射影空間上の正則写像の力学系

上田 哲生（京大総合人間学部）

本稿は，射影空間上の複素力学系に関する最近の結果を [U3], [U4], [HP], [FS2], [FS3] を中心にまとめたものである．

1. 斉次写像

$\mathbf{C}^{n+1}$ で $n+1$ 次元複素数空間を表す．O で原点 $(0,\ldots,0)$ を表し，$\mathcal{X}=\mathbf{C}^{n+1}-\{O\}$ とおく．また，複素射影空間 $\mathbf{P}^n$ 上の点を斉次座標 $p=[x_0:\cdots:x_n]$ によって表す．

$$\pi(x_0,\ldots,x_n)=[x_0:\cdots:x_n]$$

で定まる自然な射影 $\pi:\mathcal{X}\to\mathbf{P}^n$ は $\mathbf{P}^n$ 上の正則 $\mathbf{C}^*$-バンドルを定める．

正則写像 $F:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ が d 次斉次写像であるとは，F が $n+1$ 個の d 次斉次多項式の組 $F(x)=(f_0(x),\ldots,f_n(x))$ で表されることをいう．斉次写像 F が非退化であるとは，$x\neq O$ ならば $F(x)\neq O$ なることをいう．

非退化斉次写像 $F:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ は$\pi\circ(F|\mathcal{X})=f\circ\pi$ なる正則写像 $f:\mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^n$ を定める．この逆も容易に示すことができる (たとえば [FS2])：

命題 1.1 正則写像 $f:\mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^n$ に対して非退化斉次写像 $F:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ で $\pi\circ(F|\mathcal{X})=f\circ\pi$ なるものが存在する．このような写像 F は 0 でない定数倍を除いて一意的である．

正則写像 f の性質を調べるために，対応する斉次写像 F を考察することが重要である．この節では斉次写像 F の 0 への吸引領域 $\mathcal{A}$，および Green 関数 h について述べる ([HP], [U3])．

$\mathbf{C}^{n+1}$ 上のユークリッドノルムを $x=(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}^{n+1}$ に対して

$$\|x\|=(|x_0|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}.$$

で定める．

補題 1.2　$F : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ を次数 d の斉次写像とする.

(1) 定数 $M > 0$ で, すべての $x \in \mathbf{C}^{n+1}$ について $\|F(x)\| \leq M\|x\|^d$ なるものが存在する. F が非退化ならば, 定数 $m > 0$ で, すべての $x \in \mathbf{C}^{n+1}$ について $\|F(x)\| \geq m\|x\|^d$ なるものが存在する.

(2) 次数 $d \geq 2$ のとき, 定数 $r > 0$ で, $\|x\| < r$ ならば

$$\|F(x)\| < \frac{1}{2}\|x\|$$

なるものが存在する. F が非退化で $d \geq 2$ のとき, 定数 $R > 0$ で, $\|x\| > R$ならば

$$\|F(x)\| > 2\|x\|$$

なるものが存在する.

(証明)　(1) $M := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\|$ とおく. F は d 次斉次だから

$$\|F(x)\| = \|x\|^d \|F(x/\|x\|)\| \leq M\|x\|^d.$$

F が非退化のとき, $m := \inf_{\|x\|=1} \|F(x)\| > 0$ とおく. このとき

$$\|F(x)\| = \|x\|^d \|F(x/\|x\|)\| \geq m\|x\|^d.$$

(2) r を $0 < r \leq (2M)^{-1/(d-1)}$ なるように選ぶ. このとき

$$\|F(x)\| \leq M\|x\|^d < Mr^{d-1}\|x\| \leq (1/2)\|x\| \quad \text{for} \quad \|x\| < r.$$

F が非退化のとき, R を $R \geq (2m)^{-1/(d-1)}$ なるように選ぶ. このとき

$$\|F(x)\| \geq m\|x\|^d > mR^{d-1}\|x\| \geq 2\|x\| \quad \text{for} \quad \|x\| > R. \quad \square$$

定義　次数 $d \geq 2$ の斉次写像 F に対して原点 O の吸引領域 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid F^j(x) \to O \quad (j \to \infty)\}.$$

で定める.

命題 1.3　(1) $\mathcal{A}$ は空でない擬凸領域である.

(2) $\mathcal{A}$ は完全円領域である. 即ち, $x \in \mathcal{A}$ かつ $c \in \mathbf{C}$, $|c| \leq 1$, ならば $cx \in \mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ が有界である必要充分条件は F が非退化であること.

(証明)　r, R を補題 1.2 のようにとる．$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \|x\| < r\}$ とおくと，領域 $\mathcal{A}$ は 擬凸領域 $F^{-j}(\mathcal{B}_r)$, $j = 1, 2, \ldots$ の上向列の和集合である．よって $\mathcal{A}$ は擬凸．$\mathcal{A}$ が完全円領域であることは，F が斉次写像であることから直ちにわかる．F が非退化ならば，$\mathcal{A}$ は超球 $\{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \|x\| \leq R\}$, に含まれるから有界である．$F$ が退化写像ならば，$F(x) = O$ なる $x \neq O$ がある．このとき，すべての $c \in \mathbf{C}$ について $F(cx) = 0$．よって $\mathcal{A}$ は非有界である．　□

定理 1.4　次の性質をもつ関数 $h : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が唯 1 つ存在する：

(i)　$\alpha(x) = h(x) - \log \|x\|$ は 0 次斉次，即ち，$\alpha(cx) = \alpha(x)$ ($x \in \mathcal{X} = \mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$, $c \in \mathbf{C}^*$).

(ii)　$\mathcal{A} = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid h(x) < 0\}$

(証明)　次のようにおく：

$$\rho(x) = \sup\{a > 0 \mid ax \in \mathcal{A}\}$$

$$h(x) = -\log \rho(x).$$

この h が条件をみたすことは容易に確かめられる．　□

定義　関数 h を 斉次写像 F に関する Green 関数とよぶ.

定理 1.5　F を次数 $d \geq 2$ の斉次写像とする．

(1) $h_0(x)$ が $\mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$ 上の関数で $h_0(x) - \log \|x\|$ が有界なるものとすると，$d^{-j} h_0(F^j(x))$ は *Green* 関数 $h(x)$ に収束する．

(2) *Green* 関数 h は $\mathbf{C}^{n+1}$ で多重劣調和で次式を満たす：

$$(*) \qquad h(F(x)) = d \cdot h(x).$$

(3) F が非退化ならば, (1) における収束は一様で，*Green* 関数 h は $\mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$ 上連続である．

(証明)　まず F が非退化の場合を考える．

$$\gamma(x) := h_0(F(x)) - d \cdot h_0(x).$$

とおくと，Lemma 1.2,(1) より，γ は $\mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$ で有界で

$$d^{-1} h_0(F(x)) = h_0(x) + d^{-1}\gamma(x).$$

x を $F^{k-1}(x)$ で置き替えて $d^{-(k-1)}$ 倍すると，

$$d^{-k}h_0(F^k((x)) = d^{k-1}h_0(F^{k-1}(x)) + d^{-k}\gamma(F^{k-1}(x)).$$

これらを $k = 1, \ldots, j$ について加えると

$$d^{-j}h_0(F^j(x)) = h_0(x) + d^{-1}\gamma(x) + \cdots + d^{-j}\gamma(F^{j-1}(x)).$$

$\gamma(x)$ が有界で $d \geq 2$ なることから，右辺は $j \to \infty$ のとき一様収束する．

$$\tilde{h}(x) = \lim_{j\to\infty} d^{-j}h_0(F^j(x)).$$

とおく．この極限は h_0 のとり方に依らない．実際，h_1 を同様の関数とすると $h_1(x) - h_0(x)$ は有界で $d^{-j}h_1(F^j(x)) - d^{-j}h_0(F^j(x))$ は $j \to \infty$ のとき 0 に収束する．

特別の場合：$h_0(x) = \log\|x\|$ を考える．$d^{-j}\log\|F^j(x)\|$ は多重劣調和で，$\mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$ で連続，かつ $d^{-j}\log\|F^j(x)\| - \log\|x\|$ は 0 次斉次である．よって，極限 $\tilde{h}(x)$ も同じ性質をもつ．つくり方から $\tilde{h}$ が等式 $(*)$ を満たすことは明らかである．

さて，$\tilde{h}$ が Green 関数 h に一致することを示そう．そのためには，条件 $x \in \mathcal{A}$ と条件 $\tilde{h}(x) < 0$ とが同値であることを示せばよい．これは等式 $(*)$ から明らかである．

F が退化している場合，A を充分大きい正数として，関数 $h_0 = \log\|x\| - A$ から出発する．このとき，$\gamma(x)$ は負で $d^{-j}h_0(F^j(x))$ は多重劣調和関数の下向列で，多重劣調和関数に収束する．あとは非退化の場合と同様に証明できる．　□

2. Fatou 集合

f を $\mathbf{P}^n$ 上の d 次正則写像とする．以下では次数 $d \geq 2$ と仮定する．これに対応する $\mathbf{C}^{n+1}$ 上の非退化斉次写像を F とし，F に関する Green 関数を h とする．

