$\mathbb{C}^2$の多項式自己同型の作る力学系
ポテンシャル論的方法

西村保一郎 (大阪医科大学)

1993年9月

1　多項式自己同型 f の定める集合 K^+, K^-

本稿の主題は，$\mathbb{C}^2$の多項式自己同型写像 f の作る $\mathbb{C}^2$上の力学系，すなわち f の iteration である。これに関して J. H. Hubbard-R. Oberste Vorth, S. Friedland-J. Milnor, E. Bedford-J. Smillie, J. E. Fornaess-N. Sibony 等が示した結果の一部をまとめる。

$\mathbb{C}^2$ の多項式から定まる正則自己同型の全体のなす群を G としよう。

記号. $h \in G$ と正整数 n に対して h, h^{-1} の n 回の合成を次のように書く。

$$h^n = h \circ \cdots \circ h, \quad h^{-n} = h^{-1} \circ \cdots \circ h^{-1}$$

ひとつの $h \in G$ が生成する G の部分群 $H = \{h^n; n \in \mathbb{Z}\}$ は，h が特別のものである場合を除けば無限巡回群 $\mathbb{Z}$ に同型である。H の $\mathbb{C}^2$ への作用を，例えば1点 $z \in \mathbb{C}^2$ の軌道 $\{h^n(z); n \in \mathbb{Z}\}$ といったものを詳しく調べることが多項式から定まる正則自己同型 h の作る $\mathbb{C}^2$ 上の力学系研究の主題である。

さて，S. Friedland-J. Milnor [FM] によれば，任意の $h \in G$ に対して $k \in G$ を適当に選んで，次の (a) または (b) が成り立つようにできる。

(a)$k \circ h \circ k^{-1}$ は，以下の定義 1.3の f の形の写像になる。

(b)$k \circ h \circ k^{-1}$ は，アフィン写像または elementary 写像になる。

力学系研究という立場からは，h の代わりに $k \circ h \circ k^{-1}$ を調べれば良い。ところで，アフィン写像または elementary 写像の作る力学系は単純で，S. Friedland-J. Milnor が詳しく調べてしまった。こうして，多項式から定まる正則自己同型 h の作る $\mathbb{C}^2$ 上の力学系の研究は，定義 1.3の f のそれに帰着されることになる。

定義 1.1 0でない複素数aと，複素1変数yの$d(d \geq 2)$次多項式$p(y)$

$$p(y) = c_0 y^d + c_1 y^{d-1} + \cdots + c_{d-1} y + c_d \ (c_0 \neq 0)$$

とによって，次の式のように定まる正則写像$g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を一般エノン写像という。

$$g(x, y) = (y, p(y) - ax)$$

正則写像 $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$を $h(x,y) = (\frac{1}{a}p(x) - \frac{1}{a}y, x)$ と置くと，h は g の逆写像になるので，g は $\mathbb{C}^2$ の正則自己同型写像である。g の微分 Dg は$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & p'(y) \end{pmatrix}$ となるので，g の正則ヤコビアン $\det(Dg)$ は恒等的に定数 a に等しい。

注意 1.2 g の逆写像h は，x とy の役割を入れ換えると，$\frac{1}{a}$ とd 次多項式$\frac{p(y)}{a}$ によって定まる一般エノン写像である。

記号．$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を$\pi_1(x, y) = x, \pi_2(x, y) = y$ と定める。

この記号を用いると，エノン写像 g は，$\pi_1 \circ g(x,y) = y$，$\pi_2 \circ g(x,y) = p(y) - ax$ で与えられるというような書き方ができる。

m 個の一般エノン写像 $g_1, \cdots, g_m$を考える。各 g_jは 0 でない複素数 a_jと $d_j(d_j \geq 2)$ 次多項式 p_jから定まるものとする。

定義 1.3 $f = g_m \circ g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1, \quad a = a_1 a_2 \cdots a_m, \quad d = d_1 d_2 \cdots d_m$ と置く。

$p_j(y)$ の d_j次の項 $c_{0j} y^{d_j}$の係数 c_{0j}も重要である (定義2.7)。次の命題の証明は容易である。

命題 1.4 f は $\mathbb{C}^2$ の正則自己同型で，f の正則ヤコビアン$\det(Df)$ は定数a に等しい。$\pi_1 \circ f$, $\pi_2 \circ f$ は多項式で，$\pi_1 \circ f$ の次数はd より小さく，$\pi_2 \circ f$ の次数はd である。

本稿では fを (従って $g_1, g_2, \cdots, g_m$を) 固定したうえで，それが $\mathbb{C}^2$上に作る力学系を調べる。f の軌道の有界性で点を分類するという考えで，$\mathbb{C}^2$の以下の部分集合を定義する。

定義 1.5

$$K^+ = \{z \in \mathbb{C}^2; \text{半軌道}\{f^n(z); n = 1, 2, \cdots\}\text{は } \mathbb{C}^2 \text{で有界}\}$$

$$K^- = \{z \in \mathbb{C}^2; \text{半軌道}\{f^{-n}(z); n = 1, 2, \cdots\}\text{は } \mathbb{C}^2 \text{で有界}\}$$

$$J^+ = \partial K^+,\ J^- = \partial K^-,\ K = K^+ \cap K^-,\ J = J^+ \cap J^-$$

命題 1.6 $K, K^{\pm}, J, J^{\pm}$ はf, f^{-1}で不変である。(例えば $f(K) = K$ が成り立つ。)

$\mathbb{C}^2$の部分集合 A の内点の全体を $\mathrm{int}A$ と表す。

命題 1.7 $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathrm{int}\ K^+$で，$\{f^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathrm{int}\ K^-$で正規族である。

証明. $\{f^n\}$ が正規族とは，$\{\pi_1 \circ f^n\}_{n=1}^{\infty}, \{\pi_2 \circ f^n\}_{n=1}^{\infty}$が正規族をなすという意味である。開集合 $\omega \subset\subset \mathrm{int}K^+$ を取ると $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\omega)$ は有界なので，Montel の定理から初めの主張が従う。$\{f^{-n}\}$ についても同様である。

実際には 1 変数多項式の iteration の理論の類似として，$K, K^{\pm}, J, J^{\pm}$ は J. Hubbard [H] により導入された。fの作る $\mathbb{C}^2$上の力学系研究で重要な役割を果たす。K^+, K^-は複雑な形状の対象であるので，より単純な形状で K^+, K^-を近似する (命題 1.13) ことから始める。

定義 1.8 正数σ, R に対して，次の $\mathbb{C}^2$ の部分集合を定める。

$$V_{\sigma}^+ = \{(x, y); |x| > R, |x| > \sigma|y|\}, \quad V_{\sigma}^- = \{(x, y); |y| > R, |y| > \sigma|x|\}$$

特に $\sigma = 1$ のときは，$V^+ = V_1^+, V^- = V_1^-$ のように$\sigma = 1$ を書くことを省略する。正数 R に対して$V = \{(x, y); |x| \le R, |y| \le R\}$ と置く。

補題 1.9 σ を1 以上の数，R を十分大きい正数とする。次が成り立つ。

$$g_j(V_{\sigma^{-1}}^-) \subset V_{\sigma}^-, \qquad g_j^{-1}(V_{\sigma^{-1}}^+) \subset V_{\sigma}^+$$

$$f(V_{\sigma^{-1}}^-) \subset V_{\sigma}^-, \qquad f^{-1}(V_{\sigma^{-1}}^+) \subset V_{\sigma}^+$$

証明. (a) 正数 R を $|y| > R$ ならば $|p_j(y)| > \sigma(1 + |a_j|)|y|$ が成り立つようにとる。$p_j(y)$ は $d_j(\ge 2)$ 次の多項式だからこれは可能である。$|y| > R, |x| < \sigma|y|$ をみたす (x, y) について，次が成り立つ。($g_j = g, p_j = p, a_j = a$ と書く。)

$$|\pi_2 \circ g(x, y)| = |p(y) - ax| \ge |p(y)| - |a||x| > |p(y)| - \sigma|a||y| > \sigma|y| = \sigma|\pi_1 \circ g(x, y)|$$

これから第 1 式がわかる。g_j^{-1} は x と y を入れ換えるとエノン写像なので (注意 1.2)，第 2 式は，必要なら Rを大きく取り直して，第 1 式の x と y を入れ換えて得られる。
一般エノン写像 $g_1, \cdots, g_m$ により，$f = g_m \circ \cdots \circ g_1$, $f^{-1} = g_1^{-1} \circ \cdots \circ g_m^{-1}$ となっている。各 g_j について，主張が成り立つような R_j がある。$R = \max(R_1, \cdots, R_m)$ に対して，fについての主張の第 1 式，第 2 式が成り立つ。

補題 1.10　十分大きいR に対して次の包含関係が成り立つ。

(a)　$g_j(V^- \cup V) \subset V^- \cup V$　　$g_j^{-1}(V^+ \cup V) \subset V^+ \cup V$

(b)　$f(V^- \cup V) \subset V^- \cup V$　　$f^{-1}(V^+ \cup V) \subset V^+ \cup V$

証明.(a) $\sigma = 1$ に対して補題 1.9が成り立つように Rを取る。g_j について $g_j(V^-) \subset V^-$ が成り立つ。$(x, y) \in V$ とする。g_j について，もし $|\pi_2 \circ g_j(x,y)| \le R$ が成り立てば，$|\pi_1 \circ g_j(x,y)| = |y| \le R$ なので，$g_j(x,y) \in V$ が従う。反対に $|\pi_2 \circ g_j(x,y)| > R$ が成り立てば，$|\pi_2 \circ g_j(x,y)| > R \ge |y| = |\pi_1 \circ g_j(x,y)|$ なので $g_j(x,y) \in V^-$ が従う。故に $g_j(V) \subset V^- \cup V$ となる。$g_j(V^-) \subset V^-$ と合わせて，$g_j(V^- \cup V) \subset V^- \cup V$となる 。
g_j^{-1} についての同様の推論からもう一方の式が得られる。(b) は (a) から直ちに得られる。

次の補題 1.11は，命題 1.13, 定理 1.15, 補題 2.12, 命題 7.2の証明に使われる。

補題 1.11と命題 1.12では $z = (x_0, x_1)$ と置いて，整数 $i (i \ge 1)$ に対して (x_i, x_{i+1}) を，$g_1, \cdots, g_m$ を周期的に用いて定める。(特に，$f^n(z) = (x_{mn}, x_{mn+1})$ である。)

$$(x_0, x_1) \xrightarrow{g_1} (x_1, x_2) \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_m} (x_m, x_{m+1}) \xrightarrow{g_{m+1}} (x_{m+1}, x_{m+2}) \xrightarrow{g_{m+2}} \cdots$$

補題 1.11 $\sigma \ge 1$, R は十分大とする。$N = V \cup g_1(V) \cup \cdots \cup g_m(V)$と置く。
$R_1 > R$ を$N \subset \{|x| \le R_1\}$ となるように取る。このとき次が成り立つ。
$(x_i, x_{i+1}) \in \overline{V \cup V_\sigma^+}$　$(0 \le i \le j-1)$ならば，$|x_i| \le \max(R_1, |x_0|)$　$(0 \le i \le j)$

証明. jについての帰納法を用いる。$j = 1$ で成り立つことと，$j - 1 (j \ge 2)$ で成り立つとして $|x_j| \le \max(R_1, |x_0|)$ とを示す。$(x_{j-1}, x_j) \in \overline{V_\sigma^+}$ ならば $|x_j| \le \dfrac{1}{\sigma}|x_{j-1}| \le \max(R_1, |x_0|)$ となる。$(x_{j-1}, x_j) \in V$ ならば $(x_j, x_{j+1}) \in N$ だから $|x_j| \le R_1 \le \max(R_1, |x_0|)$ となる。

命題 1.12 $\sigma \ge 1$ とすると，十分大きいR に対して次が成り立つ。

$$K^+ \subset V \cup V_\sigma^+, \quad K^- \subset V \cup V_\sigma^-, \quad K \subset V$$

証明. 補題 1.9の Rを取る。$z = (x_0, x_1) \notin V \cup V_\sigma^+$ として $z \notin K^+$ を示す。$|x_1| > R, \sigma|x_1| \ge |x_0|$ である。$\sigma < \tau$ であるτ を取ると$\tau|x_1| > |x_0|$ だから $(x_0, x_1) \in V_{\tau^{-1}}^-$ となる。$V_\tau^- \subset V_{\tau^{-1}}^-$ に注意して補題 1.9より帰納的に，i ≥ 1 に対して $(x_i, x_{i+1}) \in V_\tau^-$ となる。特に $|x_{i+1}| > \tau|x_i|$ が成り立つ。故に，帰納的に $|x_{i+1}| > \tau^i|x_1|$ となる。これより，$\{f^n(x_0, x_1) = (x_{mn}, x_{mn+1})\}$ は非有界となり $z \notin K^+$ がわかる。
$K^- \subset V \cup V_\sigma^-$ は，f^{-1} について同様の推論をして示される。
最後に，$K = K^+ \cap K^- \subset (V \cup V_\sigma^+) \cap (V \cup V_\sigma^-) = V$ となる。

命題 1.13 $\boldsymbol{\sigma \geq 1}$, $\boldsymbol{R}$ **は十分大とする。**
(a) $\boldsymbol{V_\sigma^- \subset f^{-1}(V_\sigma^-) \subset f^{-2}(V_\sigma^-) \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_\sigma^-) = \mathbb{C}^2 \backslash K^+}$
(b) $\boldsymbol{V_\sigma^+ \subset f(V_\sigma^+) \subset f^2(V_\sigma^+) \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n}(V_\sigma^+) = \mathbb{C}^2 \backslash K^-}$
(c) $\boldsymbol{K, K^\pm, J, J^\pm}$ **は閉集合である。**

証明. 補題 1.9より，$V_\sigma^- \subset V_{\sigma-1}^- \subset f^{-1}(V_\sigma^-)$ だから，(a) の初めの主張が示せた。
2番目の主張を証明しよう。命題 1.12から，$V_\sigma^- \subset V_{\sigma-1}^- \subset \mathbb{C}^2\backslash(V \cup V_\sigma^+) \subset \mathbb{C}^2\backslash K^+$ で，K^+ は f で不変だから $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_\sigma^-) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_{\sigma-1}^-) \subset \mathbb{C}^2\backslash K^+$ がわかる。
$\mathbb{C}^2\backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_{\sigma-1}^-) \subset K^+$ を示そう。$z \in \mathbb{C}^2\backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_{\sigma-1}^-)$ と仮定して $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$が有界であることを示す。$f^n(z) \notin V_{\sigma-1}^-$ である。
ある n と $k(1 \leq k \leq m-1)$ で，$g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1 \circ f^n(z) \in V_{\sigma-1}^-$ とすると補題 1.9より $f^{n+1}(z) \in V_\sigma^- \subset V_{\sigma-1}^-$ で矛盾である。故に，補題 1.11の記号で $(x_i, x_{i+1}) \in \overline{V \cup V_\sigma^+}$となる。補題 1.11より $\{f^n(z)\} \subset \overline{(V \cup V_\sigma^+)} \cap \{|x| \leq \max(R_1, |x_0|)\}$ となるが，この右辺の集合はコンパクトだから，$\{f^n(z)\}$ が有界となって $z \in K^+$ が示せた。
(b) は同様に証明できる。
(c) V_σ^- は開集合なので，(a) から $\mathbb{C}^2\backslash K^+$ も開集合，すなわち K^+ は閉集合である。K^- も同様に閉集合になり，他の集合も明らかに閉集合となる。

