: y\in Y,\ f(x,y)>t\}) \\ &= \mu_n(\{(x,y)\in\Omega: f(x,y)>t\}) \\ &= \beta_f(t) \end{aligned}$$

より $f^{\#}$ は f の rearrangement である．$f^{\#}(x,y)$ は本質的には y と $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}$ のみに依存する $m+1$ 変数の函数である．

注意 1.3.3 空間 $\mathbb{R}^n$ の *affine subspace* A について必要ならば直交変換と平行移動で座標をとり直し $A=\{(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0): x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{R}\}$ となるようにする．この座標について (k,n)*-Steiner symmetrization* することを *affine subspace* A についての *Steiner symmetrization* という．勿論本書で述べる理論は $\mathbb{R}^n$ の任意の m-次元 *affine subspace* A についても通用する．

Cap symmetrization. 自然数 k を $1\le k\le n-1$ とする．はじめに $k=n-1$ のときの $(n-1,n)$-cap symmetrization について述べよう．$\xi\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ を $\xi=(x,r)$ で $r=|\xi|$, $x=\xi/|\xi|\in S^{n-1}$ と表わそう．$\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 可測部分集合 Ω と $r>0$ について $\Omega(r)=\{x\in S^{n-1}:(x,r)\in\Omega\}$ とおく．殆どすべての r について $\Omega(r)$ は S^{n-1} で Lebesgue 可測である．そこで μ_d で S^d の surface measure を表わすことにし,

$$Y=\{r>0:\Omega(r) \text{ は Lebsegue 可測で } \mu_{n-1}(\Omega(r))>0\}$$

とおく．$r\in Y$ について $\Omega^{\#}(r)$ を symmetrization の中心 e を $(1,0,\ldots 0)\in S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ としたときの S^{n-1} における $\Omega(r)$ の spherical symmetrization とする．また

$$\Omega^{\#}=\Omega^{\#}(0)\cup\bigcup_{r\in Y}\Omega^{\#}(r)\times\{r\}$$

とおく. 但し, $\Omega^{\#}(0)$ は $0 \in \Omega$ のとき $\{0\}$ とし $0 \notin \Omega$ のとき $\emptyset$ とする.

次に $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測な函数とする. このとき $f(x, r)$ は, 殆ど全ての $r \in Y$ について r を固定し x のみの函数とみて Lebesgue 可測である. x のみの函数とみたとき $\mu_{n-1}(\Omega(r)) \le \mu_{n-1}(S^{n-1}) < \infty$ であるから, この場合**仮定 1** は自動的に満たされている.

$$Y_0 = \{r \in Y :\ f(x, r) \text{ は } x \text{ のみの函数とみて Lebesgue 可測.}\}$$

とおいて, $\mu_m(Y - Y_0) = 0$ が成り立っていると仮定しよう. このとき

定義 1.3.4 まず $0 \in \Omega$ ならば $f^{\#}(0) = f(0)$ と定義する. 次に $r \in Y_0$ について $f(x, r)$ を $x \in S^{n-1}$ のみの函数とみて S^{n-1} において $e = (1, 0, \ldots, 0)$ を中心とする *symmetrization* を行ってできる函数を $f^{\#}(x, r)$ と定義する. このようにして定義される $f^{\#}$ を $(n-1, n)$-*cap symmetrization* という.

$(n-1, n)$-cap symmetrization $f^{\#}(x, r)$ は $f(x, r)$ の rearrangement である. また $f^{\#}(x, r)$ は本質的に r と x から e までの距離のみに関係する 2 変数の函数であり, 正の x_1-軸について対称減少な函数である. 混乱しがちであるが $(n-1, n)$-cap symmetrization が spherical symmetrization と呼ばれることもある.

最後に $1 \le k \le n-2$ のときの (k, n)-cap symmetrization を定義しよう. $\xi \in \mathbb{R}^n$ を $\xi = (\zeta, w)$, で $\zeta \in \mathbb{R}^{k+1}$, $w \in \mathbb{R}^{m-1} (m = n - k)$ と表わそう. 各 w について $\mathbb{R}^{k+1} \times \{w\}$ に極座標を導入し, $r = |\zeta|$ とし $Z = \{\xi \in \mathbb{R}^n : r = 0\} = \{(0, \ldots, 0)\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ とおく. $\xi \in \mathbb{R}^n - Z$ について $x = \zeta / |\zeta|$ とおいて, $\xi = (x, r, w)$, $x \in S^k$ と書き直す. $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 可測集合 Ω, $\mu_n(\Omega) > 0$ と $(r, w) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ について

$$\Omega(r, w) = \{x \in S^k : (x, r, w) \in \Omega\}$$

とおく.

$$B = \{(r, w) : \Omega(r, w) \text{ が } k \text{ 次元 Lebesgue 可測で 測度正 }\}$$

とし, $\Omega(r, w)$, $(r, w) \in B$ に S^k における Spherical symmetrization を施したものを $\Omega^{\#}(r, w)$ とおき

$$\Omega^{\#} = (\Omega \cap Z) \cup \bigcup_{(r,w) \in B} \Omega^{\#}(r, w) \times \{(r, w)\}$$

とおく. 可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の (k, n)-cap symmetrization については,

$$B_0 = \{(r, w) \in B : f(x, r, w) \text{ は } x \text{ について } \textit{Lebesgue} \text{ 可測 }\}$$

とおいて

定義 1.3.5 $\xi \in Z \cap \Omega$ について $f^{\#}(\xi) = f(\xi)$ とおく. $(r, w) \in B_0$ について $f(x, r, w)$ を $x \in S^k$ のみの函数とみて, $e = (1, 0, \ldots, 0) \in S^k$ を *symmetrization* の中心とする k 次元 *spherical symmetrization* を施してできる函数を $f(x, r, w)$ とおく.

$f^{\#}$ は $\Omega^{\#}$ 上 a.e. に定義された函数で f の rearrangement である.

注意 1.3.6 前節で導入した *truncation operator* $T_{A,B}$ について $(T_{A,B} f)^* = T_{A,B}(f^*)$ が成り立つことを見た. $f^{\#}$ は f^* を媒介にして定義されたから, *Schwarz, spherical, hyperbolic, Steiner* と *cap* の全ての場合について, $(T_{A,B} f)^{\#} = T_{A,B}(f^{\#})$ が成り立つ.

1.4 Symmetrization の一般的性質

本節では, 後章で使う補題を準備しておこう. まず Ryff [71] の結果を少し修正して

命題 1.4.1 X を $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ または S^n とし μ, d, e をそれぞれの空間での標準的な測度と距離函数, *symmetrization* の中心とする. また μ_1 を 1 次元 *Lebesugue* 測度とし $f : X \to \mathbb{R}$ を **仮定 1.** をみたす X 上の可測函数とする. このとき $\psi : X \to [0, \mu(X)]$ を

$$\psi(x) = \beta_f(f(x)) + \mu(\{y \in X : f(y) = f(x),\ \ d(y,e) \le d(x,e)\}) \tag{1.4.2}$$

とおくと可測で

$$f^*(\psi(x)) = f(x) \tag{1.4.3}$$

が μ-*a.e.* に成り立ち ψ は *measure preserving* つまり任意の *Borel* 集合 $A \subset [0, \mu(X)]$ について $\mu(\psi^{-1}(A)) = \mu_1(A)$ をみたす.

証明. まず $\mu(\{x \in X : f(x) = \alpha\}) > 0$ となる $\alpha \in [-\infty, \infty]$ は高々可算個であるから, α_j, $j = 1, 2, \ldots$ とおく. $E_j = \{x \in X : f(x) = \alpha_j\}$ とおく ψ の定義式の右辺第 2 項は

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x) \int_{B(d(x,e)} \chi_{E_j}(y)\, d\mu(y)$$

と表わせることから, 可測であり, 第 1 項は β_f が単調函数ゆえ Borel 可測であることから可測である. 従って ψ も可測である.

R, $0 < R \le \infty$ を X の volume radius つまり $\mu(B(R)) = \mu(X)$ をみたす R とする. さて $\alpha \in [0, \mu(X)]$ について $r_0 \in [0, R]$, $t_0 \in [-\infty, \infty]$ を

$$\beta_f(t_0) + \mu(\{x \in X : f(x) = t_0\} \cap \bar{B}(r_0)) = \alpha$$

かつ (t, r) が $r > r_0$ または $t < t_0$ の少なくとも一方をみたせば,

$$\beta_f(t) + \mu(\{x \in X : f(x) = t\} \cap \bar{B}(r)) > \alpha$$

となるようにとる. このとき

$$\begin{aligned} & \{x \in X : \psi(x) \le \alpha\} \\ = \ & \{x \in X : f(x) > t_0\}) \cup (\{x \in X : f(x) = t_0\} \cap \bar{B}(r_0)) \end{aligned}$$

が成り立つ. 両辺の測度を比較すれば $\psi^{-1}([0, \alpha]) = \alpha = \mu_1([0, \alpha])$ を得る. α の任意性より ψ が measure preserving であることが導かれる.

最後に $f^*(\psi(x)) = f(x)$ μ-a.e. を示そう. 開区間 (a, b) を $\mu(\{y \in X : a < f(x) < b\}) = 0$ をみたすものが存在すれば, この性質を持つようにして最大になるようにとる. このような最大区間は高々可算個であるから (a_j, b_j), $j = 1, 2 \ldots,$ とおく. このとき, ある j について $f(x) \in (a_j, b_j)$ となる, $x \in X$ の全体は零集合である. さて f^* の定義により

$$f^*(\psi(x)) = \inf\{s \in [0, \mu(X)] : \beta_f(s) \le \psi(x)\}$$

において, $\psi(x) \le \beta_f(f(x))$ であるから, $f^*(\psi(x)) \le f(x)$. 次に $f^*(\psi(x)) < f(x)$ ならば, $t_1 < f(x)$ で $\beta_f(t_1) \ge \psi(x)$ となるものが存在する, ここで $t_1 < f(x)$ より $\beta_f(t_1) \ge \psi(x)$ よって $\beta_f(t_1) = \beta_f(f(x))$ となり, ある j について $a_j \le t_1 < f(x) \le b_j$ となる. このようなことが起こる x は零集合であるから, 結局 $f^*(\psi(x)) = f(x)$ が μ-a.e. に成り立つ. □

注意 1.4.2 *Steiner* 及び *cap symmetrization* についても同様な結果が成り立つ. $f(x,y)$ を y を固定し x のみの函数とみて, それぞれの場合の標準的な測度で *decreasing rearrangemnt* を行ったものを $f^*(x,y)$ と表わすと, $f^*(\psi_y(x),y),y) = f(x,y)$ を満たす, *measure preserving map* ψ_y が存在する. *Fubini* の定理から $\psi(x,y) = (\psi_y(x),y)$ とおくと, ψ も *measure preserving* である. つまり *Schwarz, hyperbolic, spherical, Steiner* と *cap symmetrization* の全ての場合において対応する *decreasing rearrangement* f^* を考えると, $f^* \circ \psi = f$ *a.e.* を満たす *measure preserving map* ψ が存在する. ψ の連続性については f が x_0 で連続で $f(x_0) = t_0 > \operatorname{ess\,inf} f$ のとき $\{x : f(x) = t_0\}$ の測度が 0 ならば ψ は x_0 で連続となることが定義式から容易にわかる.

次に Crandall and Tarter [24] に従って, order preserving mapping についての性質をまとめ, decreasing rearrangement と symmetrization に応用しよう. $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(\Omega,\mathcal{B},\nu)$ を可測空間とする. また可測函数 f, g について $(f \vee g)(\omega) = \max(f(\omega), g(\omega))$, $f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0)$ とおく.

命題 1.4.3 *C を $L^1(X)$ の部分集合で, f, $g \in C$ ならば $f \vee g \in C$ をみたすとする. また $T : C \to L^1(\Omega)$ は*

$$\int_\Omega T(f)(\omega)\, d\nu(\omega) = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$$

をみたすとする. このとき次の 3 つの条件は同値.

1. *f, $g \in C$ で $f(x) \le g(x)$ μ-a.e. ならば $T(f)(\omega) \le T(g)(\omega)$ ν-a.e.*
2. *$\int_\Omega (T(f) - T(g))^+(\omega)\, d\nu(\omega) \le \int_\Omega (f-g)^+(x)\, d\mu(x)$ が任意の f, $g \in C$ について成り立つ.*
3. *$\int_\Omega |T(f) - T(g)|(\omega)\, d\nu(\omega) \le \int_\Omega |f-g|(x)\, d\mu(x)$ が任意の f, $g \in C$ について成り立つ.*

証明. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* $\Longrightarrow$ *3.* $\Longrightarrow$ *1.* の順に証明する.

f, $g \in C$ について $f \vee g = g + (f-g)^+ \in C$ ここで *1.* が成り立つとすると $T(f \vee g) - T(g) \ge 0$ また同様に $T(f \vee g) \ge T(f)$ より $T(f) - T(g) \le T(f \vee g) - T(g)$ であるから, $(T(f) - T(g))^+ \le T(f \vee g) - T(g)$. よって

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (T(f) - T(g))^+\, d\nu &\le \int_\Omega (T(f \vee g) - T(g))\, d\nu \\
&\le \int_X (f \vee g - g)\, d\nu = \int_X (f-g)^+\, d\nu
\end{aligned}$$

となり *2.* が示された. 次に $2 \Longrightarrow 3.$ については

$$\begin{aligned}\int_\Omega |T(f)-T(g)|\,d\nu &= \int_\Omega (T(f)-T(g))^+\,d\nu + \int_\Omega (T(g)-T(f))^+\,d\nu \\ &= \int_X (f-g)^+\,d\mu + \int_X (g-f)^+\,d\mu \\ &= \int_X |f-g|\,d\mu.\end{aligned}$$

最後に $f \le g$ μ-a.e. とし *3.* を仮定すると, 等式 $2s^+ = |s| + s$ より

$$\begin{aligned}2\int_\Omega (T(f)-T(g))^+\,d\nu &= \int_\Omega |T(f)-T(g)|\,d\nu + \int_\Omega (T(f)-T(g))\,d\nu \\ &\le \int_X |f-g|\,d\mu + \int_X (f-g)\,d\mu \\ &= 0\end{aligned}$$

従って $T(f) \le T(g)$ ν-a.e. が成り立つ. □

命題 1.4.4 C を $L^\infty(X)$ の部分集合で, $f, g \in C$ ならば $f + \|(g-f)^+\|_{L^\infty(X)} \in C$ をみたすとする. また $T : C \to L^\infty(\Omega)$ は

$$r \in [0,\infty),\;\; f \in C,\;\; f + r \in C \quad \text{ならば} \quad T(f+r) = T(f) + r$$

をみたすとする. このとき次の *3* つの条件は同値.

1. *$f, g \in C$ で $f(x) \le g(x)$ μ-a.e. ならば $T(f)(\omega) \le T(g)(\omega)$ ν-a.e.*
2. *$(T(f)-T(g))^+ \le \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}$ ν-a.e. が任意の $f, g \in C$ について成り立つ.*
3. *$|T(f)-T(g)| \le \|f-g\|_{L^\infty(X)}$ ν-a.e. が任意の $f, g \in C$ について成り立つ.*

証明. $1. \Longrightarrow 2. \Longrightarrow 3. \Longrightarrow 1.$ の順に証明する.

$f, g \in C$ について仮定より $g + \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)} \in C$ である. また $f, g \le f \vee g \le g + \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}$ が μ-a.e. に成り立つから, *1.* が成り立つとすると $T(f) \le T(f \vee g)$ $T(g) \le T(f \vee g)$ ν-a.e. より $T(f) \vee T(g) \le T(f \vee g)$ ν-a.e.

$$\begin{aligned}T(f) \vee T(g) &\le T(f \vee g) \\ &\le T(g + \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}) = T(g) + \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}\end{aligned}$$

が ν-a.e. に成り立つ. よって

$$(T(f)-T(g))^+ = T(f) \vee T(g) - T(g) \le \|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}$$

が ν-a.e. に成り立つ. 次に次に $2 \Longrightarrow 3.$ については

$$\begin{aligned}|T(f)-T(g)| &= \max\{(T(f)-T(g))^+, (T(g)-T(f))^+\} \\ &\le \max\{\|(f-g)^+\|_{L^\infty(X)}, \|(g-f)^+\|_{L^\infty(X)}\} \\ &= \|f-g\|_{L^\infty(X)}\end{aligned}$$

最後に $f \le g$ μ-a.e. とし *3.* を仮定すると, $r = \|(g-f)^+\|_{L^\infty(X)} = \|g-f\|_{L^\infty(X)}$ について

$$\begin{aligned}\|T(f)-T(g)+r\|_{L^\infty(X)} &= \|T(f+r)-T(g)\|_{L^\infty(X)} \\ &\le \|f-g+r\|_{L^\infty(\Omega)} \le r\end{aligned}$$

従って $T(f)-T(g) \le 0$ ν-a.e. が成り立つ. □

ここで $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ または S^n とし μ をそれぞれの空間での標準的な測度とする. $X = \mathbb{R}^n$ のときは $^\#$ で Schwarz, Steiner または cap symmetrization を表わすとし, $X = \mathbb{H}^n$ または S^n のときはそれぞれ hyperbolic または spherical symmetrization を表わすとする. また $X = \Omega$, $Y = \Omega^\#$ とし C を非負函数 $f \in L^1(\Omega)$ の全体とする. Čebyšev の不等式と必要ならば Fubini の定理を用いることによって $f \in C$ について $f^\#$ が $\Omega^\#$ 上 a.e. に定義できることに注意しよう. このとき $Tf = f^\#$ とおくと $f \le g$ μ-a.e. ならば $Tf \le Tg$ μ-a.e. が成り立つことから命題 1.4.3 が適用できる.

命題 1.4.5 *f, $g \in L^1(\Omega)$ はともに非負とすると*

$$\int_{\Omega^\#} |f^\#(x) - g^\#(x)|\, d\mu(x) \le \int_\Omega |f(x)-g(x)|\, d\mu(x)$$

が成り立つ.

同様に Schwarz, hyperbolic または spherical symmetrization の場合には $C = \{f \in L^\infty(\Omega) : f$ は **仮定 1.** をみたす$\}$ とおく. Steiner または cap symmetrization の場合は symmetrization を施さない変数を固定すれば a.e. に残りの変数について **仮定 1.** をみたす L^1 函数の全体を C とする. このとき $T(f) = f^\#$ として, 命題 1.4.4 を適用してみよう. 実際この場合 任意の実数 r と $f \in C$ について $f + r \in C$ であることは容易にわかる. また $(f+r)^\# = f^\# + r$ が成り立ち, $f \le g$ μ-a.e. ならば $f^\# \le g^\#$ が μ-a.e. に成り立つ. よって 命題 1.4.4 を, この場合に適用できる.

命題 1.4.6 *f, $g \in L^\infty(\Omega)$ について Schwarz, spherical, hyperbolic, Steiner または cap symmetrization $f^\#$, $g^\#$ が定義可能ならば*

$$\|f^\# - g^\#\|_{L^\infty(\Omega^\#)} \le \|f-g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

が成り立つ.

注意 1.4.7 上記 2 つの命題は *decreasing rearrangement* についても成り立つ.

第2章　基本不等式

2.1　作用素 $f \mapsto f_H$

X を集合とし μ を X 上の正測度, $d : X^2 \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ を, 距離函数とする．非負函数 $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ が与えられたとしよう．このとき X 上の函数 f, $g : X \to \mathbb{R}$ について

$$Q(f,g) = \int_{X^2} \Phi(|f(x) - g(y)|)K(d(x,y))d\mu(x)d\mu(y)$$

とおく．この章では

$$\Phi \text{ は増加かつ凸}, \quad K \text{ は減少}$$

と仮定する．このとき symmetrization により $Q(f,g)$ が減少する, つまり $Q(f,g) \geq Q(f^{\#}, g^{\#})$ という不等式が成り立つ．この結果は次章で扱う I-function が劣調和性を保存するという定理の証明の鍵となるので, 簡単な応用も含めて少し詳しく解説する．この不等式は X が 2 点のみからなるという最も簡単な場合の対応する結果から導くことができる．

$X = \{1, 2\}$ とおく．μ を X 上の 測度で $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1$ を満たすとし, 距離函数 d を $x \neq y$ のとき $d(x,y) = 1$, また $d(x,x) = 0$ と定義する．このとき

$$\begin{aligned} Q(f,g) &= K(0)\{\Phi(|f(1) - g(1)|) + \Phi(|f(2) - g(2)|)\} \\ &\quad + K(1)\{\Phi(|f(1) - g(2)|) + \Phi(|f(2) - g(1)|)\} \end{aligned}$$

となる．函数 $f : X \to \mathbb{R}$ について $f^{\#} : X \to \mathbb{R}$ を $f^{\#}(1) = f(1) \vee f(2) = \max(f(1), f(2))$, $f^{\#}(2) = f(1) \wedge f(2) = \min(f(1), f(2))$ とおく．

定理 2.1.1 $X = \{1, 2\}$ とし f, $g : X \to \mathbb{R}$ とする．このとき

$$Q(f,g) \geq Q(f^{\#}, g^{\#})$$

が成り立つ.

証明の前に増加凸函数の特徴付けを与えておこう．

補題 2.1.2 $\Phi(x)$ が $[0, \infty)$ で増加かつ凸ならば, $[0, \infty)$ 上で連続であり, 右側微分 $\Phi'_+(x)$ は $[0, \infty)$ 上, 非負増加で

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \Phi'_+(t)\, dt$$

と表わせる.

証明.　まず一般に $f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界な凸函数ならば (a,b) で連続で, $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ が存在し, (a,b) で増加かつ $f'_-(x) \le f'_+(x)$ が成り立つ (例えば, 小松勇作, "解析概論", p.184 をみよ). $\Phi(x)$ は増加函数ゆえ 各区間 $[0,n]$, $n=1,2,\dots$ に, この事実を適用すれば, 結局 $\Phi(x)$ は $(0,\infty)$ で連続であることがわかる. また $\Phi((x_1+x_2)/2) \le (\Phi(x_1)+\Phi(x_2))/2$ において, $x_1=0$, $x_2=x>0$ とおけば $\Phi(x/2) \le (\Phi(x)+\Phi(0))/2$ となる. ここで $x \downarrow 0$ とすれば, Φ が増加であることと上式から $\Phi(0) \le \lim_{x\downarrow 0}\Phi(x) \le \Phi(0)$ となり, $\Phi(0)=\lim_{x\downarrow 0}\Phi(x)$ 従って, $\Phi(x)$ は $[0,\infty)$ で連続である.

ここで各区間 $[0,n]$, $n=1,2,\dots$ において $(\Phi(x_2)-\Phi(x_1))/(x_2-x_1) \le \Phi'_+(n)$ が任意の $0 \le x_1 < x_2 \le n$ について成り立つから, $\Phi(x)$ はこの区間で Lipschitz 連続で特に, 絶対連続でもある. 従って殆ど至る所微分可能で $\Phi(x)-\Phi(0)=\int_0^x \Phi'_+(t)\,dt$ と表わされる. また $\Phi'_+(x)$ は増加函数の微分ゆえ非負である.　□

定理 2.1.1 の証明. まず $a_1^\# = a_1 \vee a_2$, $a_2^\# = a_1 \wedge a_2$, $b_1^\# = b_1 \vee b_2$, $b_2^\# = b_1 \wedge b_2$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
Q(f,g) &= K(0)\{\Phi(|a_1-b_1|)+\Phi(|a_2-b_2|)\} \\
&\quad +K(1)\{\Phi(|a_1-b_2|)+\Phi(|a_2-b_1|)\} \\
Q(f^\#,g^\#) &= K(0)\{\Phi(|a_1^\#-b_1^\#|)+\Phi(|a_2^\#-b_2^\#|)\} \\
&\quad +K(1)\{\Phi(|a_1^\#-b_2^\#|)+\Phi(|a_2^\#-b_1^\#|)\}
\end{aligned}
$$

となる. ここで $K(0)=K(1)$ ならば

$$
\begin{aligned}
Q(f,g) &= K(0)\sum_{i,j=1}^{2}\Phi(|a_i-b_j|) \\
&= K(0)\sum_{i,j=1}^{2}\Phi(|a_i^\#-b_j^\#|) \\
&= Q(f^\#,g^\#)
\end{aligned}
$$

となる. $K(0)\neq K(1)$ のときは K は減少函数ゆえ $K(0)>K(1)$ となり $\alpha = K(0)-K(1)>0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&Q(f,g)-Q(f^\#,g^\#) \\
=\ & K(1)\{\sum_{i,j=1}^{2}\Phi(|a_i-b_j|)-\sum_{i,j=1}^{2}\Phi(|a_i^\#-b_j^\#|)\} \\
&+\alpha\{\Phi(|a_1-b_1|)+\Phi(|a_2-b_2|)-\Phi(|a_1^\#-b_1^\#|)-\Phi(|a_2^\#-b_2^\#|)\} \\
=\ & \alpha\{\Phi(|a_1-b_1|)+\Phi(|a_2-b_2|)-\Phi(|a_1^\#-b_1^\#|)-\Phi(|a_2^\#-b_2^\#|)\}.
\end{aligned}
$$

よって

$$\Phi(|a_1-b_1|)+\Phi(|a_2-b_2|) \ge \Phi(|a_1^\#-b_1^\#|)+\Phi(|a_2^\#-b_2^\#|)$$

を示せば良い.

さて $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ が同じ向き, つまり "$a_1 \ge a_2$, $b_1 \ge b_2$" または "$a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$" のときは, 上式の両辺は一致するから, 向きが違うとして良い. つまり $a_1 \ge a_2$, $b_1 \le b_2$ ま

たは $a_1 \le a_2$, $b_1 \ge b_2$ の時に示せば良いが, $\{a_i\}$ と $\{b_i\}$ を入れ替えても不等式は変わらないから, $a_1 \ge a_2$, $b_1 \le b_2$ の場合だけ考えれば良い. ここで $a_1 = x_2$, $a_2 = x_1$, $b_1 = y_1$, $b_2 = y_2$ とおくと, $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$ となり, 示すべき不等式は

$$\Phi(|x_1 - y_1|) + \Phi(|x_2 - y_2|) \le \Phi(|x_1 - y_2|) + \Phi(|x_2 - y_1|)$$

となる. さらに, この不等式は $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ を入れ替えても変わらないから, $x_1 \le y_1$ の時のみ考えれば良い. そこで, 次のように分類して証明を進めよう.

Case 1. $x_1 \le y_1 \le y_2 \le x_2$ のとき. このとき示したい不等式は

$$\Phi(y_1 - x_1) + \Phi(x_2 - y_2) \le \Phi(y_2 - x_1) + \Phi(x_2 - y_1)$$

となるが, これは $y_1 - x_1 \le y_2 - x_1$, $x_2 - y_2 \le x_2 - y_1$ と, Φ が増加函数であることから直ちに従う.

Case 2. $x_1 \le y_1 \le x_2 \le y_2$ のとき. このとき示したい不等式は

$$\Phi(y_1 - x_1) + \Phi(y_2 - x_2) \le \Phi(y_2 - x_1) + \Phi(x_2 - y_1)$$

となる. これは上記の補題と $\Phi'_+(x)$ が非負増加であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
& \Phi(y_1 - x_1) + \Phi(y_2 - x_2) \\
= \ & 2\Phi(0) + \int_0^{y_1 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt + \int_0^{y_2 - x_2} \Phi'_+(t)\,dt \\
\le \ & 2\Phi(0) + \int_0^{y_1 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt + \int_{y_1 - x_1}^{y_1 - x_1 + y_2 - x_2} \Phi'_+(t)\,dt \\
\le \ & 2\Phi(0) + \int_0^{y_1 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt + \int_{y_1 - x_1}^{y_2 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt \\
\le \ & 2\Phi(0) + \int_0^{y_2 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt \\
\le \ & \Phi(0) + \Phi(y_2 - x_1) \\
\le \ & \Phi(x_2 - y_1) + \Phi(y_2 - x_1)
\end{aligned}$$

より従う.

Case 3. $x_1 \le x_2 \le y_1 \le y_2$ のとき. このとき示すべき不等式は

$$\Phi(y_1 - x_1) + \Phi(y_2 - x_2) \le \Phi(y_2 - x_1) + \Phi(y_1 - x_2)$$

となる. この式を書き直すと

$$\begin{aligned}
& 2\Phi(0) + \int_0^{y_1 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt + \int_0^{y_2 - x_2} \Phi'_+(t)\,dt \\
\le \ & 2\Phi(0) + \int_0^{y_1 - x_2} \Phi'_+(t)\,dt + \int_0^{y_2 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt
\end{aligned}$$

となるが, これはさらに変形して

$$\int_{y_1 - x_2}^{y_1 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt \le \int_{y_2 - x_2}^{y_2 - x_1} \Phi'_+(t)\,dt$$

となるが, 両辺の積分は積分区間の幅がともに $x_2 - x_1$ であり, 始点が $y_1 - x_2 \le y_2 - x_2$ となっている. $\Phi'_+(x)$ が非負増加であることに注意すれば, 上式が成立することは容易にわかる. □

ここで $X = \mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{R}^k \times M_1$ ($M_1 \subset \mathbb{R}^{n-k}$) または $S^k \times M_2$ ($M_2 \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-k-1}$) とおく. それぞれの空間で Schwarz, spherical, hyperbolic, (k,n)-Steiner, (k,n)-cap symmetrization を考える. それぞれの空間において超平面の族 $\mathcal{H}(X)$ と $H \in \mathcal{H}(X)$ に付随する作用素 $f \mapsto f_H$ を定義しよう. まず各空間と対応する symmetrization について復習をしながら超平面の族 $\mathcal{H}(X)$ を定義しよう.

Case 1. Schwarz symmetrization. $X = \mathbb{R}^n$
μ で n-次元 Lebesgue 測度を表わし, $x = (x_1 \ldots, x_n)$, $y = (y_1 \ldots, y_n)$ について $d(x,y)$ を Euclid 距離 つまり $d(x,y) = \{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2\}^{1/2}$ とおく. また $e = (0,\ldots,0)$ とし, $\mathcal{E} = \{e\}$ とおく. 最後に $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の $n-1$-次元 affine subspace の全体とする. つまり, $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$ ($(a_1,\ldots,a_n) \ne (0,\ldots,0)$, $b \in \mathbb{R}$) と表わされるものの全体とする.

Case 2. Spehrical symmetrization. $X = S^n = \{x = (x_1 \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1\}$
μ で 球面積測度を表わし, $d(x,y)$ で球面距離, つまり x, y を結ぶ大円の長さの短い方とする. また $e = (1,0,\ldots,0)$ とし, $\mathcal{E} = \{e\}$ とおく. このとき $\mathcal{H}(S^n)$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る 各 n-次元 affine subspace と S^n の共通部分で表わされる集合の全体とする. つまり, $\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n : a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0\}$ ($(a_1,\ldots,a_{n+1}) \ne (0,\ldots,0)$) と表わされるものの全体とする.

Case 3. Hyperbolic symmetrization. $X = \mathbb{H}^n = \{x = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 < 1\}$
μ と $d(x,y)$ をそれぞれ, Riemann 計量 $4(1-|x|^2)^{-2}(dx_1^2 + \cdots dx_n^2)$ で決まる, 体積と距離とする. また $e = (0,\ldots,0)$ とし, $\mathcal{E} = \{e\}$ とおく. さて $\mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$ を hyperbolic $n-1$ 次元超平面 $\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{H}^n : x_n = 0\}$ をすべての hyperbolic motion で写像してできる像の全体とする.

Case 4. (k,n)**-Steiner symmetrization**. $X = \mathbb{R}^k \times M_1$, $M_1 \in \mathbb{R}^{n-k}$.
μ を n-次元 Lebesgue 測度, $d(x,y)$ を n-次元 Euclid 距離とする. X の各点を $x = (\zeta, w)$, $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_k) \in \mathbb{R}^k$ $w = (w_1,\ldots,w_{n-k}) \in M_1$ で表わす. このとき各 $w \in M_1$ について $e(w) = (0,\ldots,0,w)$ とおき $\mathcal{E} = \{e(w) : w \in M_1\}$ とおく. また $\mathcal{H}(\mathbb{R}^k \times M_1)$ を $\mathbb{R}^n$ の $n-1$-次元 affine subspace で $\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_k,w) \in \mathbb{R}^n : a_1\zeta_1 + \cdots + a_k\zeta_k = b\}$ ($(a_1,\ldots,a_k) \ne (0,\ldots,0)$, $b \in \mathbb{R}$) と表わされるものと $\mathbb{R}^k \times M_1$ との共通部分の全体とする. このとき, 各 $H \in \mathcal{H}$ について $\mathcal{E} \subset H$ または $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^k \times M_1 - H$ のどちらか一方のみが成り立つことに注意しよう.

Case 5. (k,n)**-cap symmetrization**. $X = S^k \times M_2$, $M_2 \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-k-1}$.
μ を n-次元 Lebesgue 測度, $d(x,y)$ を n-次元 Euclid 距離とする. $S^k \times M_2$ の各点を $x = (\zeta, r, w)$, $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_{k+1}) \in S^k$, $r \ge 0$, $w = (w_1,\ldots,w_{n-k-1})$ で表わす. この

とき各 $(r,w) \in M_2$, $r > 0$ について $e(r,w) = (1,0,\dots,0,r,w)$ とおき $\mathcal{E} = \{e(y,w) : (r,w) \in M_2,\ \ r > 0\}$ とおく．また $\mathcal{H}(S^k \times M_2)$ を $\mathbb{R}^n$ の $n-1$-次元 affine subspace で $\{(\zeta_1,\dots,\zeta_{k+1},r,w) \in S^k \times M_2 : a_1\zeta_1 + \cdots + a_{k+1}\zeta_{k+1} = 0\}$ $((a_1,\dots,a_{k+1}) \neq (0,\dots,0))$ と表わされるものと $S^k \times M_2$ との共通部分の全体とする．このとき, 各 $H \in \mathcal{H}(S^k \times M_2)$ について $\mathcal{E} \subset H$ または $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^k \times M_1 - H$ のどちらか一方が成り立つことに注意しよう．

さて $H \in \mathcal{H}(X)$ について ρ_H で, H に関する反転を表わすとしよう．このとき ρ_H は $d(\rho_H(x),\rho_H(y)) = d(x,y)(x,\ \ y \in X)$ と, 任意の可測集合 A について $\mu(\rho_H(A)) = \mu(A)$ をみたす．また $\mathcal{E} \subset X - H$ のときに H^+ で $X - H$ の成分で $\mathcal{E}$ を含む方を表わし, H^- で含まない方を表わす．ρ_H は H 上, 恒等変換であり, H^+ と H^- を互いに入れかえる．

補題 2.1.3 *x, y が $\bar{H^+}$ または $\bar{H^-}$ の同じ側に属せば $d(x,y) \leq d(x,\rho_H(y))$ が成り立つ．また相異なる側に属せば $d(x,y) \geq d(x,\rho_H(y))$ が成り立つ．*

証明. x, y が相異なる側に属すとして証明する．C を x から出発して y に達する測地線で長さが $d(x,y)$ となるものとする．C に沿って x から出発して最初に, H とぶつかる点を z とし, C の z 以降の部分を ρ_H を使って折り返せば x と $\rho_H(y)$ を結ぶ曲線 C' が得られる．このとき $d(x,\rho_H(y)) \leq C'$ の長さ $= C$ の長さ $= d(x,y)$. □

では次に基本不等式の証明に主要な役割を演じる作用素 $f \mapsto f_H$ を定義しよう．$\mathcal{E} \subset X - H$ となる $H \in \mathcal{H}(X)$ と $f : X \to \mathbb{R}$ について

$$f_H(x) = \begin{cases} f(x) \vee f(\rho_H(x)), & \text{if } x \in H^+, \\ f(x), & \text{if } x \in H, \\ f(x) \wedge f(\rho_H(x)), & \text{if } x \in H^-. \end{cases}$$

とおく．

定理 2.1.4 *f と f_H は互いに rearrangement つまり任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\beta_f(t) = \beta_{f_H}(t)$.*

証明. $A_1 = (t,\infty)$, $A_2 = (-\infty,t]$ とおく．そして

$$A^{\pm}_{i,j} = \{x \in H^{\pm} : f(x) \in A_i,\ \ f(\rho_H(x)) \in A_j\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \{x \in X - H : f(x) > t\} &= A^+_{1,1} \cup A^+_{1,2} \cup A^-_{1,1} \cup A^-_{1,2} \\ \{x \in X - H : f_H(x) > t\} &= A^+_{1,1} \cup A^+_{1,2} \cup A^+_{2,1} \cup A^-_{1,1} \end{aligned}$$

と disjoint union で表わせる．ここで

$$\begin{aligned} A^+_{2,1} &= \{x \in H^+ : f(x) \leq t, f(\rho_H(x)) > t\} \\ &= \{\rho_H(y) : y \in H^- : f(\rho_H(y)) \leq t, f(y) > t\} \\ &= \rho_H(\{y \in H^- : f(\rho_H(y)) \leq t, f(y) > t\}) \\ &= \rho_H(A^-_{1,2}) \end{aligned}$$

であり $\mu(X \cap H) = 0$ と ρ_H が μ を不変にすることに注意すると

$$\begin{aligned}\mu(f > t) &= \mu(A^+_{1,1}) + \mu(A^+_{1,2}) + \mu(A^-_{1,1}) + \mu(A^-_{1,2}) \\ &= \mu(A^+_{1,1}) + \mu(A^+_{1,2}) + \mu(A^+_{2,1}) + \mu(A^-_{1,1}) \\ &= \mu(f_H > t)\end{aligned}$$

となる. □

定理 2.1.5 $X = \mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^k \times M_1$ $(M_1 \subset \mathbb{R}^{n-k})$ または $S^k \times M_2$ $(M_2 \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-k-1})$ とする. また f, $g : X \to \mathbb{R}$ は可測で $H \in \mathcal{H}(X)$ は $\mathcal{E} \subset X - H$ とする. このとき $Q(f,g) \geq Q(f_H, g_H)$ が成り立つ.