定義　開集合 $\mathcal{H} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ および$\Omega \subset \mathbf{P}^n$ を次のように定める：

$$\mathcal{H} := \left\{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid h \text{ は } x \text{ の或る近傍で多重調和}\right\}$$

$$\Omega := \pi(\mathcal{H}).$$

明らかに $\pi^{-1}(\Omega) = \mathcal{H}$，即ち，集合 $\mathcal{H}$ は錐体である．

命題 2.1　$p_0 \in \mathbf{P}^n$ が Ω に属するための必要充分条件は p_0 の近傍 V と正則写像 $s: V \to \mathbf{C}^{n+1}$ で $\pi \circ s = id.$ かつ $s(V) \subset \partial\mathcal{A}$ なるものが存在することである．このような正則写像 s は絶対値1の定数因子を除いて一意的である．

(証明)　点 p_0 のまわりの或る局所座標系に関する開球 V をとる．このとき $\pi: \mathcal{X} \to \mathbf{P}^n$ の V 上への制限は自明な $\mathbf{C}^*$-バンドルとなる．$\pi^{-1}(V)$ と $V \times \mathbf{C}^*$ とを同一視して，$\pi^{-1}(V)$ の点を (p, z) のように表す．このとき関数 $h|\pi^{-1}(V)$ は

$$h(p, z) = \log|z| + \eta(p).$$

の形をとる．ここで $\eta(p)$ は V 上の多重劣調和関数でこれが多重調和となる必要十分条件は $h(p, z)$ が $\pi^{-1}(V)$ で多重調和なることである．

定理の条件を満たす正則写像 s があるとすると，これは $s(p) = (p, \sigma(p))$ の形に表される．このとき $0 = h(s(p)) = \log|\sigma(p)| + \eta(p)$ が成り立つ．よって $\eta(p) = -\log|\sigma(p)|$ は多重調和である．

逆に $\eta(p)$ が多重調和であると仮定しよう．このとき，V 上の多重調和関数 η^* で$\eta + i\eta^*$ が正則となるものがある．$\sigma(p) = \exp(-\eta(p) - i\eta^*(p))$，$s(p) = (p, \sigma(p))$ と定めると，$h(s(p)) = \log|\sigma(p)| + \eta(p) = 0$ が成り立つ．即ち $s(V) \subset \partial\mathcal{A}$. η^* は実加法定数を除いて一意的だから，σ は絶対値1の定数因子を除いて一意的である．□

定理 2.2　集合 Ω', Ω'' を次のように定める：

$$\Omega' = \left\{ p \in \mathbf{P}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} f^j|V\ (j = 1, 2, \dots) \text{ が正規族をなすような } p \text{ の近} \\ \text{傍 } V \text{ が存在する} \end{array} \right\},$$

$$\Omega'' = \left\{ p \in \mathbf{P}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} p \text{ の近傍 } V \text{ と一様収束部分列 } f^{j_\nu}|V\ (\nu = 1, 2, \dots) \\ \text{が存在する} \end{array} \right\}.$$

このとき $\Omega = \Omega' = \Omega''$ が成り立つ．

定義　開集合 $\Omega = \Omega' = \Omega''$ を f の Fatou 集合とよぶ．Ω の各連結成分を Fatou 成分とよぶ．

(定理 2.2 の証明)　定義から明らかに $\Omega' \subseteq \Omega''$ が成り立つ．以下で $\Omega'' \subseteq \Omega$ と $\Omega \subseteq \Omega'$ を証明しよう．

まず $\Omega'' \subseteq \Omega$ を示そう．$p \in \Omega''$ として，p の近傍 V と一様収束部分列 $\{f^{j_\nu}|V\}$ をとる．$\varphi = \lim_{\nu\to\infty}(f^{j_\nu}|V)$ とおく．$\varphi(p)$ を含まない超平面 H をとる．適当な斉次座標系 $[x_0 : \cdots : x_n]$ を選んで，$H = \{x_0 = 0\}$ とする．超平面 H の "ε 近傍"

$N_\varepsilon = \{|x_0| < \varepsilon\|x\|\}$ を$\phi(p) \notin N_\varepsilon$ なるようにとる. V を小さくとりなおして, 充分大きいν について $f^{j_\nu}(V) \cap B =$ が成り立つと仮定する.

$$h_0(x) := \begin{cases} \log\|x\| & \text{for } x \in \pi^{-1}(N_\varepsilon), \\ \log(|x_0|/\varepsilon) & \text{for } x \in \pi^{-1}(\mathbf{P}^n - N_\varepsilon). \end{cases}$$

と定めると, $0 \le h_0(x) - \log\|x\| \le \log(1/\varepsilon)$ だから. $h_0(x) - \log\|x\|$ は有界である. 従って, 定理 1.5 より, $d^{-j_\nu}h_0(F^{j_\nu}(x))$ は$\nu \to \infty$ のとき, Green 関数 $h(x)$ に一様収束する. $x \in \pi^{-1}(V)$ ならば, $F^{j_\nu}(x) \in \pi^{-1}(\mathbf{P}^n - N_\varepsilon)$ が成り立つ. 従って $h_0(F^{j_\nu}(x))$ は $\pi^{-1}(V)$ で多重調和. 従って極限 h も $\pi^{-1}(V)$ で多重調和である. よって $p \in \Omega$.

次に $\Omega \subseteq \Omega'$ を示そう. $p \in \Omega$ として V と $s : V \to \mathbf{C}^{n+1}$ を命題 2.1 のようにとる. $F^j(s(V)) \subset \partial\mathcal{A}$ だから列 $\{F^j \circ s\}$ は一様有界で, 従って正規族をなす. $\{F^{j_\nu} \circ s\}$ を広義一様収束する部分列として$\Phi : V \to \mathbf{C}^{n+1}$ をその極限写像とする. このとき $\Phi(V) \subset \partial\mathcal{A} \subset \mathbf{C}^{n+1} - \{O\}$. よって $\pi \circ \Phi$ が定義できて, 列 $\{f^{j_\nu} = \pi \circ F^{j_\nu}\}$ は $\pi \circ \Phi$ に広義一様収束する. これより $\{f^j|V\}$ が正規族をなすことがわかる. 従って $p \in \Omega'$. □

註 1次元の場合, 等式$\Omega' = \Omega''$ は Julia 集合 $\mathbf{P}^1 - \Omega'$ が反発周期点の集合の閉包に一致するという定理の系として証明されている [M, §11].

定理 2.3 *Fatou* 集合 Ω は (空でなければ) *Stein* である. 従って, 各 *Fatou* 成分もまた *Stein* である.

(証明) 一般に, 開集合 $\Omega \neq \mathbf{P}^n$ が Stein であるための必要充分条件はそれが擬凸なることである. Ω が擬凸であることをいうには, $\mathcal{H} = \pi^{-1}(\Omega)$ が擬凸であることをいえばよい. これは次の補題からわかる. □

補題 2.4 h を $\mathbf{C}^m$ の多重劣調和関数とし

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbf{C}^m \mid h \text{ は } x \text{ の或る近傍で多重調和}\}$$

とすると, $\mathcal{H}$ は (空でなければ) 擬凸である.

(証明) $\mathcal{H}$ が擬凸であることをいうには次の主張を示せばよい:

Δ を, $\mathbf{C}^m$ の或る局所座標系に関する多重円板とする:

$$\Delta \cong \{x = (z_1, \ldots, z_m) \mid |z_i| < 1, i = 1, \ldots, m\}$$

また V を Δ 内の "*Hartogs* 図形" とする：

$$V = \{x \in \Delta \mid r < |z_1| < 1 \text{ または } \max_{i=2,\dots,m} |z_i| < r'\}, \quad (0 \le r, r' \le 1).$$

このとき $V \subseteq \mathcal{H}$ ならば，$\Delta \subseteq \mathcal{H}$ である．

この主張を示すために，$V \subseteq \mathcal{H}$ する．このとき $h|V$ は多重調和で，V は単連結だから或る正則関数の実部となっている．この正則関数は Δ 上に解析接続される．従って，Δ 上の多重調和関数 $\widehat{h}$ で $\widehat{h}|V = h|V$ なるものがある．$u(x) = h(x) - \widehat{h}(x)$, $x \in \Delta$, とおく．u は多重劣調和で $u|V \equiv 0$ である．1変数 z_1 のみの関数とみて，, u は $|z_1| < 1$ で劣調和で，$r < |z_1| < 1$ 上恒等的に 0．よって最大値の原理より，Δ 上 $u \le 0$. u は値 0 を Δ 内でとるから，再び最大値の原理より，$u \equiv 0$ がわかる．すなわち，$h \equiv \widehat{h}$ は Δ で多重調和で，$\Delta \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ． □

Kobayashi 擬距離の定義と基本的性質については，Kobayashi [K] を参照されたい．複素多様体 M が Kobayashi 双曲的であるとは，M 上の Kobayashi 擬距離が (非退化) 距離となることをいう．ここでは次の事実を用いる：(1) M が $\mathbf{C}^m$ の有界領域ならば M は Kobayashi 双曲的である．(2) M が Kobayashi 双曲的で $\alpha : N \to M$ が単射正則写像ならば，N も Kobayashi 双曲的である．(3) M が Kobayashi 双曲的である必要十分条件は M の（不分岐かつ相対境界のない）被覆多様体 $\tilde{M}$ で Kobayashi 双曲的なものが存在すること．

定理 2.5 *Fatou* 集合 Ω は *Kobayashi* 双曲的である．

(証明) 各 Fatou 成分 U が Kobayashi 双曲的であることを示せばよい．p_0 を U の点とし，V および写像 $s : V \to \mathbf{C}^{n+1}$ を命題 2.1 のようにとる．s は定数因子を除いて一意的だから，この 写像 s は U 内の任意の曲線に沿って解析接続できる．従って，この s の解析接続は U の被覆多様体 $\alpha : \tilde{U} \to U$ と $\pi \circ \tilde{s} = \alpha$ なる正則写像 $\tilde{s} : \tilde{U} \to \mathbf{C}^{n+1}$ を定める．$\tilde{s}$ は単射で，その像 $\tilde{s}(\tilde{U}) \subset \partial\mathcal{A}$ は有界である．従って $\tilde{U}$ は Kobayashi 双曲的である．従って U もまた Kobayashi 双曲的である． □

この結果をもう少し強めることができる：複素多様体 M が Carathéodory 双曲的であるとは，M の被覆多様体 $\tilde{M}$ で $\tilde{M}$ 上の Carathéodory 擬距離が (非退化) 距離となるものが存在することをいう．$\tilde{U}$ 上の Carathéodory 擬距離は距離だから，次の定理を得る．

定理 2.6 *Fatou* 集合 Ω は *Carathéodory* 双曲的である．

一般に Carathéodory 双曲的ならば Kobayashi 双曲的であるから，これは 定理 2.4 を含む.