これまでの話で明らかになったように，$f^n(x,y)$, $n = 1, 2, \cdots$に関する命題に対して，x, y を入れ換えると対応した $f^{-n}(x,y)$, $n = 1, 2, \cdots$に関する命題が得られる (注意 1.2)。今後は，定義や記号を定める場合を除いて，多くの場合 2 つの命題を併記しない。たとえば命題 1.13では (a) だけを書くと，(b) も成り立つことになる。

後に補題 5.15の証明で次の補題を用いる。これは，今の命題 1.13 より少し詳しい K^+の近似を与えるものである。

補題 1.14 **正数** $\boldsymbol{C_1}$ **と 1 より大きい数**$\boldsymbol{\delta}$ **が存在して**$\boldsymbol{B = \{(x,y); |y| \geq C_1(|x|^{1/\delta} + 1)\}}$**について，** $\boldsymbol{K^+ \cap B = \emptyset, \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B) = \mathbb{C}^2 \backslash K^+}$**となる。**

証明. $f = g_m \circ \cdots \circ g_1$ で，g_1 は複素数 $a_1 \neq 0$ と $d_1(\geq 2)$ 次多項式 $p_1(y)$ から定まっている (定義 1.3)。$p_1(y)$ の d_1 次の項を $c_{01}y^{d_1}$ とする。補題 1.9が $\sigma = 1$ で成り立つように，$|p_1(y)| \geq \frac{|c_{01}|}{2}|y|^{d_1}$ が $|y| \geq R$ で成り立つように，$\frac{|c_{01}|}{2}R^{d_1} \geq R$ となるように $R > 0$ を大きく取る。$R_1 = \frac{|c_{01}|}{2}R^{d_1}$ と置く。$A = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; \frac{|c_{01}|}{2}|y|^{d_1} \geq (1 + |a_1|)|x| + R_1\}$ と置く。$|x| = 0$ を代入することで，$A \subset \{|y| \geq R\}$ がわかる。

$g_1(A) \subset V^-$ をいう。$(x,y) \in A \cap V^-$ のときには，補題 1.9より $g_1(x,y) \in V^-$ である。$(x,y) \in A \cap (\mathbb{C}^2 \backslash V^-)$ のとき $|x| \geq |y|$ に注意して

$$|p_1(y) - a_1 x| \geq |p_1(y)| - |a_1||x| \geq \frac{|c_{01}|}{2}|y|^{d_1} - |a_1||x| \geq \begin{cases} R_1 & \geq R \\ |x| & \geq |y| \end{cases}$$

この式は $g_1(x,y) \in V^-$ を示している。補題 1.10, 命題 1.12より，$A \cap K^+ = \emptyset$ である。$C_1^{d_1} \geq \dfrac{2(1+|a_1|)}{|c_{01}|}, C_1^{d_1} \geq \dfrac{2R_1}{|c_{01}|}$ である C_1 を取り，$\delta = d_1$ とすれば $K^+ \cap B = \emptyset$ が成り立つ。実際，$|y| \geq C_1(|x|^{1/\delta} + 1)$ ならば $|y|^\delta \geq C_1^\delta(|x|+1) \geq \dfrac{2(1+|a_1|)}{|c_{01}|}|x| + \dfrac{2R_1}{|c_{01}|}$ すなわち $B \subset A$ が成り立つからである。十分大きい Rについて $V^- \subset B$となるから，命題 1.13より $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B) = \mathbb{C}^2 \backslash K^+$が成り立つ。

次の 2 つの命題で，a は fの正則ヤコビアン，$m(X)$ は $X \subset \mathbb{C}^2$のルベーグ測度である。

命題 1.15 (a) $|a| = 1$ のとき，$m(K) = m(K^+) = m(K^-) < +\infty$
(b) $|a| < 1$ のとき，$m(K^-) = 0$ で $m(K^+) = 0$ または∞
(c) $|a| > 1$ のとき，$m(K^+) = 0$ で $m(K^-) = 0$ または∞

証明. (a) $m(K) = m(K^+)$ を示す。正測度をもつコンパクト $A \in K^+ \backslash K$が存在するとして，矛盾を示す。補題 1.11の正数 R_1を，さらに $A \subset \{|x| \leq R_1\}$ となるように取る。補題 1.11より，すべての $n \geq 0$ に対して $f^n(A) \subset \{|x| \leq R_1\}$ となる。$m(K^+ \cap \{|x| \leq R_1\}) = M$と置く。ところで，$A \cap K^- = \emptyset$ だから，正整数列 $n_1 < n_2 < \cdots$を $f^{-n_1}(A), f^{-n_2}(A), \cdots$が互いに共通部分をもたないように取れる。$p \in \mathbb{N}$ を $pm(A) > M$となるように取れば，$|a| = 1$ だから，$\sum_{j=1}^{p} m(f^{n_j}(A)) > M$となる。$T = f^{n_p}(\bigcup_{j=1}^{p} f^{-n_j}(A))$ と置くと，$T \subset K^+ \cap \{|x| \leq R_1\}$ で $m(T) \leq M$である。一方 $m(T) = \sum_{j=1}^{p} m(f^{-n_j}(A)) > M$だから，矛盾である。
次に (c) を示す。まず $m(K^+) = 0$ をいう。コンパクト $A \subset K^+$で $m(A) > 0$ となるものがあるとして，矛盾を示す。補題 1.11の正数 R_1を，さらに $A \subset \{|x| \leq R_1\}$ となるように取る。補題 1.11より，$f^n(A) \subset \{|x| \leq R_1\}$ $(n \geq 0)$ が成り立つ。ところが，$m(f^n(A)) = |a|^{2n} m(A) \to \infty$ $(n \to \infty)$ なので，$m(K^+ \cap \{|x| \leq R_1\}) < \infty$ に矛盾である。
最後に $m(K^-) \neq 0$ として，$m(K^-) = \infty$ を示す。$m(K^+) = 0$ も考慮して，コンパクト $A \in (K^- \backslash K^+)$で，$m(A) > 0$であるものが取れる。$m(K^-) \geq m(f^n(A)) = |a|^{2n} m(A) \to \infty$ より，$m(K^-) = \infty$ である。

命題 1.16 (a) $|a| = 1$ のとき，$\mathrm{int}K^+ = \mathrm{int}K^- = \mathrm{int}K$
(b) $|a| < 1$ のとき，$\mathrm{int}K^- = \emptyset$ (c) $|a| > 1$ のとき，$\mathrm{int}K^+ = \emptyset$

証明.(a) $(\mathrm{int}K^+)\backslash K$ は，空集合でないとすると $\mathbb{C}^2$の開集合であるので，正の測度を持つ。それは命題 1.15 に矛盾する。故に，$\mathrm{int}K^+ \subset K$ となり $\mathrm{int}K^+ \subset \mathrm{int}K$ となる。
$\mathrm{int}K \subset \mathrm{int}K^+$ は明らかだから，$\mathrm{int}K^+ = \mathrm{int}K$ となる。$\mathrm{int}K^- = \mathrm{int}K$ は同様に示せる。
(b) 命題 1.15より，$\mathrm{int}K^- = \emptyset$ である。

さらに，K^+, K^-を調べるために，この集合と密接に関係する $\mathbb{C}^2$上の多重劣調和関数 G^+, G^- や正閉 (1,1) カレントμ^+, μ^-を導入する。

2 多重劣調和関数 $G^\pm$と正閉 (1,1) カレント$\mu^\pm$

$\mathbb{C}^2$の領域Ωで，多重劣調和関数 vは正閉 (1,1) カレント dd^cvを定める。([LG, Proposition 2.25]) 逆に，例えば $\mathbb{C}^2$では，正閉 (1,1) カレント Tに対して多重劣調和関数 vで $T = dd^cv$ となるものがある。([LG, Corollary 2.30]) ($d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$)

次の Lelong の定理は多くの書にある。(例えば，[LG, Theorem 2.47,Theorem 3.2])

$\mathbb{C}^2$の領域Ωで Mを 1 次元解析的集合，正則関数 h をその定義関数とする。すなわち，$M = \{z \in \Omega; h(z) = 0\}$ で Mの規約成分の重複度はすべて 1 であるとする。Mの非特異部分上の積分のカレントを $[M]$ と表す。

定理 2.1 (a) $[M]$はΩ上の正閉 (1,1) カレントである。
(b) $\log|h|$は局所可積分で$[M] = \frac{1}{2\pi}\, dd^c\log\,|h|$が$\Omega$上のカレントとして成り立つ。

本稿では無限遠での増大度が極小であるような $\mathbb{C}^2$上の多重劣調和関数の族，正閉 (1,1) カレントの族が重要な役割を果たす。実際我々の写像 fから定まる多重劣調和関数 $G^\pm$, 正閉 (1,1) カレント$\mu^\pm$もこの族に入ることがわかる。

$\omega = dd^c\log(1 + |x|^2 + |y|^2)$ と置く。$z = (x, y)$ に対して，$|z| = \max(|x|, |y|)$ と置く。

定義 2.2 $\mathcal{L} = \{\mathbb{C}^2$上の多重劣調和関数$v$;正数$M$により $\mathbb{C}^2$で$v(z) \leq \log^+|z| + M\}$
$\mathcal{K} = \{\mathbb{C}^2$上の正閉 (1,1) カレント$T$; $\int_{\mathbb{C}^2} T \wedge \omega < +\infty\}$

$v(z) \leq \log^+|z| + M$において，$\mathbb{C}^2$のノルム $|z|$ を他のものに変えても，同じ $\mathcal{L}$ が定まる。$T \in \mathcal{K}$を極小カレントという。

次の Lelong の定理を，本稿では証明なしに利用する。[L, LG] に証明がある。

定理 2.3 (a) $v \in \mathcal{L}$ に対して，$dd^cv \in \mathcal{K}$ である。
(b)$T \in \mathcal{K}$ に対して，定数$c \geq 0$ と$v \in \mathcal{L}$ が存在して，$T = cdd^cv$ が成り立つ。

より強い条件をみたす多重劣調和関数の族 $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y$ と極小カレントの族 $\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y$ を定める。

定義 2.4
$\mathcal{L}_x = \{v \in \mathcal{L};$ ある $V_\sigma{}^+$ で，有界多重調和関数 u により $v(x,y) = \log|x| + u(x,y)\}$
$\mathcal{L}_y = \{v \in \mathcal{L};$ ある $V_\sigma{}^-$ で，有界多重調和関数 u により $v(x,y) = \log|y| + u(x,y)\}$
$\mathcal{K}_x = \{T \in \mathcal{K};$ ある $V_\sigma{}^+$ で $\mathrm{supp}(T) \cap V_\sigma{}^+ = \emptyset\}$
$\mathcal{K}_y = \{T \in \mathcal{K};$ ある $V_\sigma{}^-$ で $\mathrm{supp}(T) \cap V_\sigma{}^- = \emptyset\}$

命題 2.5 (a) $v \in \mathcal{L}_y$ に対して，$dd^c v \in \mathcal{K}_y$ である。
(b) 零でない $T \in \mathcal{K}_y$ に対して，定数 $c > 0$ と $v \in \mathcal{L}_y$ が存在して，$T = c\,dd^c v$ が成り立つ。c は一意に，v は定数の差を除いて一意に決まる。

証明. (a) は明らかである。(b) を示す。$\mathrm{supp}(T) \cap V_{\sigma_1}{}^- = \emptyset$ とする。定理 2.3,(b) を適用して，$c_1 > 0$ と $\varphi \in \mathcal{L}$ を $T = c_1 dd^c\varphi$ となるように取る。φ は $V_{\sigma_1}^-$ では多重調和である。ある $M_1 > 0$ により $\varphi(x,y) \le \log^+|(x,y)| + M_1$ となるので φ は次の形になる。

$\varphi(x,y) = \alpha(x)\log|y| + \psi(x,y), 0 \le \alpha(x) \le 1,$

$\psi(x,y)$ は x を固定するごとに $\{y; |y| > R, |y| > \sigma_1|x|\}$ で有界な y の調和関数，
$r > R$ を任意に取る。$\alpha(x) = \displaystyle\int_{|y|=\sigma_1 r} \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{i\pi}$ より $\alpha(x)$ は $\{|x| < r\}$ で調和である。
$r > 0$ は任意なので $\alpha(x)$ は $\mathbb{C}$ で調和である。α は有界 $(0 \le \alpha \le 1)$ だから，$\alpha \equiv c_2$(定数) となる。$V_{\sigma_1}^-$ で $\psi(x,y) = \varphi(x,y) - c_2\log|y|$ は多重調和である。$\sigma > \sigma_1$ を任意にとると，正数 $M_2 > 0$ が存在して V_σ^- で $|\psi| < M_2$ が成り立つ。もし $c_2 = 0$ とすると φ 自身が $\mathbb{C}^2$ で有界な多重劣調和関数ということになる。すると φ は定数になり，$T = c_1 dd^c\varphi \equiv 0$ となって仮定に反する。故に，$c_2 > 0$ である。$c = c_1c_2, v = \dfrac{\varphi}{c_2}$ と置くと，$V_\sigma{}^-$ で，$v = \log|y| + \dfrac{\psi}{c_2}$ となって存在についての主張が示された。
次に一意性を示す。$T = c_1 dd^c v_1 = c_2 dd^c v_2$ とする。$c_1v_1 - c_2v_2$ は C^2 で多重調和である。$c_1 \ge c_2$ とすると，

$$\psi = (c_1 - c_2)\log|y| - (c_1v_1 - c_2v_2) \tag{2.1}$$

は $\mathbb{C}^2$ で多重劣調和であり，ある $V_\sigma{}^-$ で有界な多重調和関数である。x を固定する毎に，y の劣調和関数に最大値の原理を用いて ψ は $\mathbb{C}^2$ で有界な多重劣調和であることになる。従って ψ は定数である。$\frac{1}{2\pi}dd^c\log|y|$ は，1 次元線形部分多様体 $L = \{y = 0\}$ の上の積分カレント $[L]$ なので，$c_1 > c_2$ とすると，式 (2.1) の両辺の dd^c を取ると矛盾する。同様に $c_2 > c_1$ も矛盾に到るので，$c_1 = c_2$ である。改めて，$c_1 = c_2$ の下で (2.1) より，$v_1 - v_2$ は定数である。

次の定義においても，$z = (x,y)$ のノルムを $|z| = \max(|x|,|y|)$ とする。(なお，以下の注意 2.13を参照のこと。) また，$\log^+ t = \max(t,0), d$ は次数 (定義 1.3) である。

定義 2.6 $\quad G_n^+(z) = \frac{1}{d^n}\log^+|f^n(z)|, \qquad G_n^-(z) = \frac{1}{d^n}\log^+|f^{-n}(z)| \qquad (z \in \mathbb{C}^2)$

定義 1.3の一般エノン写像 g_jの最高次の項を $c_{0j}y^{d_j}$とする。

定義 2.7 $c_0 = \prod_{j=1}^{m} |c_{0j}|^{d_{j+1}\cdots d_m} \quad (d_{m+1} = 1$とする。$)$, $\gamma_0 = \dfrac{\log c_0}{d-1}$

補題 2.8 (a) $0 < \delta < |c_{0j}|$に対して，正数Rを十分大きく取れば次が成り立つ。

$$(|c_{0j}| - \delta)|y|^{d_j} < |\pi_2 \circ g_j(x,y)| < (|c_{0j}| + \delta)|y|^{d_j} \qquad (x,y) \in V^-$$

(b) $0 < \delta < c_0$である十分小さいδに対して，正数Rを十分大きく取れば次が成り立つ。

$$(c_0 - \delta)|y|^d < |\pi_2 \circ f(x,y)| < (c_0 + \delta)|y|^d \qquad (x,y) \in V^-$$