証明. $x \in H^+$ について $a_1(x) = f(x)$, $a_2(x) = f(\rho_H(x))$ $b_1(x) = g(x)$, $b_2(x) = g(\rho_H(x))$ とおくと ρ_H は μ を不変にするから

$$\begin{aligned}&Q(f,g) \\ =\ &\int_{H^+}\int_{H^+}\{\sum_{i=1}^{2}\Phi(|a_i(x) - b_i(y)|)K(d(x,y)) \\ &\quad + \sum_{i\neq j}\Phi(|a_i(x) - b_j(y)|)\}K(d(x,\rho_H(y))\, d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

また $\alpha_1(x) = a_1(x) \vee a_2(x)$, $\alpha_2(x) = a_1(x) \wedge a_2(x))$, $\beta_1(x) = b_1(x) \vee b_2(x)$, $\beta_2(x) = b_1(x) \wedge b_2(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}&Q(f_H, g_H) \\ =\ &\int_{H^+}\int_{H^+}\{\sum_{i=1}^{2}\Phi(|\alpha_i(x) - \beta_i(y)|)K(d(x,y)) \\ &+ \sum_{i\neq j}\Phi(|\alpha_i(x) - \beta_j(y)|)K(d(x,\rho_H(y))\}\, d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

ここで x, $y \in H^+$ について $d(x,y) \leq d(x,\rho_H(y))$ が成り立つので, 定理 2.1.1 より, 各点 $(x,y) \in H^+ \times H^+$ で上式の右辺の積分の被積分函数は対応する $Q(f,g)$ 式の右辺の被積分函数を越えない. よって $Q(f_H, g_H) \leq Q(f,g)$ が成り立つ. □

作用素 $f \mapsto f_H$ は連続性も保つ. まず X 上の連続函数 f について

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x,\ y \in X,\ \ d(x,y) \leq \delta\}$$

とおく.

定理 2.1.6 $X = \mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{H}^n$ $\mathbb{R}^k \times M_1$ $(M_1 \subset \mathbb{R}^{n-k})$ または $S^k \times M_2$ $(M_2 \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-k-1})$ とする. また $H \in \mathcal{H}(X)$ は $\mathcal{E} \subset X - H$ をみたすとする. このとき $\omega_{f_H}(\delta) \leq \omega_f(\delta)$ が成り立つ.

証明. x,$y \in X$ で $d(x,y) \leq \delta$ とする. 一般に a_j, b_j, $j = 1,2$ について

$$|a_1 \vee a_2 - b_1 \vee b_2| \vee |a_1 \wedge a_2 - b_1 \wedge b_2)| \leq |a_1 - b_1| \vee |a_2 - b_2|$$

が成り立つ. これを用いると $x, y \in \overline{H^+}$ ならば $d(x,y) = d(\rho_H(x), \rho_H(y)) \leq \delta$ より

$$\begin{aligned} |f_H(x) - f_H(y)| &= |f(x) \vee f(\rho_H(x)) - f(y) \vee f(\rho_H(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| \vee |f(\rho_H(x)) - f(\rho_H(y))| \\ &\leq \omega_f(\delta). \end{aligned}$$

また $x, y \in \bar{H}^-$ のときは

$$\begin{aligned} |f_H(x) - f_H(y)| &= |f(x) \wedge f(\rho_H(x)) - (f(y) \wedge f(\rho_H(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| \vee |f(\rho_H(x)) - f(\rho_H(y))| \\ &\leq \omega_f(\delta) \end{aligned}$$

となる. 次に x, y が異なる成分に属すときを考えよう. 一般性を失うことなく $x \in H^+$, $y \in H^-$ と仮定してよい. このとき $d(\rho_H(x), y) = d(x, \rho_H(y)) \leq d(x,y) = d(\rho_H(x), \rho_H(y)) \leq \delta$ が成り立つことから

$$\begin{aligned} & |f_H(x) - f_H(y)| \\ = \ & |f(x) \vee f(\rho_H(x)) - f(y) \wedge f(\rho_H(y))| \\ \leq \ & \max\{|f(x) - f(y)|, |f(x) - f(\rho_H(y))| \\ & \quad |f(\rho_H(x)) - f(y)|, |f(\rho_H(x)) - f(\rho_H(y))|\} \\ \leq \ & \omega_f(\delta). \end{aligned}$$

□

さて $f : X \to \mathbb{R}$ について $f^\#$ で f の 1) Scwarz, 2) spherical, 3) hyperbplic, 4) (k,n)-Steiner または 5) (k,n)-cap symmetrization を表わすとする. ただし 1), 3) については f は **仮定 1.** をみたすとし 4) の場合は殆どすべての $y \in M_1$ について $\mathbb{R}^k \ni \zeta \mapsto f(\zeta, y)$ は**仮定 1.** をみたすとする. このとき 1)—5) のすべての場合について $f^\#$ が定義される.

定理 2.1.7 $\mathcal{E} \subset X - H$ を満たす $H \in \mathcal{H}(X)$ について $(f^\#)_H = f^\#$ が成り立つ.

証明. はじめに 1)—3) の場合を考えよう. H^+ は $X - H$ の e を含む成分であるから $x \in H^+$ について $d(x,e) \leq d(\rho_H(x), e)$ が成り立つ. $f^\#(x)$ は $d(x,e)$ にのみ依存し $d(x,e)$ について減少ゆえ $x \in H^+$ について $f^\#(x) \geq f^\#(\rho_H(x))$ が成り立ち $(f^\#)_H(x) = f^\#(x) \vee f^\#(\rho_H(x)) = f^\#(x)$. 同様に $x \in H^-$ については $d(x,e) \geq d(\rho_H(x), e)$ より $f^\#(x) \leq f^\#(\rho_H(x))$ よって $(f^\#)_H(x) = f^\#(x) \wedge f^\#(\rho_H(x)) = f^\#(x)$ が成り立つ. $x \in H$ については定義より $(f^\#)_H(x) = f^\#(x)$ である.

$X = \mathbb{R}^k \times M_1$ で (k,n)-Schwarz symmetriation の場合を考えよう. $x = (\zeta, w) \in \mathbb{R}^k \times M_1$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$, $w = (w_1, \ldots, w_{n-k})$ について, $x' = \rho_H(x) = (\zeta', w)$ とおく. $w \in M_1$ を固定すれば, 函数 $\mathbb{R}^k \ni \zeta \mapsto f^\#(\zeta, w)$ は $|\zeta| = \sqrt{\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_k^2}$ にのみ依存し, $|\zeta|$ について減少函数である. $x \in H^+$ ならば, $e(w) = (0, \ldots, 0, w_1, \ldots, w_{n-k}) \in H^+$ と合わせて, 補題 2.1.3 より $|\zeta| = d(x, e(w)) \leq d(x', e(w)) = |\zeta'|$ より, $f(x) \geq f(x')$. よって $(f^\#)_H(x) = f^\#(x) \vee f^\#(x') = f^\#(x)$ $x \in H^-$ ならば, 同様に $|\zeta| = d(x, e(w)) \geq$

$d(x', e(w)) = |\zeta'|$ より, $f(x) \le f(x')$. よって $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x) \wedge f^{\#}(x') = f^{\#}(x)$. $x \in H$ のときは定義より $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x)$ である.

$X = S^k \times M_2$ の (k,n)-cap symmetriation の場合を考えよう. $x = (\zeta, r, w) \in S^k \times M_2$ とする. つまり $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1}) \in S^k$, $r \ge 0$, $w = (w_1, \ldots, w_{n-k-1}) \in \mathbb{R}^{n-k-1}$, $(r, w) \in M_2$ である. また $e(r, w) = (1, 0, \ldots, 0, w_1, \ldots, w_{n-k})$ と置いたことに注意しておこう. さて x について, $x' = \rho_H(x) = (\zeta', r, w)$ とおく. $r = 0$ のときは $x \in H$ ゆえ, f_H の定義より $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x)$ が成り立つ. $(r, w) \in M_2$, $r > 0$ を固定すれば, 函数 $S^k \ni \zeta \mapsto f(\zeta, r, w)$ は $d_{S^k}(\zeta, e(r, w))$ にのみ依存し, $d_{S^k}(\zeta, e(r, w))$ について減少函数である. $x \in H^+$ ならば, $e(r, w) \in H^+$ と合わせて, 補題 2.1.3 を S^k に用いて $d_{S^k}(\zeta, e(r, w)) \le d_{S^k}(\zeta', e(r, w))$ となる. よって $f(x) \ge f(x')$ となり $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x) \vee f^{\#}(x') = f^{\#}(x)$ $x \in H^-$ ならば, 同様に $d_{S^k}(\zeta, e(r, w)) \ge d_{S^k}(\zeta', e(r, w))$ より, $f(x) \le f(x')$. よって $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x) \wedge f^{\#}(x') = f^{\#}(x)$. $x \in H$ のときは定義より $(f^{\#})_H(x) = f^{\#}(x)$ である.　□

2.2　基本不等式

それでは $Q(f, g) \ge Q(f^{\#}, g^{\#})$ の定理を述べよう. まず f, g についての仮定をまとめておく.

Case 1). $X = \mathbb{R}^n$ で Schwarz symmetrization の場合
f, g は非負 Lebesgue 可測で $\lim_{d(x,e)\to\infty} f(x) = \lim_{d(x,e)\to\infty} g(x) = 0$ とする.

Case 2). $X = S^n$ で spherical symmetrization の場合
f, g は単に Lebesgue 可測であるだけでよい.

Case 3). $X = \mathbb{H}^n$ で hyperbolic symmetrization の場合
f, g は非負 Lebesgue 可測で $\lim_{d(x,e)\to\infty} f(x) = \lim_{d(x,e)\to\infty} g(x) = 0$ とする.

Case 4). $X = \mathbb{R}^k \times M_1$ で (k,n)-Steiner symmetrization の場合
f, g は非負 Lebesgue 可測で各 $w \in M_1$ を固定するとき $\lim_{|\zeta|\to\infty} f(\zeta, w) = \lim_{|\zeta|\to\infty} g(\zeta, w)$ 0 とする.

Case 5). $X = S^k \times M_2$ で (k,n)-cap symmetrization の場合
f, g は単に Lebesgue 可測であるだけでよい.

では基本不等式を述べるが, はじめに $X = \mathbb{R}^n$, S^n または $\mathbb{H}^n$ の場合に述べる. 残りの場合は, はじめの 2 つの場合の不等式を用いて証明するので, 後でまとめる.

定理 2.2.1 *$X = \mathbb{R}^n$, S^n または $\mathbb{H}^n$ とし, f,$g \to \mathbb{R}$ は, それぞれの場合において* **Case 1).—3).** *の仮定をみたすとする. このとき*

$$Q(f, g) \ge Q(f^{\#}, g^{\#})$$

が成り立つ.

この定理はこれからの理論の展開において基本になる不等式であるから, 証明を少し詳しく述べておこう. 証明は何度も reduction を行うことによって f, g が compact supports をもつ連続函数のときに示せばよいことを導いてから実際の証明に入るという方針で行う. はじめに

注意 2.2.2 $Q(f,g)=\infty$ または $t>0$ について $K(t)\equiv 0$ のときは不等式は明らかに成り立つので $Q(f,g)<\infty$ で $K(t_0)>0$ となる $t_0>0$ が存在するとしてよい. また K を下から近似することによって $\mathrm{supp}\,K$ が有界, つまり $K(t_1)=0$ となる $t_1>0$ が存在すると仮定して良い.

このとき

補題 2.2.3 $\mu(X)=\infty$ とする. このとき $K(t_0)>0$ となる $t_0>0$ が存在すれば $\int_X\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)=\infty$ が成り立つ. さらに $Q(f,g)<\infty$ であれば $\Phi(0)=0$ である.

証明.　非負函数に関する Fubini の定理より

$$\int_X\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)=\int_X\left\{\int_X K(d(x,y))\,d\mu(y)\right\}d\mu(x)$$

であるが, K が減少であることと $K(t_0)>0$ より

$$\begin{aligned}\int_X K(d(x,y))\,d\mu(y) &\geq \int_{B(x,t_0)} K(d(x,y))\,d\mu(y)\\ &\geq \int_{B(x,t_0)} K(t_0)\,d\mu(y)\\ &= K(t_0)\mu(B(t_0)).\end{aligned}$$

よって

$$\int_X\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\geq K(t_0)\mu(B(t_0))\mu(X)=\infty.$$

また Φ が減少函数ゆえ

$$Q(f,g)\geq\Phi(0)\int_X\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)$$

が成り立つが, 右辺が ∞ ゆえ $Q(f,g)$ が有限値である為には $\Phi(0)=0$ でなければならない.

次に f, g が有界でともに compact support を持つときにのみ証明すれば十分であることを示そう. $X=\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ とする. $0<A<B<\infty$ について $T_{A,B}$ を, §1.2 の作用素とする. このとき f, g は非負で $f(x)$, $g(x)\to 0$ ゆえ $T_{A,B}f(x)-A$, $T_{A,B}g(x)-A$ は compact supports を持ち有界である. また

$$\begin{aligned}&|((T_{A,B}f)(x)-A)-((T_{A,B}g)(y)-A)|\\ =\ &|(T_{A,B}f)(x)-(T_{A,B}g)(y)|\leq|f(x)-g(y)|\end{aligned}$$

であり $A\downarrow 0$, $B\uparrow\infty$ のとき

$$|((T_{A,B}f)(x)-A-((T_{A,B}g)(y)-A)|\uparrow|f(x)-g(y)|$$

が 成り立つ．よって Φ が非負増加であることに注意すると

$$Q((T_{A,B}f)-A,(T_{A,B}g)-A)\uparrow Q(f,g)$$

が単調収束定理より成り立つ．ここで compacct supports をもつ 2 つの有界函数について定理 2.2.1 が成り立つとすると命題 1.2.4 が f^* を $f^\#$ に置き換えてもやはり成り立つので

$$\begin{aligned}
Q(f,g) &= \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty} Q((T_{A,B}f)-A,(T_{A,B}g)-A)\\
&\geq \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty} Q((T_{A,B}f)^\#-A,(T_{A,B}g)^\#-A)\\
&= \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty} Q(T_{A,B}(f^\#)-A,T_{A,B}(g^\#)-A)\\
&= Q(f^\#,g^\#)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$X=S^n$ のときは, S^n 自身が compact であり, $T_{A,B}f-A$, $T_{a,B}g-A$ のかわりに $T_{A,B}f$, $T_{a,B}g$ を用いて $A\downarrow -\infty$, $B\uparrow\infty$ とすればよい．以上より f, g が有界でともに compacct supports を持つ場合に示せば十分である．

ここで

$$C_K=\int_X K(d(x,e))\,d\mu(x)$$

とおこう．C_K が有限値であることは $t\geq t_1$ ならば $K(t)\equiv 0$ となることより従う．また適当な変数変換を行うことにより

$$C_K=\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x)$$

が任意の y について成り立つことも容易にわかる．

補題 2.2.4 $X=\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ とする．f, g, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ は全て *supprot* が $\bar{B}(R)$ に含まれ, $0\leq f$, g, $\tilde{f}$, $\tilde{g}\leq M$ とすると

$$\begin{aligned}
&|Q(f,g)-Q(\tilde{f},\tilde{g})|\\
\leq\ &\Phi'_+(M)(C_K+K(0)\mu(B(R))\{\|f-\tilde{f}\|_{L^1(X)}+\|g-\tilde{g}\|_{L^1(X)}\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明．$Q(f,g)$ の定義式において積分を $\bar{B}(R)$ と $X-\bar{B}(R)$ に分けて $I_j(f,g)$ を

$$\begin{aligned}
&Q(f,g)\\
=\ &\int_{\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}\Phi(|f(x)-g(y)|)K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&+\int_{\bar{B}(R)}\int_{X-\bar{B}(R)}\Phi(|g(y)|)K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&+\int_{X-\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}\Phi(|f(x)|)K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&+\int_{X-\bar{B}(R)}\int_{X-\bar{B}(R)}\Phi(0)K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
=\ &I_1(f,g)+I_2(f,g)+I_3(f,g)+I_4(f,g)
\end{aligned}$$

とおく．また $Q(\tilde{f},\tilde{g})$ についても同様な分解を考え $I_j(\tilde{f},\tilde{g})$ を定義する．$X=\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の場合 $\mu(X)=\infty$ であるから, $\Phi(0)=0$ であるから $I_4(f,g)=I_4(\tilde{f},\tilde{g})=0$ である．よって

$$|Q(f,g)-Q(\tilde{f},\tilde{g})|\le\sum_{j=1}^{3}|I_j(f,g)-I_j(\tilde{f},\tilde{g})|$$

が成り立つ．まず $|f(x)-g(y)|\le M$ と $0\le a\le b\le M$ について $\Phi(b)-\Phi(a)\le\Phi'_+(M)(b-a)$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
&|I_1(f,g)-I_1(\tilde{f},\tilde{g})|\\
\le\ &\int_{\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}|\Phi(|f(x)-g(y)|)-\Phi(|\tilde{f}(x)-\tilde{g}(y)|)|K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
\le\ &\Phi'_+(M)K(0)\int_{\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}||f(x)-g(y)|-|\tilde{f}(x)-\tilde{g}(y)||\,d\mu(x)d\mu(y)\\
\le\ &\Phi'_+(M)K(0)\int_{\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}|f(x)-g(y)-(\tilde{f}(x)-\tilde{g}(y))|\,d\mu(x)d\mu(y)\\
\le\ &\Phi'_+(M)K(0)\int_{\bar{B}(R)}\int_{\bar{B}(R)}|f(x)-\tilde{f}(x)|+|g(y)-\tilde{g}(y))|\,d\mu(x)d\mu(y)\\
\le\ &\Phi'_+(M)K(0)\mu(B)\{\|f-\tilde{f}\|_{L^1(X)}+\|g-\tilde{g}\|_{L^1(X)}\}
\end{aligned}$$

となる．また

$$\begin{aligned}
&|I_2(f,g)-I_2(\tilde{f},\tilde{g})|\\
\le\ &\int_{\bar{B}(R)}|\Phi(g(y))-\Phi(\tilde{g}(y))|\left\{\int_{X-\bar{B}(R)}K(d(x,y))\,d\mu(x)\right\}d\mu(y)\\
\le\ &\int_{\bar{B}(R)}|\Phi(g(y))-\Phi(\tilde{g}(y))|\left\{\int_{X}K(d(x,y))\,d\mu(x)\right\}d\mu(y)\\
\le\ &C_K\Phi'_+(M)\int_{\bar{B}(R)}|g(y)-\tilde{g}(y)|d\mu(y)\\
\le\ &C_K\Phi'_+(M)\|g-\tilde{g}\|_{L^1(X)}
\end{aligned}$$

同様にして

$$|I_3(f,g)-I_3(\tilde{f},\tilde{g})|\le C_K\Phi'_+(M)\|f-\tilde{f}\|_{L^1(X)}$$

を得る．これらの 3 つの不等式を合わせて求める不等式を得る． □

注意 2.2.5 $X=S^n$ のときは, $Q(f,g)$, $Q(\tilde{f},\tilde{g})$ を $I_j(f,g)$, $I_j(\tilde{f},\tilde{g})$ に分解する必要はない．$|I_1(f,g)-I_1(\tilde{f},\tilde{g})|$ の部分について行った評価の方法のみを用いればよい．このとき $|f|$, $|g|$, $|\tilde{f}|$, $|\tilde{g}|\le M$ ならば

$$|Q(f,g)-Q(\tilde{f},\tilde{g})|\le\Phi'_+(M)K(0)\mu(X)\{\|f-\tilde{f}\|_{L^1(X)}+\|g-\tilde{g}\|_{L^1(X)}\}$$

が成り立つ．

以上の補題を用いると, 定理を証明するには f, g が compact supports を持つ連続函数の場合に示せば十分であることがわかる．実際, 連続函数列 $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ を $\|f_j-f\|_{L^1(X)}\to 0$, $\|g_j-g\|_{L^1(X)}\to 0$ を $0\le f,\ g,\ f_j,\ g_j\le M$ で, $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g$, $\operatorname{supp} f_j$, $\operatorname{supp} g_j\subset$

$\bar{B}(R)$ が成り立つようにとる．このとき補題 2.2.4 より $\lim_{j\to\infty} Q(f_j, g_j) = Q(f, g)$ がわかる．$f^\#$, $g^\#$ と $f_j^\#$, $g_j^\#$ については補題 2.2.4 と 命題 1.4.5 より $\lim_{j\to\infty} Q(f_j^\#, g_j^\#) = Q(f^\#, g^\#)$ がわかる．よって定理が compact supports を持つ連続函数について成り立てば $Q(f_j, g_j) \geq Q(f_j^\#, g_j^\#)$ であるから $Q(f, g) \geq Q(f^\#, g^\#)$ が成り立つ．

定理 2.2.1 の証明. いままでの議論から $X = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ のときは f, g が連続で $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset \bar{B}(R)$ $0 \leq f, g \leq M$ のときに示せばよい．$X = S^n$ のときも f, g は連続で $|f|, |g| \leq M$ として示せば良い．

$X = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ とする．$C_0(X)$ で compact support をもつ X 上の連続函数の全体を表わすことにして

$$\begin{aligned} S(f) &= \{F \in C_0(X) : 0 \leq F \leq M, \quad \operatorname{supp} F \subset \bar{B}(R), \\ &\qquad \omega_F \leq \omega_f, \quad \beta_F = \beta_f\}, \\ S(f,g) &= \{(F,G) \in S(f) \times S(g) : Q(F,G) \leq Q(f,g)\} \\ \delta &= \inf\{\|F - f^\#\|^2_{L^2(X)} + \|G - g^\#\|^2_{L^2(X)} : (F,G) \in S(f,g)\} \end{aligned}$$

とおく．さて $(f,g) \in S(f,g)$ より $S(f,g)$ は空でない．$\|F_j - f^\#\|^2_{L^2(X)} + \|G_j - g^\#\|^2_{L^2(X)} \to \delta$ となる函数列 $\{F_j\}$, $\{G_j\}$, $(F_j, G_j) \in S(f,g)$ をとると, $S(f)$, $S(g)$ は compact 集合 $\bar{B}(R)$ 上で一様有界, 同程度連続な函数族であるから Arzelà-Ascoli の定理より一様収束する部分列がとれる．よってはじめから $\lim F_j = F_0$, $\lim G_j = G_0$ としてよい．ここで $S(f), S(g)$ の定義から $F_0 \in S(f), G_0 \in S(g)$ である．また $\lim Q(F_j, G_j) = Q(F_0, G_0)$ であることが補題 2.2.4 よりわかる．従って $Q(F_0, G_0) \leq Q(f,g)$ となり $(F_0, G_0) \in S(f,g)$ である．ここで $\delta = 0$ ならば $F_0 = f^\#$, $G_0 = g^\#$ ゆえ $Q(f^\#, g^\#) \leq Q(f,g)$.

次に $\delta > 0$ として矛盾を導こう．このとき $F_0 \neq f^\#$ または $G_0 \neq g^\#$ の少なくとも一方が, μ-測度正の集合上で成り立つ．ここでは $F_0 \neq f^\#$ として証明を進めよう．このとき $f^\#$ は symmetric decreasing ゆえ F_0 はそうでないとしてよい．従って $t \in \mathbb{R}$ で測地球 $C = \{x \in X : f^\#(x) > t\}$ と集合 $E = \{x \in X : F_0(x) > t\}$ が μ-a.e. に一致しないものが存在する．F_0 と $f^\#$ は分布函数が等しいから $\mu(E) = \mu(C)$ である．よって $\mu(C - E) > 0$ かつ $\mu(E - C) > 0$ である．$x_0 \in C - E$, $y_0 \in E - C$ をそれぞれの集合の密度点, つまり

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \frac{\mu(B(x_0, \eta) \cap (C - E))}{\mu(B(x_0, \eta))} = 1,$$
$$\lim_{\eta \downarrow 0} \frac{\mu(B(y_0, \eta) \cap (E - C))}{\mu(B(x_0, \eta))} = 1$$

が成り立つとする．$H = \{x \in X : d(x, x_0) = d(x, y_0)\}$ とおくと, x_0 が e 中心の測地球 C に属し y_0 が属さないから $d(x_0, e) < d(y_0, e)$ である．よって $e \notin H$ であり, $H \in \mathcal{H}(X)$ かつ $x_0 \in H^+$ である．ここで

$$G = H^+ \cap (C - E) \cap \rho_H(E - C)$$

とおくと, x_0, y_0 がそれぞれ $C - E$, $E - C$ の密度点であることと $\rho_H(y_0) = x_0$ より, $\mu(G) > 0$ が従う．$x \in G$ について

$$f^\#(x) > t \geq f^\#(\rho_H(x))$$

$$F_0(\rho_H(x)) > t \geq F_0(x))$$

が成り立つ. 一般に 4 つの実数 a, b, c, d について

$$ac + bd \leq a \vee b \cdot c \vee d + a \wedge b \cdot c \wedge d$$

が成り立ち, $a < b$, $c > d$ または $a > b$, $c < d$ のように a, b と c, d の大小関係の向きが異なるときは真の不等号が成り立つから, $x \in H^+$ について

$$\begin{aligned}
& F_0(x) f^{\#}(x) + F_0(\rho_H(x)) f^{\#}(\rho_H(x)) \\
\leq \;& (F_0)_H(x) f^{\#}(x) + (F_0)_H(\rho_H(x)) f^{\#}(\rho_H(x))
\end{aligned}$$

が成り立ち, 特に $x \in G$ のときは真の不等号が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}
& \int_X F_0(x) f^{\#}(x)\, d\mu(x) \\
=\; & \int_{H^+} \{F_0(x) f^{\#}(x) + F_0(\rho_H(x)) f^{\#}(\rho_H(x))\}\, d\mu(x) \\
<\; & \int_{H^+} \{(F_0)_H(x) f^{\#}(x) + (F_0)_H(\rho_H(x)) f^{\#}(\rho_H(x))\}\, d\mu(x) \\
=\; & \int_X (F_0)_H(x) f^{\#}(x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

となる. ここで F_0 と $(F_0)_H$ の分布函数が等しいことから

$$\begin{aligned}
& \|F_0 - f^{\#}\|_{L^2(X)}^2 \\
=\; & \int_X |F_0 - f^{\#}|^2\, d\mu \\
=\; & \int_X F_0^2\, d\mu + \int_X {f^{\#}}^2\, d\mu - 2\int_X F_0 f^{\#}\, d\mu \\
>\; & \int_X (F_0)_H^2\, d\mu + \int_X {f^{\#}}^2\, d\mu - 2\int_X (F_0)_H f^{\#}\, d\mu \\
=\; & \int_X |(F_0)_H - f^{\#}|^2\, d\mu \\
=\; & \|(F_0)_H - f^{\#}\|_{L^2(X)}^2
\end{aligned}$$

となる. また同様に $\|(G_0)_H - g^{\#}\|_{L^2(X)}^2 \leq \|G_0 - g^{\#}\|_{L^2(X)}^2$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
& \|(F_0)_H - f^{\#}\|_{L^2(X)}^2 + \|(G_0)_H - g^{\#}\|_{L^2(X)}^2 \\
<\; & \|F_0 - f^{\#}\|_{L^2(X)}^2 + \|G_0 - g^{\#}\|_{L^2(X)}^2 = \delta
\end{aligned}$$

となる. $(F_0, G_0) \in S(f,g)$ より $((F_0)_H, (G_0)_H) \in S(f,g)$ であるから, これは矛盾である.

今度は $X = S^n$ としよう. f, g が連続で $|f|$, $|g| \leq M$ として示せば良い. このときは

$$\begin{aligned}
S(f) &= \{F \in C(X) : |F| \leq M, \quad \operatorname{supp} F \subset \bar{B}(R), \\
&\qquad \omega_F \leq \omega_f, \quad \beta_F = \beta_f\}, \\
S(f,g) &= \{(F,G) \in S(f) \times S(g) : Q(F,G) \leq Q(f,g)\} \\
\delta &= \inf\{\|F - f^{\#}\|_{L^2(X)}^2 + \|G - g^{\#}\|_{L^2(X)}^2 : (F,G) \in S(f,g)\}
\end{aligned}$$

とおけば, $X=\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の場合と全く同様に $\delta=0$ が証明できる. □

定理 2.2.1 の証明中で $f^{\#}\in S(f)$ を示している. この結果から,

命題 2.2.6 $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ または $X=S^n$ とし, $f\in C(X)$ は, それぞれの場合において **Case 1)-3).** の仮定をみたすとする. また $^{\#}$ でそれぞれ, *Schwarz, hyperbolic and spherical symmetrization* を表わすとする.

$$\omega_{f^{\#}}(\delta)\le\omega_f(\delta),\ \ \forall\ \ \delta>0$$

が成り立つ.

証明. $X=S^n$ のときは $C_0(X)=C(X)$ に注意すると, 定理 2.2.1 の証明中で $f^{\#}\in S(f)$ が示されているから, $\omega_{f^{\#}}\le\omega_f$, が成り立つ.

$X=\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ のときは $f(x)\to 0(d(x,e)\to\infty)$ が成り立つから, 任意の $0<A<B<\infty$ について $T_{A,B}f-A\in C_0(X)$ である. よって定理 2.2.1 の証明より $\omega_{T_{A,B}f^{\#}-A}\le\omega_{T_{A,B}f-A}$ が成り立つ. $\omega_{T_{A,B}f-A}\le\omega_f$ が成り立つことに注意すると, 任意の $x,y\in X$, $d(x,y)\le\delta$ について

$$\begin{aligned}
|f^{\#}(x)-f^{\#}(y)| &= \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty}|T_{A,B}(f^{\#})(x)-A-(T_{A,B}(f^{\#})(y)-A)| \\
&= \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty}|(T_{A,B}f-A)^{\#}(x)-(T_{A,B}f-A)^{\#}(y)| \\
&\le \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty}\omega_{(T_{A,B}f-A)^{\#}}(\delta) \\
&\le \lim_{A\downarrow 0,B\uparrow\infty}\omega_{T_{A,B}f-A}(\delta) \\
&\le \omega_f(\delta)
\end{aligned}$$

となる. よって $\omega_{f^{\#}}\le\omega_f$ が成り立つ. □

次に (k,n)-Steiner と cap symmetrizations についての基本不等式を定理 2.2.1 より導こう. Steiner の場合は $X=\mathbb{R}^k\times M_1$, cap の場合は $X=S^k\times M_2$ 但し $M_1\subset\mathbb{R}^m$, $M_2\subset(0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}$ は可測集合で $m=n-k$ とする. μ_n と $|x-y|$ を, それぞれ n-次元 Lebesgue 測度と $\mathbb{R}^n$ における Euclid 距離とする.

定理 2.2.7 $X=\mathbb{R}^k\times M_1$ または $X=S^k\times M_2$ とし $f,\ g:X\to\mathbb{R}$ はそれぞれの場合において **Case 4, 5.** の仮定をみたすとする. このとき

$$Q(f,g)\ge Q(f^{\#},g^{\#})$$

が成り立つ.

証明. $X=\mathbb{R}^k\times M_1$ のとき $x=(\xi,z)$, $y=(\eta,w)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)\in\mathbb{R}^k$ $z=(z_1,\dots,z_{n-k})$, $w=(w_1,\dots,w_{n-k})\in M_1$ とおく. μ_j で j-次元 Lebesgue 測度,

$$\begin{aligned}
Q(f,g) &= \int_X\Big[\int_X\Phi(|f(\xi,z)-g(\eta,w)|) \\
&\quad\times K(\sqrt{|\xi-\eta|^2+|z-w|^2})\,d\mu_k(\xi)d\mu_k(\eta)\Big]\,d\mu_{n-k}(z)d\mu_{n-k}(w)
\end{aligned}$$

となる. 内側の積分に, 定理 2.2.1 を用いれば, 直ちに $Q(f,g) \geq Q(f^{\#}, g^{\#})$ が従う.

$X = S^k \times M_1$ のとき $x = (\xi, r, z), y = (\eta, r, w), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{k+1}), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{k+1}) \in S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ $z = (z_1, \dots, z_{n-k-1})$, $w = (w_1, \dots, w_{n-k-1})$ $r,\ s \geq 0$ で (r,z), $(s,w) \in M_2$ とおく. σ_j で j-次元 の球面積測度を表わすとすると

$$\begin{aligned} Q(f,g) = \int_X \Bigg[\int_X & \Phi(|f(\xi,r,z) - g(\eta,s,w)|) \\ & \times K(\sqrt{r^2|\xi-\eta|^2 + |z-w|^2})\, d\sigma_k(\xi) d\sigma_k(\eta) \Bigg] r^k d\mu_{n-k-1}(z) d\mu_{n-k-1}(w) \end{aligned}$$

となる. 内側の積分に, 定理 2.2.1 を用いれば, 直ちに $Q(f,g) \geq Q(f^{\#}, g^{\#})$ が従う. □

命題 2.2.8 $X = \mathbb{R}^k \times M_1$ または $S^k \times M_2$ とし, $f \in C(X)$ は **Case 4), 5)** の仮定をみたすとする. また 任意の $\delta > 0$ について $\omega_f(\delta) < \infty$ で $\omega_\delta(f) \to 0$ $(\delta \to 0)$ が成り立つとする. このとき $f^{\#}$ で, f の (k,n)-*Steiner* または (k,n)-*cap symmetrization* を表わすとすると

$$\omega_{f^{\#}}(\delta) \leq \omega_f(\delta), \ \ \forall\, \delta > 0$$

が成り立つ.