註　$f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ の次数が 1 のとき，即ち，f が射影変換のときは 集合 Ω は定義されていない. 集合 $\Omega' = \Omega''$ は一般に Stein でも Kobayashi 双曲的でもない.

3. Fatou 集合と分岐点

$f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を次数 $d \geq 2$ の正則写像とする. 点 $p \in \mathbf{P}^n$ が分岐点 (critical point) であるとは f の p における微分 $df(p) : T_p\mathbf{P}^n \to T_{f(p)}\mathbf{P}^n$ のランクが n より小さいときをいう. f の分岐点全体からなる集合 C は $\det(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=0}^n = 0$, によって与えられる. 従って C は余次元 1 の代数的集合である（空でない）.

或る Fatou 成分 U が周期的であるとは，$f^j(U) = U$ なる整数 $j > 0$ が存在することをいう. このような j の最小のものを U の周期という. U が周期 m の周期的 Fatou 成分ならば，$U_i = f^{i-1}(U), i = 1, \ldots, m$ も同様で，$f(U_i) = U_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, m-1$) かつ $f(U_m) = U_1$ となる. 組 $\{U_i\}_{i=1}^m$ を Fatou 成分のサイクルという.

1 変数の場合の Siegel 円板と Herman 環 の一般化として，Fornaess–Sibony [FS2] は次の概念を定義した：

定義　Fatou 成分 U が回転領域（rotation domain または Siegel 領域）であるとは，部分列 $\{f^{j_\nu}|U\}$ で恒等写像 id. $: U \to U$ に広義一様収束するものが存在することをいう.

明らかに 回転領域 U は周期的である. m をその周期とすると，$U_i = f^{i-1}(U)$, $(i = 1, \ldots m)$ は回転領域のサイクルで，$f|U_i : U_i \to f(U_i)$ は双正則写像である.

註　$\mathbf{P}^2$ 上の正則写像で回転領域をもつ例は $\mathbf{P}^1$ の Siegel 円板や Herman 環をもつ有理関数から [U2, Section 4] の方法で構成できる.

定理 3.1　*$\{U_i\}_{i=1}^m$ を Fatou 成分のサイクルとし，$\widehat{U} = \bigcup_{i=1}^m U_i$ が次の条件を満たすと仮定する：*

(i) *$\widehat{U}$ は分岐点を含まない.*

(ii) *点 $p_0 \in \widehat{U}$ と部分列 $\{f^{j_\nu}(p_0)\}$ で $\widehat{U}$ の点に収束するものがある.*

このとき $\{U_i\}$ は回転領域のサイクルとなる.

(証明)　f の代わりに f^m を考えれば，定理は周期 1 の場合に帰着される. よって $m = 1$ と仮定して，$U = U_1 = \widehat{U}$ と書く.

d_U で U 上の Kobayashi 距離を表す．正数 ε を p_0 の ε 近傍 $V=\{p\in U\mid d_U(p,p_0)<\varepsilon\}$ が U で相対コンパクトなるようにとる．q_0 を $\{f^{j_\nu}(p_0)\}$ の極限点とし $B\subset U$ を q_0 を中心とする（或る局所座標系に関する）球とする．

d_B で B 上の Kobayashi 距離を表す．$W=\{q\in B\mid d_B(q,q_0)<\varepsilon/2\}$ とおく．部分列に移って，$f^{j_\nu}|U$ は広義一様収束し，すべての ν について $f^{j_\nu}(p_0)\in W$ と仮定する．まず $W\subseteq f^{j_\nu}(V)$ を示そう．$f^{-j_\nu}(B)$ の連結成分で p_0を含むものを V_ν で表す．U は分岐点を含まないから，$f^{j_\nu}|U$ は被覆写像である．従って $f^{j_\nu}|V_\nu:V_\nu\to B$ は双正則写像である．Kobayashi 距離の縮小性を，逆写像 $(f^{j_\nu}|V_\nu)^{-1}:B\to U$, に適用すると

$$\begin{aligned}d_U((f^{j_\nu}|V_\nu)^{-1}(q),p_0) &\le d_W(q,f^{j_\nu}(p_0))\\ &\le d_W(q,q_0)+d_W(q_0,f^{j_\nu}(p_0))<\varepsilon\end{aligned}$$

for $q\in W$. これは $(f^{j_\nu}|V_\nu)^{-1}(W)\subseteq V$ なることを示している．よって $W\subseteq f^{j_\nu}(V)$.

j_ν の部分列をとって $j_{\nu+1}-j_\nu\to\infty$, $(\nu\to\infty)$ と仮定してよい．写像列 $\{f^{j_{\nu+1}-j_\nu}|W\}$ が恒等写像に広義一様収束することを示したい．$q\in W$ に対して $p\in V$ を $q=f^{j_\nu}(p)$ なるように選ぶ．このとき $f^{j_{\nu+1}-j_\nu}(q)=f^{j_{\nu+1}}(p)$. 従って

$$\sup_{q\in W} d_U(f^{j_{\nu+1}-j_\nu}(q),q)\le\sup_{p\in V} d_U(f^{j_{\nu+1}}(p),f^{j_\nu}(p))$$

$\{f^{j_\nu}|V\}$ は一様収束するから，右辺は 0 に収束する．従って $\{f^{j_{\nu+1}-j_\nu}|W\}$ は恒等写像に一様収束する．$\{f^{j_{\nu+1}-j_\nu}|U\}$ は定義により正規族だから，これは U 上恒等写像に広義一様収束する．　□

点の組 $\{p_i\}_{i=1}^m$ $(m\ge 1)$ がサイクルであるとは $f(p_i)=p_{i+1}$ $(i=0,\dots,m-1)$, かつ $f(p_m)=p_1$ なることをいう．サイクル $\{p_i\}$ が吸引的であるとは，f^m の p_1 における微分 $df^m(p_1)$ の固有値の絶対値がすべて 1 より小さいことをいう．このとき p_i は Fatou 集合に含まれる．で p_i を含む Fatou 成分を U_i とすると，$\{U_i\}$ は Fatou 成分のサイクルをなす．集合 $\hat{U}=\bigcup_{i=1}^m U_i$ を吸引的サイクル $\{p_i\}$ の直接吸引領域とよぶ．

系 3.2　吸引的サイクルの直接吸引領域は分岐点を含む．

今度は，同様の結果を 2 次元で，或る条件を満たす放物的サイクルの場合に示そう．

まず，[U1] からいくつかの定義と結果を引用しよう．M を 2 次元の複素多様体とし $f: M \to M$ を全射正則写像とする．f の 不動点 p_0 が type $(1,b)_1$ の半吸引的不動点であるとは，p_0 を中心とする適当な局所座標系 (x,y) に関して f が

$$(x,y) \mapsto (x + \sum_{i+j>1} a_{ij}x^i y^j,\ by + \sum_{i+j>1} b_{ij}x^i y^j), \quad 0 < |b| < 1, \quad a_{20} \neq 0.$$

の形で表せるときをいう．([U1, Section 6].) p_0 が type $(1,b)_1$ の半吸引的不動点のとき，次の性質をもつ連結開集合 D (一様収束の基本領域) が存在する：(i) $f(D) \subset D$; (ii) $\{f^j|D\}$ は定数写像 p_0 に一様収束する； (iii) $\{f^j\}$ が点 $p \in M$ の或る近傍で一様収束するならば，$f^{j_0}(p) \in D$ なる j_0 が存在する．([U1, Proposition 7.2])．

D を含む Fatou 成分 U を p_0 の直接吸引領域とよぶ．この定義は D のとり方によらない．実際，D, D' を一様収束の基本領域とすると，$D \cap D'$ は性質 (iii) によって空でない．

次の定理は [U1, Theorem 10] と同様の方法で証明できる．

定理 3.3 上の状況のもとで，さらに U が f の分岐点を含まないと仮定する．このとき U は $\mathbf{C}^2$ に双正則である．

$\{p_i\}_{i=1}^m$ を f の周期点のサイクルとする．これが type $(1,b)_1$ の半吸引的サイクルであるとは p_1 が f^m の type $(1,b)_1$ の半吸引的不動点であることをいう．