証明. (a) は明らかである。(b) $0 < \delta_1 < \min(|c_{01}|, \cdots, |c_{0m}|)$ であるδ_1に対して，$N_1 = \prod_{j=1}^{m}(|c_{0j}| - \delta_1)^{d_{j+1}\cdots d_m}$, $N_2 = \prod_{j=1}^{m}(|c_{0j}| + \delta_1)^{d_{j+1}\cdots d_m}$ と置く。$\delta_1 \to 0$ のとき，$N_1, N_2 \to c_0$ だから $c_0 - \delta < N_1, N_2 < c_0 + \delta$となるように$\delta_1$が取れる。
(a) と補題 1.9より十分大きい Rを取れば次が成り立つ。

$$(|c_{0j}| - \delta_1)|y|^{d_j} < |\pi_2 \circ g_j(x,y)| < (|c_{0j}| + \delta_1)|y|^{d_j} \quad ((x,y) \in V^-)$$

$$(x,y) \in V^- \text{のとき}, g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1(x,y) \in V^-$$

$k = 1$ から $k = m$ まで順番に，$|\pi_2 \circ g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1|$ を評価して，$N_1|y|^d \leq |\pi_2 \circ g_m \cdots \circ g_1(z)| \leq N_2|y|^d$を得る。

次の補題では，$L_1 = \dfrac{d^n - 1}{d^n(d-1)}\log(c_0 - \delta), L_2 = \dfrac{d^n - 1}{d^n(d-1)}\log(c_0 + \delta)$ である。

補題 2.9 十分小さい正数δと十分大きなRを取ると任意の$n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 < \log R + L_1 < \log|y| + L_1 \ &< \ G_n^+(x,y) = \frac{1}{d^n}\log|\pi_2 \circ f^n(x,y)| \\ &< \ \log|y| + L_2 \qquad ((x,y) \in V^-) \end{aligned}$$

証明. $(x_n, y_n) = f^n(x,y)$ と置く。補題 2.8,(b) の定数 δ を用いて，$M_1 = c_0 - \delta, M_2 = c_0 + \delta$ と置く。$(x,y) \in V^-$ のとき，$(x_n, y_n) \in V^-$ なので (補題 1.9,(b))，$|y_n| > R > 1$ であり $G_n^+(x,y) = \frac{1}{d^n}\log|y_n|$ となる。順に次を得る。
$M_1|y|^d < |y_1| < M_2|y|^d$
$M_1^{1+d}|y|^{d^2} < |y_2| < M_2^{1+d}|y|^{d^2} \ \cdots$
$M_1^{1+d+\cdots+d^{n-1}}|y|^{d^n} < |y_n| < M_2^{1+d+\cdots+d^{n-1}}|y|^{d^n}$
$1 + d + d^2 + \cdots + d^{n-1} = \frac{d^n-1}{d-1}$ だから，求める式が得られる。

補題 2.10 **Rを十分大きく取る。$n\to\infty$ のとき，G^+_n はV^- で一様に収束して，極限関数G^+ は$(x,y)\in V^-$で次をみたす多重調和関数である。**

$$G^+(x,y)=\log|y|+\gamma_o+u(x,y),\ u\text{は有界多重調和関数で}\lim_{|y|\to\infty}u(x,y)=o$$

証明.$(x_n,y_n)=f^n(z)$ と置く。δに対して，補題 2.9が成り立つ $R>1$ を取って固定する。$|\log(c_0-\delta)|<N, |\log(c_0+\delta)|<N$となる $N>0$ を取る。補題 2.8,(b) より，

$$|G^+_{n+1}(z)-G^+_n(z)|=|\frac{1}{d^{n+1}}\log|y_{n+1}|-\frac{1}{d^n}\log|y_n||=|\frac{1}{d^{n+1}}\log|\frac{y_{n+1}}{y_n^d}||\leq\frac{1}{d^{n+1}}N$$

これは G^+_nが V^-で一様に収束することを示している。

多重調和関数 $G^+_n(z)=\frac{1}{d^n}\log|\pi_2\circ f^n(z)|$ の一様収束の極限関数なので，G^+ も多重調和である。V^-で有界な多重調和関数 $G^+-\log|y|$ は，$\{x\in\mathbb{C},y=\infty\}\in\mathbb{C}\times\mathbb{P}$ まで多重調和に接続できて，$\lim_{|y|\to\infty}(G^+(x,y)-\log|y|)$ は x によらずに定数となる。この定数γは補題 2.9より $\dfrac{\log(c_0-\delta)}{d-1}\leq\gamma\leq\dfrac{\log(c_0+\delta)}{d-1}$をみたす。$\delta$は任意に小さく取れるので，$\gamma=\gamma_0$である。

補題 2.11 **$n\to\infty$ のとき，G^+_n は $\mathbb{C}^2\backslash K^+$で広義一様に収束する。極限関数 G^+ は，$\mathbb{C}^2\backslash K^+$ で$G^+>o$ である多重調和関数である。$G^+\circ f=dG^+$ が成り立つ。**

証明. n を固定する。$G^+_m=\frac{1}{d^n}G^+_{m-n}\circ f^n$であるので，補題 2.10より，$G^+_m$は $m\to\infty$ のとき $f^{-n}(V^-)$ で一様に多重調和関数$\frac{1}{d^n}G^+\circ f^n$ に収束する。極限関数は $z\in f^{-n}(V^-)$ で $G^+(z)=\frac{1}{d^n}G^+\circ f^n(z)$ を満たす。補題 2.9より $G^+_m(z)=\frac{1}{d^n}G^+_{m-n}\circ f^n(z)>\frac{1}{d^n}(\log R+L_1)>0$ なので，$G^+(z)\geq\frac{1}{d^n}(\log R+L_1)>0\quad z\in f^{-n}(V^-)$ となる。

以上の n を固定したときの $f^{-n}(V^-)$ 上の結果を，$\bigcup_{n=0}^{\infty}f^{-n}(V^-)=\mathbb{C}^2\backslash K^+$ (命題 1.13 ,(a)) に適用して，G^+_m は $m\to\infty$ のとき $\mathbb{C}^2\backslash K^+$ で広義一様に多重調和関数 G^+ に収束して，$G^+>0$ となることがわかる。

補題 2.12 **$\mathbb{C}^2$ 上の関数G^+ を，$\mathbb{C}^2\backslash K^+$ では補題 2.11のG^+, K^+では$G^+(z)\equiv o$と定める。このときG^+_n は $\mathbb{C}^2$ で広義一様にG^+ に収束し，G^+ は $\mathbb{C}^2$ で連続である。**

証明. 補題 2.11より $\mathbb{C}^2\backslash K^+$ では主張は成り立つ。K^+のコンパクトで G^+_nが 0 に一様収束することも明らかである。補題 1.12, 2.9が成り立つように $R>0$ を取る。$K^+\subset V\cup V^+$ である。命題 1.13より，$f^{-n}(V^-)\subset f^{-n-1}(V^-)$ で，$\bigcup_{n=0}^{\infty}f^{-n}(V^-)=\mathbb{C}^2\backslash K^+$ である。

正数 A を任意に取って，$C=\{(x,y);|x|\leq A\}\cap\overline{V\cup V^+}, C_n=C\cap(f^{-n}(V^-)\backslash f^{-n+1}(V^-))$ と置くとき $\lim_{n\to\infty}\sup_{C_n}(\sup_{m\geq n}G^+_m)=0$ をいえば，G^+_n が G^+ に C で一様収束することがわかる。$\sigma=1$ として補題 1.11の記号で $R_1\leq A$ として置く。$B=\sup_{z\in C}|\pi_2\circ f(z)|$ と置く。

$z=(x_0,x_1)\in C_n$ のとき，$f^n(z)\in V^-$, $f^{n-1}(z)\in\overline{V\cup V^+}$である。
補題 1.9,(a) より，$(x_i,x_{i+1})\in\overline{V\cup V^+}$ $(0\le i\le(n-1)m)$ なので
補題 1.11より，$|\pi_1\circ f^{n-1}(z)|\le\max(R_1,|x_0|)\le A$ で，$f^{n-1}(z)\in C$である。
補題 2.9より，$M=\log(c_0+\delta)$ と置くと，次が m に依らずに成り立つ。

$$G_m^+(z)=\frac{1}{d^n}G_{m-n}^+\circ f^n(z)<\frac{1}{d^n}(\log|\pi_2\circ f^n(z)|+M)\le\frac{1}{d^n}(\log B+M)$$

故に，$\lim_{n\to\infty}\sup_{C_n}(\sup_{m\ge n}G_m^+)=0$ である。

注意 2.13 G_n^+を定義するのに，定義 2.6のノルムと同値な他のノルムを用いても，極限関数は同じG^+となる。

補題 2.14 G^+ は $\mathbb{C}^2$ 上の多重劣調和関数である。

証明. G^+ が連続であることが，補題 2.12でわかった。G^+ が最小値 0 をとる所の K^+ 以外では G^+ は多重調和である (補題 2.11)。故に G^+ は $\mathbb{C}^2$ 上で多重劣調和である。

命題 2.15 $G^+\in\mathcal{L}_y$が成り立つ。

証明. 補題 2.14, 2.10より，あとは $G^+(z)\le\log^+|z|+A_1$ $(z\in\mathbb{C}^2)$ を示せば良い。
まず，一般エノン写像 $g_j(1\le j\le m)$ に対して，正数 A を適当に取ると $\mathbb{C}^2$で，
$|g_j(z)|\le A|z|^{d_j}$ が成り立つ。$A_1=A^{1+d_m+d_{m-1}d_m+\cdots+d_2\cdots d_m}$ と置くと，$|f(z)|\le A_1|z|^d$ が成り立つ。補題 2.9の証明と同様にして，$1+d+\cdots+d^{n-1}<d^n$より次を得る。

$$|f^n(z)|\le A_1^{d^n}|z|^{d^n}\quad z\in\mathbb{C}^2 \tag{2.2}$$

故に，補題 2.12より $G^+(z)\le\log^+|z|+\log A_1$ $(z\in\mathbb{C}^2)$ となる。

以上補題 2.11,2.12, 2.14, 命題 2.15 を次の定理にまとめておく。(d は定義 1.3の fの次数)

定理 2.16 (a) G_n^+ は $\mathbb{C}^2$ で$G^+\in\mathcal{L}_y$ に広義一様に収束する。G^+は $\mathbb{C}^2$ で連続で，$\mathbb{C}^2\backslash K^+$ では正値多重調和，K^+ では $G^+=0$ である。$G^+\circ f=dG^+$ が成り立つ。
(b) G_n^- は $\mathbb{C}^2$ で$G^-\in\mathcal{L}_x$ に広義一様に収束する。G^-は $\mathbb{C}^2$ で連続で，$\mathbb{C}^2\backslash K^-$ では正値多重調和，K^- では $G^-=0$ である。$G^-\circ f^{-1}=dG^-$ が成り立つ。

次に正閉 (1,1) カレント$\mu^\pm$を定義する。命題 2.15より，$G^\pm$に定理 2.3, (a) が適用できる。

定義 2.17 $\mathbb{C}^2$ で$\mu^\pm=dd^cG^\pm$ と置く。

定義 2.18 $\mathbb{C}^2$上の (1,1) カレントTに対してf^*Tを，台がコンパクトなC^∞級 (1,1) 形式ψに対して$\int_{\mathbb{C}^2}\psi\wedge f^*T=\int_{\mathbb{C}^2}\psi\circ f^{-1}\wedge T$ が成り立つことで定める。

Tが $\mathbb{C}^2$上の関数φ から $T=dd^c\varphi$ と定まるときには，$f^*T=dd^c(\varphi\circ f)$ となる。定理 2.16より $G^+=\frac{1}{d}G^+\circ f, G^-=dG^-\circ f, \mu^+=\frac{1}{d}f^*\mu^+, \mu^-=df^*\mu^-$ が成り立つ。

次の定理 2.19は定理 4.21, 8.1, 8.2, 8.10に利用される。

定理 2.19 $\mathrm{supp}(\mu^+)=J^+,\qquad \mathrm{supp}(\mu^-)=J^-$

証明．補題 2.11,2.12 より $\mathrm{supp}(\mu^+)\subset J^+$である。点 $z\in J^+$のある近傍 Uで$\mu^+\equiv 0$ とすると，G^+は Uで多重調和となる。補題 2.11,2.12より Uで $G^+\geq 0$ なので，G^+は Uの内点 zで最小値を取ることになる。多重調和関数の最小値の原理より，Uで $G^+\equiv 0$ となる。これは，$\mathbb{C}^2\setminus K^+$で $G^+>0$ であることに反する。

複素平面のコンパクト Yに対して，Yのグリーン関数 (すなわち，無限遠に極を持つ $\mathbb{C}\setminus Y$のグリーン関数)G^*が定まる。この節の最後に，これに関して後に利用する事実をまとめ，x を固定したときの yの関数 $G^+(x,\cdot)$ についてグリーン関数との関係を調べておく。

次は，[K, Corollary 5.5.3] に対応する。

補題 2.20 複素平面上の劣調和関数vが，$\{|y|>R\}$で有界調和関数$u(y)$により $v(y)=\log|y|+u(y)$と書けるとき$\int_{\mathbb{C}}dd^cv=2\pi$ である。

証明．$\{|y|>R\}$ で有界な調和関数は $y=\infty$ まで調和に接続されるので，$-\int_{\{|y|=R\}}d^cu=\int_{\{|y|>R\}}dd^cu=0$ である。$\{|y|\leq R\}$ の近傍で 1 に等しい$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{C})$ を取ると，$\int_{\mathbb{C}}dd^cv=\int_{\mathbb{C}}\chi dd^cv=-\int_{\{|y|>R\}}d\chi\wedge d^c(\log|y|+u)=\int_{\{|y|=R\}}d^c\log|y|=2\pi$となる。ここで最後の等式には，$d^c=r\frac{\partial}{\partial r}d\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}dr$を用いた。

次の公式は，y平面 $\mathbb{C}$ では，$y=u+iv$を実座標とすると $dd^ch=\Delta h dudv$なので，$\frac{1}{2\pi}\log|y|$が LaplacianΔの基本解であるという公式 ([K, Propositon 4.1.2]) にあたる。

補題 2.21 複素平面上のコンパクトに台を持つ Borel 測度λに対して次が成り立つ。

$$dd^c\int_{\mathbb{C}}\log|y-\xi|\lambda(\xi)=2\pi\lambda(y)$$

$\mathbb{C}$ のコンパクト Yに対して $\mathbb{C}$ 上の劣調和関数の族 $\mathcal{V}(Y)$ を次で定める。
$\mathcal{V}(Y)=\{v; v$は $\mathbb{C}$ 上で劣調和，Yで $v\leq 0, M>0$ により $\mathbb{C}$ で $v(\zeta)\leq\log^+|\zeta|+M\}$
$G(\zeta)=\sup_{v\in\mathcal{V}(Y)}v(\zeta), G^*(\zeta)=\lim_{\eta\to\zeta}G(\eta)$ と置く。

命題 2.22 $G^*(\zeta) \not\equiv \infty$であれば$G^*(\zeta)$は$\mathbb{C}$上劣調和で，$0 \le G^*(\zeta) \le \log|\zeta|^+ + M_1$をみたす$(M_1 > 0)$。$\mathbb{C}\backslash Y$ 上調和で，$\mathbb{C}\backslash Y$ の非有界成分で，$G^* > 0$である。

証明. [K, Corollary 5.2.2,Proposition 5.5.4,p.185,p.189] にある。

$G^* \equiv \infty$ であれば $\mathrm{Cap}(Y) = 0$, そうでなければ$\gamma(Y) = \lim_{|\zeta|\to\infty}(G^*(\zeta) - \log|\zeta|)$ として，$\mathrm{Cap}(Y) = \exp(-\gamma(Y))$ が Yの対数容量である。G^*, dd^cG^*をY のグリーン関数，平衡測度という。$\int_{\mathbb{C}} dd^cG^* = 2\pi$ が成り立つ (補題 2.20)。