証明. $X = \mathbb{R}^n \times M_1$ のとき, $\omega_f(\delta) \to 0$ より f は一様連続である. 従って f は $\mathbb{R}^k \times \overline{M_1}$ まで, Ω_f を保って拡張できる. 各 $j \in \mathbb{N}$ について $M_1^{(j)} = \{z \in \mathbb{R}^{n-k} : z \in \overline{M_1},\ |z| \leq j\}$ とおく. 各 j について f を, $\mathbb{R}^k \times M_1^{(j)}$ 上の函数に制限して $\omega_{f^{\#}} \leq \omega_f$ を示すことができればこの命題は示されたことになる. よって M_1 を compact と仮定して示せばよい.

さて f は非負であり, 各 $z \in M_1$ について $f(\xi, z) \to 0 (\xi \to \infty)$ が成り立つ. よって M_1 の compact 性と $\omega_f(\delta) \to 0 (\delta \to 0)$ より, 任意の $0 < A < B < \infty$ について $T_{A,B}f - A$ の support は compact である. 命題 2.2.6 の証明と同じように $\omega_{(T_{A,B}f-A)^{\#}} \leq \omega_{T_{A,B}f-A}$ が示されれば, この Proposition は示されたことになる. よってはじめから, ある $R > 0$ について supp $f \subset \bar{B}_k(R) \times M_1$ と仮定して示せばよい. 但し $\bar{B}_k(R) = \{\xi \in \mathbb{R}^k : |\xi| \leq R\}$ である. ここで

$$\begin{aligned} S(f) &= \{F \in C_0(\mathbb{R}^n) : 0 \leq F \leq \sup f, \ \ \text{supp } F \subset \bar{B}_k(R) \times M_1 \\ & \quad\ \ \omega_F \leq \omega_f, \ \ \beta_{F(\cdot,z)} = \beta_{f(\cdot,z)}, \ \ \forall z \in M_1\} \end{aligned}$$

とおく. $\bar{B}_k(R) \times M_1$ は可分な compact 距離空間で, $S(f)$ は一様有界同程度連続であるから Arzelà-Ascoli の定理が適用できる. よって

$$\delta = \|F_0 - f^{\#}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \inf\{\|F - f^{\#}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} : F \in S(f)\}$$

をみたす $F_0 \in S(f)$ が存在する. $\delta = 0$ ならば $F_0 = f^{\#}$ となり. $\omega_{f^{\#}} = \omega_{F_0} \leq \omega_f$ となる. $\delta > 0$ とすると, $\{x \in \mathbb{R}^k \times M_1 : F_0(x) \neq f^{\#}(x)\}$ の n-次元 Lebesgue 測度は正である. Fubini の定理より

$$\{z \in M_1 : F_0(\xi, z) \neq f^{\#}(\xi, z) \text{ が } k \text{ 次元 Lebesgue 測度正の } \xi \text{ について成立 }\}$$

は, $n-k$ 次元 Lebesgue 測度正である. z_0 をこの集合の密度点とする. このとき $F_0(\xi, z_0) \neq f^{\#}(\xi, z_0)$ が k-次元 Lebesgue 測度正の ξ の集合で成り立つから, 定理 2.2.1 の証明と同じようにして, $H \in \mathcal{H}(X)$ を

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} F_0(\xi, z_0) f^{\#}(\xi, z_0)\, d\mu_k(\xi) \\ < & \int_{\mathbb{R}^k} (F_0)_H(\xi, z_0) f^{\#}(\xi, z_0)\, d\mu_k(\xi) \end{aligned}$$

となるようにとれる. 命題 2.2.6 より $f^{\#}(\xi, z)$ は z を固定したとき ξ について連続であり, 命題 1.4.6 より

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}^k} |f^{\#}(\xi, z_1) - f^{\#}(\xi, z_2)| \leq \max_{\xi \in \mathbb{R}^k} |(\xi, z_1) - f(\xi, z_2)|$$

が成り立つので, 結局 $f^{\#}$ は (ξ, z) について連続である. 従って F_0 の連続性と合わせて z_0 のある近傍で上の不等式は成り立つ. z_0 が, 密度点であることから上の不等式が成り立つような z の測度は正. よって等号付きの不等式が, 任意の $z \in M_1$ について成り立つことと合わせて

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} F_0(x) f^{\#}(x)\, d\mu_n(x) \\ < & \int_{\mathbb{R}^n} (F_0)_H(x) f^{\#}(x)\, d\mu_n(x) \end{aligned}$$

となる. $(F_0)_H$ と $f^{\#}$ がお互いに rearrangement であるから $\|(F_0)_H - f^{\#}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \|F_0 - f^{\#}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ となる. これは矛盾である.

(k, n)-cap symmetrization の場合は, $T_{A,B} f - A$ を考える必要はない. このときも M_2 が compact として示せば十分で, 証明は (k, n)-Steiner symmetrization の場合と同様である. □

2.3 基本不等式の簡単な応用

X を $\mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{H}^n$ $\mathbb{R}^k \times M_1$, または $S^k \times M_2$ とし, $\#$ はそれぞれ Schwarz, spherical, hyperbolic, (k, n)-Steiner または (k, n)-cap symmetrization とする. そして dx は $X = \mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{H}^n$ のときはそれぞれの空間での標準的な測度とし, $X = \mathbb{R}^k \times M_1$ または $S^k \times M_2$ のときは n-次元 Lebesgue 測度とする. この節で扱う $f, g : X \to \mathbb{R}$ は, X がどの空間であるかに応じて §2.2 でまとめておいた **Case 1)-5).** の仮定をみたすとし, $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は増加かつ凸とする.

系 2.3.1

$$\int_X \Phi(|f^{\#}(x) - g^{\#}(x)|) dx \leq \int_X \Phi(|f(x) - g(x)|) dx.$$

証明. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ または S^n の場合に, この系を証明するには f, g が compact supports をもつ連続函数としてよいから Φ の連続性を用いれば定理 2.2.1 または 2.2.7

において $K(t)=\chi_{(0,\varepsilon)}(t)$ とおいて $\mu(B(e,\varepsilon))$ で割り $\varepsilon\to 0$ とすればよい．または定理 2.2.1 または 2.2.7 の証明を修正して証明することもできる．(k,n)-Steiner and (k,n)-spherical symmetrization の場合には非負値函数についての Fubini の定理を用いて積分変数を分け, それぞれ $\mathbb{R}^k$ と S^k についての Schwarz, spherical symmetrization についての結果を用いればよい． □

系 2.3.2 $E(\varepsilon)=\{(x,y)\in X^2 : d(x,y)<\varepsilon\}$ とおくとき

$$\int_{E(\varepsilon)}\Phi(|f^{\#}(x)-f^{\#}(y)|)dxdy\le\int_{E(\varepsilon)}\Phi(|f(x)-f(y)|)dxdy.$$

但し $d(x,y)$ と dx は $X=\mathbb{R}^n$, S^n または $\mathbb{H}^n$ のときはそれぞれ標準的な距離函数と測度とし $X=\mathbb{R}^k\times M_1$ または $S^k\times M_2$ のときは $\mathbb{R}^n$ における *Euclid* の距離と *Lebesgue* 測度とする．

証明． この系は定理 2.2.1 または 2.2.7 において $f=g$, $K=\chi_{(0,\varepsilon)}$ とすれば直ちに得られる． □

$f\in C(X)$ について f の Lipschitz ノルムを

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}=\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} : x,y\in X,\quad x\ne y\right\}$$

で定義する．そして $\mathrm{Lip}(X)=\{f\in C(X) : \|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}<\infty\}$ とおく．

命題 2.3.3 $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, S^n, $\mathbb{R}^k\times M_1$ または $S^k\times M_2$ とする．とし $f\in\mathrm{Lip}(X)$ は, それぞれの場合に応じて **Case 1)–5).** の仮定をみたすとする．このとき

$$\|f^{\#}\|_{\mathrm{Lip}(X)}\le\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}$$

が成り立つ．

証明． $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ または S^n のとき, 任意の $x,y\in X$, $x\ne y$ について $\delta=d(x,y)>0$ とおく．このとき命題 2.2.6 より $\omega_{f^{\#}}\le\omega_f$ が成り立つ．よって $\omega_f(\delta)\le\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}\cdot\delta$ より

$$\begin{aligned}\frac{|f^{\#}(x)-f^{\#}(y)|}{d(x,y)} &\le \frac{\omega_{f^{\#}}(\delta)}{\delta}\\ &\le \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}\\ &\le \|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}\end{aligned}$$

となる．よって $\|f^{\#}\|_{\mathrm{Lip}(X)}\le\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}$ が成り立つ．

$X=\mathbb{R}^k\times M_1$ または $S^k\times M_2$ のときは, $\omega_f(\delta)\le\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}\delta$ より, $\omega_f(\delta)<\infty$ と, $\omega_f(\delta)\to 0(\delta\to 0)$ が成り立つ．よって命題 2.2.8 より, $\omega_{f^{\#}}\le\omega_f$ が成り立つ．この不等式から前半と同様にして, $\|f^{\#}\|_{\mathrm{Lip}(X)}\le\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}$ が従う． □

系 2.3.4 f を *Lipschitz* 連続とすると任意の p, $1 \le p < \infty$ について

$$\int_X |\nabla f^{\#}(x)|^p \, dx \le \int_X |\nabla f(x)|^p \, dx \tag{2.3.1}$$

が成り立つ．但し ∇ は $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k \times M_1$ $S^k \times M_2$ のとき *Euclidean gradient* とし $X = S^n$ のとき *spherical gradient* $X = \mathbb{H}^n$ のとき *hyperbolic gradient* とする．また M_1, M_2 はそれぞれ $\mathbb{R}^{n-k}$, $[0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ 内の開集合とする．

証明．まず Rademacher の定理 (cf. Ziemer [80]) から Lipshitz 連続な函数は a.e. に微分可能であることに注意しておこう．以下, 証明の概略を示す．
Step 1. supp f が compact であると仮定してよいことを示そう．これは 基本不等式の証明の前に行った reduction と同様に truncation operator $T_{A,B}$ を用いて行う．

Step 2 $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k \times M_1$ または $S^k \times M_2$ のときに (2.3.1) を示そう．このときは dx は, n-次元 Lebesgue 測度であり, 系 2.3.2 より

$$\begin{aligned} & \int_X \left\{ \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(^{\#}(x+y) - f^{\#}(x)|) \, dy \right\} dx \\ \le \ & \int_X \left\{ \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(x+y) - f(x)|) \, dy \right\} dx \end{aligned}$$

が成り立つ．$X_0 = \{x \in X : f$ は x で微分可能 $\}$ とおくと, 各 $x_0 \in X$ について

$$f(x_0 + y) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot y + \eta(y)|y|, \quad \eta(y) \to 0 \quad (y \to 0)$$

が成り立つ．積分変数を $y = \varepsilon t$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ で変換して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{n+p}} \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(^{\#}(x+y) - f^{\#}(x)|) \, dy &= \frac{1}{\varepsilon^{n+p}} \int_{B(\varepsilon)} |\nabla f(x_0) \cdot y + \eta(y)|y||^p \, dy \\ &= \int_{B(1)} |\nabla f(x_0) \cdot t + \eta(\varepsilon t)|^p \, dt \end{aligned}$$

ここで直交変換 $t = Bs$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$ を $\nabla f(x_0) \cdot y = |\nabla f(x_0)| s_1$ となるようにとると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{n+p}} \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(^{\#}(x+y) - f^{\#}(x)|) \, dy &= \int_{B(1)} ||\nabla f(x_0)| s_1 + \eta(\varepsilon Bs)|^p \, ds_1 \cdots ds_n \\ &\to |\nabla f(x_0)|^p \int_{B(1)} |s_1| \, ds_1 \cdots ds_n \\ &= C |\nabla f(x_0)| \quad C = \int_{B(1)} |s_1| \, ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

が, 有界収束定理よりわかる．従って再び有界収束定理より

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+p}} \int_X \left\{ \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(x+y) - f(x)|) \, dy \right\} dx = C \int_X \Phi(|\nabla f(x)|) \, dx$$

同様に

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+p}} \int_X \left\{ \int_{B(\varepsilon)} \Phi(|f(^{\#}(x+y) - f^{\#}(x)|) \, dy \right\} dx = C \int_X \Phi(|\nabla f^{\#}(x)|) \, dx$$

が成り立つ.

Step 3. 次に $X=\mathbb{H}$, S^n のときを考えよう. $X_0=\{x\in X : f$ は x_0 で微分可能 $\}$ とおく. このとき X を Rimann 計量 g を持つ Riemann 多様体と考える. つまり X のときは g を hyperbolic metric とし $X=S^n$ のときは spherical metric とする. 各 $x_0\in X_0$ について x_0 のまわりの正規座標系を $y=\varphi(t)$ $t=(t_1,\ldots,t_n)$, $|t|<\delta$ とする. つまり

$$\begin{aligned}&\tilde{g}_{i,j}(t)=g\left(\frac{\partial}{\partial t_i},\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \text{ とおくと } g_{i,j}(0)=\delta_{i,j}\\ &d(\varphi(t),x_0)=|t|\end{aligned}$$

が成り立つ座標をとる. (cf. [72]) この座標の下では, Step 3. とほぼ同様に求める不等式が成り立つことが証明できる. 但し, gradient ∇ が $t=0$ において Euclid 座標の場合と同じ形をしていることに注意する. □

注意 2.3.5 $\Omega\subset X$ を有界領域とし, f が $f\geq 0$ *on* Ω, $f\equiv 0$ *on* $X-\Omega$ をみたすとき (2.3.1) を f に用いると

$$\int_{\Omega^{\#}}|\nabla f^{\#}(x)|^p\,dx\leq\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^p\,dx$$

となる.

次に後章で応用する為に基本不等式を, 若干変形しておく. $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は減少函数とし μ と d は $X=\mathbb{R}^n$, S^n または $\mathbb{H}^n$ のそれぞれの場合で標準的な測度と距離函数とする. 定理 2.2.1 を $p=2$ の場合に適用すると

系 2.3.6 $X=\mathbb{R}^n$, S^n または $\mathbb{H}^n$ とする. また f, g は $X=\mathbb{R}^n$, S^n のときはそれぞれ **Case 1), 2)** の仮定をみたすとし $X=S^n$ のときは f, $g\geq 0$ または $f(x)g(y)K(d(x,y))$, $f^{\#}(x)g^{\#}(y)K(d(x,y))\in L^1(X^2)$ をみたすとする. このとき

$$(2.3.2)\quad\int_{X^2}f(x)g(y)K(d(x,y))d\mu(x)d\mu(y)\leq\int_{X^2}f^{\#}(x)g^{\#}(y)K(d(x,y))d\mu(x)d\mu(y)$$

が成り立つ. 但し $^{\#}$ はそれぞれ *Schwarz, spherical,* または *hyperbolic symmetrization* を表わすとする.

証明. $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ のときは $T_{A,B}f-f$, $T_{A,B}g-g$ を考えることにより f, g は有界で compact supports を持つとしてよい. また f, g, $K\geq 0$ であるから単調収束定理より supp K も有界としてよい. よって $0\leq f$, $g\leq M$, supp f, supp $g\subset\bar{B}(R)$ かつ $t\geq t_1$ について $K(t)\equiv 0$ と仮定する. このとき定理 2.2.1 より $\Phi(t)=t^2$ として

$$\begin{aligned}&\int_{X^2}|f^{\#}(x)-g^{\#}(y)|^2\,d\mu(x)d\mu(y)\\ \leq\ &\int_{X^2}|f(x)-g(y)|^2\,d\mu(x)d\mu(y)\\ \leq\ &\int_{\bar{B}(R)}\left\{\int_{\bar{B}(R)}|f(x)-g(y)|^2K(d(x,y))\,d\mu(x)\right\}d\mu(y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\bar{B}(R+t)-\bar{B}(R)}\left\{\int_{\bar{B}(R)}|f(x)|^2K(d(x,y))\,d\mu(x)\right\}d\mu(y)\\
&+\int_{\bar{B}(R)}\left\{\int_{\bar{B}(R+t)-\bar{B}(R)}|g(y)|^2K(d(x,y))\,dmu(y)\right\}d\mu(x)\\
\leq\ & M^2K(0)\mu(\bar{B}(R))^2+2M^2K(0)\mu(\bar{B}(R))\mu(\bar{B}(R+t_1)-\bar{B}(R))\\
<\infty &
\end{aligned}
$$

となる. ここで f と $f^\#$, g と $g^\#$ が equimeasurable であることと $\int_X K(d(x,y))\,d\mu(x) \equiv C \equiv \int_X K(d(x,y))\,d\mu(y)$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
\int_{X^2} f(x)^2K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y) &= C\int_X f(x)^2\,d\mu(x)\\
&= C\int_X f^\#(x)^2\,d\mu(x)\\
&= \int_{X^2} f^\#(x)^2K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y)\\
\int_{X^2} g(y)^2K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y) &= C\int_X g(y)^2\,d\mu(y)\\
&= C\int_X g^\#(y)^2\,d\mu(y)\\
&= \int_{X^2} g^\#(y)^2K(d(x,y))\,d\mu(x)d\mu(y).
\end{aligned}
$$

従って $|f-g|^2$, $|f^\#-g^\#|^2$ を展開し, 上の等式とその前の不等式を用いれば (2.3.2) が直ちに得られる.

次に $X=S^n$ とする. $f,\,g\geq 0$ の場合は $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ の場合と全く同様に証明出来る. $f(x)g(y)K(d(x,y))$, $f^\#(x)g^\#(y)K(d(x,y))\in L^1(X^2)$ の場合は $k\in\mathbb{N}$ について $f_k=T_{-k,k}f$, $g_k=T_{-k,k}g$ とおくとともに有界で $(f_k)^\#=T_{-k,k}(f^\#)$, $(g_k)^\#=T_{-k,k}(g^\#)$ が成り立つ. よって $|f_kg_k|\uparrow|fg|$ と $|f_k^\#g_k^\#|\uparrow|f^\#g^\#|$ が成り立つ. f_k, g_k について不等式 (2.3.2) が成り立つことは $X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ の場合の証明がそのまま適用できることからわかる. 従って単調収束定理より不等式 (2.3.2) が成り立つ. □

次の系 2.3.6 から導かれる結果は次章で用いる.

系 2.3.7 Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とする. $f\in L^\infty(\Omega)$ とし $g\in L^\infty(\Omega)$ は非負で *compact support* を持つとする. また $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は減少函数で, $\mathrm{supp}\,K\subset[0,\kappa]$, $\exists\kappa<\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{supp}\,g,\partial\Omega)$ をみたすとする. $\#$ で *Schwarz, spherical,* (k,n)*-Steiner* または (k,n)*-cap symmetrization* を表わすとする. このとき

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega f(z)g(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z')\\
\leq\ &\int_{\Omega^\#}\int_{\Omega^\#} f^\#(z)g^\#(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z')
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

が成り立つ. 但し μ_n は *spherical* の場合のみ球面積測度でそれ以外の場合は n 次元 *Lebesgue* 測度を表わす.

証明. はじめに Schwarz(=(n,n)-Steiner) の場合を考えよう. spherical の場合も全く同じように証明できる. 開集合 Ω' を

$$(\mathrm{supp}\,g)_\kappa=\{x\in\mathbb{R}^n:\mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}\,g)\leq\kappa\}\subset\Omega'\subset\subset\Omega$$

となるようにとる. $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $f_1 = f$ in Ω', $f_1 = -\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ in $\mathbb{R}^n \backslash \Omega'$ とおく. また $f_2 = f_1 + \|f\|_\infty$ とおく. このとき $f_2 \geq 0$ で supp $f_2 \subset \overline{\Omega'}$ となる. また 函数 $g = 0$ を $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ では $\equiv 0$ として拡張しておく. このとき系 2.3.6 より

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_2(z)g(z')K(|x-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ \leq\ & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_2^{\#}(z)g^{\#}(z')K(|z-z'|)d\mu_n(z)d\mu_n(z') \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで supp $g + \bar{B}(\kappa) \subset \Omega'$ と $K(t) \equiv 0,\ t > \kappa$ に注意すると $C = \int_{\bar{B}(\kappa)} K(|z|)\,d\mu_n(z)$ とおいて

$$\begin{aligned} & \int_{r^n}\int_{r^n} f_2(z)g(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\int_{\Omega'}(f(z)+\|f\|_\infty)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\left\{\int_{\Omega'} f(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ & +\|f\|_\infty\int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\left\{\int_{\bar{B}(\kappa)} K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\left\{\int_{\Omega} f(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ & +C\|f\|_\infty\int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\,d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\Omega} g(z')\left\{\int_{\Omega} f(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') + C\|f\|_\infty\int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\,d\mu_n(z') \end{aligned}$$

となる. また R_0 を supp g の volume radius つまり $\mu_n(B(R_0)) = \mu(\mathrm{supp}\ g)$ となるようにとる. $f_2 = f_1 + \|f\|_\infty$ と $f_1 \leq f$ より $f_2^{\#} = f_1^{\#} + \|f\|_\infty \leq f^{\#} + \|f\|_\infty$ が成り立つから

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_2^{\#}(z)g^{\#}(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\bar{B}(R_0)} g^{\#}(z')\int_{\bar{B}(R_0+\kappa)}(f^{\#}(z)+\|f\|_\infty)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\bar{B}(R_0)} g(z')\left\{\int_{\bar{B}(R_0+\kappa)} f^{\#}(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ & +\|f\|_\infty\int_{\bar{B}(R_0)} g^{\#}(z')\left\{\int_{\bar{B}(\kappa)} K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\bar{B}(R_0)} g^{\#}(z')\left\{\int_{\Omega} f^{\#}(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') \\ & +C\|f\|_\infty\int_{\bar{B}(R_0)} g^{\#}(z')\,d\mu_n(z') \\ =\ & \int_{\Omega} g^{\#}(z')\left\{\int_{\Omega} f^{\#}(z)K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)\right\}d\mu_n(z') + C\|f\|_\infty\int_{\mathrm{supp}\ g} g(z')\,d\mu_n(z'). \end{aligned}$$

これらの不等式, 等式より (2.3.4) を得る.

$1 \leq k \leq n-2$ のとき (k,n)-cap symmetrization については. $z \in \mathbb{R}^n$ を 1 章のように $z = (x, r, w)$ のように表わす. このとき $d\mu_n(z) = r^k dr d\sigma_k(x) d\mu_{m-1}(w)$ と表わせる.

但し σ_k は S^k の球面積測度である．これらの記号を用いると

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_2(z)g(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ = &\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}}\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}} (rr')^k dr dr' \left\{\int_{S^k}\int_{S^k} f_2(x,r,w)g(x',r',w') \right. \\ &\qquad \left. \times K(|(x,r,w)-(x',r',w')|d\sigma_k(x)d\sigma_k(x')\right\} d\nu_{m-1}(w)d\mu_{m-1}(w') \end{aligned}$$

となる．各固定された r, w, r', w' について $|(x,r,w)-(x',r',w')|$ は x, x' のみの函数とみて $\psi(d(x,x'))$ の形に表わせる．但し ψ は $[0,\infty)$ 上の減少函数であり，d は S^k の距離を表わす．したがって上式の右辺の内側の積分に spherical symmetrization の場合の不等式を用いて

$$\begin{aligned} &\int_{R^{2n}} f_2(z)g(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \\ \leq &\int_{R^{2n}} f_2^{\#}(z)g^{\#}(z')K(|z-z'|)\,d\mu_n(z)d\mu_n(z') \end{aligned}$$

がわかる．この不等式から求める不等式を導くのは Schwarz の場合と同様である．

$(n-1,n)$-cap と (k,n)-Steiner の場合も証明は同様である．　□

2.4 Notes

1. この章の内容は殆ど [14] から得ている．証明の細部については適宜 [48], [15] 等から補った．

2. f_H は V. N. Dubinin [28], [29] でも扱われている．Dubinin は f が Lipschitz 連続ならば $|\nabla f_H| = |\nabla f|$ が a.e. に成り立つことを用いて symmetrization の場合と同じようにある種の capacity が “polarization” の下で減少することを示している．

3. 定理 2.2.1 については本質的に W. Beckner によるものであり，少し違った形で [19] に述べられている．[18], [20] も参考になる．もともとは 系 2.3.6 を $(n-1,n)$-cap symmetrization の場合に Baernstein-Taylor [15] が証明し，同様な証明法で Beckner が結果を拡張できることを示した．

4. 系 2.3.1 は古典的な結果である．例えば [24], [25] や [54] の p.23 を参照せよ．

5. $X=\mathbb{R}^n$ で Schwarz symmetrization の場合 (2.3.2) は有名な Riesz-Sobolev の不等式
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y)\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^{\#}(x)g^{\#}(y)h^{\#}(x-y)\,dxdy$$
より弱い．何故ならば (2.3.2) は Riesz-Sobolev の不等式 において $h(x-y)$ の部分が既に symmetric decreasing な場合であるからである．しかしながら後章で扱う偏微分方程式の比較定理を導くには (2.3.2) で十分である．$X=S^n$ の場合 (2.3.2) は [15] が初出であろう．一方 $X=\mathbb{H}^n$ の場合は [18] による．$X=S^1$ の場合の Riesz-Sobolev の不等式に対応する結果 (つまり h が symmetric decreasing でなくともよい場合) については [12] を見よ．

第3章　I-function

3.1　I-function の定義

本節では symmetric decreasing rearrangement $f^{\#}$ の不定積分である I-function の定義を与える. hyperbolic symmetrization についても他の場合と同様に定義できるが, これ以後は扱わないので省略する.

まず μ_k を k 次元の Lebesgue 測度とし ω_k を $\mathbb{R}^k$ の単位球の体積, すなわち

$$\omega_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = \frac{2\pi^{k/2}}{k\Gamma(\frac{k}{2})}$$

とおく. 次に σ_k を k 次元の単位球面 S^k の球面積測度とする. このとき $\sigma_k(S^k) = (k+1)\omega_{k+1}$ が成り立つ.

Case 1. (k,n)**-Steiner 及び Schwarz symmetrization** $m = n-k$ とし, はじめに $1 \leq k \leq n-1$ の場合を考えよう. $\xi = (x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ として, $e = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^k$ とおく. 可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と Ω 上の可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられているとする. $y \in \mathbb{R}^m$ について $\Omega(y) = \{x \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in \Omega\}$ とおき

$$Y \;=\; \{y \in \mathbb{R}^m : \Omega(y) \text{ は Lebesgue 可測で,} \quad f(x,y) \text{ は } x \text{ について仮定 1 を満たす.}\} \tag{3.1.1}$$

とおく. 各 $y \in Y$ について $R(y) \in (0,\infty]$ を $\Omega(y)$ の volume radius, つまり $\mu_k(\Omega(y)) = \mu_k(B_k(R))$ を満たす, ただ 1 つの R とする. このとき $\Omega^{\#}(y) = B_k(R(y))$ とおいて

$$\Omega^{\#} = \bigcup_{y\in Y} \Omega^{\#}(y) \times \{y\}$$

で定義し, $f^{\#}(x,y)$ を y を固定し x のみの函数とみての k 次元 Schwarz symmetrization と定義した. ここで

$$\Omega^I = \bigcup_{y\in Y} (0, R(y)) \times \{y\} \subset \mathbb{R}^{m+1} \tag{3.1.2}$$

とし $f^I : \Omega^I \to \mathbb{R}$ を

$$f^I(s,y) = \int_{B_k(s)} f^{\#}(x,y)\, d\mu_k(x) \tag{3.1.3}$$

で定義する. このとき $f^{\#}(x,y)$ は $r = |x|$ と y のみの函数ゆえ $f^{\#}(r,y)$ で表わすことにすれば $\sigma_{k-1}(S^{k-1}) = k\omega_k$ より

$$f^I(s,y) = k\omega_k \int_0^s f^{\#}(r,y) r^{k-1} dr$$

となる. $m=0$ つまり $k=n$ で Schwarz symmetrization の場合は (3.1.2), (3.1.3) において, y の部分を省いた式で Ω^I と f^I を定義する.

注意 3.1.1 上記のように *Schwarz symmetrization* は *Steiner* の特別な場合としてみることができるので, 以後 *Steiner symmetrization* を扱うときは *Schwarz* の場合も含んでいると解釈することにする. また同様に *spherical symmetrization* も *cap symmetrization* の特別な場合として扱う.

Case 2. **(k,n)-cap 及び spherical symmetrization** はじめに $1 \le k \le n-2$ の場合を考える. $\mathbb{R}^n$ の座標として $\xi=(x,r,w)\in S^k\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}$ という座標を用いることにし, σ_k を S^k の球面積測度とおく. また d_k を S^k の距離函数とし $e=(1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^k$ とし $B_k(r)=\{x\in S^k: d_k(x,e)<r\}$ とおく. $\mathbb{R}^n$ の可測集合 Ω と, 可測函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ が与えられているとして各 $(r,w)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}$ について $\Omega(r,w)=\{x\in S^k:(x,r,w)\in\Omega\}$ とおく. このとき $\sigma_k(\Omega(r,w))>0$ かつ $f(x,r,w)$ が x について可測となる (r,w), $r>0$ の全体を Y とおき $(r,w)\in Y$ について $R(r,w)$ を $\Omega(r,w)$ の μ_k による volume radius とおく (つまり $\sigma_k(\Omega(r,w))=\sigma B_k(R(r,w)))$. このとき Ω^I を

$$\Omega^I=\bigcup_{(r,w)\in W}(0,R(y))\times\{(r,w)\} \tag{3.1.4}$$

で定義する. そして

$$f^I(s,r,w)=\int_{B(s)}f^\#(x,r,w)d\sigma_k(x),\quad (s,r,w)\in\Omega^I, \tag{3.1.5}$$

とおく. $m=n-k=1$ のときの Ω^I, f^I の定義は (3.1.4), (3.1.4) から w を省いたものとし, $m=0$ つまり spherical symmetrization の場合は (r,w) を省いたものとして定義する.

次に $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ が開集合の場合に符号付き Borel 測度についても I の操作ができるのでこれを, 定義しよう. まず $L^1_\ell(\Omega)$ で Ω 上の Lebesgue 測度 μ_n についての局所可積分函数の全体とし, $M_\ell(\Omega)$ で局所有限な符号付き Borel 測度の全体を表わす. また $M^+_\ell(\Omega)$ で非負 Borel 測度の全体を表わす.

μ_n について絶対連続な Borel 測度 τ について $\tau^\#$ と τ^I を定義しよう. τ の μ_n に関する密度函数を $f\in L^1_\ell(\Omega)$ で表わすとき, f は symmetrization が定義できると仮定する. このとき $\tau^\#$ は $f^\#$ を μ_n についての密度函数として持つ $\Omega^\#$ 上の測度と定義する. また τ^I は f^I を μ_{m+1} についての密度函数として持つ Ω^I 上の測度と定義する.

次に $\tau\in L^+_\ell(\Omega)$, $\tau(\Omega)<\infty$ で μ_n と singular な測度について $\tau^\#$, τ^I の定義は以下の様にする. $m=0$ のとき, つまり Schwarz, または spherical symmetrization のとき $\tau^\#$ は symmetrization の中心 $e\in\mathbb{R}^n$(または S^n) に全測度 $\tau(\Omega)$ を持つ点測度とし τ^I は $\tau(\Omega)\times\mu_1$ つまり 1 次元の区間 Ω^I における 1 次元 Lebesgue 測度 μ_1 の $\tau(\Omega)$ 倍とする. さて $1\le m\le n-1$ のとき (k,n)-Steiner symmetrization の場合は $\Omega'=\{y\in\mathbb{R}^m:\Omega(y)\ne\emptyset\}$ とおく. (k,n)-cap symmetrization の場合は $y=(r,w)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^{m-1}$ とおいて同様に Ω' を定義する. このとき, どちらの場合に

ついても $\{e\}\times\Omega'\subset\Omega^{\#}$ となるが, $\{e\}\times\Omega'$ を $\partial\Omega^I$ の部分集合 $\{0\}\times\Omega'$ と同一視しておく. このとき $\tau^{\#}$ を $M_\ell(\Omega^{\#})$ の元で $\{e\}\times\Omega'$ 内に support を持ち

$$\tau^{\#}(\{e\}\times E)=\tau(\cup_{y\in E}\Omega(y)),\ \forall\quad \text{Borel}\quad E\subset\Omega'$$

できまる Borel 測度とおく. また τ^I は直積測度 $\tau^{\#}\times\mu_1$ を Ω^I に制限したものとする.

以上の定義を用いて最後に $\lambda\in L^1_\ell(\Omega)$ で正の変動が $\lambda^+(\Omega)<\infty$ を満たし, μ_n に絶対連続な部分の密度函数が **仮定 1** を満たすものについて $\lambda^{\#}$, λ^I の定義を行う. $\lambda=\lambda_a+\tau=\lambda_a+\tau^+-\tau^-$ のように, μ_n と絶対連続な λ_a と singluar な τ に分解し, さらに τ を正の変動 τ^+ と負の部分 τ^- に分ける. このとき $\lambda^{\#}=\lambda_a^{\#}+(\tau^+)^{\#}$, $\lambda^I=\lambda_a^I+(\tau^+)^I$ と定義する.

3.2 Baernstein-Taylor の定理

本節では, Part II での応用の為 Baernstein and Taylor [15] の Theorem 5 を証明する. 但し証明は [15] のものではなく Baernstein [14] のアイデアに沿って書き直したものを与える.

本節では (k,n)-cap symmetrization を考え, $1\le k\le n-1$ とし $m=n-k$ とする. $\xi=(x,r,w)$ $x=(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})\in S^k\subset\mathbb{R}^{k+1}$ $r\in[0,\infty)$, $w=(w_1,\dots,w_{m-1})$ という座標を用いて考える. 以下考える領域 Ω は

$$\Omega=\{(x,r)\in S^k\times[0,\infty):\rho_1<r<\rho_2\}\times\Omega' \tag{3.2.6}$$

という形をしているとする. 但し $m\ge 2$ のとき Ω' は $\mathbb{R}^{m-1}$ の領域とし, $m=1$ のとき Ω は上式から Ω' を省いたものとする. このとき座標表示も $z=(x,r)\in S^k\times[0,\infty)$ という形になる. 以下 $m=1$ の場合は特に必要でない限り, このような注意を繰り返さない. さて定義により

$$\Omega^{\#}=S^k\times(\rho_1,\rho_2)\times\Omega',\quad \Omega^I=(0,\pi)\times(\rho_1,\rho_2)\times\Omega'$$

となる. ここで $k+1$ 次元の極座標について座標表示, 球面積測度, Laplacian について具体的な表示をまとめておこう. 詳しくは [39], Vol. II, pp.233-235 を参照せよ.