このようなサイクルに対して，p_i の f^m に関する直接収束領域を U_i とするとき，集合 $\bigcup_{i=1}^m U_i$ を サイクル $\{p_i\}$ の直接吸引領域とよぶ．

$\mathbf{C}^2$ は Kobayashi 双曲的でないから，次の定理を得る：

定理 3.4 $f: \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ を次数 ≥ 2 の正則写像とする．このとき *type* $(1,b)_1$ の半吸引的サイクルの直接吸引領域は分岐点を含む．

4. リフトのなす正規族

$f: \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を次数 $d \geq 2$ の正則写像とする．Z を複素空間，$h: Z \to \mathbf{P}^n$ を正則写像とする．正則写像 $g: Z \to \mathbf{P}^n$ が h の f によるリフトであるとは，$f \circ g = h$ が成り立つことをいう．特に，Z が $\mathbf{P}^n$の 開部分集合で h が包含写像のとき，写像 g は f の逆写像の Z 上の一価な分枝を表すことに注意しよう．正則写像 $g_\nu: Z \to \mathbf{P}^n$ のなす族 $\{g_\nu\}$ が f の iterates による h のリフトであるとは，各 ν について j_ν が存在して g_ν が f^{j_ν} による h のリフトであることをいう．

定理 4.1　$f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を次数 $d \geq 2$ の正則写像とし，$h : Z \to \mathbf{P}^n$ を正則写像とする．$\{g_\nu\}$ を h の f の iterates によるリフトの族であるとする．このとき $\{g_\nu\}$ は正規族をなす．

証明のために 2 つの補題を準備する．正数 r と R $(r < R)$ について，球殻 $\mathcal{S}_{r,R}$ を次で定める：

$$\mathcal{S}_{r,R} = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} \mid r \leq \|x\| \leq R\}.$$

補題 4.2　$F : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ を次数 $d \geq 2$ の非退化斉次正則写像とする．このとき，正数 r, R を適当にとれば $F^{-1}(\mathcal{S}_{r,R}) \subset \mathcal{S}_{r,R}$. が成立する．

(証明)　これは補題 1.2 を言いかえたものである．　□

補題 4.3　$f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を次数 $d \geq 2$ の正則写像とし f を表現する非退化斉次正則写像を $F : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ とする．Z を単連結複素空間，$h : Z \to \mathbf{P}^n$ を正則写像とする．$g : Z \to \mathbf{P}^n$ を f による h のリフトとする．さらに，$s_0 : Z \to \mathcal{X}$ を $\pi \circ s_0 = h$ なる正則写像とする．

このとき $\pi \circ s_1 = g$ かつ $F \circ s_1 = s_0$. なる 正則写像 $s_1 : Z \to \mathcal{X}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[rr, "F"] \arrow[dd, "\pi"'] & & \mathcal{X} \arrow[dd, "\pi"] \\
& Z \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_0"'] \arrow[dl, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\
\mathbf{P}^n \arrow[rr, "f"'] & & \mathbf{P}^n
\end{tikzcd}$$

(証明)　次のようなファイバー積を考える：

$$\hat{\mathcal{X}}_g = \{(z, x) \in Z \times \mathcal{X} \mid g(z) = \pi(x)\}$$

$$\hat{\mathcal{X}}_h = \{(z, x) \in Z \times \mathcal{X} \mid h(z) = \pi(x)\}$$

また$\hat{\pi}_g : \hat{\mathcal{X}}_g \to Z$, $\hat{g} : \hat{\mathcal{X}}_g \to \mathcal{X}$ $\hat{\pi}_h : \hat{\mathcal{X}}_h \to Z$, $\hat{h} : \hat{\mathcal{X}}_h \to \mathcal{X}$. は自然に定まる射影とする．さらに$\hat{F} : \hat{\mathcal{X}}_g \to \hat{\mathcal{X}}_h$ を $\hat{F}(z, x) = (z, F(x))$ で定義すれば次の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{X}}_g \arrow[rr, "\hat{F}"] \arrow[dr, "\hat{g}"] \arrow[dd, "\hat{\pi}_g"'] & & \hat{\mathcal{X}}_h \arrow[dr, "\hat{h}"] \arrow[dd, "\hat{\pi}_h" near start] & \\
& \mathcal{X} \arrow[rr, "F" near start] \arrow[dd, "\pi" near start] & & \mathcal{X} \arrow[dd, "\pi"] \\
Z \arrow[rr, "\mathrm{id}" near start] \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dr, "h"] & \\
& \mathbf{P}^n \arrow[rr, "f"'] & & \mathbf{P}^n
\end{tikzcd}
$$

まず，写像 $\hat{F}$ が d-葉の不分岐被覆写像であることを示したい．そのために，z_0 を Z の任意の点とし z_0, $g(z_0)$, $h(z_0)$ の充分小さい近傍 U, V, W を $g(U) \subseteq V$, $f(V) \subseteq W$ かつ $\pi|\pi^{-1}(V) : \pi^{-1}(V) \to V$, $\pi|\pi^{-1}(W) : \pi^{-1}(W) \to W$ が自明な $\mathbf{C}^*$-バンドルとなるようにとる．このとき，これらの $\mathbf{C}^*$-バンドルの $g|U$, $h|U$ による引き戻しもまた自明である．従って次のように同一視ができる：

$$
\begin{aligned}
&\pi^{-1}(V) \cong V \times \mathbf{C}^*, \quad \pi^{-1}(W) \cong W \times \mathbf{C}^*, \\
&\hat{\pi}_g^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{C}^*, \quad \hat{\pi}_h^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{C}^*.
\end{aligned}
$$

このとき $\hat{g}|\hat{\pi}_g^{-1}(U)$, $\hat{h}|\hat{\pi}_h^{-1}(U)$ は次の形をとる：

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi}_g^{-1}(U) \ni (z, v) &\mapsto (g(z), v) \in \pi^{-1}(V), \\
\hat{\pi}_h^{-1}(U) \ni (z, w) &\mapsto (h(z), w) \in \pi^{-1}(W).
\end{aligned}
$$

さて，$F|\pi^{-1}(V)$ は次の形である：

$$
\pi^{-1}(V) \ni (p, v) \mapsto (f(p), c(p)v^d) \in \pi^{-1}(W),
$$

ここで $c(p)$ は零をとらない V 上の正則関数で，d は f の次数である．関係式 $\hat{h} \circ \hat{F} = F \circ \hat{g}$, より写像 $\hat{F}|\hat{\pi}_g^{-1}(U)$ は

$$
\hat{\pi}_g^{-1}(U) \ni (z, v) \mapsto (z, c(g(z))v^d) \in \hat{\pi}_h^{-1}(U).
$$

の形であることがわかる．これは $\hat{\pi}_h^{-1}(U)$ 上の d-葉の不分岐被覆である．従って，上の主張が示された．

さて，$\hat{s}_0 : Z \to \hat{\mathcal{X}}_h$ を $\hat{s}_0(z) = (z, s_0(z))$ によって定義する．このとき $\hat{\pi}_g \circ \hat{s}_0 = \mathrm{id}_Z$ かつ $\hat{h} \circ \hat{s}_0 = s_0$. $\hat{F}$ が不分岐被覆で Z が単連結だから，写像 $\hat{s}_0$ は写像 $\hat{s}_1 : Z \to \hat{\mathcal{X}}_g$ に持ち上げることができる：$\hat{F} \circ \hat{s}_1 = \hat{s}_0$. このとき

$$
\hat{\pi}_g \circ \hat{s}_1 = \hat{\pi}_h \circ \hat{F} \circ \hat{s}_1 = \hat{\pi}_h \circ \hat{s}_0 = \mathrm{id}_Z.
$$

写像 $s_1 : Z \to \mathcal{X}$ を $s_1 = \hat{g} \circ \hat{s}_1$ によって定義する．このとき

$$\begin{aligned} \pi \circ s_1 &= \pi \circ \hat{g} \circ \hat{s}_1 = g \circ \hat{\pi}_g \circ \hat{s}_1 = g, \\ F \circ s_1 &= F \circ \hat{g} \circ \hat{s}_1 = \hat{h} \circ \hat{F} \circ \hat{s}_1 = \hat{h} \circ \hat{s}_0 = s_0. \end{aligned}$$

よって補題は証明された． □

(定理 4.1 の証明)　球殻 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r,R}$ を 補題 4.2 のようにとる．正規族であるという性質は局所的なものだから Z が単連結であるとしてよい．さらに, Z を小さくとって，正則写像 $s_0 : Z \to \mathcal{X}$ で $\pi \circ s_0 = h$, かつ $s_0(Z) \subset \mathcal{S}$. なるものがあるとしてよい．補題 4.3 を， f, g の代わりに f^{j_ν}, g_ν について適用する．このとき正則写像 $s_\nu : Z \to \mathcal{X}$ で $\pi \circ s_\nu = g_\nu$ かつ $F^j \circ s_\nu = s_0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. なるものを得る． $F^{j_\nu}(s_\nu(Z)) \subset \mathcal{S}$, だから，補題 4.2 により $s_\nu(Z) \subset \mathcal{S}$ が成り立つ．従って $\{s_\nu\}$ は正規族をなす．