命題 2.23 複素平面 $\mathbb{C}$ のコンパクトYのグリーン関数G^*は，Y上では対数容量0の集合を除いて$G^* = 0$をみたす。

証明. G の定義 (命題 2.22) より Yで $G \le 0$ で，$\{G^* > G\}$ は対数容量 0 の集合 ([K, Theorem 4.6.7,5.2.4,Corollary 5.2.2]) だから，主張が成り立つ。

次の定義では，$\mathbb{C}^2$の領域Ωで，多重劣調和関数 v, 正閉 (1,1) カレント $T = dd^cv$,1 次元複素部分多様体 Mを考える。

定義 2.24 vのMへの制限である劣調和関数$v_{|M}$からM上でdd^cを取って定まるM上の正閉 (1,1) カレントを$T_{|M}$と書いて，TのMへの制限という。特に，Mがxを固定したときのy平面$M = \{(x, y); y \in\mathbb{C}\}$である場合に，$T$の$M$への制限を$T_x$と表す。

$T = dd^cv$である vの取り方によらないで $T_{|M}$は定まることに注意する。

命題 2.25 xを固定して$M = \{(x, y); y \in\mathbb{C}\}$について，$Y = K^+ \cap M$とする。このとき，$G^+(x, \cdot)$は$y$平面$M$上で$Y$のグリーン関数である。次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{C}} \mu^+{}_x = 2\pi,\ \mathrm{Cap}(Y) = \left(\frac{1}{c_0}\right)^{\overline{\frac{1}{d-1}}},\quad G^+(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log|y - \xi|\mu^+{}_x(\xi) + \gamma_0$$

証明. $v \in \mathcal{V}(Y)$ のとき，$\mathbb{C}\backslash Y$で $v-G^+(x, \cdot)$ は有界劣調和関数，$\partial(\mathbb{C}\backslash Y)$で $v-G^+(x, \cdot) \le 0$ だから最大値の原理より $v \le G^+(x, \cdot)$ となる。Yでも $v \le G^+(x, \cdot) = 0$ だから，$\mathbb{C}$ で $v \le G^+(x, \cdot)$ となる。故に $G^* \le G^+(x, \cdot)$ となる。特に，$G^* \not\equiv \infty, \mathrm{Cap}(Y) > 0$ である。逆に $G^+(x, \cdot) \in \mathcal{V}(Y)$ だから $G^+(x, \cdot) \le G^*$である。故に $G^+(x, \cdot) = G^*$となる。$\mu^+{}_x$の全測度は補題 2.20から，$\mathrm{Cap}(Y)$ については補題 2.10も合わせてわかる。最後の等式は，補題 2.21よりわかる。

この命題より特に，任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して $Y = K^+ \cap M \neq \emptyset$ がわかる。Kについては，f^nは固定点 (定義 7.3) をもつことがポテンシャル論的方法によらずにわかり (定理 7.21), f^nの固定点は Kの要素なので，特に $K \neq \emptyset$ であることがわかる。しかし後により強力に，K, Jが多重ポテンシャル論的に大きな集合であることを示す (命題 4.16, 定理 4.21)。

3　正 (1,1) カレントの積で定まる (2,2) カレント

この節では正 (1,1) カレントの積により (2,2) カレントを定める。我々は以下の定義 3.3,3.4 の 2 つの場合を必要とする。

定義 3.1 Ω を $\mathbb{C}^2$ の領域とする。Ω 上の多重劣調和関数の全体を $P(\Omega)$, C^k 級関数の全体を $C^k(\Omega)$, 台がコンパクトな C^k 級関数の全体を $C^k_\circ(\Omega)$ と書く。

補題 3.2 Ω 上の (1,1) カレント T, $G \in C^\infty(\Omega), \chi \in C^\infty_\circ(\Omega)$ が $\mathrm{supp}(\chi) \cap \mathrm{supp}(dT) = \emptyset$ をみたすとき, $\int_\Omega \chi dd^cG \wedge T = \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge T$ が成り立つ。

証明. $\int_\Omega \chi dd^cG \wedge T = -\int_\Omega d\chi \wedge d^cG \wedge T + \int_\Omega \chi d^cG \wedge dT$
$= -\int_\Omega dG \wedge d^c\chi \wedge T + \int_\Omega \chi d^cG \wedge dT = \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge T - \int_\Omega Gd^c\chi \wedge dT + \int_\Omega \chi d^cG \wedge dT$
仮定より, 最後の 2 つの項は 0 である。

定義 3.3 Ω 上の正閉 (1,1) カレント T と有界な多重劣調和関数 G に対して正閉 (2,2) カレント $dd^cG \wedge T$ を $\int_\Omega \chi dd^cG \wedge T = \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge T \quad (\chi \in C^\infty_\circ(\Omega))$ で定義する。

右辺で $dd^c\chi \wedge T$ は Borel 測度を係数とする (1,1) 形式となるので, 上半連続な有界関数 G に対して値が定まる。$dd^cG \wedge T$ は明らかに閉カレントである。$dd^cG \wedge T$ が正カレントであることが, 次のよう示せる。$\chi \in C^\infty_0(\Omega), \chi \geq 0$ に対して, $\mathrm{supp}(\chi)$ の近傍 $U \subset\subset \Omega$ で $G_j \in P(U) \cap C^\infty(U)$ を $G_j \to G (j \to \infty)$ である単調減少列と取ると積分の単調収束定理と補題 3.2から, $\int_\Omega Gdd^c\chi \wedge T = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega G_j dd^c\chi \wedge T = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \chi dd^cG_j \wedge T \geq 0$ となる。
最後の不等式は, T が正であることと $dd^cG_j \geq 0, \chi \geq 0$ による。

定義 3.4 Ω 上の正 (1,1) カレント T と有界な多重劣調和関数 G と $\psi \in C^\infty(\Omega)$ が $\mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(dT) = \emptyset$ をみたすとき (2,2) カレント $\psi dd^cG \wedge T$ を次で定義する。

$$\int_\Omega \chi\psi dd^cG \wedge T = \int_\Omega Gdd^c(\chi\psi) \wedge T \qquad (\chi \in C^\infty_\circ(\Omega))$$

右辺で $dd^c(\chi\psi) \wedge T$ は Borel 測度を係数とする (1,1) 形式となるので, 上半連続な有界関数 G に対して値が定まる。

正閉 (1,1) カレント T, 有界な $G \in P(\Omega), \psi \in C^\infty(\Omega)$ に対しては, $\psi dd^cG \wedge T$ が定義 3.3,3.4の 2 通りの仕方で定まるが両者は一致する。

命題 3.5 T_j は Ω 上の正 (1,1) カレント, T は Ω 上の正閉 (1,1) カレント, $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$ で $\mathrm{supp}(\psi_j) \cap \mathrm{supp}(dT_j) = \emptyset$ とする。$G \in P(\Omega)$ は有界とする。$\psi_j T_j \to T$ ならば, $\psi_j dd^cG \wedge T_j \to dd^cG \wedge T$ が成り立つ。

証明. 台についての仮定から，$d\psi_j \wedge T_j = d(\psi_j \wedge T_j) \to dT = 0$ と
$dd^c\psi_j \wedge T_j = dd^c(\psi_j \wedge T_j) + d^c\psi_j \wedge dT_j - d\psi_j \wedge d^cT_j - \psi_j \wedge dd^cT_j$
$= dd^c(\psi_j \wedge T_j) + 2d^c\psi_j \wedge dT_j - \psi_j \wedge dd^cT_j = dd^c(\psi_j \wedge T_j) \to dd^cT = 0$ が成り立つ。
故に，$\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，
$\int_\Omega \chi\psi_j dd^cG \wedge T_j = \int_\Omega Gdd^c(\chi\psi_j) \wedge T_j$
$= \int_\Omega Gd\chi \wedge d^c\psi_j \wedge T_j + \int_\Omega G\chi dd^c\psi_j \wedge T_j + \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge \psi_j \wedge T_j - \int_\Omega Gd^c\chi \wedge d\psi_j \wedge T_j$
$= \int_\Omega G\chi dd^c\psi_j \wedge T_j + \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge \psi_j \wedge T_j - 2\int_\Omega Gd^c\chi \wedge d\psi_j \wedge T_j$
$\to \int_\Omega Gdd^c\chi \wedge T = \int_\Omega \chi dd^cG \wedge T$
ここで，最初の等式は定義 3.3，最後の等式は定義 3.4による。

4 Kの複素平衡測度と多重ポテンシャル論

この節の結果として，特に $K \neq \emptyset$ (命題 4.16), $J \neq \emptyset$(定理 4.21) がわかる。

2つの $u_1, u_2 \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ に対して，定義 3.3により正閉 (2,2) カレント $dd^cu_1 \wedge dd^cu_2$ を定義する。([K, p.113])

定理 4.1 ([K, Theorem 3.4.3]) $\boldsymbol{u_1, u_2, v_{1j}, v_{2j} \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)}$ **とする。**$\boldsymbol{v_{ij}}$ **が各点で単調減少して**$\boldsymbol{u_i}$ **に収束するとき**$\boldsymbol{(i = 1, 2, j \to \infty)}$**，次が成り立つ。**

$$\boldsymbol{dd^cv_{ij} \to dd^cu_i,\ dd^cv_{1j} \wedge dd^cv_{2j} \to dd^cu_1 \wedge dd^cu_2 \quad (j \to \infty)}$$

定理 2.16より $G^\pm \in P(\mathbb{C}^2) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{C}^2)$ なので，$\mu^{+2} = (dd^cG^+)^2, \mu^+ \wedge \mu^- = dd^cG^+ \wedge dd^cG^-$ などが定義できる。$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^2)$ とする。

$$\int_{\mathbb{C}^2} \chi dd^cG^+ \wedge dd^cG^- = \int_{\mathbb{C}^2} G^+ dd^c\chi \wedge dd^cG^-, \int_{\mathbb{C}^2} \chi dd^cG^+ \wedge dd^cG^- = \int_{\mathbb{C}^2} G^- dd^c\chi \wedge dd^cG^+$$

から定まる$\mu^+ \wedge \mu^-$ は一致する。これは，$G_j^+, G_j^- \in P(\mathbb{C}^2) \cap C^\infty(\mathbb{C}^2)$ を上から単調減少して G^+, G^-に収束する列とすると ([K, Theorem 2.9.2]), 定理 4.1より $dd^cG_j^+ \wedge dd^cG_j^- \to dd^cG^+ \wedge dd^cG^-$となるからである。

定理 4.2 (比較定理 (comparison theorem),[K, Theorem 3.7.1]) $\boldsymbol{\Omega \subset \mathbb{C}^2}$**を有界領域，**$\boldsymbol{u, v \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$ **とする。各**$\boldsymbol{w \in \partial\Omega}$ **に対して** $\boldsymbol{\liminf_{z \to w, z \in \Omega} (u(z) - v(z)) \geq 0}$ **ならば，**$\boldsymbol{\int_{\{u < v\}} (dd^cv)^2 \leq \int_{\{u < v\}} (dd^cu)^2}$ **となる。**

次の補題では x, yを $\mathbb{C}^2$の正則座標として，実部，虚部を $x = \xi + i\eta, y = \sigma + i\tau$と表す。2 次元実空間 $L = \{\xi = \sigma = 0\}$ の正の向きを $d\eta \wedge d\tau$,3 次元空間 $M = \{\xi = 0\}$ の正の向きを $d\eta \wedge d\sigma \wedge d\tau$とする。3 つの 3 次元の半空間とその正の向きを次のように決める。
$M_1 = \{\xi = \sigma, \xi > 0\} \quad (d\xi \wedge d\eta \wedge d\tau = -d\eta \wedge d\sigma \wedge d\tau)$,
$M_2 = \{\xi = 0, \sigma < 0\} \quad (d\eta \wedge d\sigma \wedge d\tau), M_3 = \{\sigma = 0, \xi < 0\} \quad (d\xi \wedge d\eta \wedge d\tau)$
M上の積分のカレントを $[M]$ と書く。Mは実次元が 3 なので $[M]$ は次数が 1 のカレントである。$[M_1], [L]$ なども同様に定義する。

補題 4.3 $\boldsymbol{u_1 = \max(\xi, 0), u_2 = \max(\sigma, 0), v = \max(\xi, \sigma, 0)}$ **と置く。次が成り立つ。**
(a) $\boldsymbol{dd^c u_1 = [M] \wedge d\eta}$ **(b)** $\boldsymbol{(dd^c u_1)^2 = 0}$
(c) $\boldsymbol{dd^c v = [M_1] \wedge (d\tau - d\eta) + [M_2] \wedge d\eta + [M_3] \wedge d\tau}$
(d) $\boldsymbol{(dd^c v)^2 = [L] d\eta \wedge d\tau = dd^c u_1 \wedge dd^c u_2}$

証明. (a) コンパクトな台をもつ C^∞級の $(1,1)$ 形式ψを固定する。$U = \{\xi > 0\}$ と置く。$M \subset \partial U$の∂Uでの符号を調べる。Mでの Uの外向きの法線方向$-d\xi$の後に Mの向きを並べると$-d\xi \wedge d\eta \wedge d\sigma \wedge d\tau$で $\mathbb{C}^2$の正の向きと逆になる。故に$\partial U = -M + \cdots$となる。

$$\int_{\mathbb{C}^2} \psi \wedge dd^c u_1 = \int_{\mathbb{C}^2} dd^c\psi \wedge u_1 = \int_U dd^c\psi \wedge \xi = -\int_M d^c\psi \wedge \xi + \int_U d^c\psi \wedge d\xi$$

$$= \int_U d^c\xi \wedge d\psi = \int_M d^c\xi \wedge \psi = \int_M d\eta \wedge \psi = \int_{\mathbb{C}^2} [M] \wedge d\eta \wedge \psi$$

(b)$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^2)$ を固定する。M上で $u_1 = 0$ であるから，
$\int_{\mathbb{C}^2} \varphi (dd^c u_1)^2 = \int_{\mathbb{C}^2} u_1 dd^c\varphi \wedge dd^c u_1 = \int_{\mathbb{C}^2} u_1 [M] \wedge d\eta \wedge dd^c\varphi = 0$ となる。
(c)3 つの領域 $U_1 = \{\xi > 0, \xi > \sigma\}, U_2 = \{\sigma > 0, \sigma > \xi\}, U_3 = \{\xi < 0, \sigma < 0\}$ を考える。ψをコンパクトな台をもつ C^∞級の $(1,1)$ 形式ψとする。
$\int_{\mathbb{C}^2} \psi \wedge dd^c v = \int_{U_1} \xi dd^c\psi + \int_{U_2} \sigma dd^c\psi + \int_{U_3} 0 dd^c\psi$である。第 1,2 の積分はそれぞれ
$\int_{U_1} \xi dd^c\psi = \int_{\partial U_1} \xi d^c\psi - \int_{U_1} d\xi \wedge d^c\psi = \int_{\partial U_1} \xi d^c\psi + \int_{U_1} d^c\xi \wedge d\psi = \int_{\partial U_1} \xi d^c\psi - \int_{\partial U_1} d^c\xi \wedge \psi$,
$\int_{U_2} \sigma dd^c\psi = \int_{\partial U_2} \sigma d^c\psi - \int_{U_2} d\sigma \wedge d^c\psi = \int_{\partial U_2} \sigma d^c\psi + \int_{U_2} d^c\sigma \wedge d\psi = \int_{\partial U_2} \sigma d^c\psi - \int_{\partial U_2} d^c\sigma \wedge \psi$
となる。∂U_1の M_1部分の符号を調べる。U_1から外向きに $d\sigma$を取りその後に M_1の向きを並べると $d\sigma \wedge d\xi \wedge d\eta \wedge d\tau$で $\mathbb{C}^2$の向きと一致するので∂U_1の M_1の部分の符号は+1 である。同様に他の符号も調べてまとめると，
$\int_{\mathbb{C}^2} \psi \wedge dd^c v = \int_{M_1} (\xi - \sigma) d^c\psi - d^c(\xi - \sigma) \wedge \psi - \int_{M_2} \xi d^c\psi - d^c\xi \wedge \psi - \int_{M_3} \sigma d^c\psi - d^c\sigma \wedge \psi$
$= -\int_{M_1} d^c(\xi - \sigma) \wedge \psi + \int_{M_2} d^c\xi \wedge \psi + \int_{M_3} d^c\sigma \wedge \psi = \int_{M_1} (d\tau - d\eta) \wedge \psi + \int_{M_2} d\eta \wedge \psi + \int_{M_3} d\tau \wedge \psi$
(d)$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^2)$ を固定する。(c) より

$$\int_{\mathbb{C}^2}\varphi(dd^cv)^2=\int_{\mathbb{C}^2}vdd^c\varphi\wedge dd^cv=\int_{M_1}(d\tau-d\eta)\wedge vdd^c\varphi+\int_{M_2}d\eta\wedge vdd^c\varphi+\int_{M_3}d\tau\wedge vdd^c\varphi$$