まず $x=(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})\in\mathbb{R}^k$ について $r=|x|=\sqrt{\sum_{j=1}^{k+1}x_j^2}$ とおき, 極座標表示を

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
\cdots &\quad \cdots\\
x_{k-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-2}\cos\theta_{k-1},\\
x_k &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}\cos\phi,\\
x_{k+1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}\sin\phi,\\
0\le\theta_j &\le \pi,\ \ j=1,2,\dots k-1,\ \ 0\le\phi\le 2\pi
\end{aligned}$$

で与えておく．$\theta_1=\cos^{-1}(x_1/r)$ に注意しておこう．このとき $k+1$ 次元の体積要素は

$$dx_1\cdots dx_{k+1}=r^k\sin^{k-1}\theta_1\sin^{k-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1}drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{k-1}d\phi$$

であり, S^k における球面積測度 σ_k は上式において $r=1$ として

$$d\sigma_k=\sin^{k-1}\theta_1\sin^{k-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1}d\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{k-1}d\phi$$

となる．また $\mathbb{R}^{k+1}$ の Laplacian Δ_{eu}^{k+1} の表示は

$$\begin{aligned}\Delta_{eu}^{k+1} &= \sum_{j=1}^{k+1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\\ &= \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\sin^{1-k}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{k-1}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\\ &\quad +\frac{1}{r^2}\sin^{-2}\theta_1\sin^{2-k}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{k-2}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\cdots\\ &\quad \cdots\\ &\quad +\frac{1}{r^2}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1})^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

となる．S^k における球面 Laplacian Δ_{sp}^k は上式において r についての偏微分の項を省き $r=1$ とすれば得られる．つまり

$$\begin{aligned}\Delta_{sp}^k &= \sin^{1-k}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{k-1}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\\ &\quad +\sin^{-2}\theta_1\sin^{2-k}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{k-2}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\cdots\\ &\quad \cdots\\ &\quad +(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1})^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

である．

さて上記の極座標表示において θ_1 を θ とおく．

定義 3.2.1 d_k を S^k 上の距離とする．本節では $\Omega^\#$ 上の函数 $f(x,r,w)$ が対称とは

$$d_k(x,e)=d_k(x',e)\quad ならば\quad f(x,r,w)=f(x',r,w)$$

が成り立つときを言うことにする．また対称減少であるとは対称かつ

$$d_k(x,e)\le d_k(x',e)\quad ならば\quad f(x,r,w)\ge f(x',r,w)$$

が成り立つときを言う． さて (r,w) を固定したとき対称函数 f は $d_k(x,e)=\theta=\cos^{-1}x_1$ にのみ依存する．従って $f(\theta,r,w)$ で表わすことができる．$B_k(s)=\{x\in S^k: d_k(x,e)<s\}$ とおいて, 対称函数に働く作用素 J を次式で定義する．

$$\begin{aligned}Jf(s,r,w) &= \int_{B(s)}f(x,r,w)\,d\sigma_k(x)\\ &= k\omega_k\int_0^s f(\theta,r,w)\sin^{k-1}\theta\,d\theta.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

ここで上式の第 2 の等号については $d\sigma_k = d\sigma_{k-1} \times \sin^{k-1}\theta d\theta$ と $\int_{S^{k-1}} d\sigma_{k-1} = k\omega_k$ を用いた．また Ω^I 上の函数についての微分作用素 $\tilde{L}$ を次式で定義する．

(3.2.8)
$$\tilde{L} = \frac{1}{r^2}\sin^{k-1}s\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin^{1-k}s\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial w_i^2}$$

命題 3.2.2 $f \in C^2(\Omega^\#)$ が対称ならば

(3.2.9)
$$\tilde{L}(J(f)) = J(\Delta_{eu}^n f)$$

が成り立つ．

証明． $k \geq 2$ として示そう．$J, \tilde{L}$ の定義と積分記号下の微分により

$$\begin{aligned}\tilde{L}J(f) &= k\omega_k\left\{\frac{1}{r^2}\sin^{k-1}s\frac{\partial f}{\partial s}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{r^k}\int_0^s\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial f}{\partial r}\right)\sin^{k-1}\theta\,d\theta + \sum_{i=1}^{m-1}\int_0^s\frac{\partial^2 f}{\partial w_i^2}\sin^{k-1}\theta\,d\theta\right\}\end{aligned}$$

一方 Laplacian の極座標表示により

$$\Delta_{eu}^n f = \frac{1}{r^2}\sin^{1-k}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^{k-1}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial w_i^2}$$

である．上式に J を作用させれば $\tilde{L}J(f)$ と一致する． □

上の命題より f が調和 $(\Delta f = 0)$ で $f = f^\#$ ならば $\tilde{L}(Jf) = \tilde{L}(Jf^\#) = \tilde{L}(f^I) = 0$ となる．つまり f^I は作用素 $\tilde{L}$ について調和であるということができる．では u が劣調和さらには, 劣調和函数の差である δ-subharmonic ならばどうであろうか, これに答えるのが次の定理である．

定理 3.2.3 (Baernstei-Taylor [15]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を (3.2.6) の形をした開集合とする．また $u \in L^1_\ell(\Omega)$, $\lambda \in M_\ell(\Omega)$, $\lambda^+(\Omega) < \infty$ は Ω 上, 超函数の意味で

(3.2.10)
$$\Delta_{eu}^n u + \lambda = 0$$

を満たすとする．このとき

(3.2.11)
$$\tilde{L}u^I + \lambda^I \geq 0$$

が超函数の意味で成り立つ．

注意 3.2.4 $k=1$ のとき $\tilde{L}$ は通常の *Laplacian* Δ_{eu}^n を (x_1, x_2) を 2 次元極座標に変換し, そのほかの成分をそのままにして得られる作用素と一致する．つまり $u^I(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = u^I(s, r, x_3, \ldots, x_n)$ と表わすとき $\tilde{L}$ は Δ_{eu}^n である．このときさらに $\lambda^+ = 0$ ならば, 上の定理は "$\Delta_{eu}^n u \geq 0 \Longrightarrow \Delta_{eu}^n u^I \geq 0$ が成り立つ" となる．超函数の意味での *Laplacian* が非負とは劣調和であることに他ならないから, 定理の内容は "作用素 $u \mapsto u^I$ は劣調和性を保存する" とまとめることができる．この意味で定理 *3.2.3* を劣調和性保存性定理と呼んでも良いであろう．

注意 3.2.5 “超函数の意味で (3.2.11) が成り立つ” という表現には若干の注意が必要である．まず Ω, $\Omega^\#$, Ω^I での内積を定義する．f, $g \in L^2(\Omega^\#)$ について $\langle f, g\rangle_{\Omega^\#} = \int_{\Omega^\#} fg d\mu_n$ とおく．また F, $G \in L^2(\Omega^I)$ については 測度 $dsr^k drd\mu_{m-1}(w)$ に関して積分を行い

$$\langle F, G\rangle_{\Omega^I} = \int_{\Omega^I} F(s,r,w)G(s,r,w)r^k drdsd\mu_{m-1}(w)$$

とおく．また $f \in C_0(\Omega)$ (または $C_0(\Omega^\#)$) と $\nu \in M_\ell(\Omega)$ (または $M_\ell(\Omega^\#)$) について $\langle f, \nu\rangle_\Omega = \int_\Omega f\, d\nu$ (または $\langle f, \nu\rangle_{\Omega^\#} = \int_{\Omega^\#} f\, d\nu$ とおく．この内積の下での $\tilde{L}$ の共役を ${}^t\tilde{L}$ とおくとき “超函数の意味で (3.2.11) が成り立つ” とは，任意の $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$, $G \geq 0$ について，

$$\langle u^I, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} + \langle G, \lambda^I\rangle_{\Omega^I} \geq 0$$

が成り立つことを意味する．

証明の準備として，上で定義した内積の下での作用素 $\tilde{L}$ の共役を計算しておこう．これには F, $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$ について $\langle \tilde{L}F, G\rangle_{\Omega^I} = \langle F, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I}$ が成り立つことから

$${}^t\tilde{L}G = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin^{1-k} s\frac{\partial}{\partial s}(\sin^{k-1} sG)\right) + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2 G}{\partial w_i^2}$$

となる．

定理 3.2.3 の証明. u が C^2 級として示そう．一般の場合は次節で解説する定理 3.2.3 の拡張版の証明で行う近似の手法を用いて C^2 の場合への reduction を行うか，直接 u に平滑化作用素を用いて近似すれば良い．まず $u^I = Ju^\#$ より定理の結論 は任意の $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$, $G \geq 0$ について

$$\langle \tilde{L}u^I, G\rangle_{\Omega^I} = \langle Ju^\#, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} \geq 0$$

となることを意味する． ここで $x \in S^{k+1}$ について $\theta = \cos^{-1} x_1$ つまり θ を $e = (1, 0, \ldots, 0)$ から x までの球面距離とおき

$$g(x,r,w) = \int_\theta^\pi G(s,r,w)\, ds$$

とおく．このとき

$$\langle Ju^\#, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} = \langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} \tag{3.2.12}$$

$$\langle \lambda^I, G\rangle_{\Omega^I} = \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#} \tag{3.2.13}$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}
&\langle Ju^\#, {}^t\tilde{L}G\rangle \\
=\ & k\omega_k \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi \left\{\int_0^s u^\#(\theta,r,w)\sin^{k-1}\theta\, d\theta\right\} {}^t\tilde{L}G(s,r,w)r^k dsdrd\mu_{m-1}(w) \\
=\ & k\omega_k \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi u^\#(\theta,r,w)\sin^{k-1}\theta \int_\theta^\pi {}^t\tilde{L}G(s,r,w)dsr^k drd\mu_{m-1}(w)
\end{aligned}$$

において

$$
\begin{aligned}
&\int_\theta^\pi {}^t\tilde{L}G(s,r,w)ds \\
=\ & \frac{1}{r^2}\int_\theta^\pi \frac{\partial}{\partial s}\left\{\sin^{1-k} s\frac{\partial}{\partial s}(\sin^{k-1} sG)\right\} ds + \int_\theta^\pi \left\{\frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2 G}{\partial w_i^2}\right\} ds \\
=\ & -\frac{1}{r^2}\sin^{1-k}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^{k-1}\theta G) + \int_\theta^\pi \left\{\frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2 G}{\partial w_i^2}\right\} ds
\end{aligned}
$$

となる．一方 $g(x,r,w) = \int_\theta^\pi G(s,r,w)\,ds$ に Laplacian Δ を作用させると

$$
\Delta g = -\frac{1}{r^2}\sin^{1-k}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^{k-1}\theta G) + \int_\theta^\pi \left\{\frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2 G}{\partial w_i^2}\right\} ds
$$

となる．よって $\langle Ju^\#, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} = \langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#}$ が成り立つ.

(3.2.13) も同様な計算により示すことができる．実際 $d\lambda^+ = fd\mu_n + d\tau$ と絶対連続な部分と特異な部分に分解すれば $\tau^\#$ の support が $\{e\}\times(\rho_1,\rho_2)\times\Omega'$ に含まれるから

$$
\begin{aligned}
\langle \tau^\#, g\rangle_{\Omega^\#} &= \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2} g(0,r,w)\,d\tau^\#(r,w) \\
&= \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi G(s,r,w)\,dsd\tau^\#(r,w) = \int_{\Omega^I} G(s,r,w)d\tau^I(s,r,w)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\langle f^\#, g\rangle_{\Omega^\#} &= \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{S^k} f^\#(x,r,w)\int_{\cos^{-1}x_1}^\pi G(s,r,w)\,dsd\sigma_k(x)r^k drd\mu_{m-1}(w) \\
&= k\omega_k\int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi f^\#(\theta,r,w)\int_\theta^\pi G(s,r,w)ds\sin^{k-1}\theta d\theta r^k drd\mu_{m-1}(w) \\
&= k\omega_k\int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi G(s,r,w)\int_0^\theta f^\#(\theta,r,w)ds\sin^{k-1}\theta d\theta r^k drd\mu_{m-1}(w) \\
&= \int_{\Omega'}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_0^\pi G(s,r,w)f^I(s,r,w)dsr^k drd\mu_{m-1}(w) = \langle f^I, G\rangle_{\Omega^I}
\end{aligned}
$$

となる.

以上より定理 3.2.3 を証明するには, 任意の対称な減少函数 $g\in C_0^\infty(\Omega^\#)$, $g\geq 0$ について

(3.2.14) $$\langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} + \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#} \geq 0$$

を示せばよい.

ここで Laplacian を畳み込みの極限として表現してみよう．函数 $K\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $K\geq 0$, supp $K\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi|\leq 1\}$, $K(\xi) = K(|\xi|)$ でかつ $K(r)$ は $r\geq 0$ について単調減少で, $\int_{\mathbb{R}^n} K(\xi)\,d\xi_1\cdots d\xi_n = 1$ となるようにとり, $K_\delta(\xi) = \delta^{-n}K(\xi\delta^{-1})$ とおく．このとき Taylor 展開を行うことにより C^2 函数 f について

(3.2.15) $$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{K_\delta * f(\xi) - f(\xi)}{\delta^2} = \frac{b}{2n}\Delta f(\xi)$$

が成り立つ. 但し

$$b = b_K = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 K(\xi)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

であり $*$ は畳み込みを表わすとする.

ここで Ω^* を

$$\Omega^* = [0, \sigma_k(S^k)] \times (\rho_1, \rho_2) \times \Omega'$$

とおき, 各 r, $\rho_1 < r < \rho_2$ と $w \in \Omega'$ を固定し $u(x, r, w)$ を x の函数とみての decreasing rearrangement を $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ とおく. 注意 1.4.2 より $u^*(\psi_{r,w}(x), r, w) = u(x, r, w)$ を a.e. にみたす measure preserving map $\psi_{r,w} : S^k \to [0, \sigma_k(S^k)]$ が存在する. $u^\#$ と u^* の関係は $x \in S^k$ について, $t = \int_{B_k(d(x,e))} d\sigma_k$ とおくとき $u^*(t, r, w) = u^\#(x, r, w)$ である. これらの関係を用いて g の rearrangement $h : \Omega \to \mathbb{R}$ を構成しよう. $g(x, r, w)$ は $d_k(x, e)$, r, w にのみ依存するからまず $g_0 : \Omega^* \to \mathbb{R}$ を

$$g_0(t, r, w) = g(x, r, w), \quad t = \int_{B(d(x,e))} d\sigma_k$$

とおく. supp g は compact ゆえある領域 $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ と ${\rho_1}'$, ${\rho_2}'$, $\rho_1 < {\rho_1}' < {\rho_2}' < \rho_2$ で supp $g_0 \subset [0, \sigma_k(S^k)] \times ({\rho_1}', {\rho_2}') \times \bar{\Omega}''$ となるものが存在する. また 2 変数の Borel 可測函数 F について

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^*} F(u^*(t, r, w), g_0(t, r, w)) r^k dr dt dw_1 \cdots dw_{m-1} \\ = & \int_{\Omega^\#} F(u^\#(x, r, w), g(x, r, w)) r^k dr d\mu_k(x) dw_1 \cdots dw_{m-1} \end{aligned}$$

が成り立つ. 次に $\psi : \Omega \to \Omega^*$ を $\psi(x, r, w) = (\psi_{r,w}(x), r, w)$ で定義すると, Fubini の定理より ψ も measure preserving である. そこで $h(x, r, w) = g_0 \circ \psi(x, r, w) = g_0(\psi_{r,w}(x), r, w))$ とおく. このとき $h^\# = g$ であることに注意しておこう. さて $u^* \circ \psi = u$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^*} F(u^*(t, r, w), g_0(t, r, w)) r^k dr dt d\mu_{m-1}(w) \\ = & \int_{\Omega} F(u^* \circ \psi(x, r, w), g_0 \circ \psi(x, r, w)) r^k dr d\sigma_k(x) d\mu_{m-1}(w) \\ = & \int_{\Omega} F(u(x, r, w), h(x, r, w)) r^k dr d\sigma_k(x) d\mu_{m-1}(w) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\#} F(u^\#(x, r, w), g(x, r, w)) r^k dr d\sigma_k(x) dw_1 \cdots dw_{m-1} \\ = & \int_{\Omega} F(u(x, r, w), h(x, r, w)) r^k dr d\sigma_k(x) dw_1 \cdots dw_{m-1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

さて上式において $F(s, t) = s \cdot t$ とすると $\langle u^\#, g \rangle_{\Omega^\#} = \langle u, h \rangle_\Omega$ が成り立つことがわかる. また supp $g_0 \subset S^k \times ({\rho_1}', {\rho_2}') \times \bar{\Omega}''$ より supp $h \subset S^k \times ({\rho_1}', {\rho_2}') \times \bar{\Omega}''$ であるから, h は非負で compact support を持ち有界である. よって 系 2.3.7 より $\langle u^\#, K_\delta * g \rangle_{\Omega^\#} \geq \langle u, K_\delta * h \rangle_\Omega$

が十分小さなすべての $\delta > 0$ について成り立つ. また $\mathrm{supp}\, K_\delta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \delta\}$ であるから十分小さなすべての $\delta > 0$ について $\mathrm{supp}\, K_\delta(\,\cdot\, - \xi_0) \subset \Omega$, $\forall \xi_0 \in \mathrm{supp}\, h$ が成り立つ. u は C^2 ゆえ

$$\begin{aligned} \langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} &= \frac{2n}{b}\lim_{\delta\to 0}\langle u^\#, \delta^{-2}(K_\delta * g - g)\rangle_{\Omega^\#} \\ &\geq \frac{2n}{b}\lim_{\delta\to 0}\langle \delta^{-2}(K_\delta * u - u), h\rangle_\Omega \geq \langle \Delta u, h\rangle_\Omega \end{aligned}$$

となる. また $\lambda = -\Delta u \in C(\Omega)$ ゆえ $\langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#} \geq \langle \lambda, h\rangle_\Omega$ が, 系 2.3.7 より成り立つ. よって

$$\langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} + \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#} \geq \langle \Delta u, h\rangle_\Omega + \langle \lambda, h\rangle_\Omega = 0$$

となる. □

3.3 Baernstein-Taylor の定理の一般化

この節では前節の Baernstein-Taylor の定理の一般化を Baernstein [14] に従って解説する.

以後 $^\#$ は Schwarz, (k,n)-Steiner, (k,n)-cap または spherical symmetrization を表わすものとする. はじめの 3 つについては $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし Laplace 作用素 Δ は $\sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ とし, spherical symmetrization を扱うとき, Ω は S^n の開集合で Δ は spherical Laplacian on S^n を表わすとする (具体的な形については前節を参照せよ). また §3.1 と同様に Schwarz symmetrization は Steiner symmetrization の $m = n - k = 0$ の場合とし, spherical symmetrization は cap symmetrization の $m = 0$ の場合として扱うことにする. さらにそれぞれの場合について対称函数とは, symmetrization に関係しない変数と symmetrization の中心からの距離にのみ依存する函数のことを呼ぶことにする.

作用素 J and $\mathcal{B}$. Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. 函数 $f \in L^1_\ell(\Omega^\#)$ について Ω^I 上の函数 Jf を Steiner symmetrization の場合は

$$\begin{aligned} Jf(s) &= \int_{B_n(s)} f\, d\mu_n, \quad (m = 0) \\ Jf(s, y) &= \int_{B_k(s)} f(x, y)\, d\mu_k(x) \quad (1 \leq m \leq n-1) \end{aligned}$$

で定義する. また (k,n)-cap symmetrization の場合は

$$\begin{aligned} Jf(s) &= \int_{B_n(s)} f\, d\sigma_n \quad (m = 0) \\ Jf(s, r) &= \int_{B_{n-1}(s)} f(x, r)\, d\sigma_k(x) \quad (m = 1) \\ Jf(s, r, w) &= \int_{B_k(s)} f(x, r, w)\, d\sigma_k(x) \quad (2 \leq m \leq n) \end{aligned}$$

とおく. 但し Steiner symmetrization の場合 $B_k(s)$ は $\mathbb{R}^k$ の原点 $e = (0, \ldots, 0)$ を中心とする k 次元の Euclidean ball とし (k,n)-cap symmetrization の場合はそれぞれ k 次

元の spherical ball とする．このとき u^I の定義より $u^I = J(u^\#)$ という関係式が成り立つことに注意する．

$\mathbb{R}^n$ 上の対称函数についての Laplace 作用素と S^n 上の対称函数についての球面 Laplace 作用素はそれぞれ

$$\Delta_{eu} = r^{1-n}\frac{d}{dr}(r^{n-1}\frac{d}{dr}),\quad \Delta_{sp} = (\sin\theta)^{1-n}\frac{d}{d\theta}((\sin^{n-1}\theta)\frac{d}{d\theta})$$

で与えられる．但し $r = |x|, \cos\theta = x\cdot e = x_1$ で "$\cdot$" は $\mathbb{R}^{n+1}$ での内積を表わす．次に $[0,\infty)$ 上の函数についての作用素を

$$L_{eu}^{(n)} = s^{n-1}\frac{d}{ds}(s^{1-n}\frac{d}{ds}),\quad L_{sp}^{(n)} = (\sin s)^{n-1}\frac{d}{ds}((\sin^{1-n}s)\frac{d}{ds}) \tag{3.3.16}$$

で定義する．このとき次の公式が成り立つことは適当な座標をとって計算を行うことにより容易に証明できる．

命題 3.3.1 $\#$ を *Schwarz* または *spherical symmetrization* を表わすとする．このとき

$$L(Jf) = J(\Delta f),\quad on\quad \Omega^I, \tag{3.3.17}$$

が対称函数 $f \in C^2(\Omega^\#)$ について L と Δ に適する添え字 "$_{sp}$" または "$_{eu}$". ををつけるとき成り立つ．

Baernstein-Taylor の定理における $-\tilde{L}$ に相当する微分作用素 $\mathcal{B}$ を定義しよう．

(3.3.18)　Schwarz.　$\mathcal{B} = -L_{eu}^{(n)}.$

(3.3.19)　Spherical.　$\mathcal{B} = -L_{sp}^{(n)}.$

(3.3.20)　(k,n)-Steiner.　$\mathcal{B} = -L_{eu}^{(k)} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$

(3.3.21)　(k,n)-cap.　$\mathcal{B} = -r^{-2}L_{sp}^{(k)} - r^{-k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial}{\partial r}\right) - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial w_i^2}.$

但し (k,n)-cap symmetrization の場合には $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash Z$ を $x \in S^k$, $r > 0$, $w \in \mathbb{R}^{m-1}$ として (x,r,w) という変数で表わしている．命題 3.3.1 より

命題 3.3.2

$$\mathcal{B}(Jf) = -J(\Delta f) \tag{3.3.22}$$

が対称函数 $f \in C^2(\Omega^\#)$ について成り立つ．但し Δ は *Steiner* または *cap symmetrization* $(m \neq 0)$ については *Euclid* の *Laplacian* で, *spehrical symmetrization* の場合は球面 *Laplacian* とする．

境界条件. Baernstein-Taylor の定理を一般の開集合 Ω と Steiner, cap symmetrization に一般化するには, 考える函数 u について境界条件を課さなければならない．

$m = 0$ のとき, つまり Schwarz または spherical symmetrization の場合は

$$\forall\, x_0 \in \partial\Omega,\quad \limsup_{\Omega\ni x\to x_0} u(x) = \inf_{\Omega} u, \tag{3.3.23}$$

という条件を u に課する．

注意 3.3.3 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ で Ω が非有界のときは $\infty \in \partial\Omega$ とする．$\Omega = S^n$ のときは $\partial\Omega = \emptyset$ であるから上の条件は無条件に成り立つ．

Steiner symmetrization($m \neq 0$) の場合, 各 $\Omega(y) \subset \mathbb{R}^k$, において $\Omega(y)$ が非有界ならば $\infty \in \partial\Omega$ とする．但し ∞ は $\mathbb{R}^k$ で考えた無限遠点である．ここで $\Omega' = \{y \in \mathbb{R}^m : \Omega(y) \neq \emptyset\}$ とおいたことを思い出そう．このときの境界条件は $\forall\ y \in \Omega'$, $(x_0, y) \in \partial\Omega$ と $(x_1, y) \in \Omega$ について

$$\limsup_{\Omega \ni \xi \to (x_0,y)} u(\xi) \leq \liminf_{\Omega \ni \xi \to (x_1,y)} u(\xi) \tag{3.3.24}$$

ここで $x_0 = \infty$ のとき$\xi \to (x_0, y)$ とは$\xi = (x', y')$ が $y' \to y$ かつ$|x'| = \sqrt{{x_1'}^2 + \ldots + {x_k'}^2} \to \infty$ という意味とする．

(k, n)-cap symmetrization の場合は各 $\Omega(y) \subset S^k$ である．このとき $\Omega'' = \{y \in \Omega' : \Omega(y) \neq S^k\}$ とおき $\partial\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ 内の点のみからなると考える．この場合の境界条件は

$$\limsup_{\xi \to (x_0,y)} u(\xi) \leq \liminf_{\xi \to (x_1,y)} u(\xi) \tag{3.3.25}$$

$\forall\ \ y \in \Omega''$, $(x_0, y) \in \partial\Omega$, $(x_1, y) \in \Omega$ である．Baernstein-Taylor の定理で扱った形の Ω の場合は, $\Omega'' = \emptyset$ であり, 上の境界条件を考える必要がないことに注意しておこう．

(3.3.23)–(3.3.25) の左辺は $-\infty$ となることを許す．但し (3.3.23) において u は Ω 上, 局所 (本質的に) 的に下に有界と仮定する．また (3.3.24) (または (3.3.25)) において右辺は各 $(x_1, y) \in \Omega$ で $y \in \Omega'$(または Ω'') となるものについて有限値と仮定する．

これらの境界条件は特に u が Green 函数のときのように $u \geq 0$ in Ω で $u(\xi) \to 0(\xi \to \partial\Omega)$ のならば満たされる．しかし上記の条件では u が各切片 $\Omega(y)$ において inf を $\partial\Omega(y)$ でとることを課するが, この inf が y について変化しても良い．

以上の準備のもとに Baernstein-Taylor の定理の一般化を述べよう．

定理 3.3.4 $u \in L^1_\ell(\Omega)$ は Ω 上

$$-\Delta u = \phi(u) + \lambda \tag{3.3.26}$$

をみたし, $m = 0$ (*Schwarz* または *spherical symmetrization*) のときは境界条件 (3.3.23), (k, n)-*Steiner symmetrization* の場合は (3.3.24) (k, n)-*cap symmetrization* の場合は (3.3.25) をみたすとする．また $\phi \in C(u(\Omega))$, $\phi(u) \in L^1_\ell(\Omega)$, $\phi(u^{\#}) \in L^1_\ell(\Omega^{\#})$ が成り立つとし $\lambda \in M_\ell(\Omega)$ は $\lambda^+(\Omega) < \infty$ をみたすとする．このとき

$$\mathcal{B}(u^I) \leq J(\phi(u^{\#})) + \lambda^I, \quad in\ \Omega^I. \tag{3.3.27}$$

が成り立つ．

3.4 一般化された定理の証明

本節では Baernstein [14] に従って, 前節で述べた定理の証明の概要を述べよう．

定理 3.3.4 の (k,n)-Steiner symmetrization の場合をはじめに述べ, それから cap の場合にどのような修正を施せば良いかを述べる. また $1 \le k \le n-1$ と仮定する ($k=n$ の Schwarz symmetrization の場合はもっと簡単であるから省略する).

Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とし $n \ge 2$ とする. また $u \in L^1_\ell(\Omega)$ は境界条件 (3.3.24) と $-\Delta u = \phi(u) + \lambda$ を Ω 上, 超函数の意味でみたすとする. ここに $\lambda \in M_\ell(\Omega)$, $\lambda^+(\Omega) < \infty$, $\phi \in C(u(\Omega))$, $\phi(u) \in L^1_\ell(\Omega)$, $\phi(u^\#) \in L^1_\ell(\Omega^\#)$ そして $\#$ は (k,n)-Steiner symmetrization を表わすとする. この場合の作用素 $\mathcal{B}$ は領域 $\Omega^I \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 上の函数に作用し具体的な形は

$$\mathcal{B}f(s,y) = -s^{k-1}\frac{\partial}{\partial s}(s^{1-k}\frac{\partial f}{\partial s}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2},\ \ (s,y) \in \Omega^I \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}^m$$

となる. 次に Ω(または $\Omega^\#$) 上の函数 f, g について内積を $\langle f,g\rangle_\Omega \equiv \int_\Omega fgd\mu_n$ (または $\langle f,g\rangle_{\Omega^\#} \equiv \int_{\Omega^\#} fgd\mu_n$) とおく. 同様に $\langle f,g\rangle_{\Omega^I} \equiv \int_{\Omega^I} fgd\mu_{m+1}$ とおく. さて Ω^I の内積について $\mathcal{B}$ の共役 ${}^t\mathcal{B}$ を計算すると $F, G \in C^\infty(\Omega^I)$ で F, G の少なくとも 1 つが compact support であるとして $\langle \mathcal{B}F, G\rangle_{\Omega^I} = \langle F,\ {}^t\mathcal{B}G\rangle_{\Omega^I}$ より

$$({}^t\mathcal{B}F)(s,y) = -\frac{\partial}{\partial s}(s^{1-k}\frac{\partial}{\partial s}(s^{k-1}F)) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}$$

となる. 従って定理 3.3.4 の結論は任意の $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$, $G \ge 0$ について,

$$\langle u^I, {}^t\mathcal{B}G\rangle \le \langle J(\phi(u^\#)), G\rangle + \langle \lambda^I, G\rangle \tag{3.4.28}$$

と成り立つことである. ここで $\lambda^I = \lambda_a^I + (\tau^+)^I$ で $(\tau^+)^I$ は $m+1$ 次元 Lebesgue 測度と特異であることを思い出そう. このとき上式において $\langle \lambda^I, G\rangle = \langle \lambda_a^I, G\rangle + \langle (\tau^+)^I, G\rangle$ で, $\langle (\tau^+)^I, G\rangle = \int_{\Omega^I} G\ d((\tau^+)^I)$ である. またこの場合の J については $f \in L^1_\ell(\Omega^\#)$ について

$$Jf(s,y) = \int_{B_k(s)} f(x,y)\, d\mu_k(x)$$

と表わすことができる. また $u^I = Ju^\#$ も成り立つ.

さて $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$ について $\Omega^\#$ 上の函数 g を

$$g(x,y) = \int_{|x|}^\infty G(s,y)ds, \quad x \in \Omega^\#(y),\ \ y \in \Omega', \tag{3.4.29}$$

とおく. 但し $|x|^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$ であり $\mathbb{R}^{m+1}\backslash\Omega^I$ では $G \equiv 0$ としてあらかじめ拡張しておく. このとき $g \in C_0^\infty(\Omega^\#)$ について

$$\begin{cases} \langle Jf, G\rangle_{\Omega^I} = \langle f, g\rangle_{\Omega^\#}, \quad \forall\ f \in L^1_\ell(\Omega^\#), \\ \\ \langle \lambda^I, G\rangle_{\Omega^I} = \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#}, \\ \\ \langle u^I, {}^t\mathcal{B}G\rangle_{\Omega^I} = \langle Ju^\#, {}^t\mathcal{B}G\rangle_{\Omega^\#} = -\langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} \end{cases} \tag{3.4.30}$$

が成り立つことは, 定理 3.2.3 の証明の時と同様な計算により示される. 従ってこの場合に定理 3.3.4 の結論は任意の $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$, $G \ge 0$ について g を (3.4.29) で定義する時

$$-\langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} \le \langle \phi(u^\#), g\rangle_{\Omega^\#} + \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#} \tag{3.4.31}$$

が成り立つこととなる．ここで g が $|x|$, y にのみ依存し $|x|$ について減少し support が compact であることより, (k,n)-Steiner symmetrization について定理 3.3.4 を示すには

問題 3.4.1 $g(x,y) \in C_0^\infty(\Omega^\#)$ が対称かつ減少, つまり $|x|$, y のみに依存し $|x|$ の減少函数であるときに

$$-\langle u^\#, \Delta g\rangle_{\Omega^\#} \le \langle \phi(u^\#), g\rangle_{\Omega^\#} + \langle \lambda^\#, g\rangle_{\Omega^\#}$$

が成り立つことを示せ.

という問題を肯定的に解けば良い.

さて上の問題の仮定を満たす g と $\varepsilon > 0$ が与えられたとしよう．このとき δ_1, δ_2, δ_3 を g, ε, Ω, u and ϕ に依存する十分小さな正の数とする．δ_1, δ_2, δ_3 の依存の仕方は後で述べることにして先に進もう.

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω_1, Ω_2 を $\mathrm{supp}\, g \subset\subset \Omega_1^\#$, $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega^\#$ となるようにとる．また $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le Q \le 1$ を $\overline{\Omega}_2$ で $Q = 1$ かつ $\mathrm{supp}\, Q \subset\subset \Omega$ となるようにとる. $u_1 = u + \delta_1 Q$ とおく．u は境界条件 (3.3.24) をみたすので, 開集合 Ω_3 を $\Omega_2 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega$ かつ

(3.4.32)　$\text{ess sup}\ \{u_1(x,y) : x \in \Omega(y)\backslash\Omega_3(y)\} < \text{ess inf}\ \{u_1(x,y) : x \in \Omega_2(y)\}$

が $\forall\, y \in \mathbb{R}^m$ で $\Omega^\#(y) \cap (\mathrm{supp}\ g) \ne \emptyset$ となるものについて成り立つようにとる.

次に開集合 Ω_i, $i = 4,5,6,7$ を $\Omega_{i-1} \subset\subset \Omega_i \subset\subset \Omega$ となるようにとり固定する．また $K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $K \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} K = 1$, $\mathrm{supp}\, K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $K(x) = M(|x|)$ で M は $[0,\infty)$ の減少函数となるようにとる． また $K_\delta(x) = \delta^{-n} K(x\delta^{-1})$ とおき $u_2 = K_{\delta_2} * u_1$ とおく．ここで $*$ は畳み込みを表わす．このとき十分小さなすべての δ_2 について u_2 は $C^\infty(\overline{\Omega}_7)$ また上の (3.4.32) より十分小さなすべての δ_2 について

(3.4.33)　$\sup\{u_2(x,y) : x \in \Omega(y)\backslash\Omega_4(y)\} < \inf\{u_2(x,y) : x \in \Omega_1(y)\}$

が $\forall\, y \in \mathbb{R}^m$ で $\Omega^\#(y) \cap (\mathrm{supp}\ g) \ne \emptyset$ となるものについて成り立つ.

次に p を $x_1, \ldots, x_n$ の多項式で $\overline{\Omega}_7$ 上 C^1 の意味で $(u_2)_{x_1x_1}$ に十分近く各 $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ を固定するとき $x_1 \mapsto p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は恒等的に 0 ではないとする．このような多項式が多項式全体の中で稠密であることは, まず Weierstarass の多項式近似定理より $(U_2)_{x_1x_1}$ に十分近い多項式 p_0 をとり, 十分小さい a について p_0 の次数より高い単項式 ax_1^α を p_0 に加えたものを p とすれば良い．ここで Ω_7 上の函数 u_3 を $u_3 = u_2 + q$ とおく．但し $q \in C^\infty(\Omega_7)$ は $q_{x_1x_1} = p - (u_2)_{x_1x_1}$ を満たし, かつ 2 階までのすべての偏微分の $\overline{\Omega}_6$ 上の $\|\ \ \|_\infty$-ノルムが $< \delta_3$ となるとする．このとき十分小さなすべての δ_3 について

(3.4.34)　$\sup\{u_3(x,y) : x \in \Omega(y)\backslash\Omega_4(y)\} < \inf\{u_3(x,y) : x \in \Omega_1(y)\}$

が $\Omega^\#(y) \cap (\mathrm{supp}\ g) \ne \emptyset$ となる任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つ．さらに $(u_3)_{x_1x_1} = p$ である．多項式 p と u_3 が C^∞ 級であることから, 各 $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ と各 $t \in u_3(\Omega_7)$

について集合

$$\{x_1 \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_7 \quad \text{and} \quad u_3(x_1, \ldots, x_n) = t\}$$

は離散的であるから, 1 次元 Lebesugue 測度が 0 となる. よって Fubini の定理より $\forall\ (y, t) \in \mathbb{R}^m \times u_3(\Omega_7)$ について

$$\mu_k(\{x \in \Omega_7(y) : u_3(x, y) = t\}) = 0, \tag{3.4.35}$$

但し μ_k は k 次元 Lebesgue 測度を表わす.