$\{s_{\nu(\kappa)}\}$ を Z で広義一様収束する部分列とすれば， $\lim_{\kappa \to \infty} s_{\nu(\kappa)} : Z \to \mathbf{C}^{n+1}$ は正則写像でその像は $\mathcal{S}$ の含まれる．従って $\{g_{\nu(\kappa)}\} = \{\pi \circ s_{\nu(\kappa)}\}$ $\pi \circ \lim_{\kappa \to \infty} s_{\nu(\kappa)}$ に広義一様収束する．これは $\{g_\nu\}$ が正規族であることを意味する． □

5. 解析的被覆

ここでは解析的被覆 (analytic covering) に関して既知の結果をまとめ，後で利用する補題を準備する．

X を連結複素多様体， Y を既約正規複素空間とする．正則写像 $\eta : Y \to X$ が解析的被覆であるとは η が全射固有写像で，全ての $x \in X$ について $\eta^{-1}(x)$ が有限であることをいう．このとき，余次元 1 の X の解析的集合 D が存在して

$\eta|\eta^{-1}(X - D) : \eta^{-1}(X - D) \to X - D$ は局所双正則となる ([GR2]). $X - D$ の点 x の 逆像 $\eta^{-1}(x)$ の点の個数を η の葉数といい $b(\eta)$ で表す．

定理 5.1　次数 $d \geq 1$ の正則 写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ は d^n-葉の解析的被覆である．

(証明)　まず，任意の $q \in \mathbf{P}^n$ に対して $f^{-1}(q)$ が有限集合であることを示そう． W を q の Stein 近傍とする．このとき $f^{-1}(W)$ は $\mathbf{P}^n$ の擬凸領域だから Stein である． $f^{-1}(q)$ は $f^{-1}(W)$ のコンパクトな解析的集合だから 0 次元，即ち有限集合である．あとは，一般の点 $q \in \mathbf{P}^n$ に対して $f^{-1}(q)$ の個数が d^n であることを示せばよい．これは Bezout の定理より従う． □

さて，一般の解析的被覆に戻る．解析的被覆 $\eta : Y \to X$ と，点 $y \in Y$ に対して η の y における位数 $\mathrm{ord}(\eta, y)$ を次のように定義する：y の近傍 Y_0 と $\eta(y)$ の近傍 X_0 を$\eta|Y_0 : Y_0 \to X_0$ が解析的被覆で，$(\eta|Y_0)^{-1}(\eta(y_0))$ が唯 1 点 y からなるようにとる．この解析的被覆の葉数を $\mathrm{ord}(\eta, y)$ と定める．

集合 $C = \{y \in Y | \mathrm{ord}(\eta, y) > 1\}$ を分岐点集合 (set of critical points)，$\eta(C)$ を分岐値集合 (set of critical values) とよぶ．

次の命題は定義より明らかであろう：

命題 5.2 $\zeta : Z \to Y$ および$\eta : Y \to X$ が解析的被覆であれば$\eta \circ \zeta : Z \to X$ もまた解析的被覆であり次が成り立つ：$b(\eta \circ \zeta) = b(\eta) b(\zeta)$，また，任意の $z \in Z$ について $\mathrm{ord}(\eta \circ \zeta, z) = \mathrm{ord}(\eta, \zeta(z)) \mathrm{ord}(\zeta, z)$．

D は X の余次元 1 の解析的部分集合とする．解析的被覆 $\eta : Y \to X$ が D-分岐被覆であるとはその分岐値集合が D に含まれることをいう．

命題 5.3 $\eta' : Y' \to X - D$ を有限葉の不分岐被覆とする．このとき，既約正規複素空間 Y，単射正則写像 $\iota : Y' \to Y$，および D-分岐解析的被覆 $\eta : Y \to X$ が存在して$\eta \circ \iota = \eta'$ が成り立つ．

これは [St, Satz 1] と [GR1] の主定理から従う．

命題 5.4 $\eta : Y \to X$ および $\zeta : Z \to X$ を D-分岐被覆とし$\gamma' : Z' \to Y'$ を正則写像で$\eta \circ \gamma' = \zeta|Z'$，ただし $Y' = \eta^{-1}(X - D)$，$Z' = \zeta^{-1}(X - D)$，なるものとする．このとき，正則写像$\gamma : Z \to Y$ で $\gamma|Z' = \gamma'$ なるものが一意的に存在する．

これは，正規複素空間における Riemann の除去可能定理より従う．

補題 5.5 $\eta : Y \to X$ を D-分岐解析的被覆とする．点 $y \in Y$ が空間 Y の特異点であるかまたは解析的集合 $\eta^{-1}(D)$ の特異点であるならば，$\eta(y)$ は D の特異点である．

(証明) y を Y の点とする．$\eta(y) \notin D$ であるとすると，$y \notin \eta^{-1}(D)$ で y は Y の通常点．$\eta(y)$ が D の通常点であるとすると，y は winding point である [GR1, Satz 10]．即ち，y の座標近傍 $V = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid |z_i| < 1\}$ および $\eta(y)$ の 座標近傍 $W = \{(w_1, \ldots, w_n) \mid |w_i| < 1\}$ を適当にとれば，$D \cap W = \{w_1 = 0\}$ かつ $\eta|V : V \to W$ が $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (z_1^\mu, z_2, \ldots, z_n)$，($\mu$ は或る正整数)．の形の

$D\cap W$-分岐解析的被覆となる．従って $\eta^{-1}(D)\cap V=\{z_1=0\}$ は y において非特異 □

定義. X を複素多様体，D を X の解析的集合，m を正整数とする．D-分岐解析的被覆 $h:Z\to X$ が m-普遍であるとは次の条件が成り立つことをいう：葉数 $b(\eta)\leq m$ なる任意の D-分岐解析的被覆$\eta:Y\to X$ に対して，正則写像 $\gamma:Z\to Y$ で $h\circ\gamma=\eta$ なるものがある．

補題 5.6 $X-D$ の基本群 $\pi_1(X-D)$ が有限生成ならば，任意の正整数 m について，X の m-普遍 D-分岐解析的被覆が存在する．

(証明) 命題 5.3 と 5.4 より，有限葉不分岐被覆 $\zeta':Z'\to X-D$ で次の条件を満たすものがあることを示せばよい：

$\eta:Y'\to X-D$ が葉数 $\leq m$ の不分岐被覆ならば$\gamma'\circ\eta'=\zeta'$ なる正則写像 $\gamma':Z'\to Y'$ が存在する．

$X-D$ の不分岐被覆の同値類と $\pi_1(X-D)$ の部分群の共役類は 1 対 1 に対応するから，$\pi_1(X-D)$ の指数有限の部分群 K で次の条件を満たすものがあることを示せばよい：

$H\subset\pi_1(X-D)$ が指数 $\leq m$ の部分群ならば，$K\subseteq H$.

$\pi_1(X-D)$ は有限生成だから，指数$\leq m$ の部分群の個数は有限である ([Suz, §7, Excercise 3])．これらの部分群の共通部分を K とすればよい． □

補題 5.7 X を複素多様体，D を X の余次元 1 の解析的部分集合とする．任意の点 $x_0\in X$ に対して，x_0 の近傍 W で次の性質をもつものがある：

(i) 任意の正整数 m について m-普遍 $D\cap W$-分岐解析的被覆が存在する．
(ii) 任意の $D\cap W$-分岐解析的被覆 $\eta:Y\to W$ について，$\eta^{-1}(x_0)$ は唯 1 点からなる．

(証明) x_0 の適当なコンパクト近傍 X_0 をとると対 $(X_0,D\cap X_0)$ は三角形分割可能である ([KB], [Gi])．即ち，単体的複体 K とその部分複体 L からなる対 (K,L) で $(X_0,D\cap X_0)$ と同相なものがある．

W として x_0 の開星状体をとる．このとき $\pi_1(W-D)$ は有限生成だから性質 (i) は成り立つ．

さらに，対 $(W,D\cap W)$ は∂W を底とする錐と $D\cap\partial W$ を底とする錐とからなる対に同相である．従って，x_0 の任意の連結近傍 $W_0\subseteq W$ に対して，準同型写像

$\pi_1(W_0 - D) \to \pi_1(W - D)$ は全射である．従って，任意の $D \cap W$-分岐解析的被覆 $\eta : Y \to W$ について逆像 $\eta^{-1}(W_0 - D)$ は連結である．これより性質 (ii) が従う．
□

6. Critical orbits と回転領域

6.1. $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を次数 $d \geq 2$ の正則写像とする．f の Fatou 集合 を Ω で表す．また，Ω の各連結成分を Fatou 成分とよぶ．U を一つの Fatou 成分とする．正則写像 $\varphi : U \to \mathbf{P}^n$ が U上の極限写像であるとは写像列 $\{f^{j_\nu}|U\}$ で φ に広義一様収束するものが存在することをいう．点 q_0 が Fatou 極限点であるとは或る Fatou 成分 U 上の極限写像 φ で $q_0 \in \varphi(U)$ なるものが存在することをいう．Fatou 極限点全体からなる集合を Fatou 極限集合とよび Λ で表す．

さて，§ 3.1 で定義したように，Fatou 成分 U が回転領域であるとは恒等写像 $\mathrm{id}_U : U \to U$ が U 上の極限写像であることをいう．次の補題は回転領域が存在するための判定条件を与える．