M_2, M_3では $v=0$ だから第 2,3 の積分は 0 である。第 1 の積分を計算するために複素座標とその実部，虚部を $z=x+y, w=y-x, z=\lambda+i\mu, w=\kappa+i\rho$と置く。

$M_1=\{\kappa=0,\lambda>0\}$, M_1の向きは $d\lambda\wedge d\mu\wedge d\rho$である。

$$\int_{M_1}(d\tau-d\eta)\wedge vdd^c\varphi=\int_{M_1}\frac{\lambda}{2}d\rho\wedge dd^c\varphi=\int_{M_1}\frac{\lambda}{2}(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2})d\lambda\wedge d\mu\wedge d\rho$$

$$=\int_{\lambda+L}d\mu\wedge d\rho\int_0^\infty\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}d\lambda=\int_{\lambda+L}d\mu\wedge d\rho\{[\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda\}$$

$=\frac{1}{2}\int_L\varphi d\mu\wedge d\rho=\int_L\varphi d\eta\wedge d\tau=\int_{\mathbb{C}^2}\varphi[L]\wedge d\eta\wedge d\tau$ となり初めの等式がわかる。

2 番目の等式を示すために $M'=\{\sigma>0\}\cap M$と置く。

$$\int_{\mathbb{C}^2}\varphi dd^cu_1\wedge dd^cu_2=\int_{\mathbb{C}^2}u_2dd^c\varphi\wedge dd^cu_1=\int_{M'}\sigma d\eta\wedge dd^c\varphi=-\int_L\sigma d\eta\wedge d^c\varphi+\int_{M'}d\sigma\wedge d\eta\wedge d^c\varphi$$

$$=\int_{M'}d\varphi\wedge d\eta\wedge d^c\sigma=\int_L\varphi d\eta\wedge d^c\sigma+\int_{M'}\varphi\wedge d\eta\wedge dd^c\sigma=\int_L\varphi d\eta\wedge d\tau$$

となって主張が証明された。途中，L 上で$\sigma=0$, M'上で $dd^c\sigma=0$ を用いた。

補題 4.4 $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ でu_1, u_2 が多重調和のとき，$(dd^c\max(u_1,u_2))^2=0$ となる。

証明. $u=\max(u_1,u_2)$ と置く。多重調和関数 h により $v_1=u_1-h, v_2=u_2-h$, $v=\max(v_1,v_2)=u-h$ とすると $(dd^cu)^2=(dd^cv)^2$となるので $h=u_2$とすることで $u_2=0$ の場合に証明すればよい。$u=\max(u_1,0)$ とする。$z\in\Omega$で $u_1(z)\neq0$ ならば zの近傍ωを小さくとればωで $(dd^cu)^2=0$ である。$z\in\Omega$で $u_1(z)=0$ とする。正則関数φ で $u_1=\mathrm{Re}\varphi$ となるものを取る。$u_1(z)=0$ をみたす点 zを中心とする小さい開球ωでφ が$\partial\varphi(z)\neq0$ ならばψを選んでωで正則座標 (φ,ψ) を取れるので，補題 4.3(b) よりωで $(dd^cu)^2=0$ である。点 zで$\partial\varphi(z)=0$ とする。zの開近傍ωを小さく取って固定する。$\varepsilon>0$ を十分小さく取れば $u_1+\varepsilon=0$ をみたすωの点で$\partial(\varphi+\varepsilon)\neq0$ なので今までの考察より $u_\varepsilon=\max(u_1+\varepsilon,0)$ は ωで $(dd^cu_\varepsilon)^2=0$ をみたす。定理 4.1より $(dd^cu)^2=0$ である。

なお，[K, Proposition 3.8.1] には，補題 4.4の別証明がある。

補題 4.5 $\Omega\subset\mathbb{C}^2$で$u_1, u_2, u_3$が多重調和のとき，$(dd^cu)^2=dd^cv_1\wedge dd^cv_2$となる。ここに，$u=\max(u_1,u_2,u_3)$, $v_1=\max(u_1,u_3)$, $v_2=\max(u_2,u_3)$である。

証明. 多重調和関数 h により$\tilde{u}_1=u_1-h, \tilde{v}_1=v_1-h, \tilde{u}=u-h$ などとすると，$dd^cv_1\wedge dd^cv_2=dd^c\tilde{v}_1\wedge dd^c\tilde{v}_2$, $(dd^cu)^2=(dd^c\tilde{u})^2$となるので，従って $h=u_3$とすることで $u_3=0$ の場合に証明すればよい。局所的にΩの各点の近傍で 2 つの (2,2) カレントが一致することを示せばよい。$v_1=\max(u_1,0), v_2=\max(u_2,0)$ である。補題 4.4より $u_1(z)=0, u_2(z)=0$ をみたす点 z以外では $(dd^cu)^2=0, dd^cv_1\wedge dd^cv_2=0$ である。$z\in\Omega$で

$u_1(z) = u_2(z) = 0$とする。zを中心とする開球ω上の正則関数φ_1, φ_2で $u_1 = \mathrm{Re}\varphi_1, u_2 = \mathrm{Re}\varphi_2$となるものを取る。$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) : \omega \to \mathbb{C}^2$について$\omega$で $\det(D\Phi(z)) \neq 0$ ならば補題 4.3,(d) より主張が従う。ωで $\det(D\Phi(z)) \not\equiv 0$で，$\det(D\Phi(z)) = 0$である場合$\varepsilon > 0$と $a_1 > 0, a_2 > 0$を取って u_iの替わりに $u_1 + \varepsilon a_i$を用いると，必要ならωを小さくとり直して固定するとωには $u_1(w) + \varepsilon a_1 = u_2(w) + \varepsilon a_2 = \det(D\Phi(w)) = 0$ をみたす点がないようにできる。定理 4.1 よりωで主張が成り立つことがわかる。ωで $\det(D\Phi(z)) \equiv 0$ である場合にはωの正値多重調和関数νと正則関数ψを$\nu = \mathrm{Re}\psi$, $\Phi_\varepsilon = (\varphi_1 + \varepsilon\psi, \varphi_2)$ が$\varepsilon > 0, \omega$で $\det(D\Phi_\varepsilon) \not\equiv 0$ となるようにとる。u_1, u_2の替わりに $u_1 + \varepsilon\nu, u_2$に対しては，$\omega$で主張が成り立つ。定理 4.1より，もとの u_1, u_2に対してもωで主張が成り立つ。

命題 4.6 (a) $\mu^{+2} = 0$　　(b) $\mu^{-2} = 0$

証明. $\{G^+ > 0\}$ では，G^+ は多重調和なので (補題 2.10)，$G^+_\varepsilon = \max(G^+, \varepsilon)$ と置くと補題 4.4より $(dd^cG^+_\varepsilon)^2 = 0$ である。定理 4.1より $(dd^cG)^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(dd^cG^+_\varepsilon)^2 = 0$ となる。

定義 4.7 $\mathbb{C}^2$ で$\mu = \mu^+ \wedge \mu^-$ と置く。

(2,2) カレントの fによる引き戻しも，定義 2.18と同様にして定義する。

命題 4.8 $f^*\mu = \mu$

証明. 定理 2.16より，$f^*\mu = f^*\mu^+ \wedge f^*\mu^- = d\mu^+ \wedge \frac{1}{d}\mu^- = \mu^+ \wedge \mu^- = \mu$

定義 4.9 $\mathbb{C}^2$上の多重劣調和関数uで正数Mにより $\mathbb{C}^2$で $\log^+|z| - M < u(z) < \log^+|z| + M$ をみたすものの全体を$\mathcal{L}_+$と表す。

定義 2.2で定めた $\mathbb{C}^2$の多重劣調和関数の族 $\mathcal{L}$ に関して，明らかに $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}$ である。定義より $\mathcal{L}_+ \subset P(\mathbb{C}^2) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{C}^2)$ だから，$u, v \in \mathcal{L}_+$に対しては $dd^cu \wedge dd^cv$が定義できる。

定義 4.10 ([K, p.185]) 集合$E \subset \mathbb{C}^2$ に対して$L_E(z) = \sup\{u(z); u \in \mathcal{L}, E$で $u \leq 0\}$ をEの多重複素グリーン関数という。また，$L^*_E(z) = \limsup_{w \to z} L_E(w)$と置く。

定義 4.11 ([K, p.67]) 集合$E \subset \mathbb{C}^2$は，各点$z \in E$に対してzの開近傍Uと$v \in P(U)$が存在して$E \cap U \subset \{z \in U; v(z) = -\infty\}$ となるとき，pluripolar という。

次の (a) は [K, Corollary 5.2.2,Theorem 5.2.4] より，(b) は [K, Example 5.1.1] も合わせてわかる。

定理 4.12 (a)Eが pluripolar のとき$L_E^* \equiv +\infty$,そうでないときは$L_E^* \in \mathcal{L}$となる。
(b)Eが有界で pluripolar でないときは，$L_E^* \in \mathcal{L}_+$である。

命題 4.13 $L_{K^+} = L_{K^+}^* = G^+, L_{J^+} = L_{J^+}^* = G^+, L_{K^-} = L_{K^-}^* = G^-, L_{J^-} = L_{J^-}^* = G^-$

証明. 補題 2.12より K^+で $G^+ = 0$, 命題 2.15より $G^+ \in \mathcal{L}$ であるから $G^+ \le L_{K^+} \le L_{J^+}$ である。逆に J^+で $u \le 0$ となる $u \in \mathcal{L}$ を取る。J^+で $u \le 0$ だから x を固定した yの劣調和関数 $u(x, \cdot)$ の最大値の原理より K^+で $u \le 0 = G^+$である。次に $\mathbb{C}^2 \backslash K^+$で考える。$(x, y) \in V^-$で $u(x, y) \le \log|y| + M_1$と $\log|y| - M < G^+(x, y) < \log|y| + M$ (補題 2.10) より，$u(x, y) - G^+(x, y) \le M + M_1 \quad (x, y) \in V^-$となる。故に，$x = x_0$を固定するごとに $u(x_0, y) - G^+(x_0, y)$ は y平面の$\omega := \mathbb{C}\backslash(K^+ \cap \{x = x_0\})$ で有界な劣調和関数なので $y = \infty$ まで劣調和に接続できる ([K, Theorem 2.7.1])。$\partial\omega \subset J^+ \cap \{x = x_0\}$ だから$\partial\omega$で $u(x_0, y) - G^+(x_0, y) \le 0$である。劣調和関数の最大値の原理より$\omega$で $u(x_0, y) - G^+(x_0, y) \le 0$ である。$\mathbb{C}^2 \backslash K^+$でも $u \le G^+$となった。故に $\mathbb{C}^2$で $u \le G^+$となって，$L_{J^+} \le G^+$となる。$L_{J^+} = L_{K^+} = G^+$は連続だから (補題 2.12), $L_{K^+}^* = L_{K^+}, L_{J^+}^* = L_{J^+}$が成り立つ。

命題 4.14 ([K, Proposition 4.6.4]) $\Omega \subset \mathbb{C}^2$を領域，$u \in P(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$とする。$E \subset \Omega$を pluripolar とすると，$\int_E (dd^c u)^2 = 0$である。

次は補題 2.20に対応する定理である。

定理 4.15 ([K, Corollary 5.5.3]) $v \in \mathcal{L}_+(\mathbb{C}^2)$ のとき$\int_{\mathbb{C}^2} (dd^c v)^2 = 4\pi^2$である。

命題 4.16 $v = \max(G^+, G^-)$ と置く。$v \in \mathcal{L}_+$ でsupp$((dd^c v)^2) \subset K$ である。特に，K は pluripolar でない。

証明. 補題 2.10, 命題 2.15と x, yの役割を入れ換えた G^-についての同様の評価と，補題 2.14より，$v \in \mathcal{L}_+$である。補題 2.10と補題 4.4より, supp$((dd^c v)^2) \subset K$である。定理 4.15より$\int_K (dd^c v)^2 = \int_{\mathbb{C}^2} (dd^c v)^2 = 4\pi^2$である。特に，命題 4.14より K は pluripolar でない。

次に L_K^* を特徴付けよう (命題 4.19)。次は [K, Theorem 4.7.6] である。

定理 4.17 E が pluripolar でないとき$\{z; L_E^*(z) > L_E(z)\}$ は pluripolar である。

補題 4.18 $u \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{L}_+$ で，supp$(dd^c v)^2$ 上で測度$(dd^c v)^2$ についてほとんどいたるところで$u \le v$ ならば，$\mathbb{C}^2$ で$u \le v$ が成り立つ。

証明. u, v の両方に同じ数を加えた関数について証明をすればよいので $v(z) \geq \frac{1}{2}\log(2+|z|^2)$ と仮定する。$u(z_0) > v(z_0)$ と仮定して矛盾を示そう。$\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ を $2\delta < \varepsilon$ で $S = \{z; u(z)+\frac{\delta}{2}\log(2+|z|^2) > (1+\varepsilon)v(z)\}$ が z_0 を含むように取る。S は有界で，ルベーグ測度は正である。定理 4.2より $0 < \int_S [dd^c\{u(z)+\frac{\delta}{2}\log(2+|z|^2)\}]^2 \leq (1+\varepsilon)^2 \int_S (dd^c v)^2$ が成り立つ。$S \cap \mathrm{supp}((dd^c v)^2)$ は $(dd^c v)^2$ に関して正の測度をもつ。このほとんどいたるところの点で，$(1+\varepsilon)v(z) < u(z) + \frac{\delta}{2}\log(2+|z|^2) \leq v(z) + \frac{\delta}{2}\log(2+|z|^2)$ なので $v(z) < \frac{\delta}{2\varepsilon}\log(2+|z|^2) < \frac{1}{4}\log(2+|z|^2)$ となる。これは v の取り方に矛盾する。

命題 4.19 $L_K^* = \max(G^+, G^-)$

証明. 命題 4.16より，$L_K^* \in \mathcal{L}_+$ である。$v = \max(G^+, G^-)$ と置く。命題 4.13より $G^+ = L_{K+}^* \leq L_K^*, G^- = L_{K-}^* \leq L_K^*$ だから $v \leq L_K^*$ である。
この v と $u = L_K^*$ に補題 4.18を適用して，逆向きの不等式を示そう。K の定義と，補題 2.12より K で $v = 0$ である。K で $L_K \leq 0$ で集合 $\{L_K^* > L_K\}$ は pluripolar で (定理 4.17)，その $(dd^c v)^2$ 測度は 0 だから (命題 4.14) K の $(dd^c v)^2$ に関してほとんどいたるところで $L_K^* \leq v$ である。補題 4.18, 命題 4.16 より $L_K^* \leq v$ となる。