ここで $v = u_3$ とおこう. $\mathbb{R}^n$ の 開集合 U 上の C^2 函数 h について Taylor's 展開を用いて

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{K_\delta * h - h}{\delta^2} = \frac{b}{2n} \Delta h, \quad b = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 K(x)\, d\mu_n(x) \tag{3.4.36}$$

が局所一様に成り立つことがわかる. この結果を g に適用すると, supp g は compact であるから

$$\frac{b}{2n} \langle v^\#, \Delta g \rangle = \lim_{\delta \to 0} \langle v^\#, \frac{K_\delta * g - g}{\delta^2} \rangle, \tag{3.4.37}$$

が成り立つ. 但し $^\#$ は v の制限 $v|_{\Omega_5}$ の symmetrization を表わすとする.

次に v を用いて g の rearrangement h を構成しよう. Baernstein-Taylor の定理の証明の時と同じように, 命題 1.4.1 と各固定した y について measure preserving map $\psi_y : \Omega_5(y) \to [0, \mu_k(\Omega_5(y)]$ が存在する. よって $\psi(x, y) = (\psi_y(x), y)$ とおくと, ψ は Ω_5 から $\Omega_5^* = \cup_{y \in Y_5} [0, \mu_k(\Omega_5(y))] \times \{y\}$ $(Y_5 = \{(y : \Omega_5(y) \neq \emptyset\})$ への measure preserving map である. また $g_0 : \Omega_5 \to \mathbb{R}$ を $g_0(t, y) = g(x, y)$, $t = \int_{B_k(|x|)} d\mu_k$ とし, $h : \Omega_5 \to \mathbb{R}$ を, $h(x, y) = g_0 \circ \psi(x, y)$ とおくと,

$$\int_{\Omega_5^\#(y)} \psi(v^\#) g(x, y)\, d\mu_k(x) = \int_{\Omega_5(y)} \psi(v) h(x, y)\, d\mu_k(x) \tag{3.4.38}$$

が任意の Borel 可測な函数 ψ で $\psi(v) \in L^1_\ell(\Omega_5)$ かつ $\psi(v^\#) \in L^1_\ell(\Omega_5^\#)$ と任意の $y \in \mathbb{R}^m$ について成り立つ. また (3.4.35) 式 と注意 1.4.1 より ψ は連続となるから, h も連続で, $h^\# = g$ である. さらに supp $g \subset\subset \Omega_1^\#$ であるから (3.4.34) より supp $h \subset \Omega_4 \subset\subset \Omega_5$ となることがわかる.

さて系 2.3.7 より

$$\langle v * K_\delta, h \rangle_{\Omega_5} \leq \langle v^\# * K_\delta,\ g \rangle_{\Omega_5^\#} = \langle v^\#, K_\delta * g \rangle_{\Omega_5^\#} \tag{3.4.39}$$

が成り立つ. (3.4.38) より $\langle v^\#, g \rangle_{\Omega_5^\#} = \langle v, h \rangle_{\Omega_5}$ が成り立つから, 上式と合わせて

$$\langle v^\#,\ K_\delta * g - g \rangle_{\Omega_5^\#} \geq \langle K_\delta * v - v,\ h \rangle_{\Omega_5} \tag{3.4.40}$$

が成り立つ. v は supp h で C^2 級であるから (3.4.36) と同様に

$$\lim_{\delta \to 0} \langle \frac{K_\delta * v - v}{\delta^2}, h \rangle_{\Omega_5} = \frac{c}{2n} \langle \Delta v, h \rangle_{\Omega_5^\#} \tag{3.4.41}$$

が成り立つ. (3.4.37) と上の 2 式より

$$\langle v^{\#}, \Delta g\rangle_{\Omega_5^{\#}} \geq \langle \Delta v, h\rangle_{\Omega_5} \tag{3.4.42}$$

となる.

ここで $v = u_3$ であることを思い出そう. $K_{\delta_2} = K$ とおけば Ω_7 において

$$-\Delta v = \phi(u) * K + \lambda * K - \delta_1 \Delta(Q * K) - \Delta q \tag{3.4.43}$$

であるから. (3.4.42) より

$$\begin{aligned} &-\langle v^{\#}, \Delta g\rangle_{\Omega_5^{\#}} \\ \leq\ & \langle \phi(u) * K, h\rangle_{\Omega_5} + \langle \lambda * K, h\rangle_{\Omega_5} - \delta_1 \langle \Delta(Q * K), h\rangle_{\Omega_5} - \langle \Delta q, h\rangle_{\Omega_5} \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

となる.

さて問題 3.4.1 の不等式を示す為には δ_1, δ_2, δ_3 を決定しなければならない. これには

$$|\langle v^{\#} - u^{\#}, \Delta g\rangle_{\Omega_5^{\#}}| < \varepsilon/5, \tag{3.4.45}$$

$$\langle \phi(u) * K, h\rangle_{\Omega_5} < \langle \phi(u^{\#}), g\rangle_{\Omega_5^{\#}} + \varepsilon/5, \tag{3.4.46}$$

$$\langle \lambda * K, h\rangle_{\Omega_5} < \langle \lambda^{\#}, g\rangle_{\Omega_5^{\#}} + \varepsilon/5 \tag{3.4.47}$$

$$|\delta_1 \langle \Delta(Q * K), h\rangle_{\Omega_5}| < \varepsilon/5, \tag{3.4.48}$$

$$|\langle \Delta q, h\rangle_{\Omega_5}| < \varepsilon/5. \tag{3.4.49}$$

が成り立つようにとる. (3.4.48) については δ_1 を十分小さくとればよい. (3.4.49) については $(u_2)_{x_1x_1}$ を近似する多項式 p を十分近くとればよい. (3.4.47) については $|\langle \lambda * K_{\delta_2}, h\rangle_{\Omega_5} - \langle \lambda, h\rangle_{\Omega_5}| < \varepsilon/5$ となるように δ_2 を小さくとれば $\langle \lambda, h\rangle_{\Omega_5} \leq \langle \lambda^{\#}, h^{\#}\rangle_{\Omega_5^{\#}} = \langle \lambda, g\rangle_{\Omega_5^{\#}}$ が成り立つことからこうとれる. (3.4.46) については $|\langle \phi(u) * K - \phi(u), h\rangle_{\Omega_5}|$ $|\langle \phi(u) - \phi(v), h\rangle_{\Omega_5}|$ と $|\langle \phi(u^{\#}) - \phi(v^{\#}), g\rangle_{\Omega_5^{\#}}|$ が十分小さくなるようにすれば $\langle \phi(v), h\rangle_{\Omega_5} = \langle \phi(v^{\#}), g\rangle_{\Omega_5^{\#}}$ となることから従う. (3.4.45) についても u と v が十分近ければ $u^{\#}$ と $v^{\#}$ も十分近いことが, 示せるのでこのようにできる.

これらの不等式が示されたとすると (3.4.44) と合わせて $-\langle u^{\#}, \Delta g\rangle \leq \langle \phi(u^{\#}), g\rangle + \langle \lambda^{\#}, g\rangle + \varepsilon$ となる. よって問題 3.4.1 が肯定的に解かれた.

今度は (k, n)-cap symmetrization の場合を考えよう. $1 \leq k \leq n-1$ とする. $\xi \in \mathbb{R}^n$ を $\xi = (x, r, w)$, $x \in S^k$, $r \in [0, \infty)$, $w \in \mathbb{R}^{m-1}$ と分解して表わす. また $\Omega^I \subset (0, \pi) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ の点については $\xi = (s, r, w)$ と表わす. Ω^I の函数 f, g について $\langle f, g\rangle_{\Omega^I}$ で Ω^I 上で $f \cdot g$ の $r^k dr ds d\mu_{m-1}(w)$ による積分を表わす. 但し $d\mu_{m-1}$ は $m-1$ 次元 Lebesgue 測度である. $m = 1$ のときは w に関する部分は省略して考えることに注意する. さてこの場合の $\mathcal{B}$ の表示は

$$\mathcal{B} = -r^{-2}\left((\sin s)^{1-k} \frac{\partial}{\partial s}((\sin^{k-1} s)\frac{\partial}{\partial s}\right) - r^{-k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k \frac{\partial}{\partial r}\right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial w_i^2}.$$

である. ${}^t\mathcal{B}$ については

$$ {}^t\mathcal{B}f = -r^{-2}\frac{\partial}{\partial s}\left[(\sin^{1-k} s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin^{k-1} sf\right)\right] - r^{-k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2 f}{\partial w_i^2} $$

となる. $\Omega^{\#}$ または Ω 上の函数 f_1, f_2 については $\langle f_1, f_2\rangle$ は $f_1 \cdot f_2$ の n 次元 Lebesgue 測度に関する積分とする. このとき (3.4.30) が成り立つ. 但しこの場合 $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$ について g は

$$ g(x,r,w) = \int_{\rho(x)}^{\pi} G(s,r,w)ds, \quad \rho(x) = \cos^{-1} x_1 $$

である. よってこの場合に定理を証明するには

問題 3.4.2 u が境界条件 (*3.3.25*) をみたし, 超函数の意味で $-\Delta u = \phi(u) + \lambda$ が成り立つとする. $g(x,r,w) \in C_0^\infty(\Omega^{\#})$ が *symmetric decreasing* つまり x_1, r, w のみに依存し $\cos^{-1} x_1$ の減少函数のときに

$$ -\langle u^{\#}, \Delta g\rangle_{\Omega^{\#}} \le \langle \phi(u^{\#}), g\rangle_{\Omega^{\#}} + \langle \lambda^{\#}, g\rangle_{\Omega^{\#}} $$

が成り立つことを示せ.

という問題に帰着される. Steiner symmetrization の場合の証明を修正してこの場合の証明を行うには, 2 つの点にのみ変更を加えれば良い. はじめに (3.4.32) と (3.4.34) は Ω'' のある近傍に属する y について成り立てば十分である. そして u_3 を構成するときに用いた p と q を適当に修正しなければならない. これは読者の演習問題としておく. このとき u_2 は level sets が測度 0 となるような u_3 で近似できる. 残りの部分は前と同様である. □

注意 3.4.3 定理 3.3.4 類似の結果が *Laplacian* を強楕円型の作用素についても成り立つ. また 放物型の作用素についても成り立つ. これらの結果については *Baernstein* [*14*] に解説がある. 但し証明は概略しか書かれていない. 詳細な証明は現在 (1994 年秋) *Baernstein* 本人が *symmetrization* についての著書を執筆中とのことでそこで解説すると予告されている. もっとも [*14*] では, 定理 3.3.4 の証明自体も概略しか書かれておらず, 上記の証明はできうる限り細部を補ったつもりであるが, 怪しげな部分がかなり残っている. 興味のある読者は [*14*] に直接挑戦してみてほしい.

第4章　偏微分方程式の比較定理

この章では偏微分方程式の比較定理を Baernstein [14] に従って証明抜きで述べる. まず §4.1 では, 比較定理を導く I 函数についての majorization について述べ. §4.2 で比較定理を述べる.

4.1　I-function の mjorization

$^{\#}$ で (k,n)-Steiner または (k,n)-cap symmetrization を表わすとし $1 \leq k \leq n-1$ とする. Schwarz と spherical symmetrization つまり $k=n$ の場合は同じ方法でより簡単に議論が展開できるので省略する. また同様な理由から $n \geq 2$ とする. $m = n-k$ とおく. 以下, 第 3 章の記号を断わり無く用いる.

定理 4.1.1 $u \in L^1_\ell(\Omega)$, $v \in L^1_\ell(\Omega^{\#})$ がそれぞれ Ω と $\Omega^{\#}$ で

(4.1.1) $$-\Delta u = \phi(u) + \lambda, \quad -\Delta v = \phi(v) + \ \Lambda$$

を超函数の意味でみたすとする. ここに

(4.1.2) $$\phi \quad \text{は } u(\Omega) \cup v(\Omega^{\#}) \text{ 上, 減少かつ凸}$$

とし

(4.1.3) $$\begin{aligned} &\lambda \in M_\ell(\Omega), \quad \lambda^+(\Omega) < \infty, \\ &\Lambda \in M_\ell(\Omega^{\#}), \quad \text{で} \quad \lambda^I \leq J\Lambda \quad on \quad \Omega^I, \end{aligned}$$

(4.1.4) $$u \quad \text{は境界条件 (3.3.24) または (3.3.25) をみたす}$$

また u, v は

(4.1.5) $$\limsup\nolimits_{\Omega \ni \xi \to (x_0,y)} u(\zeta) \leq \liminf\nolimits_{\Omega^{\#} \ni \xi \to (x_1,y)} v(\zeta) \in \mathbb{R}$$

を任意の $y \in \Omega'$ と, $(x_0,y) \in \partial\Omega$ と $(x_1,y) \in \partial\Omega^{\#}$ となる x_0, x_1 についてみたし.

(4.1.6) $$\limsup\nolimits_{\Omega^I \ni \xi \to (s_0,y)} (u^I(z) - Jv(z)) \leq 0$$

を任意の $y \in \partial(\Omega') \cap \mathbb{R}^m$ と $(s_0,y) \in \partial(\Omega^I)$ についてみたす. また Ω' が非有界のときは

(4.1.7) $$\limsup\nolimits_{n \to \infty} (u^I(s_n,y_n) - (Jv)(s_n,y_n)) \leq 0$$

を Ω^I 内の任意の数列 $\{(s_n,y_n)\}$ で $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ となるものについて満たすとする. さらに (k,n)-*cap symmetrization* の場合で $Z \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ のときは, 各 $\xi_0 \in Z \cap \partial\Omega$ について

(4.1.8) $$\limsup\nolimits_{\Omega \ni \xi \to \xi_0} u(z) \leq \liminf\nolimits_{\Omega^{\#} \ni \xi \to \xi_0} v(z) \in \mathbb{R}^n.$$

をみたすとする．以上の仮定の下で

$$u^I(s,y) \le Jv(s,y), \quad \forall \quad (s,y) \in \Omega^I. \tag{4.1.9}$$

が成り立つ．

4.2 偏微分方程式の比較定理

さて $Jv \le Jv^{\#} = v^I$ であるから前節の定理 4.1.1 の仮定の下で

$$u^I(s,y) \le v^I(s,y), \quad \forall \quad s \in \Omega^I(y) \tag{4.2.10}$$

が成り立つ．$f(x,y)$, $g(x,y)$ の y を固定して x についての decreasing rearrangement を $f^*(t,y)$, $g^*(t,y)$ で表わすことにすると, (4.2.10) は $\int_0^x f^*(t,y)dt \le \int_0^x g^*(t,y)dt$ が成り立つことを意味する．これと次の命題を組み合わせると比較定理を導くことができる．

命題 4.2.1 2 つの測度空間 (X_i,μ_i), $i=1,\,2$ が与えられていて, $\mu_1(X_1)=\mu_2(X_2)$ を満たすとする．また f_i, $i=1,2$ はそれぞれの空間上の可積分函数とし, ともに**仮定 1.** をみたすとする．このとき次の 3 条件は同値．

1) 任意の増加凸函数 $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で, ある区間 $(-\infty,M]$ で恒等的に 0 となるものについて
$$\int_{X_1}\Phi(f_1(x))\,d\mu(x) \le \int_{X_2}\Phi(f_2(x))\,d\mu(x)$$

2)
$$\int_{X_1}[f_1(x)-t]^+\,d\mu(x) \le \int_{X_2}[f_2(x)-t]^+\,d\mu(x), \ \ \forall \ \ t\in\mathbb{R}$$

3) $f_1^I \le f_2^I$ すなわち
$$\int_0^s f_1^*(t)\,dt \le \int_0^s f_2^*(t)\,dt, \ \ \forall \ \ s\in(0,\mu_i(X_i)).$$

定義 4.2.2 一般に f_1, f_2 が上の命題の条件の 3) をみたすとき $f_1 \prec f_2$ と表わし, *Hardy-Littlewood-Pólya* の意味で f_1 は f_2 に *dominate* されるという．

命題 4.2.1 の証明. 1) $\Longrightarrow$ 2) は明らかであろう．2) $\Longrightarrow$ 3) を示す．s_0, $0<s_0<\mu_i(X_i)$ をとる．2) において $t=f_2^*(s_0)$ とおき f_1^*, f_2^* は減少函数であることから

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_0} f_1^*(s)\,ds &= \int_0^{s_0}[f_1^*(s)-t]\,ds + ts_0 \\
&\le \int_0^{\mu_1(X_1)}[f_1^*(s)-t]^+\,ds + ts_0 \\
&= \int_{X_1}[f_1(x)-t]^+\,d\mu_1(x) + ts_0 \\
&\le \int_{X_2}[f_2(x)-t]^+\,d\mu_2(x) + ts_0 \\
&= \int_0^{\mu_2(X_2)}[f_2^*(s)-f_2^*(s_0)]^+\,ds + f_2^*(s_0)s_0 = \int_0^{s_0} f_2(s)\,dt
\end{aligned}$$

となり, 3) が成り立つ. 次に 3) $\Longrightarrow$ 2) を示そう. 3) において $s \uparrow \mu_i(X_i)$ として $\int_0^{\mu_1(X_1)} f_1^*(t)\,dt \le \int_0^{\mu_2(X_2)} f_2^*(t)\,dt$ より, $\int_{X_1} f_1(x)\,d\mu_1(x) \le \int_{X_2} f_2(x)\,d\mu_2(x)$ が成り立つから, $t = t_0 < \text{ess sup } f_1$ について 2) を示せば良い. このとき $f_1^*(s_0-0) \ge t_0 \ge f_1^*(s_0+0)$ となる s_0 ををとると

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} [f_1(x) - t]^+ \, d\mu_1(x) &= \int_0^{\mu_1(X_1)} [f_1^*(s) - t_0]^+ \, ds \\
&= \int_0^{s_0} [f_1^*(s) - t_0] \, ds \\
&= f_1^I(s_0) - t_0 s_0 \\
&\le f_2^I(s_0) - t_0 s_0 \\
&= \int_0^{s_0} [f_2^*(s) - t_0] \, ds \\
&\le \int_0^{\mu_2(X_2)} [f_2^*(s) - t_0]^+ \, ds = \int_{X_2} [f_2(x) - t_0]^+ \, d\mu_2(x)
\end{aligned}$$

となる.

最後に 2) $\Longrightarrow$ 1) を示そう. Φ は, ある区間 $(-\infty, -M]$ において恒等的に α に等しいとして良い. このとき Φ' が増加函数ゆえ $\mathbb{R}$ 上の測度 μ を $\mu((-\infty, s)) = \Phi'(s - 0)$ となるようにとれば

$$\begin{aligned}
\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} \Phi'(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{s} \Phi'(t)\,d(s-t) \\
&= \int_{-\infty}^{s} (s-t)\,d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [s-t]^+ \, d\mu(t)
\end{aligned}$$

となる. よって 2) と合わせて

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} \Phi(f_1(x))\,d\mu_1(x) &= \int_{X_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x) - t]^+ \, d\mu(t) \right\} d\mu_1(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{X_1} [f_1(x) - t]^+ d\mu_1(x) \right\} d\mu(t) \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{X_2} [f_1(x) - t]^+ d\mu_2(x) \right\} d\mu(t) \\
&= \int_{X_2} \Phi(f_2(x))\,d\mu_2(x)
\end{aligned}$$

となる.

注意 4.2.3 $\mu_i(X) < \infty$ のときは, 条件 1) において "ある区間 $(-\infty, M]$ で恒等的に 0" を省いてできる条件を $1'$) とすると $1'$) , 2), 3) が同値になる.

定理 4.2.4 u, v は定理 4.1.1 の仮定を満たすとする. このとき *Steiner symmetrization* の場合は任意の増加凸函数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, ある区間 $(-\infty, M]$ で恒等的に 0 となるものについて

$$\int_{\Omega(y)} \Phi(u(x,y)) \le \int_{\Omega^{\#}(y)} \Phi(v(x,y)) \tag{4.2.11}$$

が殆どすべての $y \in \Omega'$ について成り立つ. また *spherical symmetrization* の場合は任意の増加凸函数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について

$$\int_{\Omega(r,w)} \Phi(u(x,y)) \le \int_{\Omega^{\#}(r,w)} \Phi(v(x,y)) \tag{4.2.12}$$

が殆どすべての $(r, w) \in \Omega'$ について成り立つ.

注意 4.2.5 *Baernstein* [*14*] には, 上の定理以外に様々な比較定理が載っている. また Δ を, もっと一般の強楕円型偏微分作用素についての拡張や, 放物型方程式での類似の結果についても載っている. しかし残念ながら証明は粗筋のみしか書かれておらず, 読むのに大変な困難が伴う. *Baernstein* 自身が現在執筆中の *symmetrization* に関する著書の公刊が待たれる. 尚, 比較定理については [*1*], [*2*], [*3*] とこれらの *reference* の部分を参照のこと.

第II部

函数論への応用

第5章　値分布論への応用

5.1　Nevanlinna 理論

Baernstein の $*$-function (Part I での I-function と一致する．Appendix を参照) は, 複素函数論の数多くの領域における極値問題を解く上で決定的な役割を果たすことが知られている (cf. [8])．ここではその内の Nevanlinna 理論，即ち全有限平面上の有理型函数の値分布論において, Baernstein の ‘spread relation’ として知られている定理の証明について見る．この定理は実際には, より一般的に, 平面で劣調和函数の差として表わされるもの — δ-subharmonic functions— に対し拡張される (例えば Hayman [52] Vol. II を参照)．また殆どの文献で $*$-function ははこの設定で述べられている．然しながら，我々は敢えて他の領域への応用については考慮せず, 視点を Nevanlinna 理論の立場で固定する．その理由は, $*$-function が初めて導入されたのが 1971 年に発表された記念すべき論文 [5] 中であること, そこでの初期の定義, 導入の必然性, その性質と極値問題との関わりについて述べるのがここでの中心的な目的となること, そして一般化された設定でも $*$-function の有する性質は本質的には不変で初期の精神はそのまま継承されていると考えること (これについては Baernstein [7], Baernstein and Taylor [15] およびこれまでの章を参照して戴きたい) 等である．

ではまず, spread relation を理解する為に必要となる Nevanlinna 理論の基本的な部分についての最低限の解説から始めよう．

Nevannlinna 理論は, 1925 年に Rolf Nevanlinna が Picard の定理を一般化すべく, それ以前に知られていた諸結果を統一発展させた壮大な理論である．その基本的結果やそこで用いられる記号の詳細については, Hayman [50], Nevanlinna [62], [63], [64] 小澤 [66] 等を参照のこととする．また最近刊行された L. Yang [79] では, この理論の解説に加えこれから述べようとする結果とその証明の詳細を含む章 (第 7 章) が設けられていることを言明しておく．この事実を常に念頭に置いて, 話を進めよう．Spread relation の応用についても, この文献の参照をお勧めする．

さて, 以下の議論において必要最小限な記号と主要定理のみ述べておく．

全有限平面 $\mathbb{C}$ で有理型な函数 $f(z)$ に対し, 各円周 $|z| = r$ 上での平均

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \quad \log^+ x = \max(\log x,\ 0)$$

を考え, これを f の <u>近接函数</u> と呼ぶ．また円板 $|z| \le t$ 内にある $f(z)$ の極をその重複

度に応じて数えた個数を $n(t,f)$ と書いて,

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt + n(0,f)\log r$$

により定義される函数を $f(z)$ の極についての 個数函数 という. 更にこれら 2 つの函数の和を $f(z)$ の 特性函数 と呼び $T(r,f)$ で表わす.

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

函数 $f(z)$ の代わりに $1/(f(z)-a)$, $a \in \mathbb{C}$, を考えるとき, 以上の 3 つの函数は $m(r,a;f)$, $N(r,a;f)$ 及び $T(r,a;f)$ と記されることもある. $T(r,f)$ の重要な性質の 1 つは, それが $\log r$ の増加凸函数であるということで, Cartan の等式を用いて示すことができる.

Nevanlinna 理論の根源は, 有理型函数の絶対値の対数 (従って劣調和函数の差!) に適用された Poisson-Jensen の公式にある. Jensen の公式から Nevanlinna の第一主要定理

$$T(r,a;f) = T(r,f) + \mathrm{O}(1) \quad (a \in \mathbb{C}), \ \ r \to \infty$$

が, そして Poisson-Jensen の公式を微分して得られる等式を用いた評価と Borel 型の不等式から Nevanlinna の第二主要定理

$$(q-2+\mathrm{o}(1))T(r,f) \le \sum_{\nu=1}^{q} N(r,a_\nu;f) + S(r,f), \quad r \to \infty$$

が得られる. ここで $\{a_\nu\}$ は相異なる $q(\ge 3)$ 個の $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の元, また $S(r,f)$ は 1 次元 Lebesgue 測度が高々有限の集合の外側で $r \to \infty$ としたとき $S(r,f) = \mathrm{o}\{T(r,f)\}$ をみたす量である. 函数 f の a-点 ($a \in \hat{\mathbb{C}}$) の個数の大小についての指標が 除外指数 (deficiency)

$$\delta(a,f) := \text{lim inf}_{r\to\infty} \frac{m(r,a;f)}{T(r,f)} = 1 - \text{lim sup}_{r\to\infty} \frac{N(r,a;f)}{T(r,f)}$$

として定義される. 第一主要定理からこの第二の等号と不等式 $0 \le \delta(a,f) \le 1$ が従い, 第二主要定理からは除外指数の総和 (total deficiency) に関する結果

$$\Delta(f) := \sum_{a\in\hat{\mathbb{C}}} \delta(a,f) \le 2 \tag{5.1.1}$$

が従う. この和で, 実際に $\delta(a,f) > 0$ となる a の値は高々可算個である. このような値 a を (Nevanlinna の) 除外値 (deficient value) という. 除外値の総数 $\nu(f)$ が無限である例を初めて与えたのが A.A. Goldberg である. この不等式 (5.1.1) こそ Picard の定理の一般化となるものであり, 等号が成立するという意味では最良の評価式である.

5.2 Spread conjecture

値 a が除外値である, 即ち $\delta(a,f) > 0$ とは何を意味するのか? 定義からは大雑把に "r の値が大であるとき各円周 $|z| = r$ 上のかなりの部分で $f(z)$ の値が a に近接する"

と言うことができる. このことをより定量的に述べるため, Edrei [31] は, 値 a に関する函数 $f(z)$ の spread という概念を導入して 'spread conjecture' を与えた. 同様な予想は独立に Teichmüller [76] も与えていたが, それは以下の様なものであった.

集合 $E(r,a) \subset (-\pi,\pi]$ を

$$E(r,a) = \begin{cases} \{\theta \in (-\pi,\pi] : |f(re^{i\theta}) - a| < 1\} & (a \in \mathbb{C}) \\ \\ \{\theta \in (-\pi,\pi] : |f(re^{i\theta})| > 1\} & (a = \infty) \end{cases}$$

と定義する. その 1 次元 Lebesgue 測度 $|E(r,a)|$ を $\sigma(r,a)$ と置くと $f(z)$ の劣位数 μ が有限であるとき

$$\limsup_{r\to\infty}\sigma(r,a) \geq \min\left(2\pi, \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\right) \tag{5.2.2}$$

が成り立つ. ここで $f(z)$ の位数 λ, 劣位数 μ とは

$$\lambda := \limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}, \quad \mu := \liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

で与えられる数値, $0 \leq \mu \leq \lambda \leq \infty$ である.

不等式 (5.2.2) は, (値 a に依存しても良い) 或る数列 $\{r_m\}$, $r_m \uparrow +\infty$ に対し, 各円周 $|z| = r_m$ 上で $\log^+|1/(f(re^{i\theta}) - a)| = \log|1/(f(re^{i\theta}) - a)|$ $(a \in \mathbb{C})$, または $\log^+|f(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})|$ $(a = \infty)$ となる偏角 $\theta \in (-\pi,\pi]$ が成す集合の Lebesgue 測度を考え, その下限を値 a の deficiency を用いて与えるものである. これに対し Edrei はより精密に, この数列 $\{r_m\}$ を函数 $f(z)$ にのみ関係して, 値 a には依存しない様にとることが可能であると予想した. これは Pólya peak という概念からもたらされる.

全有限平面における有理型函数の値分布は, 当然ながら無限遠点の近傍で調べられなければならない. 従って先に定義した m, N そして T-函数は, $r \to \infty$ のときでの漸近挙動が主に注目される. 専ら既知の函数との比が考察され, 除外指数, (劣) 位数もその例である. 然しながら Edrei と Fuchs は別々の函数ではなく $T(r,f)$ ならそれ自身との比較を考えることの重要性を逸早く認識し, それ以前にも用いられてはいた Pólya peak の概念を厳密に定義した上でその存在を証明 ([32]) して, (劣) 位数有限な函数について種々の精密な評価を得ることに成功している. この概念は, 適当な区間の列 $\{r_m{}', r_m{}'')\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ をとって, そこでの $T(r,f)$ の増大を Pólya peak 列 $\{r_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ における値 $T(r_m, f)$ と比較しようというものである.

定義 5.2.1 (Pólya peak) *正の数が成す非有界な単調増加列* $\{r_m\}$ *に対応して, 3 つの正数列* $\{r_m{}'\}$, $\{r_m{}''\}$, $\{\varepsilon_m\}$ *を以下の条件が 1 と 2 が満たされる様に見つけ出すことが可能なとき,* $\{r_m\}$ *は* $f(z)$ *の, 或は* $T(r) := T(r,f)$ *の位数* ρ *の Pólya peak 列と呼ばれる.*

1. $m \to \infty$ *のとき*

$$r_m{}' \to \infty, \quad \frac{r_m}{r_m{}'} \to \infty, \quad \frac{r_m{}''}{r_m} \to \infty, \quad \varepsilon_m \to 0;$$

2.

$$\frac{T(t)}{T(r_m)} \le \left(\frac{t}{r_m}\right)^{\rho}(1+\varepsilon_m) \quad ({r_m}' < t < {r_m}''). \tag{5.2.3}$$

Edrei [32] は $f(z)$ の劣位数 μ が有限ならば λ を $f(z)$ の位数として $\mu \le \rho \le \lambda$ を満たす有限値 ρ 全てに対し, $f(z)$ の位数 ρ の Pólya peak 列が存在することを証明した. (この形を第一種 Pólya peak 列 ということがある. これに対し不等式 (5.2.3) の向きが反対となるものを第二種の Pólya peak 列と呼ぶ. これは Shea [74] が導入し, Edrei の証明のアイデアを用いてその存在を示したものである. 函数 $T(r,f)$ が位数 ρ の Pólya peak 列 を持つ様な値 ρ の範囲の特徴付けは Drasin and Shea [26] で述べられている.)

Pólya peak 列を用いて, 改めて値 a についての spread $\sigma(a)$ を定義し, Edrei の Spread Conjecture, 即ち現在の Baernstein の Spread Relation について述べる. 次の定義は, Edrei [32] の考え方に基づいて Baernstein [5] が改めて与えたものである.

定義 5.2.2 (値 a についての spread $\sigma(a)$) $f(z)$ はその劣位数 μ が有限な $\mathbb{C}$ 上の有理型函数とせよ. $f(z)$ の位数 μ の *Pólya peak* 列 $\{r_m\}$ の 1 つを 固定する. 正値函数 $\Lambda(r)$ は

$$\Lambda(r) = \mathrm{o}\{T(r,f)\} \quad (r \to \infty) \tag{5.2.4}$$

を満たすとせよ. また

$$E_\Lambda(r,a) = \begin{cases} \{\theta : |f(re^{i\theta}) - a| < e^{-\Lambda(r)}\} & (a \ne \infty) \\ \\ \{\theta : |f(re^{i\theta})| > e^{\Lambda(r)}\} & (a = \infty) \end{cases}$$

により偏角の成す集合 $E_\Lambda(r,a) = E_\Lambda(r,a;f) \subset (-\pi,\pi]$ を与え,

$$\sigma_\Lambda(a) = \liminf_{m\to\infty} |E_\Lambda(r_m,a)|$$

と置く *(*ここでも以後でも*,* $|E|$ は集合 $E \subset (-\pi,\pi]$ の 1 次元 *Lebesgue* 測度を表わす*)* このとき

$$\sigma(a) = \inf_{\Lambda} \sigma_\Lambda(a)$$

と定める. ここで "inf" は条件 *(5.2.4)* を満たす正値函数 Λ 全体の集合上でとられる. この $\sigma(a) = \sigma(a,f)$ を値 a の *(Pólya peak* 列 $\{r_m\}$ に関する*) spread* と呼ぶ.

この定義から幾何学的な評価として

$$\sum_{a\in\hat{\mathbb{C}}} \sigma(a,f) \le 2\pi \tag{5.2.5}$$

が得られるが, これは除外指数の総和に関する結果 (5.1.1) に類似の不等式である. Edrei はこの除外指数と spread との間にある関係に気付き, 彼の "Spread Conjecture "

$$\sigma(a,f) \ge \min\left\{2\pi, \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\right\} \tag{5.2.6}$$

に到着したのである. Edrei 自身は [32] Theorem 2 において, 不等式 (5.2.6) の右辺が 2π であるときにはこの予想が正しいこと, またより一般的にもこれが '漸近的には' 成り立つことを示していた. この予想を完全に証明したのが Baernstein [5] であり, その際用いられたのが $*$-function という訳である. この Spread Relation (5.2.6) の証明によって Edrei が予てより懸案としていた μ に応じた $\Delta(f)$ の上限を求めるという問題が $0 \leq \mu \leq 1$ のときには完全に解決された (Edrei [34]).

Spread Relation (5.2.6) は最良の評価である. Baernstein [5] には, 与えらた $\delta(0 < \delta \leq 1)$ と $\mu(0 < \mu < \infty)$ に対して, 劣位数が μ の有理型函数 $f(z)$ で

$$\delta(\infty, f) = \delta, \quad \sigma(\infty, f) = \min\left\{2\pi, \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta}{2}}\right\}$$

となる例が与えられている. 更に Baernstein [9] ではSpread Relation に対する極値函数について特性函数の増大がその上で "正則" である様な集合の存在を証明している.

5.3 $*$-function と Spread Relation

さて今より Spread Relation について述べていく訳であるが, その前に, Baernstein 自身が [8] の中で $*$-function を導入する動機付けとなった Spread relation の証明のアイデアを簡略化して解説している箇所があるので, ここに引用しておきたい. そこでは状況が極めて単純化されているので, まずその説明をする. 函数 $f(z)$ は整函数でその劣位数 $\mu = 1$, また $a = \infty$ とする. 従って $\delta(\infty, f) = 1$ となり, (5.2.6) の右辺は π である. 更に問題を簡単にするために函数族

$$\mathcal{E} = \{f,\ \text{整函数}\ : T(r,f) \leq r\ \ (0 < r < \infty), \quad T(1,f) = 1\}$$

に対してのみ Spread relation(simple form) を証明する. ここで

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

であり, 値 ∞ についての f の spread を

$$\sigma(f) = \{\theta \in (-\pi, \pi) : |f(e^{i\theta})| \geq 1\}$$

で定義する.

問題 5.3.1

1. $\inf_{f \in \mathcal{E}} |\sigma(f)|$ を求めよ.
2. 函数 $g(z) = \exp(\pi z)$ は族 $\mathcal{E}$ の元で $T(r,g) = r$ を満たしており, これが 1. の極値函数であることを示せ.

この問題 *1.* の解が Spread relation(simple form) で

$$f \in \mathcal{E} \Longrightarrow |\sigma(f)| \geq \pi$$

となる.