補題 6.1 (1) W を $\mathbf{P}^n$の 部分集合とする．$\mathbf{P}^n$ の開集合 V と写像列 $\{f^{j_\nu}|V\}$ で V 上一様収束，かつすべての ν について $f^{j_\nu}(V) \supseteq W$ なるものが存在すれば，写像列 $\{f^{j_\kappa}|W\}$ で恒等写像 $W \to W$ に一様収束するものがとれる．

(2) さらに W が連結開集合と仮定すれば，W は或る回転領域に含まれる．

註． 条件 "V 上一様収束" という条件は "V 上広義一様収束" で置きかえることはできない．

(証明) 部分列に移って，$j_{\nu+1} - j_\nu$ は無限大に発散すると仮定してよい．写像列 $f^{j_{\nu+1}-j_\nu}|W$ が恒等写像に一様収束することを示そう．任意の ν および $q \in W$ に対して $f^{j_\nu}(p) = q$ なる $p \in V$が存在するから，

$$\sup_{q \in W} \mathrm{dist}(f^{j_{\nu+1}-j_\nu}(q), q) \leq \sup_{p \in V} \mathrm{dist}(f^{j_{\nu+1}}(p), f^{j_\nu}(p)).$$

仮定により，この右辺は 0 に収束する．これで主張 (1) は示された．主張 (2) はこれよりただちに従う． □

6.2. 正則 写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ は d^n-葉の解析的被覆である． その分岐点集合は $C = \{p \in \mathbf{P}^n \mid \mathrm{rank}\, df(p) < n\}$ で与えられる．f の分岐値集合は $f(C)$ で与えられる．f^k の分岐点集合は

$$f^{-(k-1)}(C) \cup \cdots \cup f^{-1}(C) \cup C$$

で，f^k の分岐値集合は

$$f(C)\cup\cdots\cup f^{k-1}(C)\cup f^k(C).$$

で与えられることに注意しよう．f の strict forward critical orbit を

$$D=\bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C).$$

で定める．これは f^j $(j=1,2,\ldots)$ の分岐値集合の和集合である．さて，集合列

$$f^{j-1}(D)=\bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C) \quad (j=1,2,\ldots)$$

は下向列で，その閉包の列

$$f^{j-1}(\bar{D})=\overline{f^{j-1}(D)} \quad (j=1,2,\ldots).$$

もまた下向列である．C の ω-極限 集合を

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(\bar{D}).$$

で定める．

定義. 点 $q\in\mathbf{P}^n$ が f の iterates に関する有界位分岐値であるとは次の条件が満たされることをいう：

(i) $D\cap W$ が W の解析的部分集合となる q の近傍 W が存在する；
(ii) 正整数 m が存在して，任意の $j>0$ および $p\in f^{-j}(q)$ に対して，$\mathrm{ord}(f^j,p)\leq m$ が成り立つ．

補題 6.2 上の条件 (ii) はつぎの条件 (ii′) と同値である：

(ii′) 正整数 l が存在して，任意の $j>0$ および $p\in f^{-j}(q)$ に対して，集合

$$I=\{i \mid 0\leq i\leq j-1, f^i(p)\in C\}$$

の要素の個数 $\sharp(I)$ は l 以下である．

（証明）　等式

$$\mathrm{ord}(f^j, p) = \prod_{i=0}^{j-1} \mathrm{ord}(f, f^i(p)),$$

の右辺の各項について

$$\mathrm{ord}(f, f^i(p)) = 1 \quad (f^i(p) \notin C \quad \text{のとき}),$$
$$2 \leq \mathrm{ord}(f, f^i(p)) \leq d^n \quad (f^i(p) \in C \quad \text{のとき}).$$

だから

$$2^{n\sharp(I)} \leq \mathrm{ord}(f^j, p) \leq d^{n\sharp(I)}.$$

これより (ii) と (ii′) が同値であることがわかる．　□

補題 6.3　集合 $\mathbf{P}^n - E$ の各点は有界位分岐値である．

（証明）　$q \in \mathbf{P}^n - E$ とする．q の近傍 W を $E \cap \bar{W} = \emptyset$ なるようにとる．整数 $k_0 \geq 1$ で $f^{k_0-1}(D) \cap W = \emptyset$ なるものが存在する．従って $D \cap W = \left(\bigcup_{j=1}^{k_0-1} f^j(C)\right) \cap W$ は W の解析的集合である．条件 (i) はみたされる．

条件 (ii′) を確かめよう．p を $f^j(p) = q$ for some $j > 0$ なる点とする．集合 $I = \{i \mid 0 \leq i \leq j-1,\ f^i(p) \in C\}$ の要素の個数 $\sharp(I)$ が k_0 以下であることを示したい．集合 I が空でないとして I の最小の要素を i_0 とすれば，$f^{i_0}(p) \in C$. $k \geq i_0 + k_0$ のとき，$f^k(p) \in f^{k-i_0-1}(D) \subseteq f^{k_0-1}(D)$ だから $f^k(p) \notin W$．従って $j < i_0 + k_0$．すなわち I は $\{i_0, i_0+1, \ldots, i_0+k_0-1\}$ の部分集合で $\sharp(I) \leq k_0$ が成り立つ．　□

さて，定理 4.1, 補題 5.7, および 6.1, を組み合わせて次の定理を証明できる：

定理 6.4　$f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を正則写像とし，点 q_0 を有界位分岐値とする．q_0 が Fatou 極限点ならば，q_0 は或る回転領域に含まれる．

（証明）　点 p_0 とその近傍 V および一様収束列 $\{f^{j_\nu}|V\}$ で $f^{j_\nu}(p_0)$ が q_0 に収束するものがとれる．点 q_0 の近傍 W を，補題 5.7. の条件を満たすようにとる．部分列に移って，すべての ν について $f^{j_\nu}(p_0) \in W$ が成り立つとする．

$f^{-j_\nu}(W)$ の連結成分で p_0 を含むものを V_ν で表す．このとき $f^{j_\nu}|V_\nu : V_\nu \to W$ は $D \cap W$-分岐解析的被覆である．補題 5.7 により，集合 $(f^{j_\nu}|V_\nu)^{-1}(q_0)$ は唯 1 点からなる．これを p_ν で表す．q_0 は有界位分岐値だから，正数 m が存在して，すべての ν について $\mathrm{ord}(f^{j_\nu}, p_\nu) \leq m$ が成り立つ．従って解析的被覆 $f^{j_\nu}|V_\nu : V_\nu \to W$ の葉数は m 以下である．

$h: Z \to W$ を m-普遍 $D \cap W$-分岐解析的被覆とする．正則写像 $g_\nu : Z \to V_\nu$ で $f^{j_\nu} \circ g_\nu = h$ なるものが存在する．定理 4.1 により列 $\{g_\nu\}$ は正規族である．部分列に移って $\{g_\nu\}$ は Z 上広義一様収束と仮定する．$\{g_\nu\}$ の極限写像を $\psi : Z \to \mathbf{P}^n$ で表す．

さて，逆像 $h^{-1}(q_0)$ は 1 点よりなる．これを z_0 で表す．ここで $\psi(z_0) = p_0$ なることを示そう．そのために，各 ν について $g_\nu(z_\nu) = p_0$ なる点 $z_\nu \in Z$ をとる．このとき $h(z_\nu) = f^{j_\nu}(g_\nu(z_\nu)) = f^{j_\nu}(p_0)$ は $\nu \to \infty$ のとき q_0 に収束する．従って $\nu \to \infty$ のとき z_ν は z_0 に収束する．等式 $g_\nu(z_\nu) = p_0$ において $\nu \to \infty$ とすれば，$\psi(z_0) = p_0$ が得られる．

従って z_0 の近傍 Z_0 で$\psi(Z_0) \subseteq V$ なるものがとれる．従って，充分大きい ν について $g_\nu(Z_0) \subseteq V$ が成り立つ．これより $f^{j_\nu}(V) \supseteq f^{j_\nu}(g_\nu(Z_0)) = h(Z_0)$．補題 6.1 により開集合 $h(Z_0)$ は或る回転領域に含まれる．　□

この定理と補題 6.3 を組合わせて次の定理を得る．

定理 6.5　任意の Fatou 極限点は或る回転領域または集合 E に含まれる．

6.3.　さて，回転領域の境界について考察しよう．U を回転領域とし，$\{f^{j_\nu}|U\}$ を U で恒等写像 id_U に広義一様収束する列とする．このとき番号 ν_0 がとれて，$\nu \geq \nu_0$ のとき $f^{j_\nu}|U$ は U から U の上への双正則写像となる．従って，逆写像 $h_\nu = (f^j|U)^{-1} : U \to U$ が定義できる．

補題 6.6　列 $\{h_\nu\}$ は U 上恒等写像 id_U に広義一様収束する．

(証明)　列 $\{h_\nu\}$ は定理 4.1 により正規族をなす．従って，任意の収束部分列 $\{h_{\nu(\kappa)}\}$ の極限が恒等写像 id_U であることを示せばよい．各点 $p \in U$ について $h_{\nu(\kappa)} \circ f^{j_{\nu(\kappa)}}(p) = p$. の $\kappa \to \infty$ なる極限をとれば $\lim_{\kappa \to \infty} h_{\nu(\kappa)}(p) = p$ を得る．　□

補題 6.7　W を $\mathbf{P}^n$ の連結開集合とする．$f^{j_\nu} \circ g_\nu = \mathrm{id}_W$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ なる 正則写像 $g_\nu : W \to \mathbf{P}^n$ の列で単射正則写像 ψ に W 上広義一様収束するものがあるとする．このとき W は或る回転領域に含まれる．