定義 4.20 **([K, p.212])** $E \subset \mathbb{C}^2$**を pluripolar でない有界集合とする。**$\mu_E = (dd^c L_E^*)^2$ **を** E **の複素平衡測度 (complex equilibrium measure) という。**

定理 4.21 (a) μ **は**K**の複素平衡測度である。** (b) $\mathrm{supp}(\mu) \subset J$

証明. K の複素平衡測度を λ と置く。ε を正数として，$G_\varepsilon^\pm = \max(G^\pm, \varepsilon)$ と置く。$G_\varepsilon^\pm \to G^\pm (\varepsilon \to 0)$ は単調減少だから，定理 4.1より$\mu^\pm = \lim_{\varepsilon\to 0} dd^c G_\varepsilon^\pm, \mu = \mu^+ \wedge \mu^- = \lim_{\varepsilon\to 0} dd^c G_\varepsilon^+ \wedge dd^c G_\varepsilon^-$ が成り立つ。また，$\max(G^+, G^-, \varepsilon) \to \max(G^+, G^-)(\varepsilon \to 0)$ も単調減少だから，命題 4.19も合わせて，$\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}(dd^c \max(G^+, G^-, \varepsilon))^2$ がわかる。ところで補題より $(dd^c \max(G^+, G^-, \varepsilon))^2 = dd^c G_\varepsilon^+ \wedge dd^c G_\varepsilon^-$ だから $\mu = \lambda$ となって (a) が示せた。$\mathrm{supp}(\mu^\pm) = J^\pm$ だから (定理 2.19)，(b) は明かに成り立つ。

pluripolar でない有界集合 $E \subset C^2$ の複素平衡測度 μ_E は定理 4.15より $\int_{\mathbb{C}^2} \mu_E = 4\pi^2$ をみたす。特にμについて，$\int_{\mathbb{C}^2} \mu = 4\pi^2$ である。

定義 4.22 μ **の台を**J^***と書く。**$J^* \subset J$ **である。**

[BS1] によれば，fが双曲的ならば (定義 9.5) $J^* = J$ が成り立つ。任意の f について $J^* = J$ となるかどうかは，わかっていない。

次は [K, Corollary 5.1.4] である。

定理 4.23 $\mathbb{C}^2$ のコンパクト E 上で $L_E^* \equiv 0$ ならば L_E が連続である。

この定理と命題 4.19より直ちに，L_Kが連続で，従って $L_K^* = L_K$であることがわかる。

5　カレントの逐次引き戻しの収束に関する基本定理

定義 5.1 $\mathbb{C}^2$上の多重劣調和関数v, 正 (1,1) カレントTに対して，次のように置く。

$$v_n^+(x,y) = \frac{1}{d^n} v \circ f^n(x,y), \quad v_n^-(x,y) = \frac{1}{d^n} v \circ f^{-n}(x,y)$$

$$T_n^+ = \frac{1}{d^n} f^{n*}T, \quad T_n^- = \frac{1}{d^n} f^{-n*}T$$

$T = dd^c v$であるときには $T_n^+ = dd^c v_n^+$，$T_n^- = dd^c v_n^-$が成り立つ。

この節ではつぎの 2 種類の正 (1,1) カレントを扱う。第一は $\mathbb{C}^2$で定義された極小カレント Tである。第二は $\mathbb{C}^2$の領域Ω上の正 (1,1) カレント Tと，$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \geq 0$ との積を $\mathbb{C}^2$ 上のカレントとみなして定まるψTである。第二の場合は，さらに $\mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(dT) = \emptyset$ を仮定する。

第二の場合は，$\psi_1 \geq 0$ で，$\mathrm{supp}(\psi)$ で 1 に等しい$\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ を取ると，$\psi_1 T$は $\mathbb{C}^2$上の正 (1,1) カレントとみなせて，$\psi T = \psi(\psi_1 T), \mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(d(\psi_1 T)) = \emptyset$ が成り立つ。定義 3.3を領域 $\mathbb{C}^2$に適用して，$\mathbb{C}^2$上で，$\psi T \wedge \mu^-$が定義できる。第一の場合は，定義 3.4を領域 $\mathbb{C}^2$に適用して，$\mathbb{C}^2$上で，$T \wedge \mu^-$が定義できる。

以下では，$T_n^+, (\psi T)_n^+$の (さらに条件を付けた上での) 収束を論じる。2 つの場合は共通の扱いができることも多い。第一の場合のカレント Tの全体の集合は $\mathcal{K}$であった (定義 2.2)。第二の場合の記号も用意しておこう。

定義 5.2 $\mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(dT) = \emptyset$ をみたす, $\mathbb{C}^2$ の領域Ω 上の正 (1,1) カレントT と $\psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \geq 0$が定める $\mathbb{C}^2$上の正 (1,1) カレントψTの全体を$\mathcal{M}$と表す。

補題 5.3 $\psi T \in \mathcal{M}$, $\mathbb{C}^2$ 上のコンパクトな台を持つC^∞ 級 (1,1) 形式φ に対して，正数C_1が取れて$|\int_{\mathbb{C}^2} (\psi T)_n^+ \wedge \varphi| \leq C_1$が成り立つ。$T \in \mathcal{K}$についても同様である。

証明．$\lambda(x,y) = \log(1 + |x|^2 + |y|^2)$ と置く。$\omega = dd^c\lambda$ は正定値 (1,1) 形式だから $\mathbb{C}^2$で $-C_2\omega \leq \varphi \leq C_2\omega$ となる C_2 がある。$C_2\omega \circ f^{-n} \leq \varphi \circ f^{-n} \leq C_2\omega \circ f^{-n}$より次を得る。

$$\frac{1}{d^n}\left|\int_{\mathbb{C}^2} f^{n*}(\psi T) \wedge \varphi\right| = \frac{1}{d^n}\left|\int_{\mathbb{C}^2} \psi T \wedge (\varphi \circ f^{-n})\right| \leq \frac{C_2}{d^n}\int_{\mathbb{C}^2} \psi T \wedge dd^c(\lambda \circ f^{-n})$$

$$= \frac{C_2}{d^n}\int_{\mathbb{C}^2} dd^c(\psi T)\wedge(\lambda\circ f^{-n}) \tag{5.1}$$

x と y の役割を変えた式 (2.2) より $A_2>0$ が存在して $|f^{-n}(z)|\le A_2^{d^n}|z|^{d^n}(z\in\mathbb{C}^2)$ となる。$1+|x|^2+|y|^2\le 1+2|(x,y)|^2$ と，$\log(1+t)\le \log^+ t+\log 2(t>0)$ より $\lambda(z)\le\log^+(2|z|^2)+\log 2\le 2\log^+|z|+2\log 2$ だから，$\lambda\circ f^{-n}(z)\le 2\log^+(A_2^{d^n}|z|^{d^n})+2\log 2$,
従って $0\le\dfrac{1}{d^n}\lambda\circ f^{-n}(z)\le 2\log^+|z|+2\log^+A_2+\log 2$ が成り立つ。
故に，(5.1) より $\dfrac{1}{d^n}|\int_{\mathbb{C}^2} f^{n*}(\psi T)\wedge\varphi|\le C_1<+\infty$ となる。

補題 5.3の結果，$\psi T\in\mathcal{M}$ のとき，$(\psi T)^+_n$の任意の部分列に対して，さらに部分列 $(\psi T)^+_{n_j}$ を $\mathbb{C}^2$のある正 (1,1) カレントνにカレントの意味で収束するように取れる (Banach-Alaoglu の定理，[K, p.109])。νは$\int_{\mathbb{C}^2}\nu\wedge\omega<+\infty$ をみたす。$T\in\mathcal{K}$に対しても同様である。
次の補題 5.4,5.5 で用いる記号を用意する。

$T^*_z(\mathbb{C}^2)$ を点 $z\in\mathbb{C}^2$ での実余接空間の複素化とする。$J(dx)=idx, J(d\overline{x})=-id\overline{x}$,
$J(dy)=idy, J(d\overline{y})=-id\overline{y}$ で $\mathbb{C}$-線形写像 $J:T^*_z(\mathbb{C}^2)\to T^*_z(\mathbb{C}^2)$ を定める。
$J\xi\wedge\eta=J\eta\wedge\xi, d^c\psi=i(\bar\partial-\partial)\psi=-J(d\psi), d\psi\wedge d^c\psi=Jd\psi\wedge d\psi$ が成り立つ。

補題 5.4 $\psi T\in\mathcal{M}$とする。$\mathbb{C}^2$のC^∞ 級実 1 形式ξ,η について次が成り立つ。

$$\left|\int_{\mathbb{C}^2} J\xi\wedge\eta\wedge\psi T\right|^2\le\left(\int_{\mathbb{C}^2}J\xi\wedge\xi\wedge\psi T\right)\left(\int_{\mathbb{C}^2}J\eta\wedge\eta\wedge\psi T\right)$$

証明. $\xi=pdx+\bar p d\bar x-rdy-\bar r d\bar y, \psi T=i(Adx\wedge d\bar x+Bdx\wedge d\bar y+\bar B dy\wedge d\bar x+Cdy\wedge d\bar y)$ と置くと, $J\xi\wedge\xi\wedge\psi T=2(rp)\begin{pmatrix}AB\\ \bar BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar r\\ \bar p\end{pmatrix}i^2dx\wedge d\bar x\wedge dy\wedge d\bar y$ だから，$<\xi,\eta>=\int J\xi\wedge\eta\wedge\psi T$ が$<\xi,\xi>\ge 0$ をみたす $\mathbb{R}-$内積を定める。Schwarz の不等式が求める不等式になる。

$T\in\mathcal{K}$のとき，$T^+_n, \lim_{j\to\infty}T^+_{n_j}\in\mathcal{K}$である。実際，正閉カレントであることは明らかで，補題 5.3で$\varphi=\omega$とすれば，増大度の条件もみたされることがわかるからである。

補題 5.5 $\psi T\in\mathcal{M}$とする。$\nu=\lim_{j\to\infty}(\psi T)^+_{n_j}$ ならば，$\nu\in\mathcal{K}$ である。

証明. 補題 5.3の証明から，増大度の条件はみたされる。νが閉カレントであることをいう。$\mathbb{C}^2$ 上のコンパクトな台を持つ C^∞ 級実 1 形式 χ を取る。$\dfrac{1}{d^{n_j}}\int_{\mathbb{C}^2}d\chi\wedge f^{n_j*}(\psi T)\to 0$ をいえばよい。$\psi_1\ge 0$ で，$\mathrm{supp}(\psi)$ で 1 となる$\psi_1\in C^\infty_0(\Omega)$ を取る。
$\dfrac{1}{d^{n_j}}\int_{\mathbb{C}^2}d\chi\wedge f^{n_j*}(\psi T)=\dfrac{1}{d^{n_j}}\int_{\mathbb{C}^2}d(\chi\circ f^{-n_j})\wedge\psi T=\dfrac{1}{d^{n_j}}\int_{\mathbb{C}^2}(\chi\circ f^{-n_j})\wedge d\psi\wedge\psi_1 T$である。
補題 5.4を$\psi_1 T\in\mathcal{M}$ に使う。補題 5.3より n_j に依らない $C_4>0$ が取れて次が成り立つ。
$|\int_{\mathbb{C}^2}(\chi\circ f^{-n_j})\wedge d\psi\wedge\psi_1 T|^2\le(\int_{\mathbb{C}^2}J(\chi\circ f^{-n_j})\wedge(\chi\circ f^{-n_j})\wedge\psi_1 T)(\int_{\mathbb{C}^2}d\psi\wedge d^c\psi\wedge\psi_1 T)$
$=(\int_{\mathbb{C}^2}((J\chi\wedge\chi)\circ f^{-n_j})\wedge\psi_1 T)(\int_{\mathbb{C}^2}d\psi\wedge d^c\psi\wedge\psi_1 T)\le C_4 d^{n_j}$

最後の等式では f が正則写像だから $J(f^{-n_j*}\chi)=f^{-n_j*}(J\chi)$ となることを用いた。故に，$|\frac{1}{d^{n_j}}\int_{\mathbb{C}^2}d\chi\wedge f^{n_j*}(\psi T)|\leq\sqrt{C_4}d^{-n_j/2}\to 0(j\to\infty)$ である。

定義 5.6 $\boldsymbol{\psi T\in\mathcal{M}}$ **のとき，** $\boldsymbol{S(\psi T)}$ **を** $\boldsymbol{\nu=\lim_{j\to\infty}(\psi T)^+_{n_j}}$ **であるカレント** $\boldsymbol{\nu}$ **のなす集合とする。** $\boldsymbol{T\in\mathcal{K}}$ **のとき，** $\boldsymbol{S(T)}$ **を** $\boldsymbol{\nu=\lim_{j\to\infty}(T)^+_{n_j}}$ **であるカレント** $\boldsymbol{\nu}$ **のなす集合とする。**

補題 5.3の後で述べたことから，$S(\psi T),S(T)$ は空集合ではない。$\nu\in S(\psi T)$ ならば，$\nu^+_n=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{d^{n_j+n}}f^{n_j+n*}(\psi T)$ なので $\nu^+_n\in S(\psi T)$ である。$\nu\in S(T)$ のときも同様である。

補題 5.7 $\boldsymbol{\psi T\in\mathcal{M},\nu\in S(\psi T)}$ **のとき，** $\boldsymbol{\mathrm{supp}(\nu)\subset\subset K^+}$ **である。特に** $\boldsymbol{\nu\in\mathcal{K}_y}$ **である。** $\boldsymbol{T\in\mathcal{K}_y,\nu\in S(T)}$ **のとき，** $\boldsymbol{\mathrm{supp}(\nu)\subset\subset K^+}$ **である。特に** $\boldsymbol{\nu\in\mathcal{K}_y}$ **である。**

証明. $T\in\mathcal{K}_y$ の場合を書く。($\psi T\in\mathcal{M}$ の台はコンパクトなので同様に証明できる。) $z\notin K^+$ に対して $z\notin\mathrm{supp}(\nu)$ を示す。$\mathrm{supp}(T)\cap V_\sigma{}^-=\emptyset$ となる $V_\sigma{}^-$ を決めておく。開集合 $\omega\subset\subset\mathbb{C}^2$ を $z\in\omega$, $\omega\cap K^+=\emptyset$ と取る。命題 1.13より，$N>0$ が取れて $n>N$ ならば $f^n(\omega)\subset V_\sigma{}^-$ となる。故に，$\omega\cap\mathrm{supp}(f^{n*}(T))=\omega\cap f^{-n}(\mathrm{supp}(T))=\emptyset$ である。$\mathrm{supp}(\nu)\subset\bigcup_{n=N}^{\infty}\mathrm{supp}(f^{n*}T)$ だから $z\notin\mathrm{supp}(\nu)$ である。補題 5.5の前で述べたように，$\nu\in\mathcal{K}$ なので $\nu\in\mathcal{K}_y$ である。

定義 5.8 $\boldsymbol{\nu\in\mathcal{K}_y}$ **とする。** $\boldsymbol{c_\nu\geq 0,U_\nu\in\mathcal{L}_y}$ **を次で定める。(** γ_0 **は定義 2.7のものである。)**

$$c_\nu dd^cU_\nu=\nu,\quad\lim_{|y|\to\infty}(U_\nu-\log|y|)=\gamma_0$$

命題 2.5より，$c_\nu=dd^cU_\nu$ をみたす c_ν は一意的に U_ν は定数の差を除いて一意的に決まる。故に，第 2 式を合わせると U_ν も一意的に定まる。