証明. **Case 1)** $\sigma(f) = [-\theta_0, \theta_0]$ のとき.
上半平面 $\mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ の閉包で定義される函数 $F(z)$ を

$$F(re^{i\theta}) = \int_{-\theta}^{\theta} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

で定義する. そのとき

$$F(e^{i\theta_0}) = 2\pi T(1, f) = 2\pi \tag{5.3.7}$$

である.

ところで, もし $h(z)$ が $\mathbb{C}$ 内の調和函数であれば, 簡単な計算から不定積分 $\int_{-\theta}^{\theta} h(re^{i\varphi})d\varphi$ は $\mathbb{C}^+$ 内で調和であることが示される. 函数 $\log|f(z)|$ は $\mathbb{C}$ で 劣調和であるからほんの少し面倒ではあるが $F(z)$ は $\mathbb{C}^+$ 内で劣調和となることも証明される.

$G(z)$ は $f = g$ として与えられた上記の函数とせよ. このとき $G(z)$ は $\mathbb{C}^+$ で調和である. $r > 0$ については $F(r) = G(r) = 0$, また $F(ir) \leq 2\pi T(r, f) \leq 2\pi r = G(ir)$ である. 従って第一象限 Q の境界上では $F \leq G$ である. いずれの函数も ∞ の近傍での増大は " 余り速くはない" ので最大値の原理を用いて Q 全体において $F \leq G$ であるという結論が得られる. 特に $\theta \in (0, \pi/2)$ ならば $F(e^{i\theta}) \leq G(e^{i\theta}) < 2\pi$ である. 条件 (5.3.7) と比較することで

$$\frac{1}{2}\pi \leq |\theta_0| = \frac{1}{2}|\sigma(f)|$$

が導かれる.

Case 2) $\sigma(f)$ が一般のとき.
最早 $\sigma(f)$ は単一区間ではない. 如何にしてこの場合の証明を上記の特殊な場合のそれへと適合することが可能になるのか? そのアイデアは $F(z)$ を定義した "fixed" integral を $\log|f|$ の値が大である集合上での "maximal" integral($*$-function)

$$m^*(re^{i\theta}, f) = \sup_{|E|=2\theta} \int_E \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

で置き換えるというものである. $F(z)$ の替わりに, この函数を用いれば証明は **Case 1)** と全く同様に議論できる. ただ唯一, この函数の $\mathbb{C}^+$ での劣調和性のみ疑問として残るが, 後述の定理 5.4.2 においてこれが主張されることになる. 以上でこの Spread Relation は証明された.

問題 2. の解答は容易である. 更には $|g(re^{i\theta})|$ は $\theta \in (-\pi, \pi)$ について symmetric decreasing function で $\sigma(g) = [-\pi/2, \pi/2]$ である. そして

$$m^*(re^{i\theta}, g) = \sup_{|E|=2\theta} \int_E \log|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \int_{-\theta}^{\theta} \log|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

は $\mathbb{C}^+$ で調和な函数となる．調和性は劣調和性の極値的なものであるから, 極値函数に対する $*$-function の調和性は予期されることであるかもしれない．例えば $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ は適当な正の数の集合として

$$f(z) = \frac{\prod_k \left(1 + \frac{z}{a_k}\right)}{\prod_k \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)}$$

という形をした函数は, 有理型函数論における様々な定理に対する極値函数となっていることが知られている．そしてこのとき

$$m^*(re^{i\theta}, f) = \int_{-\theta}^{\theta} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

であり,

$$m^*(re^{i\theta}, f) + 2\pi N(r, f)$$

が調和函数となることが示される (今 f は有理型函数であることに注意せよ).

5.4 $*$-function の定義とその諸性質

前節までの話を念頭に置いて, 有理型函数 $f(z)$ に対する $*$-function を定義する.

定義 5.4.1 全有限平面 $\mathbb{C}$ の有理型函数 $f(z) \not\equiv 0$ に対して

$$(5.4.8)\quad m^*(z) = \sup_E \frac{1}{2\pi}\int_E \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \quad (z = re^{i\theta},\ \ 0 < r < \infty,\ \ 0 \le \theta \le \pi)$$

と置く．ここで "sup" は $|E| = 2\theta$ となる全ての可測集合 $E \subset (-\pi, \pi]$ に渡りとるものとする．$N(r, f)$ は既に定義されていた個数函数として

$$T^*(z) = m^*(z) + N(|z|, f)$$

と置く.

このとき T^* は

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \ge 0,\ \ z \ne 0\}$$

で定義され, $0 < r < \infty$ で以下を満たしている:

$$
\begin{aligned}
&(5.4.9) & T(r, f) &= \sup_{0\le\theta\le\pi} T^*(re^{i\theta}), \\
&(5.4.10) & N(r, f) &= T^*(r), \\
&(5.4.11) & N(r, 1/f) &= T^*(re^{i\pi}) + C.
\end{aligned}
$$

初めの 2 式は定義より直ちに従い, また等式 (5.4.11) は Jensen の公式より従う．ここに定数 C は f にのみ関係するものである．T^* が持つ最重要な, そして Spread Relation の証明の鍵ともなる性質が, 次のものである

定理 5.4.2 $T^*(z)$ は上半平面 $\mathbb{C}^+$ で劣調和で, H 上連続である.

この定理の証明は Baernstein [7](連続性については, Edrei and Fuchs [37] も参照のこと) の他にも, M. Essén, P. Sjögren, J. Quine 等が与えているようである. Baernstein [7] では Sjögren の証明が述べられている. 更には L. Yang [79] はその証明を我々の記号を用いて述べている. 本書では読者の便宜を考えて Appendix A で連続性を Appendix B, C で劣調和性の証明をまとめておいた.

Appendix A によれば, $*$-function u^* は, いわゆる circular symmetrization(すなわち Part I の $(1,2)$-cap symmetrization) の不定積分 u^I である. この事実と u^* の劣調和性によって, Spread Relation は, その simple form の証明 Case 1) での最大値の原理を用いるというアイデアから得ることができる. その際比較すべき調和函数は, 或る劣調和函数の境界値を用いて構成される Poisson 積分である. ここにおいて計算は煩雑になるが, これはあくまでも (5.2.6) の右辺にある $(4/\mu)\arcsin\sqrt{\delta(a,f)/2}$ を求めるためだけであって, $*$-function の果たす役割は境界値問題が与えられた時点で終了する.

5.5 Spread Relation の証明

改めて Spread Relation を定理として述べておく.

定理 5.5.1 $f(z)$ は劣位数 μ $(0 \le \mu < \infty)$ の有理型函数とせよ. もし $a \in \hat{\mathbb{C}}$ が $f(z)$ の除外指数 $\delta(a,f)$ を持つ除外値 (即ち $\delta(a,f) > 0$) であれば, 値 a についての f の *spread* $\sigma(a,f)$ は

$$\sigma(a,f) \ge \min\left\{2\pi, \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\right\} \tag{5.5.12}$$

を満たす.

証明.　初めに

$$0 < \frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}} < 2\pi$$

である場合を考える. 一般性を失うことなく

$$f(0) = 1, \quad a = \infty \tag{5.5.13}$$

と仮定してよい. 実際, $a \ne \infty$ ならば

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

で g を, また

$$f(z) = Cz^k h(z),$$

により h を定義せよ. ここで k は整数, C は 0 でない定数, また $h(0) = 1$ とする. 今 $\mu > 0$ なので, これら 3 つの有理型函数については,

$$T(r,f) \sim T(r,g) \sim T(r,h) \quad (r \to \infty)$$

が成り立ち, 従ってこれらの劣位数は一致し. また同一の数列 $\{r_m\}$ を位数 μ の Pólya peak 列として持つことができる. また定義から

$$E_\Lambda(r,a;f)=E_\Lambda(r,\infty;g),$$
$$E_\Lambda(r,\infty;f)=E_{\Lambda_1}(r,\infty;h)$$

である. ここで $\Lambda_1(r)=\Lambda(r)-k\log r-\log|C|$ とする. 更に $r\to\infty$ のとき

$$\Lambda(r)=\mathrm{o}\{T(r,f)\}\Longleftrightarrow\Lambda(r)=\mathrm{o}\{T(r,g)\}\Longleftrightarrow\Lambda_1(r)=\mathrm{o}\{T(r,h)\}$$

となる. 従って

$$\sigma(a,f)=\sigma(\infty,g),\quad \sigma(\infty,f)=\sigma(\infty,h)$$

を得る. また $\delta(a,f)=\delta(\infty,g)$, $\delta(\infty,f)=\delta(\infty,h)$ も成り立つ. それ故 (5.5.13) の仮定の下で定理が証明されれば, 一般の場合でも (5.2.6) は成り立つ.

さて

$$\gamma:=\frac{2}{\pi\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty,f)}{2}}$$

と置く. このとき

(5.5.14) $$1-\delta(\infty,f)=\cos\pi\gamma\mu$$

であり, 現在の仮定の下では $0<\gamma<1$ となっている. 今, $\Lambda(r)$ は条件 (5.2.4) を満たす任意の正値函数として

$$\sigma_m=|E_\Lambda(r_m,\infty)|\quad(m=1,\ 2,\ \ldots)$$

と置くと, Spread Relation は, 不等式

(5.5.15) $$\liminf_{m\to\infty}\sigma_m\geq 2\pi\gamma$$

と同値である.

$$E_\circ(r):=\{\theta\in(-\pi,\pi]:|f(re^{i\theta})|\geq 1\},$$
$$E^c(r):=\{\theta\in(-\pi,\pi]:1\leq|f(re^{i\theta})|\leq e^{\Lambda(r)}\}$$

とせよ. そのとき

$$\begin{aligned}T(r_m,f)&=\frac{1}{2\pi}\int_{E_\circ(r_m)}\log|f(r_me^{i\theta})|\,d\theta+N(r_m,f)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{E_\Lambda(r_m,\infty)}\log|f(r_me^{i\theta})|\,d\theta+N(r_m,f)+\frac{1}{2\pi}\int_{E^c(r_m)}\log|f(r_me^{i\theta})|\,d\theta\\&\leq T^*(r_me^{i\sigma_m/2})+\Lambda(r_m)\end{aligned}$$

となる. $T^*(z)\leq T(|z|,f)$ であるから ((5.4.9) 式)

(5.5.16) $$\lim_{m\to\infty}\frac{T^*(r_me^{i\sigma_m/2})}{T(r_m,f)}=1$$

が得られる.

一方, 函数 $v(z)$ を

$$v(z)=\begin{cases} 0 & z=0 \\ T^*(z^\gamma) & z\neq 0,\ \operatorname{Im} z\geq 0 \end{cases}$$

で定義する. 定理 5.4.2 から $\mathbb{C}^+$ で v は劣調和で H で連続となる. 原点においても, 今の場合 $f(0)=1$ であるから v は連続である.

各 $R>0$ に対して半円板

$$D_R := \{z=re^{i\theta} : 0<r<R,\ \ 0<\theta<\pi\}$$

を考える. $v(z)$ は D_R で劣調和で, その閉包で連続である. D_R で調和で $v(z)\leq u(z)$ を満たす函数 u を得るために, v の境界値を用いて Poisson 積分 (N. Levinson [57] p.245)

$$u(re^{i\theta})=\int_{-R}^{R} v(t)A(t,r,\theta,R)\,dt+\int_0^\pi v(Re^{i\varphi})B(\varphi,r,\theta,R)\,d\varphi,$$

但し

$$\begin{aligned}
A(t,r,\theta,R)&=\frac{1}{\pi}\frac{r\sin\theta}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}-\frac{1}{\pi}\frac{R^2r\sin\theta}{R^4-2rtR^2\cos\theta+r^2t^2},\\
B(\varphi,r,\theta,R)&=\frac{2Rr\sin\theta}{\pi}\frac{(R^2-r^2)\sin\varphi}{|R^2e^{2i\varphi}-2rRe^{i\varphi}\cos\theta+r^2|^2}
\end{aligned}$$

を構成する. 函数 v の D_R の境界上での値は, その定義と $T^*(z)$ の性質 (5.4.9), (5.4.10) により

$$\begin{aligned}
&v(t)=T^*(t^\gamma)=N(t^\gamma,f),\quad t>0\\
&v(-t)=v(te^{i\pi})=T^*(t^\gamma e^{i\gamma\pi})\leq T(t^\gamma,f),\quad t>0\\
&v(Re^{i\varphi})=T^*(R^\gamma e^{i\gamma\varphi})\leq T(R^\gamma,f),\quad 0\leq\varphi\leq\pi
\end{aligned}$$

であると分かる. Poisson 核 A と B はいずれも正値であるから

$$\begin{aligned}
u(Re^{i\theta})\ &\leq\ \int_0^R N(t^\gamma,f)A(t,r,\theta,R)\,dt+\int_0^R T(t^\gamma,f)A(-t,r,\theta,R)\,dt\\
&\quad +T(R^\gamma,f)\int_0^\pi B(\varphi,r,\theta,R)\,d\varphi
\end{aligned}$$

を得る. 更には

$$\begin{aligned}
|R^2e^{2i\varphi}-2rRe^{i\varphi}\cos\theta+r^2|^2 &= |(Re^{i\varphi}-re^{i\theta})(Re^{i\varphi}-re^{-i\theta})|^2\\
&\geq (R-r)^4
\end{aligned}$$

から

$$B(\varphi,r,\theta,R)<\frac{32r}{\pi R}\quad\left(0<\theta<\pi,\ \ 0<\varphi<\pi,\ \ 0<r<\frac{1}{2}R\right)$$

が導かれる. また

$$R^4 - 2rtR^2\cos\theta + r^2t^2 = |R^2 - rte^{i\theta}|^2 \geq 0$$

なので, A の定義式で第 2 項は非負である. 従って

$$P(t,r,\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{r\sin\theta}{t^2 + 2tr\cos\theta + r^2}$$

と置くとき, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ を用いて

$$A(t,r,\theta,R) \leq P(t,r,\pi-\theta), \quad A(-t,r,\theta,R) \leq P(t,r,\theta)$$

を得る. 以上の評価から, 我々は Key Inequality

$$\begin{aligned} v(re^{i\theta}) \ \leq\ & \int_0^R N(t^\gamma,f)P(t,r,\pi-\theta)\,dt + \int_0^R T(t^\gamma,f)P(t,r,\theta)\,dt \\ & +32\frac{r}{R}T(R^\gamma,f) \quad (0<\theta<\pi,\ \ 0<r<\frac{1}{2}R) \end{aligned} \tag{5.5.17}$$

に到達する.

以降, $\{r_m\}$ は位数 μ の Pólya peak 列とし, それに付随した数列を $\{r_m{}'\}$, $\{r_m{}''\}$, $\{\varepsilon_m\}$ とする. そして

$$s_m{}' = (r_m{}')^{1/\gamma}, \quad s_m{}'' = (r_m{}'')^{1/\gamma}, \quad s_m = (r_m)^{1/\gamma},$$

と置く. このとき (5.2.3) は

$$T(t^\gamma,f) \leq (1+\varepsilon_m)T(r_m,f)\left(\frac{t}{s_m}\right)^{\gamma\mu} \quad (s_m{}' < t < s_m{}'') \tag{5.5.18}$$

と書くことができる. 数列 $\{r_m\}$, $\{r_m{}'\}$, $\{r_m{}''\}$ の性質から, 整数 m_0 を $m \geq m_0$ のとき $2s_m{}' < s_m < 2^{-1}s_m{}''$ が成り立つ様に選ぶことが可能. 従って,

$$\begin{aligned} & P(t,s_m,\theta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{t+s_me^{-i\theta}}\right\} \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{|t+s_me^{-i\theta}|} \leq \frac{2}{\pi s_m} < \frac{1}{s_m} \\ & (0<t<s_m{}',\ \ m\geq m_0) \end{aligned}$$

この事と (5.5.18) の不等式を用いれば, $0<\theta<\pi$ 及び $m \geq m_0$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_m{}''} T(t^\gamma,f)P(t,s_m,\theta)\,dt = \left(\int_0^{s_m{}'} + \int_{s_m{}'}^{s_m{}''}\right)T(t^\gamma,f)P(t,s_m,\theta)\,dt \\ \leq\ & T(r_m{}',f)\frac{s_m{}'}{s_m} + (1+\varepsilon_m)T(r_m,f)\int_{s_m{}'}^{s_m{}''}\left(\frac{t}{s_m}\right)^{\gamma\mu}P(t,s_m,\theta)\,dt \\ \leq\ & T(r_m,f)\frac{s_m{}'}{s_m} + (1+\varepsilon_m)T(r_m,f)\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{s_m}\right)^{\gamma\mu}P(t,s_m,\theta)\,dt \end{aligned}$$

となることが従う. 更に γ の定義より $\gamma\mu \leq 1/2$ であるから, 変数変換をし, 留数定理を用いて積分計算を行えば

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{s_m}\right)^{\gamma\mu}P(t,s_m,\theta)\,dt = \int_0^\infty t^{\gamma\mu}P(t,1,\theta)\,dt = \frac{\sin\theta\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu}$$

を得る. このことと

$$\lim_{m\to\infty}\frac{s_m{}'}{s_m}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{r_m{}'}{r_m}\right)^{1/\gamma}=0$$

を上記の不等式に適用すれば, θ, $0<\theta<\pi$, に関して一様に

$$\int_0^{s_m{}''}T(t^\gamma,f)P(t,s_m,\theta)\,dt\le T(r_m,f)\left\{\frac{\sin\theta\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu}+\mathrm{o}(1)\right\}\quad(m\to\infty)\tag{5.5.19}$$

が成立することが分かる.

以上の議論を

$$N(t^\gamma,f)<(1-\delta(\infty,f)+\mathrm{o}(1))T(t^\gamma,f)\quad(s_m{}'<t<s_m{}'')$$

から出発し, また全ての t について $N(t,f)\le T(t,f)$ であることを用いれば, 同様に

$$\begin{aligned}&\int_0^{s_m{}''}N(t^\gamma,f)P(t,s_m,\pi-\theta)\,dt\\ \le\ &(1-\delta(\infty,f))T(r_m,f)\left\{\frac{\sin(\pi-\theta)\gamma\mu}{\sin\pi\gamma\mu}+\mathrm{o}(1)\right\}\quad(m\to\infty)\end{aligned}\tag{5.5.20}$$

が θ, $0<\theta<\pi$, について一様に成り立つことが得られる.

更には (5.5.18) と $\gamma\mu\le 1/2\iff(1/\gamma)-\mu\ge 1/(2\gamma)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{s_m}{s_m{}''}T((s_m{}'')^\gamma,f)\ &\le\ (1+\varepsilon_m)T(r_m,f)\left(\frac{s_m}{s_m{}''}\right)^{1-\gamma\mu}\\ &\le\ (1+\mathrm{o}(1))T(r_m,f)\left(\frac{r_m}{r_m{}''}\right)^{(1/\gamma)-\mu}\\ &\le\ \mathrm{o}\{T(r_m,f)\}\quad(m\to\infty)\end{aligned}$$

が従う. このことと (5.5.19), (5.5.20) の評価により Key Inequality (5.5.17) で $r=s_m$, $R=s_m{}''$ と置いたとき

$$\begin{aligned}v(s_me^{i\theta})\ &\le\ T(r_m,f)\left\{\frac{\sin\theta\gamma\mu+(1-\delta(\infty,f))\sin(\pi-\theta)\gamma\mu}{\sin\pi\mu\gamma}+\mathrm{o}(1)\right\}\\ &(m\to\infty,\ \ 0<\theta<\pi)\end{aligned}\tag{5.5.21}$$

が導かれる. ここで項 o(1) は θ には無関係な量である. γ の定義より従う (5.5.14) 式と, 等式

$$\sin\alpha+\cos\beta\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos(\beta-\alpha)$$

において $\alpha=\theta\gamma\mu$ 及び $\beta=\pi\gamma\mu$ と置いて得られる式により

$$\sin\theta\gamma\mu+(1-\delta(\infty,f))\sin(\pi-\theta)\gamma\mu=\sin\pi\gamma\mu\cos(\pi-\theta)\gamma\mu$$

となる. これを (5.5.21) に適用すると, 我々が得た結果は次の通りとなる.

$$(C)\ \left\{\begin{array}{l}0\ \text{に収束する点列}\ \{\alpha_m\}\ \text{が存在して}\\[2ex] v(s_me^{i\theta})\le T(r_m,f)\{\cos(\pi-\theta)\gamma\mu+\alpha_m\}\quad(m=1,2,\ldots,\ \ 0<\theta<\pi)\\[2ex] \text{が成り立つ.}\end{array}\right.$$

今, 正の整数を元にもつ集合

$$M = \{m : \sigma_m < 2\pi\gamma\} \quad (\sigma_m = |E_\Lambda(r_m, \infty)|)$$

を考える. もし M が有限集合ならば, 主張 (5.5.15) は成立している. それ故, M は無限集合であると仮定してよい.

点

$$(r_m e^{i\sigma_m/2})^{1/\gamma} = s_m e^{i\sigma_m/(2\gamma)}$$

が v の定義域, 即ち上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ に属することは, $m \in M$ となることの必要かつ十分な条件であって, このとき

$$T^*(r_m e^{i\sigma_m/2}) = v(s_m e^{i\sigma_m/(2\gamma)}) \quad (m \in M)$$

となる. (5.5.16) 式に, これを適用すれば

$$\lim_{M \ni m \to \infty} \frac{v(s_m e^{i\sigma_m/(2\gamma)})}{T(r_m, f)} = 1$$

が従う. 従って, 我々の得た結論 (C) ($\theta = \sigma_m/(2\gamma)$, $m \in M$) と合わせて

$$1 = \lim_{M \ni m \to \infty} \frac{v(s_m e^{i\sigma_m/(2\gamma))}}{T(r_m, f)} \leq \cos\left\{\left(\pi - \liminf_{M \ni m \to \infty} \frac{\sigma_m}{2\gamma}\right)\gamma\mu\right\}$$

を得る. ここで $0 < \gamma\mu \leq 1/2$ 及び $0 < \sigma_m/(2\gamma) < \pi$ に注意すると, 求める結論 (5.5.15) が成り立つと判る.

次に

$$\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}} \geq 2\pi \left(\Longleftrightarrow \delta(a, f) \geq 2\sin^2(\pi\mu/2)\right)$$

となる場合を考える. このとき d, $0 < d < \delta(a, f)$, を

$$\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{d}{2}} < 2\pi$$

となる様に取る. 更に $\gamma := 2(\pi\mu)^{-1} \arcsin \sqrt{d/2}$ と置く. このとき上記の議論により

$$\sigma(a, f) \geq \frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{d}{2}}$$

を証明することが可能である. そこで d を今 $d_0 := 2\sin^2(\pi\mu/2)$ に近づけることで $\sigma(a, f) = 2\pi$ を得ることができる.

既に述べた通り, 後半部の証明は独立に Edrei [32] が与えており, Baernstein [5] もそれに依っている. 上の証明は L. Yang [79] による.

5.6 Spread Relation の応用

Spread relation の拡張, 或は類似した結果を, Anderson and Baernstein [4] (Essén, Rossi and Shea [41] , [42] も参照のこと), Baernstein [6](いわゆる ‘$\cos\pi\rho$-theorem’ の拡張), [7], Edrei and Fuchs [36], [37] (この 2 つは ‘extremal spread’ に関して) 等々に見つけることができる. $T^*(z)$ を用いることで値分布論における既知の重要な定理, 例えば Edrei and Fuchs の楕円定理等の別証が, 極めて容易に与えられることも分かっている.

以下, Spread Relation を応用して得られる結果の幾つかと楕円定理について述べ, この $*$-function と Spread Relation の概説の締め括りとする.

1°. **Deficiency problem.**
Edrei [34] は, total deficiency $\Delta(f)$ に関する結果 (5.2.2) について, 更に精密な評価を与えるという問題を次の形で提起した.

<u>Deficiency problem</u> .
各 μ, $0 \le \mu < \infty$ に対し, $\mathbb{C}$ で有理型で劣位数が μ の函数全体の成す族を $\mathcal{F}_\mu$ とせよ.

1. このとき
$$\Omega(\mu) := \sup_{f\in\mathcal{F}_\mu} \Delta(f)$$
を決定せよ.

2. 極値函数 f(即ち $\Delta(f) = \Omega(\mu)$) は存在するか? もし存在するのであれば, この様な f を特徴付けるそれ以外の性質は何か? (Edrei は例えば, と断わって, $T(r, f)$ の増大に関する正則性や, 除外値の個数 $\nu(f)$ の上限の有無, 除外指数の成す (適当な並べかえをした) 数列の持つ性質, 等はどうかと質している.)

この問題は $0 \le \mu \le 1$ の場合には Edrei [32], [34] により解決された.

定理 5.6.1 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有理型な函数でその劣位数は μ $(0 \le \mu \le 1)$ とせよ.

I. もし $\mu \le 1/2$ ならば
$$\Delta(f) \le 1$$
この上限をとるのは $\nu(f) = 1$ となるとき, かつ, そのときに限られる. もし f が少なくとも 2 つの除外値をもつならば
$$\Delta(f) < 1 - \cos\pi\mu.$$

II. もし $1/2 < \mu \le 1$ ならば
$$\Delta(f) \le 2 - \sin\pi\mu$$
が成り立つ. 等号成立は, $\nu(f) = 2$ かつその 2 つの除外値を a, b とするとき $\delta(a, f) = 1$, $\delta(b, f) = 1 - \sin\pi\mu$ となるとき, かつそのときに限られる.

I は Edrei [32] p.80 で与えられていたが, Spread Relation の証明により, ようやく II が Edrei [34] によって与えられたのである．そこでは convex programming についての或る問題を解いて, 鍵となる補題 (Lemma 1) を得ている．それを次に述べる total spread relation に適用することで証明が完成する．また I も II も, その評価が最良であることを示す例が, その論文中に与えられている.

一方 $\mu > 1$ の場合には, Deficiency problem は未解決であり, Drasin and Weitsman [27] により $\Omega(\mu)$ の値が予想されているのみである.

2°. Total spread relation .
Spread の定義により, 既に述べた通りにこれらには '幾何的' な制限

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)} \sigma(a_j, f) \leq 2\pi$$

がある．これを Spread relation と合わせることで, 次の定理が得られる．これを <u>total spread</u> <u>total</u> <u>relation</u> という.

定理 5.6.2 *$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有理型で, 有限な劣位数 μ を持つ函数とせよ．$f(z)$ の全ての除外値は a_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu(f),\ 1 \leq \nu(f) \leq \infty)$ で,*

$$\delta(a_1, f) \geq \delta(a_2, f) \geq \delta(a_3, f) \geq \cdots > 0$$

と並べられているものとする．このとき, もし

$$\frac{4}{\mu} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_1, f)}{2}} < 2\pi$$

ならば (これが不成立のときには $\nu(f) = 1$ に注意),

$$\frac{4}{\mu} \sum_{j=1}^{\nu(f)} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leq 2\pi \tag{5.6.22}$$

証明については, L. Yang [79] を参照する．その文献では total deficiency に関する結果や予想が述べられている．(例えば (5.6.22) から Fuchs の定理

$$\sum_{j=1}^{\nu(f)} \delta(a_j, f)^{1/2} \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a_j, f)}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \mu\pi$$

が従う.) また Hayman [52] Vol. II では同様の結果を δ-subharmonic function in $\mathbb{C}$ に対して述べてある.

3°. Edrei-Fuchs の楕円定理.
Edrei and Fuchs [36] は 1960 年, $\mathbb{C}$ における有理型函数の位数が 1 より小であるとき, 2 つの値の deficiencies が取り得る範囲を特徴付けることに成功した．その領域が楕円不等式で表現されることから, この名が付けられている．その後 Edrei [31], Ostrovskii [67] により劣位数へと拡張された.

定理 5.6.3 $f(z)$ は劣位数 μ, $0<\mu<1$ の $\mathbb{C}$ における有理型函数とし, 相異なる *2* つの値 a, b に対して

$$u=1-\delta(a,f), \quad v=1-\delta(b,f)$$

と置く. そのとき $0\leq u\leq 1$, $0\leq v\leq 1$ 及び

$$u^2+v^2-2uv\cos\pi\mu\geq\sin^2\pi\mu \tag{5.6.23}$$

が成り立つ. 更には $u\leq\cos\pi\mu$ ならば $v=1$, $v\leq\cos\pi\mu$ ならば $u=1$ となる.

Edrei and Fuchs は逆問題, 即ち上に与えられた範囲の各点 (u,v) に対応する函数 f の存在性についての問題と, その境界点に対応する f の増大の正則性についての問題をいずれも解決している. これを用いて Spread Relation の最良性についての例 ($0<\mu\leq 1/2$ 及び $0<\delta<1$ 或は $1/2<\mu\leq 1$ 及び $1-\sin\pi\mu\leq\delta\leq 1$) を Baernstein [5] は与えた. なお Edrei and Fuchs の証明は $0\leq\mu\leq 1$ のときの R. Nevanlinna 予想 (cf. Hayman [50]) の解決へと我々を導いてくれた. この予想は値分布論に残された最大の難問の 1 つで, $\mu>1$ のときは未解決である.

定理 5.6.3 の証明. まず $\delta(a,f)$ は f の deficiencies のうちで最大のものとし

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\geq 2\pi \tag{5.6.24}$$

であるとせよ. これは $\delta(a,f)\geq 1-\cos\pi\mu$ 即ち $u\leq\cos\pi\mu$ と同値である. このときには $\nu(f)=1$ であることは既に述べたので, $\delta(b,f)=0$ すなわち $v=1$ が従う. $\delta(b,f)$ が最大のときも同様であり, 他の値 c が最大であるときも同様である. 以下, そうでない場合について考える. このとき total spread relation によって

$$\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}+\frac{4}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(b,f)}{2}}\leq 2\pi$$

が従う. ($\delta(a,f)=0$ 又は $\delta(b,f)=0$ でも成り立つ.) 今

$$A=\frac{2}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}, \quad B=\frac{2}{\mu}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(b,f)}{2}}$$

と置けば $A\geq 0$, $B\geq 0$, $A+B\leq\pi$, そして

$$\begin{cases}\cos\mu A=1-\delta(a,f)=u\\ \cos\mu B=1-\delta(b,f)=v\end{cases}$$

となる. このとき

$$\cos^2\mu A+\cos^2\mu B-2\cos\mu A\cos\mu B\cos\mu\pi\geq\sin^2\mu\pi$$

が成り立つことを示すことができ, これより (5.6.23) が従う. 以上で定理は示された.
□

この証明もまた Hayman [52] では δ-subharmonic という設定で与えられていることをつけ加えておく.

以上では $*$-function を用いて解ける極値問題として Spread conjecture について述べた. この他にも, Paley's conjecture (1932 年) として与えられ, 1969 年に Govorov と, 更に拡張した形として Petrenko によって解決された次の結果は, $*$-function と Pólya peak 列を用いた別証明が知られている.

定理 5.6.4 函数 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で有理型で, 劣位数は μ であるとき

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{T(r,f)} \leq \begin{cases} \dfrac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} & (\mu \leq 1/2) \\ \\ \pi\mu & (\mu > 1/2) \end{cases}$$

が成り立つ. 但し $M(r,f) = \sup_{|z|=r}|f(z)|$.

この種の極値問題 (δ-subharmonic functions に対しての) を $*$-function を用いて解いている論文としては, 既出の Anderson and Baernstein [4], Essén, Rossi and Shea [41], [42] (そして Baernstein [6]) が典型的なものであろう. これらの証明はいずれも, Spread relation の証明と同様に, $*$-function を含む或る種の convolution inequality (cf. (5.5.17)) を導くことが基本方針である. これに Pólya peak 列を組み合わせて極値を求めるのである.

第6章　Baernstein の定理と Integral Means

6.1　Baernstein の定理と 単葉函数族

この章では, [7], [30] に沿って subharmonic function u の $*$-function u^* がやはり subharmonic になるという結果の単位円内の単葉函数族への応用を取り上げる. 先ず, いくつかの定義をあらためてかきだそう.

今述べた Baernstein の　$*$-function　とは.

$u(z)$ を annulus $r_1 < |z| < r_2$ で定義された real valued な函数とし, 更に各 $r \in (r_1, r_2)$ に対して $u(re^{i\theta})$ は θ の Lebesgue 可積分函数とする. このときこの $u(z)$ の $*$-function u^* を semi-annulus $\{re^{i\theta} : r_1 < |z| < r_2, 0 \le \theta \le \pi\}$ で定義される函数

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_{|E|=2\theta} \int_E u(re^{it})dt$$

(ここに $|E|$ は $E \subset [-\pi, \pi]$ の Lebesgue measure) とするものである.

また, 単葉函数に関するものとしては通常の通り S を単位円 $|z| < 1$ で定義された $f(0) = 0, f'(0) = 1$ をみたす正則単葉な函数全体からなる族とし, 更に $k(z)$ でそのなかの主役である Koebe function

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

をあらわす. また, S に属する函数 $f(z)$ の rotation とは, $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ $(\alpha : real)$ のこととする. 明らかな通りこれはまた S に属する.

さて, ここでは先に述べたように, $*$-function に関する Baernstein の結果

Theorem A. u を *annulus* $r_1 < |z| < r_2$ で定義された *continuous, subharmonic function* とする. このとき u^* は *semi-annulus* $\{re^{i\theta} : r_1 < |z| < r_2, 0 \le \theta \le \pi\}$ で *continuous,* かつその内部で *subharmonic.*

を用いることによる次の定理の証明を紹介する. ここでは, この定理を Baernstein の定理 と呼ばせていただくこととする.

Baernstein's Theorem. $\Phi(x)$ を $-\infty < x < \infty$ で定義された *convex non-decreasing function* とする. このとき　任意の $f \in S$, $0 < r < 1$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|f(re^{i\theta})|)d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log|k(re^{i\theta})|)d\theta.$$

ここで, ある *strictly convex* Φ と, ある $r \in (0,1)$ に対して, *equality* が成り立つならば f は k の *rotation* である.

ここで $f \in S$ の integral means を

$$M_p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \ \ 0 < r < 1, \ \ 0 < p < \infty$$

とするとこの定理から, 例えば $\Phi(x) = e^{px}$ と置くことによって次の系が得られる.

Corollary 任意の $f \in S$ に対して

$$M_p(r,f) \le M_p(r,k), \ \ 0 < r < 1, \ \ 0 < p < \infty$$

であり, *equality* は f が k の *rotation* のとき, かつそのときに限り成り立つ.

特に, $p = 1$ とした,

$$M_1(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

は係数評価に関係するものとして重要である. それは Bieberbach Conjecture に対する挑戦の歴史の中にみることができる. ここで, それを紹介しよう.

(6.1.1)
$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n} d\theta = \frac{1}{r^n} M_1(r,f) \end{aligned}$$

より integral mean $M_1(r,f)$ が評価できれば $|a_n|$ の評価がえられることになる.

Littlewood [58] は, 評価式

(6.1.2)
$$M_1(r,f) \le \frac{r}{1-r}$$

を用いて, 不等式

(6.1.3)
$$|a_n| < en$$

を得た. ここに念のため (6.1.2) の証明をあげておこう.

$f \in S$ に対して, その square root transformation を

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

とすれば, これは再び S に属する奇関数となる. S 内の growth theorem

$$|f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

より,

$$|h(z)| \le \frac{r}{1-r^2}.$$

従って $h(z)$ は $|z| < r$ を $|w| < r(1-r^2)^{-1}$ 内の domain D_r に写す. よって $A_r =$ area of D_r は

$$A_r \le \pi \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$$

ここで,

$$A_r = \int\int_{D_r} dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^r |h'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n}.$$

故に,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n-1} &\le \frac{r}{(1-r^2)^2}.\\
\therefore \quad \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n-1} dr &\le \int_0^r \frac{r}{(1-r^2)^2} dr.\\
\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} &\le \frac{r^2}{1-r^2}.\\
\therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta &\le \frac{r^2}{1-r^2}.\\
\therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta &\le \frac{r}{1-r}.\\
\therefore \quad M_1(r,f) &\le \frac{r}{1-r}.
\end{aligned}$$

さて, この不等式と (6.1.1) を組み合せ更に $r = 1 - 1/n$ と取ることにより

$$\begin{aligned}
|a_n| &\le \frac{1}{r^n} M_1(r,f) \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}\\
&= \frac{n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en
\end{aligned}$$

として (3) を得る.