(証明)　q_0 を W の任意の点とする．W_0 を q_0 の W における座標近傍とする．V_0 を $\psi(q_0)$ の近傍で，$\psi(W_0)$ 内で相対コンパクトなものとする．このとき充分大きな ν について $V_0 \subseteq g_\nu(W_0)$ が成り立つ．(Hurwitz の定理の高次元版 [N, Chapter 5, Proposition 5].) 即ち $f^{j_\nu}(V_0) \subseteq W_0$ よって $\{f^{j_\nu}|V_0\}$ は正規族である．さて，q_0 の

近傍 W_1 で，充分大きな ν について $g_\nu(W_1) \subseteq V_0$ なるものがある．従って補題 6.1 より，q_0 は或る回転領域に含まれる．　□

定義.　位相多様体 X の部分集合 S がいたるところ非分離的 (nirgends zerlegend) であるとは次の条件が満たされることをいう：(i) S は内点を含まない閉集合である；(ii) X の任意の連結開部分集合 W について，補集合 $W-S$ は連結である．

補題 6.8　$\eta : Y \to X$ を解析的被覆とする．いたるところ非分離的な集合 $S \subset X$ と正則写像 $\sigma : X - S \to Y$ で$\eta \circ \sigma = \mathrm{id}$ なるものが存在すると仮定する．このとき σ は正則写像$\hat{\sigma} : X \to Y$ に拡張できる．また，被覆 η は双正則写像で$\hat{\sigma} = \eta^{-1}$ である．

(証明)　[St, Hilfssatz 2], [GR1, Satz 2] によって，σ の連続な拡張 $\hat{\sigma}$ が存在する．Riemann の除去可能定理により $\hat{\sigma}$ は正則．Y は既約だから，$\hat{\sigma}(X) = Y$ が成り立つ．　□

命題 6.9　U を回転領域とする．このとき開集合 W で，$W \cap \partial U$ が空でなくかつ W でいたるところ非分離的なるものは存在しない．

(証明)　このような開集合 W があると仮定する．W は連結であるとしてよい．明らかに $W \cap U = W - \partial U$．$h_\nu : U \to U$ を $f^{j_\nu}|U$ の逆写像列で恒等写像に収束するものとする．補題 6.7 より，各 ν に対して，正則写像 $g_\nu : W \to \mathbf{P}^n$ で $g_\nu|W \cap U = h_\nu|W \cap U$, なるものがある．列 $\{g_\nu\}$ は定理 4.1 により正規族であり恒等写像に収束する（$\{h_\nu|W \cap U\}$ が恒等写像に収束するから）．従って，補題 6.7 により，W は或る回転領域に含まれる．これは矛盾である．　□

定理 6.10　U を回転領域とする．このとき U の境界 ∂U は集合 E に含まれる．

(証明)　まず $\partial U \subseteq \bar{D}$ なることを示そう．点 $q_0 \in \partial U - \bar{D}$ なる点 q_0 があると仮定する．連結かつ単連結な q_0 の近傍 W を $W \cap \bar{D} = \emptyset$ なるようにとる．さらに，連結かつ単連結な開集合 $W_0 \subseteq W \cap U$ をとる．$\{f^{j_\nu}|U\}$ $\{h_\nu\}$ を補題 6.5 のようにとる．各 ν について f^{j_ν} の W 上の逆の 1 価な分枝 $g_\nu : W \to \mathbf{P}^n$ を条件 $g_\nu|W_0 = h_\nu|W_0$ によって定める．定理 4.1 により，列 $\{g_\nu\}$ は正規族である．よって恒等写像 id_W に広義一様収束する．従って，補題 6.2 より，W は或る回転領域に含まれる．これは仮定に矛盾する．さて，$q_0 \in \bar{D} - E$ ならば，q_0 の近傍 W で$\bar{D} \cap W = D \cap W$ が解析的集合なるものが存在する．従って W において，いたるところ非分離的．従って $q_0 \notin \partial U$．　□

7. Critically finite な写像

7.1. $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を 次数 $d \geq 2$ の正則写像とする．f が critically finite とは，その strict forward critical orbit D が代数的集合（必然的に純 $n-1$ 次元）となることをいう．これは D が $\mathbf{P}^n$ の解析的集合である条件と同値である．f が critically finite のとき，$f^{j-1}(D) = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C)$, $j = 1, 2, \ldots$ は代数的集合の下向列であるから，整数 $l_0 \geq 1$ で

$$f^{l_0-1}(D) = f^{l_0}(D) = \cdots.$$

なるものが存在する．従って $E = f^{l_0-1}(D)$ は純 $n-1$ 次元の代数的集合である．

命題 7.1 *f を critically finite な写像とする．このとき (1) 回転領域は存在しない．(2) Fatou 極限集合 Λ は E に含まれる．*

(証明) 回転領域 U が存在すると仮定する．このとき 定理 6.6 によって，$\partial U \subseteq \bar{D} = D$. $\mathbf{P}^n - D$ が連結開集合だから，$\mathbf{P}^n - D \subseteq U$ が成り立つ．従って $\partial U = \mathbf{P}^n - U$ はいたるところ非分離的な集合である．これは 命題 6.8 に矛盾する．よって主張 (1) は証明された．主張 (2) はこれと定理 6.5 から出る． □

さて，集合 E を既約成分に分解しよう．$f(E) = E$ だから， 写像 f はの E の既約成分の集合の上の置換を引き起こす． この置換を巡換の積に分解しよう．

$$\{\Gamma_{1,1}, \ldots, \Gamma_{1,r_1}\}, \ldots, \{\Gamma_{s,1}, \ldots, \Gamma_{s,r_s}\}$$

ここで

$$f(\Gamma_{i,j}) = \Gamma_{i,j+1}\ (1 \leq j \leq r_i - 1), \quad f(\Gamma_{i,r_i}) = \Gamma_{i,1} \quad (1 \leq i \leq s).$$

サイクル $\{\Gamma_{i,1}, \ldots, \Gamma_{i,r_i}\}$ が critical であるとはその成分 $\Gamma_{i,j}$ で分岐点集合 C に含まれるものがあることをいう．critical cycle に属する成分全体の和集合を E_C で表す．集合 E_C が空であるとき C は弱前周期的であるという．これは， C と E とが共通の既約成分を持たないというのと同値である．さて，$C' = C \cap E$. とおく．この集合 C' は余次元 1 の既約成分（C と E の共通成分）と，余次元 2 の既約成分とからなる．さらに次のように定義する：

$$D' = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C')$$

補題 7.2 集合 D' は $E_C \cup \Delta$ の形の代数的集合である．ここで Δ は純 $n-2$ 次元の代数的集合で $\Delta \subseteq E \cap \mathrm{sing}(D)$．ただし $\mathrm{sing}(D)$ は D の特異点全体からなる集合を表す．

(証明) 明らかに $E_C \subseteq D' \subseteq E$ である．$D' \subseteq E_C \cup \mathrm{sing}(D)$ なることを示そう．$q_0 \in D'$ とする．このとき，点 $p_0 \in C' = C \cap E$ および整数 j で $f^j(p_0) = q_0$ なるものがとれる．p_0 が $C \cup E$ の非特異点ならば，$C \cup E$ の p_0 を含む既約成分は C と E の共通の既約成分である．よって $q_0 \in E_C$．p_0 が $E \cup C$ の特異点ならば，$E \cup C \subseteq f^{-j}(D)$ だから，p_0 は $f^{-j}(D)$ の特異点でもある．よって補題 5.5 より $q_0 \in \mathrm{sing}(D)$．

さて，$C \cap E$ の 1 つの既約成分を Γ で表す．Γ は余次元 1 または 2 である．Γ が余次元 1 ならば，これは C と E の共通の既約成分で，すべての j について $f^j(\Gamma)$ は E_C の既約成分である．Γ が余次元 2 ならば，$f^j(\Gamma)$ もまた余次元 2 の代数的集合である．従って $f^j(\Gamma)$ は E_C に含まれるか，または $E \cap \mathrm{sing}(D)$ の既約成分の 1 つに一致する．よって D' は E_C および $E \cap \mathrm{sing}(D)$ の既約成分のいくつかとからなる． □

さて $f^{j-1}(D') = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C')$, $(j = 1, 2, \ldots)$ は代数的集合の下向列である．従って $f^{l_1-1}(D') = f^{l_1}(D') = \cdots$. なる l_1 が存在する．また

$$E' = f^{l_1-1}(D') = \bigcup_{j=l_1}^{\infty} f^j(C').$$

明らかに E' は $E_C \cup \Xi$ の形をしている．ここで Ξ は純余次元 2 の代数的集合で Δ に含まれる．

補題 7.3 $\mathbf{P}^n - E'$ の点はすべて有界位分岐値である．

(証明) $q_0 \in \mathbf{P}^n - E'$ とし $p_0 \in f^{-j}(q_0)$ $j > 0$ とする．集合

$$I = \{i \mid 0 \le i \le j-1,\ f^i(p) \in C\}$$

の要素の個数 $\sharp(I)$ が $l_0 + l_1$ 以下であることを示したい．そのために

$$\begin{aligned} I_0 &= \{i \mid 0 \le i \le j-1,\ f^i(p) \in C - C'\} \\ I_1 &= \{i \mid 0 \le i \le j-1,\ f^i(p) \in C'\} \end{aligned}$$

とおいて $\sharp(I) \leq l_0$ かつ $\sharp(I_1) \leq l_1$ なることを見よう. I_0 が空でないとして I_0 の最小元を i_0 とする. このとき $f^{i_0}(p) \in C$. $k \geq i_0 + l_0$ のとき, $f^k(p) \in E$, よって $f^k(p) \notin C - C'$. よって I_0 は $\{i_0, \ldots, i_0 + l_0 - 1\}$ の部分集合で $\sharp(I_0) \leq l_0$.