定義 5.9 $\boldsymbol{T\in\mathcal{K}_y}$ **のとき** $\boldsymbol{c_1=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2}T\wedge\mu^-,\ \psi T\in\mathcal{M}}$ **のとき** $\boldsymbol{c_1=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2}\psi T\wedge\mu^-}$

補題 5.10 $\boldsymbol{T\in\mathcal{K}_y}$ **とする。** $\boldsymbol{\nu\in S(T)}$ **から** $\boldsymbol{c_\nu dd^cU_\nu=\nu}$ **で定まる** $\boldsymbol{c_\nu}$ **(定義 5.8) は** $\boldsymbol{\nu}$ **によらずに** $\boldsymbol{c_\nu=c_1}$ **である。** $\boldsymbol{\psi T\in\mathcal{M},\ \nu\in S(\psi T)}$ **の場合も同様に** $\boldsymbol{c_\nu=c_1}$ **となる。**

証明. まず，$T\in\mathcal{K}_y$ の場合を示す。$\sigma\geq 1,\mathrm{supp}(T)\cap V^-_\sigma=\emptyset$ とする。補題 1.9より $V^-_{\sigma-1}\subset f^{-1}(V^-_\sigma)$ だから，$\mathrm{supp}(T^+_1)\cap\overline{V^-}\subset\mathrm{supp}(T^+_1)\cap V^-_{\sigma-1}=\emptyset$ である。従って，初めから $\mathrm{supp}(T)\subset V\cup V^+$ と仮定して証明して良い。補題 1.10より次が成り立つ。

$$f^{-n_j}(\mathrm{supp}(T))\subset V\cup V^+ \tag{5.2}$$

x だけに依る $\mathbb{C}^2$ 上の正閉 (1,1) カレント$\theta = dd^c\frac{1}{2}\log(1+|x|^2)$ を取る。任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^2)$ について

$$\int_{\mathbb{C}^2} \varphi\nu \wedge \theta = c_\nu \int_{\mathbb{C}^2} \varphi dd^c U_\nu \wedge \theta = c_\nu \int_{\mathbb{C}^2} dd^c\varphi U_\nu \wedge \theta$$
$$= c_\nu \int_{\mathbb{C}^2} dd^c_y \varphi U_\nu \wedge \theta = c_\nu \int_{\mathbb{C}} \theta \int_{\mathbb{C}} dd^c_y \varphi U_\nu = 2\pi c_\nu \int_{\mathbb{C}} \varphi dd^c_y U_\nu$$

なのでつぎが成り立つ (補題 2.20)。

$$\int_{\mathbb{C}^2} \nu \wedge \theta = 2\pi c_\nu \int_{\mathbb{C}} dd^c_y U_\nu = (2\pi)^2 c_\nu \tag{5.3}$$

一方 $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{C}^2} (T)^+_{n_j} \wedge \theta = \int_{\mathbb{C}^2} \frac{1}{d^{n_j}} T \wedge dd^c(\frac{1}{2}\log(1+|\pi_1 \circ f^{-n_j}|)$ を扱うと，$\mathrm{supp}(T) \subset V \cup V^+$ だから，最後の積分値は $V \cup V^+$ で考えても変わらない。
$z \in \mathbb{C}^2$ のノルムを $|z| = \max(|x|, |y|)$ とすると $\log^+|x| \le \frac{1}{2}\log(1+|x|^2) \le \log^+|x| + \frac{1}{2}\log 2$ で，また $z \in V \cup V^+$ のときは $\log^+|x| \le \log^+|z| \le \log R + \log^+|x|$ だから式 (5.2) と合わせて，$V \cup V^+$ で広義一様に $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^{n_j}}\frac{1}{2}\log(1+|\pi_1 \circ f^{-n_j}|) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^{n_j}}\log^+|f^{-n_j}| = G^-$ である。最後の等号は定理 2.16による。故に，$\int_{\mathbb{C}^2} \nu \wedge \theta = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{C}^2} (T)^+_{n_j} \wedge \theta = \int_{\mathbb{C}^2} T \wedge \mu^-$ である。式 (5.3) と合わせて c_νが求めまった。
$\psi T \in \mathcal{M}$ の場合は，$\mathrm{supp}(\psi T) \subset V \subset V \cup V^+$である。上と同様の証明ができる。

正閉 (1,1) カレントの 1 次元複素多様体への制限についての定義 2.24に従って，$\nu \in \mathcal{K}$ の，x を固定した y平面 $\{(x,y); y \in \mathbb{C}\}$ への制限をν_xと置く。

補題 5.11 $\boldsymbol{T \in \mathcal{K}_y,\ \nu \in S(T)}$**または**$\boldsymbol{\psi T \in \mathcal{M},\ \nu \in S(\psi T)}$**のとき次が成り立つ。**

$$\int_{\mathbb{C}} \boldsymbol{\nu_x = 2\pi c_1}, \quad \boldsymbol{U_\nu(x,y) = \frac{1}{2\pi c_1} \int_{\mathbb{C}} \log|y-\xi|\nu_x(\xi) + \gamma_\circ}$$

証明. 初めの式は補題 2.20より，2 番目の式は補題 2.21よりわかる。

補題 5.12 $\boldsymbol{v \in \mathcal{L}_y}$**のとき，**$\boldsymbol{v^+_n}$ **は** $\boldsymbol{\mathbb{C}^2 \backslash K^+}$ **で広義一様に**$\boldsymbol{G^+}$ **に収束する。**

証明. $\sigma > 1, M > 0,\ -M < v(z) - \log|\pi_2(z)| < M \quad (z \in V_\sigma^-)$ とする。命題 1.13より $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_\sigma^-) = \mathbb{C}^2 \backslash K^+$ である。補題 2.9より $f^n(z) \in V_\sigma^-$のとき，$G^+_n(z) = \frac{1}{d^n}\log|\pi_2 \circ f^n(z)|$ なので，$G^+_n(z) - \frac{M}{d^n} < v^+_n(z) < G^+_n(z) + \frac{M}{d^n} \quad (z \in f^{-n}(V_\sigma^-))$ となる。補題 2.11より，主張は示された。

この節の残りでは，ν, λは $T \in \mathcal{K}_y,\ \nu, \lambda \in S(T)$ または$\psi T \in \mathcal{M},\ \nu, \lambda \in S(\psi T)$ とする。

補題 5.13 **補題 1.14の$C_1 > 0, \delta > 1$に対して$B_1 = \{(x, y); |y| \geq 2C_1(|x|^{1/\delta} + 1)\}$，と置く。$(x, y) \in B_1$ で次が成り立つ。**

$$-2\frac{C_1}{|y|}(|x|^{1/\delta} + 1) \leq U_\lambda(x, y) - c_1 - \log|y| \leq \frac{C_1}{|y|}(|x|^{1/\delta} + 1)$$

証明. $\mathrm{supp}(\lambda_x) \subset \{|y| < r\}$ である r を取れば，$|y| > r, |\xi| \leq r$ のとき $|y| - r \leq |y - \xi| \leq |y| + r$ だから，補題 5.11より $\log(|y| - r) \leq U_\lambda(x, y) - \gamma_0 \leq \log(|y| + r)$, 故に
$-(\frac{r}{|y|})/(1 - \frac{r}{|y|}) \leq \log(1 - \frac{r}{|y|}) \leq U_\lambda(x, y) - \gamma_0 - \log|y| \leq \log(1 + \frac{r}{|y|}) \leq \frac{r}{|y|}$ となる。$|y| > 2r$ ならば，$-2\frac{r}{|y|} \leq U_\lambda(x, y) - \gamma_0 - \log|y| \leq \frac{r}{|y|}$ となる。補題 1.14, 5.7より $r = C_1(|x|^{1/\delta} + 1)$ と選べる。

補題 5.14 **$(U_\lambda)_n^+(x, y) - U_{\lambda_n^+}(x, y)$ は定数で$\lim_{n \to \infty} |(U_\lambda)_n^+(x, y) - U_{\lambda_n^+}(x, y)| = 0$ となる。**

証明. $c_1 dd^c U_{\lambda_n^+} = \lambda_n^+, \frac{1}{d^n} c_1 dd^c (U_\lambda \circ f^n) = \frac{1}{d^n} f^{n*}\lambda = \lambda_n^+$が成り立つ。$U_{\lambda_n^+}, (U_\lambda)_n^+ \in \mathcal{L}_y$ だから命題 2.5より $(U_\lambda)_n^+ - U_{\lambda_n^+}$ は定数である。補題 5.12より V^- で一様に
$(U_\lambda)_n^+ \to G^+$で，$\lim_{|y| \to \infty} G^+(x, y) = \gamma_0, \lim_{|y| \to \infty} U_{\lambda_n^+}(x, y) = \gamma_0$ だから主張が成り立つ。

補題 5.15 **$\mathbb{C}^2 \setminus K^+$で$U_\nu = G^+$となる。**

証明. $z = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus K^+$, $\varepsilon > 0$ を取る。大きい n に対して，$(x_n, y_n) = f^n(z)$ は $|x_n| \leq |y_n|, (x_n, y_n) \in B_1$ をみたす。$\lambda = d^n f^{-n*}\nu$ と置く。$\lambda \in S(\psi T)$ または$\lambda \in S(T)$ である。$(x_n, y_n) \in B_1$ なので，補題 5.13より
$-2\frac{C_1}{|y_n|}(|x_n|^{1/\delta} + 1) \leq U_\lambda(x_n, y_n) - \gamma_0 - \log|y_n| \leq \frac{C_1}{|y_n|}(|x_n|^{1/\delta} + 1)$ となる。故に、
$-2\frac{1}{d^n}\frac{C_1}{|y_n|}(|x_n|^{1/\delta} + 1) \leq \frac{1}{d^n}U_\lambda(x_n, y_n) - \frac{1}{d^n}\gamma_0 - \frac{1}{d^n}\log|y_n| \leq \frac{1}{d^n}\frac{C_1}{|y_n|}(|x_n|^{1/\delta} + 1)$
$\delta > 1$ に注意して，εに対して n を大きく取ると，次の 3 式が成り立つ。

$$\frac{2}{d^n}\frac{C_1}{|y_n|}(|x_n|^{1/\delta} + 1) \leq \frac{2}{d^n}\frac{C_1}{|y_n|}(|y_n|^{1/\delta} + 1) \leq 4C_1\frac{1}{d^n}|y_n|^{1/\delta - 1} < \varepsilon$$

$$|\frac{1}{d^n}U_\lambda(x_n, y_n) - U_\nu(x, y)| < \varepsilon \text{ (補題 5.14)}$$

$$|G^+(x, y) - \frac{1}{d^n}\gamma_0 - \frac{1}{d^n}\log|y_n|| < \varepsilon \text{ (補題 2.10)}$$

故に，$|U_\nu(x, y) - G^+(x, y)| < 3\varepsilon$ となる。

命題 5.16 **コンパクト$Y \subset \mathbb{C}$ の対数容量とルベーグ測度の間には$m(Y) \leq \pi e \mathrm{Cap}(Y)^2$ の関係がある。**

証明. $m(Y)>0$ とする。$R>0$ を $\pi R^2=m(Y)$ で定めて，$B=\{|z|\le R\}$ と置く。$m(Y)=m(B)$ である。ルベーグ測度を dm と表すと，
$\int_B \log|y|dm = 2\pi\int_0^R r\log r dr = \pi R^2(\log R-\frac{1}{2}) = m(Y)\log\sqrt{m(Y)/\pi e}$ である。一方，
$\int_B \log|y|dm = \int_{B\cap Y}\log|y|dm+\int_{B\setminus B\cap Y}\log|y|dm \le \int_{B\cap Y}\log|y|dm+\log R(m(B)-m(B\cap Y))$,
$\int_Y \log|y|dm = \int_{B\cap Y}\log|y|dm+\int_{Y\setminus B\cap Y}\log|y|dm \ge \int_{B\cap Y}\log|y|dm+\log R(m(Y)-m(B\cap Y))$
より，$\int_Y \log|y|dm \ge \int_B \log|y|dm = m(Y)\log\sqrt{m(Y)/\pi e}$，すなわち次が成り立つ。

$$\frac{1}{m(Y)}\int_Y \log|y|dm \ge \log\sqrt{m(Y)/\pi e} \tag{5.4}$$

Y のグリーン関数，平衡測度を G^*, dd^cG^* として，$\sigma=\frac{1}{2\pi}dd^cG^*$ と表せば，σ は Y 上の確率測度になる。$G^*(y)=\int_Y \log|y-\xi|\sigma(\xi)+\gamma(Y)$ である。$v(y)=\frac{1}{m(Y)}\int_Y \log|y-\xi|dm(\xi)$ と置く。命題2.23と，対数容量が0の集合のルベーグ測度は0である ([K, p.41]) ことより，
$\int_Y v(y)\sigma(y) = \int_Y(\frac{1}{m(Y)}\int_Y \log|y-\xi|dm(\xi))\sigma(y) = \frac{1}{m(Y)}\int_Y(\int_Y \log|y-\xi|\sigma(y))dm(\xi) = \frac{1}{m(Y)}\int_Y(G^*(\xi)-\gamma(Y))dm(\xi) = -\gamma(Y)$ である。故に $-\gamma(Y)\ge \inf_{y\in Y} v(y)$ である。
Yを$-y$平行移動した図形を$-y+Y$と書くと，$m(Y)=m(-y+Y)$ と (5.4) より
$v(y)=\frac{1}{m(Y)}\int_{-y+Y}\log|t|dm(t)\ge \log\sqrt{m(Y)/\pi e}$だから$-\gamma(Y)\ge \log\sqrt{m(Y)/\pi e}$, すなわち
$\pi e\mathrm{Cap}(Y)^2 \geqq m(Y)$ である。

補題 5.17 $\mathrm{int}K^+$ で$U_\nu=0$ となる。

証明. $\alpha>0$ と$\omega\subset\subset \mathrm{int}K^+$が存在して，$\omega$で $U_\nu\le-\alpha$として矛盾を導く。定義 1.8の Rを$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\omega)\subset V$と取る。$\lambda=d^nf^{-n*}\nu$と置く。$\nu=\lambda_n^+$である。補題5.14より$\frac{1}{d^n}U_\lambda\circ f^n-U_\nu\to 0$
だから，n が十分大きいとき $f^n(\omega)\subset\{U_\lambda\le-\frac{1}{2}d^n\alpha\}\cap V$となる。
右辺の集合の測度を $|x|\le R$ である x を固定したときの切り口の面積と Fubini の定理を用いて評価する。$|x|\le R$ である x を固定する。命題 2.22の後に述べた対数容量の定義と命題 5.16より，$\mathrm{Cap}(\{y;U_\lambda\le-\frac{1}{2}d^n\alpha\}\cap\{|y|<R\})\le \exp(-\gamma_0-\frac{1}{2}d^n\alpha)$,
$m(\{y;U_\lambda\le-\frac{1}{2}d^n\alpha\}\cap\{|y|<R\})\le \pi\exp(1-2\gamma_0-d^n\alpha)$ なので
$|a|^{2n}\mathrm{Vol}(\omega)=\mathrm{Vol}(f^n(\omega))\le\int_{|x|\le R} m(\{y;U_\lambda\le-\frac{1}{2}d^n\alpha\}\cap\{|y|<R\})dv$
$\le \pi^2R^2\exp(1-2\gamma_0-d^n\alpha)$ となる。これは，$n\to\infty$ で矛盾である。