然るに, 上記 Baernstein の定理の系の $p = 1$ の case

(6.1.4) $$M_1(r,f) \le M_1(r,k)$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
M_1(r,k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})| d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}\right| d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{1-2r\cos\theta + r^2} d\theta\\
&= \frac{r}{1-r^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta = \frac{r}{1-r^2}
\end{aligned}$$

より

(6.1.5) $$M_1(r,f) \le \frac{r}{1-r^2}.$$

よって同様に, この不等式と (6.1.1) を組み合せ そして $r=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ と取ることにより

$$\begin{aligned}|a_n| &\le \frac{1}{r^n}M_1(r,f)\\ &\le \frac{1}{r^{n-1}(1-r^2)} = \frac{n+1}{2}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.\end{aligned}$$

これに

$$\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < \frac{n}{n+1}e \qquad (n=2,3,\cdots)$$

をあてはめると

(6.1.6) $$|a_n| < \frac{e}{2}n < 1.36n$$

を得る.

この路線では, その他に先頃 (Nov. 17, 1992 , c.f.[65]) 訃報の聞かれた I. M. Milin [60] の

$$|a_n| < 1.243n$$

や, C.H.FitzGerald [44] の

$$|a_n| \le \sqrt{\frac{7}{6}}n < 1.081n$$

更に, D.Horowitz[53] の

$$|a_n| \le \left(\frac{209}{140}\right)^{\frac{1}{6}} n < 1.0691n$$

などがある. 勿論これらは, (6.1.1) を使うものではない. 残念ながら, (6.1.1) に依る限りは (6.1.6) の評価が最良であろう.

その他, (6.1.2) と (6.1.5) の違いが評価に表れる代表的な例として, $f\in S$ による circle $|z|=r$ の image の長さ

$$L_r(f) = \int_{f(|z|=r)} |dw|$$

の問題がある. 不等式 ([30],[69])

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-r}$$

によれば,

$$\begin{aligned}L_r(f) &= \int_{f(|z|=r)} |dw| = \int_{|z|=r} |f'(z)||dz|\\ &= \int_0^{2\pi}\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right||f(z)|d\theta \le \frac{1+r}{1-r}\int_0^{2\pi}|f(z)|d\theta.\end{aligned}$$

ここで, (6.1.2) によれば,

$$L_r(f) \le \frac{2\pi r(1+r)}{(1-r)^2}$$

(6.1.5) によれば,

$$L_r(f) \le \frac{2\pi r}{(1-r)^2}$$

となるわけ.

他に, integral mean 関係のものとして [16] がある. また, integral mean の中心的話題である Hayman index, Hayman の Regularity Theorem 等については, [30], [49] 等を御参照いただきたい. 単葉函数の理論における Baernstein の定理の位置付けを示した概説として [10] がある. 更に, 単葉函数論, 値分布論の中で $*$-function がいかに使われるかの概説としては [8] がある.

ちなみに, 評価式 (6.1.5) が S の元のうち例えば starlike なもの (image domain が原点に関して starlike なもののこと) 全体からなる部分族 S^* に対して成立することは Baernstein の結果を待たずしても, 古典的な方法によって証明できるのである. 性質の良い部分族に関する考察と, class S 全体を対象とした考察とのあいだには常に困難であると同時に気高い隔たりがあるのである.

6.2 補題

では以下 Baernstein の定理の証明をみていこう. 先ず, convex function の 1 つの representation formula を与える. 一般的の通り real valued function $g(x)$ に対して, $[g(x)]^+ = \max(g(x), 0)$ とする. 特に, $0 \le x$ に対して

$$\log^+ x = [\log x]^+ = \begin{cases} \log x & (1 \le x) \\ 0 & (0 \le x < 1) \end{cases}$$

とする.

補題 6.2.1 $\Phi(s)$ を $-\infty < s < \infty$ での *convex function* とし, $\Phi(s) \equiv 0$ *on* $(-\infty, s_0)$ とする. このとき, ある *non-negative measure* $d\mu$ が存在し,

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [s-t]^+ d\mu$$

と表せる.

証明. Convex function は各 compact sub-interval で Lipschitz condition をみたし, よってそこで absolutely continuous である. 従って, 部分積分により

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \int_{-\infty}^{s} \Phi'(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^{s} \Phi'(t)d(s-t) \\ &= \int_{-\infty}^{s} (s-t)d\Phi'(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s-t]^+ d\Phi'(t) \end{aligned}$$

ここに, Φ は convex なので $d\Phi'(t) \geq 0$ である. □

さて, $g(x)$ が $[-\pi, \pi]$ における real valued integrable function であるとして, その *distribution function* を

$$\lambda(t) = |\{x : g(x) > t\}|$$

と定める. これは, 明らかに non-increasing で更に right continuous ($\lambda(t) = \lambda(t+)$) である. 何となれば $\lambda(t_0+) = \lim_{t\to t_0+} \lambda(t) = \lim_{t\to t_0+} |\{x : g(x) > t\}| = |\{x : g(x) > t_0\}| = \lambda(t_0)$ であるから. また, これを用いると $\cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots$ を $-\infty < x < \infty$ の幅 δ の分割とすれば Lebesgue-Stieltjes 積分により,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx &= \lim_{\delta\to 0} \sum_k t_k(\lambda(t_{k-1}) - \lambda(t_k)) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} td\lambda(t)\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

を知る. また, 2つの同じ set 上で定義された2つの函数が同じ distribution function をもつときそれらの函数は *equimeasurable* であるという. 勿論 equimeasurable な2つの函数は, 等しい integral を持つ.

$[-\pi, \pi]$ で定義された1つの函数 g と equimeasurable なもので特別なものがある. それは g の *symmetric non-increasing rearrangement* $G(x)$ と呼ばれる次で定義される函数である.

もし $\lambda(t)$ が continuous で strictly decreasing であれば $G(x)$ は $\frac{1}{2}\lambda(t)$ の逆函数として $[0, \pi]$ 上で定義する. 一般の場合には

$$\begin{aligned}&G(x) = \inf\left\{t : \frac{1}{2}\lambda(t) \leq x\right\} \quad (0 \leq x < \pi) \\ &G(\pi) = \lim_{x\to\pi-} G(x) = \operatorname{ess\,inf} g\end{aligned}$$

と定め いずれの場合にも $G(x) = G(-x)$ for $-\pi \leq x \leq 0$ として $[-\pi, \pi]$ まで拡張するものとする (実際は $\lambda(t)$ が non-increasing right continuous なので inf は min でよい). これは, 作り方から明らかなように g と equimeasurable である. 何故なら, $G(x)$ の定義より任意の t_0 に対して $0 \leq x < \frac{1}{2}\lambda(t_0)$ ならば $t_0 < G(x)$, $\frac{1}{2}\lambda(t_0) \leq x$ ならば $G(x) \leq t_0$ なので $G(x)$ を even に作ったことから $G(x)$ の distribution function を $\Lambda(t)$ とすると, $\Lambda(t_0) = |\{x : G(x) > t_0\}| = |\{x : |x| < \frac{1}{2}\lambda(t_0)\}| = \lambda(t_0)$ となるから.

では次に, 先に定義した $*$-function における sup は max に取れることを準備する.

補題 6.2.2 $g(x)$ が $[-\pi, \pi]$ における *real valued integrable function* であるとき, 任意の $\theta \in [0, \pi]$ に対して $E \subset [-\pi, \pi]$, $|E| = 2\theta$ なる E が存在し,

$$g^*(\theta) = \int_E g(x)dx.$$

証明. $\theta=0$ なら $g^*(0)=\sup_{|E|=0}\int_E g(x)dx=0, \theta=\pi$ なら $g^*(\pi)=\sup_{|E|=2\pi}\int_E g(x)dx$ $=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$ より E の存在は明らか. 次に, $0<\theta<\pi$ とする. このとき $t=G(\theta)$ とすれば $\lambda(t)\le 2\theta\le\lambda(t-)$. そこで, $A=\{x:g(x)>t\}$, $B=\{x:g(x)\ge t\}$ とおくと $|A|=\lambda(t)$, $|B|=\lambda(t-)$ かつ $A\subset B$. $\therefore |A|\le 2\theta\le|B|$. ここで, $A\subset E\subset B$, $|E|=2\theta$ である E を選べば, 任意の F, $|F|=2\theta$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_F g(x)dx &= \int_F (g(x)-t)dx+2\theta t\le\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^+dx+2\theta t\\ &= \int_A (g(x)-t)dx+2\theta t=\int_E (g(x)-t)dx+2\theta t=\int_E g(x)dx.\end{aligned}$$

□

函数 g の $*$-function g^* と symmetric non-increasing rearrangement G のあいだには次の関係がある. これは, G の作り方から直観的には当然そうあるべきものである.

補題 6.2.3 $g(x)$ が $[-\pi,\pi]$ における *real valued integrable function* であるとき, 任意の $\theta\in[0,\pi]$ に対して,

$$g^*(\theta)=\int_{-\theta}^{\theta} G(x)dx.$$

証明. $\theta=0$ なら両辺共に 0, $\theta=\pi$ なら両辺共に $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$ なのでよろしい. そこで $\theta\in(0,\pi)$ とする. このとき, 補題 6.2.2 同様 $\lambda(t)\le 2\theta\le\lambda(t-)$ なる t および E を取っておく. すると $[g(x)-t]^+$ と $[G(x)-t]^+$ とは equimeasurable なので

$$\begin{aligned}g^*(\theta) &= \int_E g(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^+dx+2\theta t\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}[G(x)-t]^+dx+2\theta t.\end{aligned}$$

ここで, g と G とは equimeasurable なので G の distribution function を Λ とすると $\Lambda(t)\le 2\theta\le\Lambda(t-)$. よって G が non-increasing even function であることから $\{x:G(x)>t\}\subset(-\theta,\theta)\subset\{x:G(x)\ge t\}$. 従って, $|x|<\theta$ なら $G(x)\ge t$, $|x|\ge\theta$ なら $G(x)\le t$. 故に,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[G(x)-t]^+dx+2\theta t &= \int_{-\theta}^{\theta}(G(x)-t)dx+2\theta t\\ &= \int_{-\theta}^{\theta} G(x)dx.\end{aligned}$$

□

次の補題は convex integral mean のあいだの不等式と $*$-function のあいだのそれとが同値であることを示す, 主定理のための key lemma である.

補題 6.2.4 *g, $h\in L^1[-\pi,\pi]$ について, 次は同値である.*

a) 任意の $\Phi(s)$ *: convex non-decreasing function on* $(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(g(x))dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(h(x))dx.$$

b) 全ての $t \in (-\infty, \infty)$ に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^{+}dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^{+}dx.$$

c)

$$g^{*}(\theta) \leq h^{*}(\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

証明.　a)⇒b)　$\Phi(s) = [s-t]^{+}$ は $-\infty < s < \infty$ における convex non-decreasing function であるから.

b) ⇒a)　$\Phi(s)$ を 例えば,

$$\Phi_n(s) = \begin{cases} \Phi(-n) & \text{if } -\infty < s < -n \\ \Phi(s) & \text{if } -n \leq s < \infty \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

で近似して各 n で

(6.2.8)
$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(g(x))dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(h(x))dx$$

が言えたとすれば Φ が non-decreasing であることから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(g(x))dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(h(x))dx,$$

そこで $n \to \infty$ として

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(g(x))dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\Phi(h(x))dx$$

を得る. 然るに, (6.2.8) は,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_n(g(x)) - \Phi(-n) + \Phi(-n)\right)dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_n(h(x)) - \Phi(-n) + \Phi(-n)\right)dx.$$

よって,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_n(g(x)) - \Phi(-n)\right)dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_n(h(x)) - \Phi(-n)\right)dx$$

であるから, $\Phi_n(s) - \Phi(-n)$ を改めて $\Phi(s)$ とおくことによって結局 $\Phi(s) \equiv 0$ on $(-\infty, s_0)$ なる $\Phi(s)$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(g(x))dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\Phi(h(x))dx$$

を示せばよい.

さて, このとき補題 6.2.1 より $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty}[s-t]^{+}d\mu(t)$ $(d\mu(t) \geq 0)$ とかける. すると先ず 仮定 b) より任意の t に対して,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^{+}dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^{+}dx. \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^{+}dxd\mu(t) &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^{+}dxd\mu(t). \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)-t]^{+}d\mu(t)dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[h(x)-t]^{+}d\mu(t)dx. \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi}\Phi(g(x))dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\Phi(h(x))dx. \end{aligned}$$

b) ⇒ c)　先ず, $g^*(0) \le h^*(0)$ は自明. 次に, 任意の t に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^+dx \le \int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^+dx$$

であることから, $I_t = \{x : h(x) \le t\}$ とすれば

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus I_t}(g(x)-t)dx \le \int_{[-\pi,\pi]\setminus I_t}(h(x)-t)dx.$$

$$\therefore \quad \int_{[-\pi,\pi]\setminus I_t} g(x)dx \le \int_{[-\pi,\pi]\setminus I_t} h(x)dx.$$

ここで, $h \in L^1[-\pi,\pi]$ より $\lim_{t\to-\infty}|I_t| = 0$. 故に,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \le \int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx$$

即ち

$$g^*(\pi) \le h^*(\pi)$$

を得る．そこで $0 < \theta < \pi$ とする．この θ に対して $t = H(\theta)$ とおく．ここに H は h の symmetric non-increasing rearrangement である．すると任意の E $(|E| = 2\theta)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\int_E g(x)dx &= \int_E (g(x)-t)dx + 2\theta t \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^+dx + 2\theta t \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^+dx + 2\theta t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}[H(x)-t]^+dx + 2\theta t \\
&= \int_{-\theta}^{\theta}(H(x)-t)dx + 2\theta t = \int_{-\theta}^{\theta} H(x)dx = h^*(\theta).
\end{aligned}$$

$$\therefore g^*(\theta) \le h^*(\theta).$$

c) ⇒ b)　λ を g の distribution function とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda(t) \le 2\theta \le \lambda(t-)$ なる θ を 1 つ取る．このとき, 補題 6.2.2 の証明の中で取った E $(|E| = 2\theta)$ により $g(x) \ge t$ $(x \in E)$, $g(x) \le t$ $(x \in E^c)$ となる．よって, 同じく 補題 6.2.2 によって $h^*(\theta) = \int_F h(x)dx$ なる F $(|F| = 2\theta)$ を選んで,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t]^+dx &= \int_E (g(x)-t)dx \le g^*(\theta) - 2\theta t \\
&\le h^*(\theta) - 2\theta t = \int_F (h(x)-t)dx \le \int_{-\pi}^{\pi}[h(x)-t]^+dx.
\end{aligned}$$

□

6.3 定理の証明

補題 6.2.4 の $b) \Rightarrow a)$ により Baernstein の定理の不等式は, 任意の $f \in S$, $0 < r < 1$, $0 < \rho$ に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left(\frac{|f(re^{i\theta})|}{\rho} \right) d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left(\frac{|k(re^{i\theta})|}{\rho} \right) d\theta \tag{6.3.9}$$

が言えればよい. 先ず, (6.3.9) の両辺を書き換える. N を f の個数函数とすれば Cartan の等式 (e.g.[66]) により,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} N(r, e^{i\varphi}) d\varphi.$$

ここで, f を f/ρ に代えて,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{|f(re^{i\theta})|}{\rho} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} N(r, \rho e^{i\varphi}) d\varphi \tag{6.3.10}$$

(勿論, N は f のものである). また $f \in S$ より, $\zeta(\neq 0) \in D$: the range of f にたいしては,

$$N(r, \zeta) = \int_0^r \frac{n(t, \zeta)}{t} dt = \log^+ \frac{r}{|f^{-1}(\zeta)|} \quad (0 < r < 1) \tag{6.3.11}$$

である. 他方, $u(\zeta) = -\log |f^{-1}(\zeta)|$ は 0 に pole をもつ D の Green 函数. これを $\zeta \in D^c$ ならば $u(\zeta) = 0$ として全平面に拡張しておく. すると (6.3.11) より,

$$N(r, \zeta) = [u(\zeta) + \log r]^+ \quad (0 < r < 1, \zeta \neq 0),$$

従って (6.3.10) より,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{|f(re^{i\theta})|}{\rho} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} [u(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^+ d\varphi \tag{6.3.12}$$

for $0 < r < 1$, $0 < \rho$. 同様に, Koebe function k により

$$v(\zeta) = \begin{cases} -\log |k^{-1}(\zeta)| & \text{if } \ \zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}] \\ 0 & \text{if } \ \zeta \in (-\infty, -\frac{1}{4}] \end{cases}$$

と定めれば, 示すべき (6.3.9) は

$$\int_{-\pi}^{\pi} [u(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^+ d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} [v(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^+ d\varphi \ \ (0 < r < 1, \ \ 0 < \rho)$$

ということになる. 然るに, 補題 6.2.4 の $c) \Rightarrow b)$ により結局,

$$u^*(\rho e^{i\varphi}) \le v^*(\rho e^{i\varphi}) \quad (0 < \rho, \ \ 0 \le \varphi \le \pi) \tag{6.3.13}$$

を示せばよいことになる.

$u(\zeta)$ は $0 < |\zeta| < \infty$ で continous, D で positive harmonic, また D の外で $\equiv 0$. よって特に u は $0 < |\zeta| < \infty$ で subharmonic である. 従って Theorem A によって u^* は

上半平面で subharmonic となる. 次に Koebe function に由来する v^* は特に上半平で harmonic になることをみる. 先ず, $\overline{k^{-1}(\zeta)} = k^{-1}\left(\overline{\zeta}\right)$ より $v(\rho e^{i\varphi}) = v(\rho e^{-i\varphi})$. また, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $z = k^{-1}(\zeta)$ とおくと, $\operatorname{Im} z > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi}v(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\log|k^{-1}(\rho e^{i\varphi})|\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}(-\log|z|) \\
&= \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\log z) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right) \\
&= -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{(1-z)^3}{1+z}\cdot ik(z)\right) = -\operatorname{Re}\left(i\frac{1-z}{1+z}\right) \\
&= \operatorname{Im}\frac{1-z}{1+z} < 0.
\end{aligned}$$

つまり, $v(\rho e^{i\varphi})$ は $\varphi \in (0,\pi)$ について decreasing. よって,

$$v^*(\rho e^{i\varphi}) = \sup_{|E|=2\varphi}\int_E v(\rho e^{i\psi})d\psi = \int_{-\varphi}^{\varphi} v(\rho e^{i\psi})d\psi. \tag{6.3.14}$$

これにより v^* の Laplacian を計算する. その際, v が $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-\frac{1}{4}]$ で harmonic であることから,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v^*}{\partial(\log\rho)^2}(\rho e^{i\varphi}) &= \int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\partial^2 v}{\partial(\log\rho)^2}(\rho e^{i\psi})d\psi = -\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}(\rho e^{i\psi})d\psi \\
&= -\left[\frac{\partial v}{\partial\psi}(\rho e^{i\psi})\right]_{-\varphi}^{\varphi} = \frac{\partial v}{\partial\varphi}(\rho e^{-i\varphi}) - \frac{\partial v}{\partial\varphi}(\rho e^{i\varphi}).
\end{aligned}$$

また他方,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^*}{\partial\varphi}(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{-\varphi}^{\varphi} v(\rho e^{i\psi})d\psi \\
&= v(\rho e^{i\varphi}) + v(\rho e^{-i\varphi})
\end{aligned}$$

より,

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial\varphi^2}(\rho e^{i\varphi}) = \frac{\partial v}{\partial\varphi}(\rho e^{i\varphi}) - \frac{\partial v}{\partial\varphi}(\rho e^{-i\varphi}).$$

従って,

$$\Delta v^* = \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial^2 v^*}{\partial(\log\rho)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial\varphi^2}\right\} = 0,$$

即ち, v^* が上半面で harmonic であることを知る. 以上により, 以下で考察する $u^*(\zeta) - v^*(\zeta)$ は上半面で subharmonic であることに注意する.

Theorem A より, u^*, v^* は closed upper half-plane で原点を除いて continuous である. また, 原点近くでは

$$u(\zeta) = -\log|f^{-1}(\zeta)| = -\log|\zeta| + u_1(\zeta) \tag{6.3.15}$$

但し, $u_1(\zeta)$ は $u_1(0) = 0$ かつ harmonic, と表せる. よって,

$$\begin{aligned}
u^*(\rho e^{i\varphi}) + 2\varphi\log\rho &= \sup_{|E|=2\varphi}\int_E\left(u(\rho e^{i\psi}) + \log|\rho e^{i\psi}|\right)d\psi \\
&= \sup_{|E|=2\varphi}\int_E u_1(\rho e^{i\psi})d\psi \longrightarrow 0 \ \ (\rho\to 0)
\end{aligned}$$

uniformly in φ $(0 \le \varphi \le \pi)$. v^* についても同様なので,

$$u^*(\rho e^{i\varphi}) - v^*(\rho e^{i\varphi}) \longrightarrow 0 \ \ (\rho \to 0) \tag{6.3.16}$$

uniformly in φ $(0 \le \varphi \le \pi)$. 他方, $\zeta \to \infty$ のとき $u(\zeta) \to 0$ なので $u^*(\rho e^{i\varphi}) \longrightarrow 0$ $(\rho \to \infty)$ uniformly in φ.

$$\therefore \quad u^*(\rho e^{i\varphi}) - v^*(\rho e^{i\varphi}) \longrightarrow 0 \ \ (\rho \to \infty) \tag{6.3.17}$$

uniformly for $\varphi \in [0, \pi]$.

さて, positive real axis 上では定義より, $u^*(\rho) = v^*(\rho) = 0$ となるので

$$u^*(\zeta) - v^*(\zeta) = 0 \quad (0 < \zeta).$$

次に, 原点から D^c までの距離を d とすれば, Koebe の $\frac{1}{4}$ 定理 によって $d \ge \frac{1}{4}$. $|\zeta| < d$ では, u は (6.3.15) の形をしているので

$$u^*(\rho e^{i\pi}) = \int_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{i\varphi}) d\varphi = -2\pi \log \rho \ \ (0 < \rho \le d). \tag{6.3.18}$$

同様に, $v(\zeta) = -\log|\zeta| + v_1(\zeta)$ としたとき, v_1 は $\left(|\zeta| < \frac{1}{4} \text{ で harmonic で}\right)$ 全平面で subharmonic かつ $v_1(0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} v^*(\rho e^{i\pi}) &= -2\pi \log \rho + \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\rho e^{i\varphi}) d\varphi && (6.3.19) \\ &\ge -2\pi \log \rho \quad (0 < \rho < \infty). && (6.3.20) \end{aligned}$$

よって,

$$u^*(\zeta) \le v^*(\zeta) \text{ for } -d \le \zeta < 0.$$

ではここで, 任意に $\varepsilon > 0$ を fix して

$$Q(\rho e^{i\varphi}) = u^*(\rho e^{i\varphi}) - v^*(\rho e^{i\varphi}) - \varepsilon\varphi \quad (0 < \rho < \infty, \ \ 0 \le \varphi \le \pi)$$

を考える. これは, 上半面で subharmonic, その closure 上で原点を除いて continuous であり, また (6.3.16), (6.3.17) より

$$\limsup_{\zeta \to 0} Q(\zeta) = \limsup_{\zeta \to \infty} Q(\zeta) = 0$$

をみたすものである. 更に, $M = \sup_{\mathrm{Im}\,\zeta > 0} Q(\zeta)$ とすれば $M = 0$ であることを以下示す. $Q(\zeta_n) \longrightarrow M$, $(\zeta_n \to \zeta_0)$ である点列 $\{\zeta_n\}$, ζ_0 を取る. Q は subharmonic なので ζ_0 は boundary 上の点であるとしてよい. 上でみた通り $\zeta_0 = \infty$ 又は, $-d \le \zeta_0 < \infty$ であれば $M = 0$ となる. そこで, $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\pi}$ $(d < \rho_0 < \infty)$ であったとする. このとき,

$$Q(\rho_0 e^{i\pi}) - Q(\rho_0 e^{i\varphi}) \ge 0 \quad (0 \le \varphi \le \pi) \tag{6.3.21}$$

である. $G(\varphi)$ を $u(\rho_0 e^{i\varphi})$ の symmetric non-increasing rearrangement とすると, 補題 6.2.3 より $u^*(\rho_0 e^{i\varphi}) = \int_{-\varphi}^{\varphi} G(\psi) d\psi$. $\therefore \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}(\rho_0 e^{i\varphi}) = G(\varphi) + G(-\varphi) = 2G(\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

$\rho_0 > d$ なので, 円 $|\zeta| = \rho_0$ は D^c の点を通過するので $G(\pi) = \inf_{-\pi\le\varphi\le\pi} u(\rho_0 e^{i\varphi}) = 0$. よって,

$$\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}(\rho_0 e^{i\pi}) = 0.$$

$\rho_0 > d \geq \frac{1}{4}$ より v^* に対しても同様で, 結局

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi}(\rho_0 e^{i\pi}) = -\varepsilon < 0.$$

これは, (6.3.21) に矛盾する. つまり, $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\pi}$ $(d < \rho_0 < \infty)$ はありえない. 故に, $M = 0$ を知る. 最大値の原理により, $u^*(\zeta) \leq v^*(\zeta) + \varepsilon\varphi \leq v^*(\zeta) + \varepsilon\pi$ $(\operatorname{Im}\zeta \geq 0)$. ε の任意性により,

$$u^*(\zeta) \leq v^*(\zeta) \quad (\operatorname{Im}\zeta \geq 0)$$

を得る. 以上により, Baernstein の定理の不等式の証明は完了.

では続けて equality の case を調べる. そこで, Φ を strictly convex, f を Koebe function の rotation ではないとして, そのときは strict inequality が成立することを示す.

$\frac{1}{4} < \rho$ なる ρ に対して, $v(\zeta)$ は $(-\rho < \zeta < -\frac{1}{4}$ 上で zero なので)annulus $\frac{1}{4} < |\zeta| < \rho$ 内で subharmonic だが harmonic ではない. よって, $v_1(\zeta) = \log|\zeta| + v(\zeta)$ も disk $|\zeta| < \rho$ で subharmonic だが harmonic ではない. $h(\zeta)$ を $|\zeta| = \rho$ 上で $v_1(\zeta)$ に等しく, $|\zeta| < \rho$ で harmonic な函数 (Dirichlet 問題の Schwarz 解) とすると, $v_1(\zeta) < h(\zeta)$ in $|\zeta| < \rho$.

$$\therefore \quad 0 = v_1(0) < h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_1(\rho e^{i\varphi})d\varphi \quad \left(\frac{1}{4} < \rho\right).$$

$$\therefore \quad -2\pi\log\rho < v^*(\rho e^{i\pi}) \quad \left(\frac{1}{4} < \rho\right).$$

ここで, (6.3.18) より

$$u^*(\rho e^{i\pi}) < v^*(\rho e^{i\pi}) \quad \left(\frac{1}{4} < \rho \leq d\right)$$

(f は Koebe function の rotation でないので $\frac{1}{4} < d$ である!). 故に, $u^*(\zeta) - v^*(\zeta)$ は上半面で non-positive な subharmonic function で, しかも identically zero ではない. 従って, 最大値の原理により

$$u^*(\zeta) < v^*(\zeta) \quad (\operatorname{Im}\zeta > 0).$$

次に, 先ず $f(z) \not\equiv z$ であるものとして, 任意の $r \in (0,1)$ に対してある interval $J \subset (0,\infty)$ が存在し,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[u(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^+ d\varphi < \int_{-\pi}^{\pi}[v(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^+ d\varphi \quad (\forall\, \rho \in J)$$

とできることを示す. $0 < \rho \leq d$ なる ρ に対して, 最大・最小原理により,

$$\inf_{\varphi} u(\rho e^{i\varphi}) < \sup_{\varphi} u(\rho e^{i\varphi}).$$

inf, sup は ρ $(0 < \rho \leq d)$ の連続函数で,

$$\inf_{\varphi} u(de^{i\varphi}) = 0, \quad \lim_{\rho \to +0} \inf_{\varphi} u(\rho e^{i\varphi}) = \infty$$

なので, 任意の $r \in (0, 1)$ に対して

$$\inf_{\varphi} u(\rho e^{i\varphi}) < -\log r < \sup_{\varphi} u(\rho e^{i\varphi}) \quad (\forall\, \rho \in J)$$

なる interval J が $(0, d)$ にある. そこで, $E(\rho) = \{\varphi : u(\rho e^{i\varphi}) + \log r > 0\}$ とすれば $0 < |E(\rho)| < 2\pi$ $(\forall\, \rho \in J)$. よって,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} [u(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^{+} d\varphi &= \int_{E(\rho)} (u(\rho e^{i\varphi}) + \log r) d\varphi \\
&\leq u^{*}\left(\rho e^{i\frac{|E(\rho)|}{2}}\right) + |E(\rho)| \log r \\
&< v^{*}\left(\rho e^{i\frac{|E(\rho)|}{2}}\right) + |E(\rho)| \log r \\
&= \int_{\widetilde{E}(\rho)} (v(\rho e^{i\varphi}) + \log r) d\varphi \leq \int_{-\pi}^{\pi} [v(\rho e^{i\varphi}) + \log r]^{+} d\varphi
\end{aligned}$$

for all $\rho \in J$(ここに, $\widetilde{E}(\rho)$ は $|\widetilde{E}(\rho)| = |E(\rho)|$ なる補題 6.2.2 の set). 従って, (6.3.12) により

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \frac{|f(re^{i\theta})|}{\rho} d\theta < \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \frac{|k(re^{i\theta})|}{\rho} d\theta \tag{6.3.22}$$

for all $\rho \in J$, となる. さて, $f(z) \equiv z$ であればこの不等式は

$$2\pi \log^{+} \frac{r}{\rho} < \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \frac{r}{\rho |1 - re^{i\theta}|^{2}} d\theta$$

である. 更に, ε を十分小さく取り $r < \rho < r + \varepsilon$ とすれば

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \frac{r}{\rho |1 - re^{i\theta}|^{2}} d\theta$$

であるので, $\frac{r}{(r+\varepsilon)(1-r)^{2}} > 1$ である程度に ε を小さく取っておけば, $J = (r, r + \varepsilon)$ としてこの場合も (6.3.22) が成立する.

さて, 今 Φ は non-decreasing strictly convex function である. 任意に固定した $r \in (0, 1)$ に対して上で取った J により, $J' = \log J$ とおく. s_0 を J' より左にある点で, $\Phi'(s_0)$ が存在するものとする. そして,

$$\Phi(s) = \Phi_1(s) + \Phi_2(s)$$

ここに

$$\Phi_1(s) = \begin{cases} \Phi(s), & \text{if } s \leq s_0 \\ \Phi(s_0) + \Phi'(s_0)(s - s_0), & \text{if } s_0 \leq s \end{cases}$$

とする. Φ_1, Φ_2 は non-decreasing convex である. また, $\Phi_2(s) \equiv 0$ $(s \leq s_0)$. よって, 補題 6.2.1 より,

$$\Phi_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [s - t]^{+} d\mu(t) \quad (d\mu(t) \geq 0) \tag{6.3.23}$$

とかける. 更に, Φ_2 は $s_0 \leq s$ では strictly convex (よって特に not linear) なので $\mu(J') > 0$. ここで, 既に証明済みの定理の不等式によって,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\log |f(re^{i\theta})| - t]^+ d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} [\log |k(re^{i\theta})| - t]^+ d\theta$$

が全ての t について成り立ち, かつ (6.3.22) より $t \in J'$ については strict. そこで, この両辺を $d\mu(t)$ で積分し, (6.3.23) より,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta < \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(\log |k(re^{i\theta})|) d\theta.$$

Φ_1 については,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\log |k(re^{i\theta})|) d\theta.$$

よって,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta < \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\log |k(re^{i\theta})|) d\theta$$

を知る.

付 録A　$*$-function と I-function の一致と連続性

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ について $\Omega^+ = \{z = re^{i\theta} : r_1 < |z| < r_2,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ とおく. u を Ω 上の函数で, 各 $r \in (r_1, r_2)$ を固定するとき $u(re^{i\theta})$ は θ について可積分とする. このとき Part I における $(1,2)$-cap symmetrization から導かれる I-function $u^I(re^{i\theta}) = u^I(r,\theta)$ と, Part II における $*$-function $u(re^{i\theta})$ が定義できるが, 両者が一致することを示しておこう. Lebesgue 可測集合 $E \subset (-\pi, \pi]$ について $|E|$ で Lebesgue 測度を表わし, $\beta_r(t) = |\{\theta \in (-\pi,\pi] : u(re^{i\theta}) > t\}|$ とおく. また $\hat{u}$ で, u の $(1,2)$-cap symmetrization を表わすとする. このとき $re^{i\theta} \in \Omega^+$ について

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_{|E| \subset 2\theta} \int_E u(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{A.0.1}$$

$$\hat{u}(re^{i\theta}) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \beta_r(t) \leq 2\theta\}, \quad u^I(re^{i\theta}) = \int_{-\theta}^{\theta} \hat{u}(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{A.0.2}$$

と定義した.

補題 A.0.1 各 $\theta \in [0,\pi]$ について $(A.0.1)$ の sup を *attain* する *Lebesgue* 可測集合 E が存在する.

証明. $\theta = 0,\ \pi$ のときは, それぞれ E を $\emptyset$, $(-\pi,\pi]$ とおけばよい. $\theta \in (0,\pi)$ のときは $t \in \mathbb{R}$ を $\beta_r(t+) = \beta_r(t+) \leq 2\theta \leq \beta_r(t-)$ となるようにとり, $A = \{\theta \in (-\pi,\pi] : u(re^{i\theta}) > t\}$, $B = \{\theta \in (-\pi,\pi] : u(re^{i\theta}) \geq t\}$ とおく. このとき $A \subset B$ で $|A| \leq 2\theta \leq |B|$ が成り立つ. E を $A \subset E \subset B$ で $|E| = 2\theta$ となるようにとる. このようにとれることは, 例えば $\gamma(x) = |\{\theta \in B - A : \theta \leq x\}|$ とおくと, 連続で $g(-\pi) = 0$, $g(\pi) = |B| - |A|$ をみたすから. $\gamma(x_0) = 2\theta - |A|$ となる x_0 をとり, $E = A \cup \{\theta \in B - A : \theta \leq x_0\}$ とおけば良い. このとき任意の Lebegue 可測集合 F, $|F| = 2\theta$ について $|F - E| = |E - F|$ と $u(re^{i\varphi}) \geq t$ in E, $u(re^{i\varphi}) \leq t$ in $(-\pi,\pi] - E$ より

$$\begin{aligned}
\int_F u(re^{i\varphi})\, d\varphi &= \int_{F-E} u(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{F\cap E} u(re^{i\varphi})\, d\varphi \\
&\leq t|F-E| + \int_{F\cap E} u(re^{i\varphi})\, d\varphi \\
&\leq \int_{E-F} u(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{F\cap E} u(re^{i\varphi})\, d\varphi = \int_E u(re^{i\varphi})\, d\varphi
\end{aligned}$$

となる. □

命題 A.0.2 $u^I(re^{i\theta})$ と $u^*(re^{i\theta})$ は一致する.