さて, I_1 が空でないとして I_1 の最小元を i_1 とする. このとき $f^{i_1}(p) \in C'$. $k \geq i_1 + l_1$ のとき $f^k(p) \in E'$, 従って $i_1 + l_1 > j$. これから I_1 は $\{i_1, \ldots, i_1 + l_1 - 1\}$ の部分集合で $\sharp(I_1) \leq l_1$. □

この補題と定理 6.3 とを組合わせて次の定理を得る.

定理 7.4 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ が次数 ≥ 2 の critically finite な正則写像ならば, Fatou 極限集合 Λ は集合 E' に含まれる.

7.2. 次元 1 および 2 の射影空間上の critically finite な写像を考察しよう.

一般の正則写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ について定義を準備しよう. 点 $p \in \mathbf{P}$ が f の超吸引周期点であるとは, 整数 $j > 0$ で $f^j(p) = p$ かつ微分 $df^j(p)$ が零写像なるものがあることをいう.

任意の超吸引的周期点は Fatou 極限集合 Λ に含まれる. 1 次元の場合, 次のよく知られた定理 [Sul], [B], [M] を証明できる:

定理 7.5 $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ を次数 ≥ 2 の critically finite な写像とする. このとき, Fatou 集合 Ω は超吸引的周期点の吸引領域からなる. 特に, Fatou 集合 Ω が空である必要充分条件は超吸引的周期点が存在しないことである.

(証明). 次元 1 の場合, $E' = E_C$ が成り立つ. この集合は f の超吸引的周期点の集合と一致する, 従って Fatou 極限集合 Λ と一致する. □

註. 次元 $n \geq 2$ の場合, 集合 $C' = C \cap E$ が空でないから E' も空ではない.

つぎに, 2 次元の場合の critically finite な写像を考える. 集合 E' をもう少し詳しく見よう. 集合 E' は $E_C \cup \Xi$ の形である. ただし Ξ は有限集合. $f(E') = E'$ より $f(\Xi) = \Xi$ が成り立つ. 即ち $f|\Xi$ は Ξ の上の置換である. 集合 Ξ をこの置換に関するサイクルに分解する:

$$\{p_{1,1}, \ldots, p_{1,t_1}\}, \ldots, \{p_{u,1}, \ldots, p_{u,t_u}\}$$

ここで

$$f(p_{i,j}) = p_{i,j+1} \ (1 \leq j \leq t_i - 1), \quad f(p_{i,t_i}) = p_{i,1} \quad (1 \leq i \leq u).$$

サイクル $\{p_{i,1}, \ldots, p_{i,t_i}\}$ が critical であるとは分岐点を含むことをいう．critical cycle に属する点の全体を Ξ_C で表し，$E'_C = E_C \cup \Xi_C$ とおく．

補題 7.6 $\mathbf{P}^2 - E'_C$ の点はすべて有界位分岐値である．

(証明) 補題 7.3 の証明の最後の部分を次のように修正すればよい．集合 I_1 が空でないとして I_1 の最小元を i_1 とする．このとき $f^{i_1}(p) \in C'$. $k \geq i_1 + l_1$ ならば $f^k(p) \in E'$. 仮りに $f^k(p) \in C \cap E'(k < j)$, とすると $q_0 = f^j(p) \in E'_C$, で仮定に反する．よって I_1 は $\{i_1, \ldots, i_1 + l_1 - 1\}$ の 部分集合で$\sharp(I_1) \leq l_1$. □

この補題と定理 6.4 を組合わせて次の定理を得る．

定理 7.7 $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ を critically finite な写像とする．このとき Fatou 極限集合 Λ は集合 E'_C に含まれる．

定理 7.8 $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ が critically finite な写像で E'_C が空ならば，f の Fatou 集合は空である．

例 1 [U2]. 写像 f を次で定める：

$$[x : y : z] \to [(-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2 : (x + y - z)^2]$$

分岐点集合 C は 3 個の既約成分からなる：

$$C_1 = \{-x + y + z = 0\},\ C_2 = \{x - y + z = 0\},\ C_3 = \{x + y - z = 0\}.$$

これらは f で次のように写される：

$$\begin{aligned} C_1 \to D_1 \to D_4 \ \hookleftarrow \\ C_2 \to D_2 \to D_5 \ \hookleftarrow \\ C_3 \to D_3 \to D_6 \ \hookleftarrow \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} &D_1 = \{x = 0\}, \quad &D_2 = \{y = 0\}, \quad &D_3 = \{z = 0\}, \\ &D_4 = \{y - z = 0\}, \quad &D_5 = \{z - x = 0\}, \quad &D_6 = \{x - y = 0\}. \end{aligned}$$

従って f は critically finite で $E = D_4 \cup D_5 \cup D_6$. C と E とは共通成分を持たないから，f は弱前周期的である．さらに $C' = C \cap E$ は 6 個の点からなる：

$[2:1:1]$, $[1:2:1]$, $[1:1:2]$, $[0:1:1]$, $[1:0:1]$, $[1:1:0]$ これらは f によって次のように写る：

$$
\begin{array}{lll}
[2:1:1] \to [0:1:1] \to [1:0:0] & \searrow & \\
[1:2:1] \to [1:0:1] \to [0:1:0] & \to & [1:1:1] \hookleftarrow \\
[1:1:2] \to [1:1:0] \to [0:0:1] & \nearrow &
\end{array}
$$

従って 集合 E' は唯1個の点 $[1:1:1]$ からなる．この点は C に含まれないから集合 E'_C は空である．定理 7.8 より f の Fatou 集合は空である．

例 2. [FS1]. f を次で定める：

$$[x:y:z] \to [y^2:(y-2x)^2:(y-2z)^2]$$

分岐点集合 C は3個の既約成分からなる：

$$C_1 = \{y=0\},\ C_2 = \{y-2x=0\},\ C_3 = \{y-2z=0\}.$$

これらは次のように写される：

$$
\begin{array}{l}
C_2 \to C_1 \to D_1 \to D_2 \hookleftarrow \\
C_3 \to D_3 \to D_4 \rightleftharpoons D_5
\end{array}
$$

where

$$
\begin{array}{l}
D_1 = \{x=0\},\quad D_2 = \{x-y=0\}, \\
D_3 = \{z=0\},\quad D_4 = \{x-z=0\},\quad D_5 = \{y-z=0\}.
\end{array}
$$

従って f は criticallly finite で $E = D_2 \cup D_4 \cup D_5$. 従って C は弱前周期的

集合 $C' = C \cap E$ は6個の点からなる：$[0:0:1]$, $[1:2:1]$, $[1:0:0]$, $[1:2:2]$, $[1:0:1]$, $[2:2:1]$. これらは次のように写される：

$$[0:0:1] \hookleftarrow$$

$$
\begin{array}{lll}
[1:2:1] \to [1:0:0] \to [0:1:0] & \searrow & \\
[1:2:2] \to [1:0:1] \to [0:1:1] & \to & [1:1:1] \hookleftarrow \\
\phantom{[1:2:2] \to{}} [2:2:1] \to [1:1:0] & \nearrow &
\end{array}
$$

従って E' は2個の点 $[0:0:1]$ と $[1:1:1]$ からなり, E'_C は1点 $[0:0:1]$ からなる. この点は超吸引的不動点で, f の Fatou 集合 Ω はこの点 $[0:0:1]$ の吸引領域のみからなる.

次の例も同様に調べることができる.

例 3. $[x:y:z] \to [(-x+y+z)^2 : (x+y-z)^2 : (x-y+z)^2]$.

例 4. $[x:y:z] \to [(x-y+z)^2 : (x+y-z)^2 : -x+y+z)^2]$.

例 5. [FS1] $[x:y:z] \to [y^2 : (y-2z)^2 : (y-2x)^2]$.

他の例の構成法については [U2] を参照されたい.

参考文献

[B] A. F. Beardon: Iteration of Rational Functions, Springer-Verlag (1991).

[FS1] J. E. Fornaess and N. Sibony: Critically finite rational maps in $\mathbf{P}^2$, Contemporary Mathematics 137 (1992),245-260.

[FS2] ———— : Complex dynamics in higher dimension I, preprint.

[FS3] ———— : Complex dynamics in higher dimension II, preprint.

[Gi] B. Giesecke: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume, Math. Z. 83 (1964), 177-213.

[GR1] H. Grauert and R. Remmert: Komplexe Räume, Math. Ann. 136 (1958), 245-318.

[GR2] ———— : Coherent Analytic Sheaves, Springer-Verlag (1984).

[HP] J. Hubbard and P. Papadopol: Superattactive fixed points in $\mathbf{C}^n$, preprint.

[KB] B. O. Koopman and A. B. Brown: On the covering of analytic loci by complexes, Trans. Am. Math. Soc. 34 (1932) 231-251.

[K] S. Kobayashi: Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.