証明. $\theta=0$ のときは明らか. $\theta=\pi$ のときは $u(re^{i\theta})$ と $\hat{u}(e^{i\theta})$ は θ について互いに rearrangement ゆえ積分値は一致する. $\theta\in(0,\pi)$ のとき E と t を上の補題のようにとる. このとき $\hat{u}(e^{i\varphi})\geq t$ in $|\varphi|\leq\theta$ と $\hat{u}(e^{i\varphi})\leq t$ in $|\varphi|\geq\theta$ より

$$
\begin{aligned}
u^*(re^{i\theta})=\int_E u(re^{i\varphi})\,d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi}[u(re^{i\varphi})-t]^+d\varphi+2\theta t\\
&= \int_{-\theta}^{\theta}[\hat{u}(re^{i\varphi})-t]^+d\varphi 2\theta t=\int_{-\theta}^{\theta}\hat{u}(re^{i\varphi})d\varphi
\end{aligned}
$$

となる. □

補題 A.0.3 u が $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:r_1<|z|<r_2\}$ で劣調和ならば

$$
I(r,u)=\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta \tag{A.0.3}
$$

は全ての $r\in(r_1,r_2)$ について積分値が確定し r について連続である.

証明. 劣調和函数は, 局所的に上に有界で, 局所的に L^2-可積分であるから, 測度 0 の r の集合を除いて $u(re^{i\theta})$ は可積分である. ρ_1, ρ_2 を $r_1<\rho_1<\rho_2<r_2$ で $u(\rho_1e^{i\theta})$, $u(\rho_2re^{i\theta})$ が可積分となるようにとる. そして h を $|z|=\rho_j$ $(j=1,\ 2)$ 上 $h=u$ a.e. を満たし, $\rho_1<|z|<\rho_2$ で調和な函数とすると,

$$
0=I(r,\Delta h)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(I(r,h)\right)\right\},\quad \rho_1<r<\rho_2
$$

より $I(r,h)=a\log r+b$ と表現できる. ここで $h=u$ a.e. が $|z|=\rho_j$, $j=1,2$ で成り立つことと, 最大値の原理より $u\leq h$ が成り立つことを用いて

$$
I(r,u)\leq I(r,h)=\frac{\log\rho_2-\log r}{\log\rho_2-\log\rho_1}I(\rho_1,u)+\frac{\log r-\log\rho_2}{\log\rho_2-\log\rho_1}I(\rho_2,u)
$$

が成り立つ. ここで $u(r_0e^{i\theta})$ が可積分でないような r_0, つまり $I(r_0,u)=-\infty$ となる r_0 が存在すると仮定しよう. この r_0 について $\rho_1<r_0<\rho_2$ となる ρ_1, ρ_2 をとる. u の上半連続性から, $\liminf_{r\to r_0}I(r,u)\leq I(r_0,u)$ が成り立つので $I(r_n,u)\to-\infty$ となる, $\{r_n\}$, $r_n\uparrow r_0$ をとれる. ここで区間 $(\rho_1\leq r_n)$ に上の不等式を適用して $n\to\infty$ とすれば (ρ_1,r_0) で $I(r,u)\equiv-\infty$ となり, u の局所可積分性に矛盾する. 従ってこのような r_0 は存在しない. よって上の不等式は全ての ρ_1, ρ_2 について成り立ち, $I(r,u)$ は対数凸 (つまり $r=e^t$ とおくと t について凸) で局所的に上に有界である. 上に有界な凸函数は連続であるから, $I(r,u)$ は連続である. □

命題 A.0.4 函数 u は $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:r_1<|z|<r_2\}$ で劣調和な 2 つの函数 u_1, u_2 により $u=u_1-u_2$ と表わされるとする. このとき $(A.0.1)$ で定義される, u^* と $I(r,u_2)$ の和 $u^{\#}(re^{i\theta})=u^*(re^{i\theta})+I(r,u_2)$ は $\{z=re^{i\theta}:r_1<r<r_2,\ 0\leq\theta\leq\pi\}$ で連続である.

証明. まずはじめに u が連続ならばその symmetric decreasing rearrangement も連続であることが, 命題 2.2.8 よりわかるので, その不定積分である $u^I=u^*$ も連続である.

$u^*(re^{i\theta})$ の定義式の sup を attain する $E \subset (-\pi, \pi]$, $|E| = 2\theta$ をとり, $E^c = (-\pi, \pi] - E$ とおくと

$$u^{\#}(re^{i\theta}) = \int_E u(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} u_2(re^{i\varphi})\, d\varphi = \int_E u_1(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{E^c} u_2(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{A.0.4}$$

また上式の右辺の積分を F, $|F| = 2\theta$ となるもので置き換えると $\leq u^{\#}(re^{i\theta})$ となることもわかる. さて $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ となる, ρ_1, ρ_2 について $\{z = re^{i\theta} : \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で $u^* + I(r, u)$ が連続であることを示せば良い. $0 < \delta < (\rho_1 - r_1) \wedge (r_2 - \rho_2)$ を満たす δ について

$$(A_\delta u) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_{-\pi}^{\pi} u(z + te^{i\varphi})\, t d\varphi dt$$

とおくと, 劣調和性より $u_j(z) \leq A_\delta u_j(z)$, $j = 1, 2$ が成り立ち, $A_\delta u_j$ も劣調和であり, $A_\delta u = A_\delta u_1 - A_\delta u_2$ も δ-subharmonic である. また $A_\delta u_j$ は連続であるから $(A_\delta u)^{\#}$ は連続となる.

さて (A.0.4) より $\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$, $\ \mathrm{Im}\, z \geq 0$ について

$$\begin{aligned} u^{\#}(z) &= \int_E u_1(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{E^c} u_2(re^{i\varphi})\, d\varphi \\ &\leq \int_E (A_\delta u_1)(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{E^c} (A_\delta u_2)(re^{i\varphi})\, d\varphi \leq (A_\delta u)^{\#}(z) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $A_\delta u$ について (A.0.4) を満たす集合 E' をとると

$$\begin{aligned} 0 &\leq (A_\delta u)^{\#}(z) - u^{\#}(z) \\ &\leq \int_{E'} (A_\delta u_1 - u_1)(re^{i\varphi})\, d\varphi + \int_{(E')^c} (A_\delta u_2 - u_2)(re^{i\varphi})\, d\varphi \\ &\leq I(r, A_\delta u_1 - u_1) + I(r, A_\delta u_2 - u_2) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. 積分の変数変換により

$$\begin{aligned} I(r, A_\delta u_j) &= \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_j(re^{i\theta} + te^{i\varphi})\, t d\varphi d\theta dt \\ &= \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \{u_j(re^{i\theta} + te^{i(\theta+\varphi)}) + u_j(re^{i\theta} + te^{i(\theta-\varphi)})\}\, t d\varphi d\theta dt \\ &= \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{u_j(re^{i\theta} + te^{i(\theta+\varphi)}) + u_j(re^{i\theta} + te^{i(\theta-\varphi)})\}\, t d\theta t d\varphi dt \\ &= \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \int_0^{\pi} \{I(|r + te^{i\varphi}|, u_j) + I(|r + te^{i\varphi}|, u_j)\}\, t d\varphi dt \\ &\leq \frac{2}{\delta^2} \int_0^\delta \max_{|s-r| \leq t} I(s, u_j)\, d\varphi t dt \leq \max_{|s-r| \leq \delta} I(s, u_j) \end{aligned}$$

となる. ここで補題 A.0.3 より上式の右辺は $\delta \downarrow 0$ のとき $\to I(r, u_j)$ となる. 従って $u^{\#}$ は連続函数 $(A_\delta)^{\#}$ の一様収束極限ゆえ, 連続である. □

付 録B　Part I の手法に基づく劣調和性保存定理の証明

命題 B.0.5 函数 u は $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ で劣調和な 2 つの函数 u_1, u_2 により $u = u_1 - u_2$ と表わされるとする．このとき (A.0.1) で定義される, u^* と $I(r, u_2)$ の和 $u^{\#}(re^{i\theta}) = u^*(re^{i\theta}) + I(r, u_2)$ は $Int\,\Omega^+ = \{z = re^{i\theta} : r_1 < r < r_2,\ \ 0 < \theta < \pi\}$ で劣調和である．

証明．この命題は Part I の定理 3.2.3 から導くことができる．まず $\Omega^I = \{(r,\theta) : r_1 < r < r_2,\ \ 0 < \theta < \pi\}$ を Int Ω^+ と同一視する．$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2$ より, $\Delta u + \lambda = 0$ を満たす λ は $\lambda = \Delta u_2 - \Delta u_1$ であり, 正の変動 $\lambda^+ = \Delta u_2$ である．さて必要ならば $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ となる ρ_1, ρ_2 をとり Ω の代わりに $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ を考えることにより, $|\lambda|(\Omega) < \infty$ かつ $\lambda^+(\{|z| = r_1\}) = \lambda^+(\{|z| = r_2\}) = 0$ が成り立つとして良い．$a(r, u_2) = \lambda^+(\{z : r_1 < |z| \le r_2]\})$ とおくと, $a(r, u_2)$ は右連続増加函数であり $\lambda^{\#}$ は, 区間 (r_1, r_2) に support を持ち $da(r, u_2)$ で決まる測度である．よって λ^I は直積測度 $da(r, u_2) \times d\theta$ である．ここで 定理 3.2.3 より任意の $G \in C_0^\infty(\Omega^I)$, $G \ge 0$ について

$$\langle \tilde{L}u^I, G\rangle_{\Omega^I} + \langle G, \lambda^I\rangle_{\Omega^I} \ge 0$$

が成り立つ．ここで $G(x, y) = G(r, \theta)$, $z = re^{i\theta}$ とおくと $u^I(r, \theta) = u^*(z)$ より

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{L}u^I, G\rangle_{\Omega^I} = \langle u^I, {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} \\
= \ &\int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} u^I(r,\theta) \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} G(r,\theta)\, rdrd\theta \\
= \ &\int\int_{\Omega^+} u^*(z)\Delta G(z)\, dxdy
\end{aligned}$$

また

$$\langle G, \lambda^I\rangle_{\Omega^I} = \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} G(r,\theta)\, da(r, u_2) d\theta \tag{B.0.1}$$

である．ここで超函数の意味で $\Delta u_2 = \lambda^+$ が成り立つから, 任意の $h \in C_0^\infty(\Omega)$ について

$$\int\int_{r_1 < |z| < r_2} u_2(z)\Delta h(z)\, dxdy = \int\int_{r_1<|z|<r_2} h(z) d\lambda^+(z)$$

が成り立つ．h が r のみの函数ならば

$$\int_{-\pi}^\pi \int_{r_1}^{r_2} u_2(r,\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) h(r) rdrd\theta = \int_{r_1}^{r_2} h(r) da(r, u_2)$$

となり

$$\int_{r_1}^{r_2} I(r, u_2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) h(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} h(r) da(r, u_2)$$

となる．各 $\theta \in (0,\pi)$ を固定して $h(r)=G(r,\theta)$ に上式を適用し，その後で θ について積分すれば

$$\int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} I(r,u_2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)G(r,\theta)drd\theta = \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} G(r,\theta)da(r,u_2) = \langle G, \lambda^I\rangle_{\Omega^I}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega^+} I(|z|,u_2)\Delta G(z)\,dxdy &= \langle \tilde{L}I(r,u_2), G\rangle_{\Omega^I} \\ &= \langle I(r,u_2), {}^t\tilde{L}G\rangle_{\Omega^I} \\ &= \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} I(r,u_2)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}G(r,\theta)rdrd\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} I(r,u_2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)G(r,\theta)drd\theta = \langle G,\lambda^I\rangle_{\Omega^I}\end{aligned}$$

より

$$\int\int_{\Omega^+}(u^*(z)+I(r,u_2))\Delta G(z)\,dxdy = \langle \tilde{L}u^I, G\rangle_{\Omega^I} + \langle \tilde{L}G, \lambda^I\rangle_{\Omega^I} \geq 0$$

となる． よって $\Delta(u^*+I(r,u_2)) \geq 0$ が Ω^+ 上，超函数の意味で成り立ち，従って $u^*+I(r,u_2)$ は Ω^+ 上の或る劣調和函数と a.e. に一致する．しかるに $u^I+I(r,u_2)$ は連続であったから，$u^I+I(r,u_2)$ 自身が劣調和である． □

注意 B.0.6 u が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f で $u=\log|f|$ と表わされるときは f を互いに共通な零点を持たない正則函数の商 $f=f_1/f_2$ で表わせば，$u_j=\log|f_j|$，$j=1$, 2 とみて $\lambda^+ = 2\pi\sum_{r_1<|b_k|<r_2}\delta_{b_k}$ となる．但し $\{b_k\}$ は Ω 内の f の極のなす点列で重複度に応じて同じ点が並んでいるとする．また δ_{z_0} は 1 点 z_0 にのみ *support* を持つ *Dirac* 測度とする．このとき 第 *5* 章の記号で $n(r,f)=n(r,0,f_2)$ は $n(r,f)=\sum_{r_1<|b_k|\leq r}1$ と表わせるから，この場合 $a(r,u_2)=2\pi n(r,f)$ である．また *Jensen* の公式より $N(r,f)=N(r,0,f_2)=\log|f_2(0)|+(2\pi)^{-1}I(r,u_2)$ となるから，上半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$ 上，超函数の意味で $\Delta(2\pi)^{-1}I(r,u_2)=\Delta N(r,f)=dn(r,f)\times d\theta$ である．また同じく第 *5* 章の記号 $m^*(z,f)$ は $u^*(re^{i\theta})=2\pi m^*(re^{i\theta})$ となる．従って上の命題より $T^*(z,f)=m^*(z,f)+N(r,f)$ が Ω^+ で劣調和であることがわかる．

付 録C　劣調和性保存定理の classical な証明

ここでは $*$-function の基本定理である

定理 C.0.7 u を *annulus* $r_1 < |z| < r_2$ で定義された *continuous, subharmonic function* とする．このとき u^* は *semi-annulus* $\{re^{i\theta} : r_1 < |z| < r_2, 0 \le \theta \le \pi\}$ で *continuous*, かつその内部で *subharmonic.*

の証明を Duren [30] の方法によって与える．

先ず，u^* が continuous であることをみよう．任意に，$z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}(r_1 < r, r' < r_2, 0 \le \theta, \theta' \le \pi)$ をとる．補題 6.2.2 によってある set $E \subset [-\pi, \pi]$ ($|E| = 2\theta$) があり

$$u^*(re^{i\theta}) = \int_E u(re^{it})\,dt$$

をみたす．他方，$E' \subset [-\pi, \pi]$ を $|E'| = 2\theta'$ 及び $\theta' \le \theta$ なら $E' \subset E$，$\theta \le \theta'$ なら $E \subset E'$ をみたす任意の set として取れば，

$$\begin{aligned}
u^*(z) - u^*(z') &\le \int_E u(re^{it})\,dt - \int_{E'} u(r'e^{it})dt \\
&= \int_E u(re^{it})\,dt - \int_{E'} u(re^{it})\,dt + \int_{E'} \left(u(re^{it}) - u(r'e^{it})\right)\,dt \\
&\le \int_F \left|u(re^{it})\right|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left|u(re^{it}) - u(r'e^{it})\right|\,dt
\end{aligned}$$

ここで，$F = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E)$, よって $|F| = 2|\theta - \theta'|$. z と z' の役割をかえて結局

$$|u^*(z) - u^*(z')| \le \sup_{|F|=2|\theta-\theta'|} \int_F \left|u(re^{it})\right|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left|u(re^{it}) - u(r'e^{it})\right|\,dt$$

を得る．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して u が continuous であることから $z = re^{i\theta}$ に対して $z' = r'e^{i\theta'}$ を十分近くとれば

$$|u^*(z) - u^*(z')| < \varepsilon$$

を知る．次に u^* の subharmonicity をみる．その際 r を fix したとき $u(re^{it})$ を $[-\pi, \pi]$ の function とみるより，unit circle 上の function とみたほうが都合がよい．さて，$n(= 1, 2, \cdots)$ に対して

$$u_n^*(re^{i\theta}) = \sup_E \int_E u(re^{it})\,dt \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

を supremum は $|E| = 2\theta$ をみたす n 個以下の disjoint closed arcs からなるような set E に対してのものとして定義する．このとき，明かに

$$u_n^*(re^{i\theta}) \leq u_{n+1}^*(re^{i\theta}) \leq u^*(re^{i\theta})$$

である．また $n \to \infty$ のとき $u_n^*(re^{i\theta}) \longrightarrow u^*(re^{i\theta})$ となることを示そう．そのため，

$$u^*(re^{i\theta}) = \int_E u(re^{it})\,dt$$

なる E ($|E| = 2\theta$) をとる．このとき u が continuous であることから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|E \ominus K| \leq \varepsilon$$

をみたす $|K| = 2\theta$ なる disjoint finite union of closed arcs K の存在がわかればよい．ここに $\ominus$ は集合の対称差

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

である．そこで先ず，$E^c \subset I$, $|I \setminus E^c| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ なる open set I をとる．$I = \sum_{j=1}^{\infty} I_j$ ($\{I_j\}$: disjoint open arcs) であるから，

$$\left| I \setminus \sum_{j=1}^{n} I_j \right| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

であるように n を選ぶ．このとき $L = \sum_{j=1}^{n} I_j$ とすれば，

$$\begin{aligned}
|E \ominus L^c| &= |E^c \cap L^c| + |E \cap L| \\
&\leq |I \cap L^c| + |E \cap I| \\
&\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon
\end{aligned}$$

ここで，L^c は disjoint finite union of closed arcs である．そこで $N = L^c$ とおけば

$$|E \ominus N| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

また，

$$|N| \leq |E \cap N| + |E \ominus N| \leq 2\theta + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$|N| \geq |E \cap N| \geq |E| - |E \ominus N| \geq 2\theta - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

よって，

$$2\theta - \frac{1}{2}\varepsilon \leq |N| \leq 2\theta + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

そこで，$|N|$ の 2θ に対する過不足分 J を N に加え，あるいは引いて

$$K = N \cup J \quad \text{または} \quad N \setminus J$$

が $|K| = 2\theta$ なる disjoint finite union of closed arcs であるようにする．このとき，$|J| \le \frac{1}{2}\varepsilon$ なので

$$|E \ominus K| \le \varepsilon$$

を得る．

以上より，あとは各 u_n^* $(n = 1, 2, \cdots)$ が subharmonic であること．即ちこれらの functions が local sub-mean-value property をもつことを示せば証明は完了である．

$0 < \rho < r$ なる ρ に対して

$$r + \rho e^{i\psi} = r(\psi) e^{i\alpha(\psi)}, \ \ |\alpha(\psi)| < \frac{\pi}{2}$$

と定める．このとき，$r(-\psi) = r(\psi)$, $\alpha(-\psi) = -\alpha(\psi)$ である．また，r $(r_1 < r < r_2)$, θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 及び任意の real φ に対して，

$$v(r, \theta, \varphi) = \int_{-\theta}^{\theta} u(re^{i(t+\varphi)})\, dt$$

とおく．以上の設定の下に，先ず任意の r $(r_1 < r < r_2)$, θ $(0 < \theta < \pi)$ に対して，

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(r(\psi), \theta + \alpha(\psi), \varphi)\, d\psi = \int_{-\pi}^{\pi} v(r(\psi), \theta, \varphi + \alpha(\psi)) d\psi \tag{C.0.1}$$

が $r_1 < r(\psi) < r_2$, $0 < \theta + \alpha(\psi) < \pi$ である程度に小さい ρ に対して成立することをみる．そこで左辺を

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(r(\psi), \theta + \alpha(\psi), \varphi)\, d\psi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(J_1(\psi) + J_2(\psi)\right)\, d\psi$$

ここで
$$J_1(\psi) = \int_{-\theta-\alpha(\psi)}^{-\theta+\alpha(\psi)} u(r(\psi)e^{i(t+\varphi)})\, dt,$$
$$J_2(\psi) = \int_{-\theta+\alpha(\psi)}^{\theta+\alpha(\psi)} u(r(\psi)e^{i(t+\varphi)})\, dt$$

とする．このとき，$J_1(-\psi) = -J_1(\psi)$ より $\int_{-\pi}^{\pi} J_1(\psi) d\psi = 0$. また，$J_2(\psi)$ は変数変換すると

$$\begin{aligned} J_2(\psi) &= \int_{-\theta}^{\theta} u(r(\psi)e^{i(t+\varphi+\alpha(\psi))})\, dt \\ &= v(r(\psi), \theta, \varphi + \alpha(\psi)) \end{aligned}$$

となるので identity (C.0.1) を得る．

ここで unit circle 上 $e^{i(\varphi-\theta)}$ から $e^{i(\varphi+\theta)}$ までの反時計回りの closed arc を $I(\theta, \varphi)$ とかくことにすると，

$$v(r, \theta, \varphi) = \int_{I(\theta,\varphi)} u(re^{it})\, dt$$

とかける．

さて以下 $re^{i\theta}$ $(r_1 < r < r_2,\ 0 < \theta < \pi)$ を fix する．このとき $u_n^*(re^{i\theta})$ の定義における supremum はある disjoint finite union of closed arcs により attain される．何

故なら，先ず $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ $(0 \leq \theta_i)$ をみたす $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ を fix した上で unit circle 上の disjoint finite union $I(\theta_1, \varphi_1) \cup I(\theta_2, \varphi_2) \cup \cdots \cup I(\theta_n, \varphi_n)$ $(0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_n)$ (但し、端点の共有は許す) の全てを考えると u が continuous なので，それらの上で積分したとき maximum を attain する組 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ がある．その上で $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ $(0 \leq \theta_i)$ をみたしながら $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ を動かせば，やはり u が continuous なので先に取った maximum な値も連続的に変化することから，結局 $u_n^*(re^{i\theta})$ の値を attain する disjoint finite union of closed arcs が存在することがわかる．つまり，disjoint union

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} I(\theta_j, \varphi_j), \quad \sum_{j=1}^{m} \theta_j = \theta, \quad m \leq n$$

$$\text{で} \qquad u_n^*(re^{i\theta}) = \int_E u(re^{it})\,dt$$

であるようなものが存在する．そこで今，$0 < \rho < r$, $-\pi \leq \psi \leq \pi$ に対して

$$E(\psi) = I(\theta_1 + \alpha(\psi), \varphi_1) \cup \left\{ \bigcup_{j=2}^{m} I(\theta_j, \varphi_j + \alpha(\psi)) \right\}$$

とすると，十分小さい ρ に対しては全ての ψ に対して $E(\psi)$ は再び disjoint union である．このとき，

$$|E(\psi)| = 2\theta + 2\alpha(\psi)$$

なので，

$$\begin{aligned} u_n^*(r(\psi)e^{i(\theta+\alpha(\psi))}) &\geq \int_{E(\psi)} u(r(\psi)e^{it})\,dt \\ &= v(r(\psi), \theta_1 + \alpha(\psi), \varphi_1) + \sum_{j=2}^{m} v(r(\psi), \theta_j, \varphi_j + \alpha(\psi)). \end{aligned}$$

この両辺を ψ について積分し，更に $r(\psi)e^{i(\theta+\alpha(\psi))} = (r + \rho e^{i\psi})e^{i\theta} = re^{i\theta} + \rho e^{i(\psi+\theta)}$ 及び (C.0.1) を使って

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n^*(re^{i\theta} + \rho e^{i\psi})d\psi \geq \sum_{j=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} v(r(\psi), \theta_j, \varphi_j + \alpha(\psi))\,d\psi.$$

ここで u が subharmonic であることから，

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} v(r(\psi), \theta_j, \varphi_j + \alpha(\psi))\,d\psi &= \int_{-\theta_j}^{\theta_j} \int_{-\pi}^{\pi} u(r(\psi)e^{i(t+\varphi_j+\alpha(\psi))})\,d\psi dt \\ &= \int_{-\theta_j}^{\theta_j} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i(t+\varphi_j)} + \rho e^{i\psi})\,d\psi dt \\ &\geq 2\pi \int_{-\theta_j}^{\theta_j} u(re^{i(t+\varphi_j)})\,dt. \end{aligned}$$

よって十分小さい全ての ρ に対して，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n^*(re^{i\theta} + \rho e^{i\psi})\,d\psi &\geq \sum_{j=1}^{m} \int_{-\theta_j}^{\theta_j} u(re^{i(t+\varphi_j)})\,dt \\ &= \int_E u(re^{it})dt = u_n^*(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

を得る． □

関連図書

[1] A. Alvino, J. I. Diaz, P. -L. Lions, and G. Trombetti, 'Équations elliptiques et symétrisation de Steiner', *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **314**, Série I, pp. 1015–1020(1992).

[2] A. Alvino, P. -L. Lions, and G. Trombetti, 'Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization', *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **7**(1990), pp. 37–65.

[3] A. Alvino, P. -L. Lions, and G. Trombetti, 'Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization: A new approach', *Differential and Integral Equations*, **4**(1991), pp. 25–50.

[4] J. M. Anderson and Baernstein, 'The size of the set on which a meromorphic function is large', *Proc. london Math. Soc.*, (3)**36**(1978), pp. 518-539..

[5] A. Baernstein, Proof of Edrei's sprad conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, **26**(1973), pp. 418-434.

[6] A. Baernstein, 'A generalization of the $\cos \pi\rho$ theorem', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **193**(1974), pp. 181-197.

[7] A. Baernstein, 'Integral means, univalent functions and circular symmetrization', *Acta. Math.*, **133**(1974), pp. 139–169.

[8] A. Baernstein, 'How the $*$-function solves extremal problems',Proceedings of the International Congress of Mathematicians Helsinki 1978(2), pp. 639–644, *Academia Scientiarum Fennica, Helsinki*(1980).

[9] A. Baernstein, 'Regularity theorems associated with the spread relation', *J. Analyse Math.*, **31**(1977), pp. 76-111.

[10] A. Baernstein, 'Bieberbach's conjecture for Tourists', Harmonic Analysis(Minneapolis), Lecture Notes in Math. **908**, Springer-Verlag, 1982, pp. 48-73.

[11] A. Baernstein, 'An extremal problem for certain subharmonic functions in the plane', *Rev. Mat. Iberoamericana*, **4**(1988), pp. 199–219.

[12] A. Baernstein, 'Convolution and rearrangement on the circle', *Complex Variables*, **12**(1989), pp. 33–37.

[13] A. Baernstein, 'Landau's constant and extremal problems involving discrete subsets of $\mathbb{C}$', to appear in the update of Vol. **1043** Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin.

[14] A. Baernstein, 'A unified approach to symmetrization', *Symposia Mathematics* Vol. XXXV, Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 49-91.

[15] A. Baernstein and B. A. Taylor, 'Spherical rearrangements, subharmonic functions, and *-functions in n-space', *Duke Math. J.*, **43**(1976), pp. 245–268.

[16] A. Baernstein and R. Rochberg, 'Means and Coefficients of functions which omit a sequence of values', *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **81**(1977), pp. 47-57

[17] C. Bandle, 'Isoperimetric Inequalities and Applications', Pitman, Boston(1980).

[18] W. Beckner, 'Moser-Trudinger inequality in higher dimensions', International Math. Res. Notices, no. 7, *Duke Math J.*(1991), pp. 83–91.

[19] W. Beckner, 'Sobolev inequalities, the Poisson semigroup and analysis on the sphere S^n', *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **89**(1992), pp. 4816–4819.

[20] W. Beckner, 'Geometric inequalities in Fourier analysis', to appear in the proceedings of a conference at Princeton in 1991 in honor of E. M. Stein.

[21] C. Borell, 'Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process', *Z. Wahrsch Verw. Gebiete*, **70**(1985), pp. 1–13.

[22] A. Cianchi, 'Maximizing the L^∞ norm of the gradient of solutions to the Poisson equation', *J. of Geo. Anal.*, **2**(1992), pp. 499–515.

[23] K. M. Chong and N. M. Rice, 'Equimeasurable rearrangement of functions', *Queen's paper in pure and applied math.*, No. 28, Queen's Univ., Ontario, 1983.

[24] M.G. Crandall and L. Tartar, 'Some relations between nonexpansive and order preserving mappings', *Proc. Amer. Math. Soc.*, **78**(1980), pp. 385-390.

[25] J. A. Crowe and J. A. Zweibel, 'Rearrangements of functions', *J. Funct. Anal.*, **66**(1986), pp. 432–438.

[26] D. Drasin and D.F. Shea, 'Pólya peaks and the oscillation of positive functions', *Proc. Amer. Math. Soc.* **34**(1972), no. 2, 403-411.

[27] , D. Drasin and A. Weitsman, 'Meromorphic functions with large sums of deficiencies', *Advances in Math.*, **15**(1974), 93-126.

[28] V. N. Dubinin, 'Transformation of condensers in space', *Soviet Math. Dokl.*, 36(1988), pp. 217–219.
Russian original in Dokl. Akad. Nauk SSSR **296**(1987), 18–20.

[29] V. N. Dubinin, ‘ Capacities and geometric transformations of subsets in n-space’, 1992 preprint, Institute of Applied Mathematics, Vladivostok.

[30] P. L. Duren, ‘Univalent Functions’, Springer-Verlag, New York(1983).

[31] A. Edrei, ‘The deficiencies of functions of finite lower order’ Duke Math. J. **31**(1964), pp.1-22.

[32] A. Edrei, ‘Sums of deficiencies of meromorphi functions ’ *J. Analyse Math.* **14**(1965), pp.79-107.

[33] A. Edrei, ‘Sums of deficiencies of meromorphi functions II’ *J. Analyse Math.* **19**(1967), pp.53-74.

[34] A. Edrei, ‘Solution of the deficiency problem for functions of small lower order’ *Proc. London math. Soc.*, (3)**26**(1973), pp.435-445.

[35] A. Edrei, ‘The deficiencies of functions of finite lower order’ *Duke Math. J.* **31**(1964), pp.1-22.

[36] A. Edrei and W.H. J. Fuchs, ‘The deficiencies of meromorphic functions of order less than one’ *Duke Math. J.* **27**(1960), pp.233-249.

[37] A. Edrei and W.H. J. Fuchs, ‘Asymptotic behavior of meromorphic functions with extremal spread I’, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* 2(1976), pp.67-111.

[38] A. Edrei and W.H. J. Fuchs, ‘Asymptotic behavior of meromorphic functions with extremal spread II’, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series AI Math.* **3**(1977), pp.141-168.

[39] Erdélyi, et al., ‘Higher Transcendental Functions’, McGraw-Hill, New York, 1953.

[40] A. Eremenko and M. Sodin, ‘The value distribution of meromorphic functions and meromorphic curves from the point of view of potential theory’, *St. Petersburg Math. J.*, **3**(1992), pp. 109–136.

[41] M. Essén, J.F. Rossi and D. F. Shea, ‘A convolution ineqality with applications in function theory’, *Contemporary Mathematics(Amer. Math. Soc.)*, **25**(1983), pp. 141-147.

[42] M. Essén, J.F. Rossi and D. F. Shea, ‘A convolution ineqality with applications in function theory II’, *J. Analyse Math*, **61**(1993), pp. 339-366.

[43] M. Essén and D. Shea, ‘On some questions of uniqueness in the theory of symmetrization’, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4**(1979), pp. 311–340.

[44] C. H. FitzGerald, ‘Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions’, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46**(1972), pp. 356-368.

[45] A. E. Fryntov, ‘An extremal problem of potential theory’, *Soviet Math. Dokl.*, **37**(1988), pp. 754–755.
Russian original in Dokl. Akad. Nauk USSR 300(1988), No.4.

[46] A. E. Fryntov, ‘Extremal properties of Green functions and A. Weitsman’s conjecture’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, toappear.

[47] D. Gilberg and N. S. Trudinger, ‘Elliptic Partial Differential Equations of Second Order’, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[48] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, “Inequalities”, Cambrige Univ. Press, 1980.

[49] W. K. Hayman, ‘Multivalent Functions’, Cambridge University Press, 1964.

[50] W. K. Hayman, ‘Meromorphic Functions’, Oxford University Press, London(1964).

[51] W. K. Hayman, ‘Research Problems in Function Theory’, The Athelone Press, London(1967).

[52] W. K. Hayman, ‘Subharmonic Functions’, Vol. I, II Academic Press, London(1989).

[53] D. Horowitz, ‘A refinement for coefficient estimates of univalent Functions’, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54**(1976), pp. 176-178.

[54] B. Kawohl, ‘Rearrangements and Convexity of Level Sets in P. D. E.’, Lecture Notes in Mathematics **1150**, Springer-Verlag, Berlin(1985).

[55] S. Kesavan, ‘ On a comparison theorem via symmetrization’, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **119A**(1991), pp. 159–167.

[56] R. Laugesen, ‘Extremal Problems Involving Logarithmic and Green Capacity, Ph. D. Thesis, Washington University, St. Louis(1993).

[57] N. Levinson, ‘Gap and Density Theorems’, Amer. Math. Soc., New York, 1940.

[58] J. E. Littlewood, ‘On Inequalities in the Theory of Functions’, *Proc. London Math. Soc.*, **23**(1925), pp. 481-519.

[59] A. W. Marshall and I. Olkin, ‘Ineqalities:Theory of Majorization and its Applications’, Academic Press, New York, 1979.

[60] I. M. Milin, ‘Univalent Functions and Orthonormal Systems’, *Translations of Mathematical Monographs*;English transl., Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1977.

[61] H. Montgomery, ‘ Minimal theta functions’, *Glasgow Math. J.*, **30**(1988), pp. 75–83.

[62] R. Nevanlinna, 'Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Functions Méromorphes, Gouthier Villars, Paris, 1929.

[63] R. Nevanlinna, 'Eindeutige analytische Funktionen', Springer-Verlag, Berlin, 1936.

[64] R. Nevanlinna, 'Analytic Functions', Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[65] 'Notices of the American Mathematical Society', **41**(1994).

[66] 小澤 満, '近代函数論 I–値分布の理論–', 数学全書 3, 森北出版, 1976.

[67] I. V. Ostrovskii, 'On the deficiencies of meromorphic functions of lower order less than one', *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **150**(1963), pp.32-35=Soviet Math. Dokl. 4(1963), pp. 587-591.

[68] G. Pólya and G. Szegö, 'Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics', Princeton Univ. Press, Princeton 1951.

[69] Chr.Pommerenke, 'Univalent Functions', Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[70] C. Pucci and G. Talenti, 'Elliptic (second order) partial differential equations with measurable coefficients and approximating integral equations', *Adv. Math.*, **19**(1976), pp. 41–105.

[71] J.V. Ryff, 'Measure preserving transformation and rearrangement', *J. Math. Anal. and Appl.*, **31**(1970), pp. 449–458.

[72] 酒井 隆, 'リーマン幾何学' 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[73] J. Sarvas, 'Symmetrization of condensers in n-space', *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math*, no. 522(1972), **44**.

[74] D. A. Shea, 'On the Valiron deficiencies of meromorphic functions of finite order', *Trans. Amer. Math. Soc.* **124**(1966), 210-227.

[75] G. Talenti, 'Elliptic equations and rearrangements', *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **3**(1976), pp. 697–718.

[76] O. Teichmüller, 'Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung bei gebrochener Functionen endlicher Ordnung', *Deutsche Math.* **4**(1939), pp. 163-190.

[77] A. Weitsman, 'Spherical symmetrization in the theory of partial differential equations', *Comm. Part. Diff. Eqns.* , **8**(1983), pp. 545–561.

[78] A. Weitsman, 'Symmetrization and the Poincaré metric', *Annals of Math.*, **124**(1986), pp. 159–169.

[79] L. Yang, 'Value Distribution Theory', Springer, 1993.

[80] W. Ziemer, 'Weakly Differentiable Functions', Springer-Verlag, Berlin(1989).