定理 5.18 $T\in\mathcal{K}_y$のとき$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}f^{n*}(T)=c_1\mu^+$,
$\psi T\in\mathcal{M}$のとき$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}f^{n*}(\psi T)=c_1\mu^+$ である(c_1は定義 5.9)。

証明. $\nu \in S(\psi T)$ が $\nu = c_1\mu^+$ であることをいう。$U_\nu = G^+$ をいえばよい。補題5.15, 5.17より $\mathbb{C}^2 \backslash J^+$で $U_\nu = G^+$ である。G^+ の連続性と U_ν の上半連続性より $\mathbb{C}^2$ で $U_\nu \geq G^+$ となる。x と $\varepsilon > 0$ を固定して，y 平面で $\gamma = \{y; G^+(x,y) < \varepsilon\}$ を取る。$\partial\gamma$ では $U_\nu(x,\cdot) = G^+(x,\cdot) = \varepsilon$ だから劣調和関数 $U_\nu(x,\cdot)$ に最大値の原理を適用してγ で $U_\nu(x,\cdot) \leq \varepsilon$ である。x, ε は任意だから K^+ で $U_\nu \leq 0$ である。故に $U_\nu = G^+$ である。

6　1次元複素多様体 Mの定めるカレント $[M]$ の場合

この節の目標は，定理5.18の具体化としての定理6.9, 定理6.10である。

$\mathbb{C}[x,y]$ は複素係数の2変数多項式の作る環，$\mathbb{N}_0$は0または正の整数の全体，$d_1, \cdots, d_m$ は2以上の整数とする。

定義 6.1 $\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\mu}_j : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{N}_o$ $(1 \leq j \leq m)$を，$p = \sum_{k,l} p_{kl} x^k y^l \in \mathbb{C}[x,y]$ のとき

$$\boldsymbol{\lambda}_j(p) = \max\{k + d_j l; p_{kl} \neq 0\}, \boldsymbol{\mu}_j(p) = \max\{d_j k + l; p_{kl} \neq 0\}$$

と定める。多項式 $\displaystyle\sum_{k + d_j l = \lambda_j(p)} p_{kl} x^k y^l$ を，p の$\boldsymbol{\lambda}_j$-weight が最大の部分という。

補題 6.2 $p, q \in \mathbb{C}[x,y]$ に対して次が成り立つ。

(a) $\boldsymbol{\lambda}_j(p+q) \leq \max(\boldsymbol{\lambda}_j(p), \boldsymbol{\lambda}_j(q)),\quad \boldsymbol{\mu}_j(p+q) \leq \max(\boldsymbol{\mu}_j(p), \boldsymbol{\mu}_j(q))$

(b) $\boldsymbol{\lambda}_j(pq) = \boldsymbol{\lambda}_j(p) + \boldsymbol{\lambda}_j(q),\quad \boldsymbol{\mu}_j(pq) = \boldsymbol{\mu}_j(p) + \boldsymbol{\mu}_j(q)$

証明. λ_j について証明する。多項式 p, q の λ_j-weight が最大の部分を p_1, q_1 とする。$\lambda_j(p) > \lambda_j(q)$ ならば，和 $p+q$ の λ_j-weight が最大の部分は p_1 で，(a) で等式が成り立つ。$\lambda_j(p) < \lambda_j(q)$ の場合も同様に成り立つ。$\lambda_j(p) = \lambda_j(q)$ で $p_1 + q_1 \neq 0$ の場合は，和 $p+q$ の λ_j-weight が最大の部分は $p_1 + q_1$ で，(a) で等号が成り立つ。$\lambda_j(p) = \lambda_j(q)$ で $p_1 + q_1 = 0$ の場合は，(a) で真に不等号が成り立つ。これで，(a) が示された。
積 $pq = p_1q_1 + p_1(q - q_1) + (p - p_1)q_1 + (p - p_1)(q - q_1)$ で，λ_j-weight が最大の部分が p_1q_1 となる。故に，(b) の等式が成り立つ。

エノン写像 g_jに関して，複素数 a_j, d_j次多項式 p_j の d_j次の係数 c_{0j}の記号を次で用いる。

補題 6.3 $l \geq$ oを整数，$p = x^{n-d_j l} y^l$とすると$\boldsymbol{\lambda}_j(p) = n$，$\boldsymbol{\mu}_j(p \circ g_j) = n$で，
$p \circ g_j$の$\boldsymbol{\mu}_j$-weight が最大の部分は $\displaystyle\sum_{i=o}^{l} \binom{l}{i} (-a_j)^i c_{oj}^{l-i} x^i y^{n-d_j i}$ である。

証明. $p\circ g_j = y^{n-d_jl}(p_j(y)-a_jx)^l$ で，$\mu_j(y)=1$, $\mu_j(p_j(y)-a_jx)=d_j$ だから，補題 6.2 より $\mu_j(p\circ g_j)=n$ となる。$p\circ g_j$ の μ_j-weight が最大の部分は $y^{n-d_jl}(c_{0j}y^{d_j}-a_jx)^l$ である。

補題 6.4 s を正整数，l_κ を $0\le l_1<l_2<\cdots<l_s$ をみたす s 個の整数とすると，次の (s,s) 行列 A は正則である。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \cdots & l_1(l_1-1)\cdots(l_1-s+2) \\ 1 & l_2 & l_2(l_2-1) & \cdots & l_2(l_2-1)\cdots(l_2-s+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & l_s & l_s(l_s-1) & \cdots & l_s(l_s-1)\cdots(l_s-s+2) \end{pmatrix}$$

証明. 第 2 列を第 3 列に加えると，第 3 列は ${}^t(l_1^2\quad l_2^2\cdots l_s^2)$ になる。次に，第 3 列の 3 倍と第 2 列の (-2) 倍を第 4 列に加えると第 4 列は ${}^t(l_1^3\quad l_2^3\cdots l_s^3)$ になる。同様の操作を第 s 列まで行うと，得られる行列は Vandermonde の行列である。途中の行列の変形操作は行列式の値を変えないので，A の行列式は Vandermonde の行列式 $|l_\kappa^{i-1}|$ に等しい。

補題 6.5 p を非定数多項式，N を正整数とする。$\lambda_j(p)=N, p$ の λ_j -weight が最大の部分の項数を s とする。

(a) $\mu_j(p\circ g_j)=N$

(b) $0\le i<s$ の或る i について，$p\circ g_j$ は $x^iy^{N-d_ji}$ の項をもつ。

(c) $\lambda_{j-1}(p\circ g_j)\ge(s-1)(1-d_jd_{j-1})+Nd_{j-1}$

ここで，$j=1$ のときは $j-1=m$ と解釈する。

証明. p の λ_j-weight が最大の部分を次のように表す。

$$\sum_{\kappa=1}^{s} b_\kappa x^{N-d_jl_\kappa}y^{l_\kappa}\qquad(b_\kappa\ne0, 1\le\kappa\le s)$$

ここで，整数 l_κ は　$0\le l_1<\cdots<l_s\le[\frac{N}{d_j}]$ とする。
補題 6.3より，$p\circ g_j$ の μ_j-weight が最大の部分は次のものになる。

$$\sum_{\kappa=1}^{s} b_\kappa\sum_{i=0}^{l_\kappa}\binom{l_\kappa}{i}(-a_j)^ic_{0j}^{l_\kappa-i}x^iy^{N-d_ji}=\sum_{i=0}^{[N/d_j]}\sum_{i\le l_\kappa}b_\kappa c_{0j}^{l_\kappa}\binom{l_\kappa}{i}(-a_jc_{0j}^{-1})^ix^iy^{N-d_ji}$$

$i=0,1,\cdots,s-1$ の s 個に対して，$x^iy^{N-d_ji}$ の係数が 0 であるとして矛盾を示せば (a),(b) がわかる。次のように置く。

$$(\sum_{i\le l_\kappa}b_\kappa c_{0j}^{l_\kappa}\binom{l_\kappa}{i})(-a_jc_{0j}^{-1})^i=0\qquad(0\le i\le s-1)$$

(κ, ι) 成分を $\begin{pmatrix} l_\kappa \\ \iota - 1 \end{pmatrix} (-a_j c_{0j}^{-1})^{\iota-1}$ とする行列 A_1 と，ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1 c_{0j}^{l_1}, \cdots, b_s c_{0j}^{l_s})$ により，この式は $\boldsymbol{b}A_1 = (0, \cdots 0)$ とかける。ただし，$l_\kappa < \iota - 1$ の場合は $\begin{pmatrix} l_\kappa \\ \iota - 1 \end{pmatrix} = 0$ とする。A_1 の第 ι 列を $\dfrac{(\iota-1)!}{(-a_j c_{0j}^{-1})^{\iota-1}}$ 倍して得られる行列は補題 6.4 の行列 A に一致するので，行列 A_1 は正則である。従って，$(b_1, \cdots, b_s) = (0, \cdots, 0)$ となって矛盾である。

(c) を示そう。$0 \le i \le s-1, 1 - d_j d_{j-1} < 0$ だから，

$\lambda_{j-1}(p \circ g_j) \ge i + d_{j-1}(N - d_j i) \ge (s-1)(1 - d_j d_{j-1}) + N d_{j-1}$ となる。

補題 6.6 ***p* を非定数多項式とする。*p* の $\boldsymbol{\lambda_j}$ -weight が最大の部分の項数を *s* とする。このとき，$\boldsymbol{p \circ g_j}$ の$\boldsymbol{\lambda_{j-1}}$ -weight が最大の部分の項数は，高々$\boldsymbol{1 + \dfrac{s-1}{d_{j-1}}}$ である。ここで，$\boldsymbol{j = 1}$ のときは $\boldsymbol{j - 1 = m}$ と解釈する。**

証明. $\lambda_j(p) = N, \lambda_{j-1}(p \circ g_j) = \nu$ と置く。補題 6.5，(a) より$\mu_j(p \circ g_j) = N$ となる。

$p \circ g_j = \sum q_{kl} x^k y^l$ とおく。$q_{kl} \ne 0$ である (k, l) の全体の集合 S は，

$T = \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0; d_j k + l \le N\}$ に含まれる。(k, l) が S を動くときの $k + d_{j-1} l$ の最大値が ν である。補題 6.5，(b) より $0 \le i \le s-1$ の範囲のある i に対して $(i, N - d_j i) \in S$ が成り立つので，直線 $k + d_{j-1} l = \nu$ 上にある S の点の k 座標は $s-1$ 以下である。故に，

$\#(\{(k, l); k + d_{j-1} l = \nu\} \cap S) \le \#(\{(k, l); k + d_{j-1} l = \nu\} \cap T) \leqq 1 + \dfrac{s-1}{d_{j-1}}$ となる。

次の補題の証明は自明であるが，後で引用するために書いて置く。

補題 6.7 $\boldsymbol{k (\ge 1)}$ **次多項式*p* の*k* 次の部分が唯一つの項$\boldsymbol{cy^k (c \ne 0)}$ から成るとき，$\boldsymbol{d_j}$ 次エノン写像との合成$\boldsymbol{p \circ g_j}$ は$\boldsymbol{d_j k}$ 次多項式で，$\boldsymbol{d_j k}$ 次の部分は唯一つの項$\boldsymbol{c c_{0j}^k y^{d_j k}}$ から成る。**

命題 6.8 ***h* を非定数多項式とする。ある整数 $\boldsymbol{n_0 (\ge 0)}$ が存在して，$\boldsymbol{n \ge n_0}$ である任意の整数*n* に対して，多項式$\boldsymbol{h \circ f^n}$ の最高次の部分は*y* の巾乗の項唯一つとなる。**

証明. 補題 6.7 を考慮すると，非定数多項式 h に対して，ある n をとると，$h \circ f^n(x, y)$ の最高次の項が y の巾乗の項だけとなることを示せばよい。多項式 h の λ_m-weight が最大の部分の項数を s とする。補題 6.6より $h \circ g_m$ の λ_{m-1}-weight が最大の部分の項数は $1 + \dfrac{s-1}{d_{m-1}}$ 以下である。もう一度補題 6.6を用いると，$h \circ g_m \circ g_{m-1}$ の λ_{m-2}-weight が最大の部分の項数は $1 + \dfrac{s-1}{d_{m-1} d_{m-2}}$ 以下である。これを続けると，$D = (d_1 \cdots d_m)^n = d^n$ と書いて，$h \circ f^{n-1} \circ g_m \circ \cdots \circ g_2$ の λ_1-weight が最大の部分の項数は $1 + \dfrac{s-1}{D^n} d_1$ 以下である。$\dfrac{s-1}{D^n} d_1 < 1$ となる n を取る。$h \circ f^{n-1} \circ g_m \circ \cdots \circ g_2$ の λ_1-weight が最大の部分の項数は 1

である。 $h\circ f^{n-1}\circ g_m\circ\cdots\circ g_2$ の λ_1-weight を N と置く。補題 6.5 の (a),(b) を $s=1$ として適用すると，$h\circ f^n$ の μ_1-weight が最大の部分は唯一つの項 $cy^N(c\neq 0)$ からなる。補題 6.5,(c) より $h\circ f^n$ の λ_m-weight は Nd_m 以上である。補題 6.6より $h\circ f^n$ の λ_m-weight が最大の部分は唯一つの項からなる。従ってこの項は cy^N である。これは λ_m-weight と μ_1-weight の両方の最大の部分なので，多項式の次数の最大部分となる。

次の定理は，定理 8.1に応用される。

定理 6.9 $h(x,y)$ **を空でない 1 次元代数的集合** M **を定義する非定数多項式とする。整数** $n_o\geq o$ **を** $h\circ f^{n_o}(x,y)$ **の最高次の部分が唯一つの項** $cy^k(c\neq o)$ **からなるように取る。(命題 6.8)。このとき，** $c_2=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{\mathbb{C}^2}[M]\wedge\mu^-=\dfrac{k}{2\pi d^{n_0}}$ **と置くと，** $\dfrac{1}{d^n}f^{n*}[M]\to c_2\mu^+$ **である。**

証明. $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{k}\log|h\circ f^{n_0}(x,y)|$,

$\Phi_n(x,y)=\dfrac{1}{kd^{n-n_0}}\log|h\circ f^n(x,y)|=\dfrac{1}{d^{n-n_0}}\varphi\circ f^{n-n_0}(x,y)=(\varphi)^+_{n-n_0}$ と置く。

Φ_n は整数 n_0 の取り方によらない。$n_1>n_0$ に対しては，$D=(d_1\cdots d_m)^{n_1-n_0}$ と置くと，$h\circ f^{n_1}(x,y)$ の最高次の部分は唯一つの項 $c_1y^{Dk}(c_1\neq 0)$ となる (補題 6.7) が，このとき $Dkd^{n-n_1}=kd^{n-n_0}$ が成り立つからである。

$h\circ f^{n_0}(x,y)=cy^k+h_1(x,y)$ と置く。ここで，$h_1(x,y)$ は次数が $k-1$ 以下の多項式である。必要なら R を大きく取り直して V^- を定めて，$\dfrac{|h_1(x,y)|}{|c||y|^k}\leq\dfrac{1}{2}\quad(x,y)\in V^-$ が成り立つものとする。このとき，$(x,y)\in V^-$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{1}{2}|c||y|^k\leq|c||y|^k\left(1-\frac{|h_1(x,y)|}{|c||y|^k}\right)\leq|h\circ f^{n_0}(x,y)|\leq|c||y|^k\left(1+\frac{|h_1(x,y)|}{|c||y|^k}\right)\leq\frac{3}{2}|c||y|^k$$

$$\log|y|+\frac{1}{k}\log\left(\frac{1}{2}|c|\right)\leq\varphi(x,y)\leq\log|y|+\frac{1}{k}\log\left(\frac{3}{2}|c|\right)\qquad(6.1)$$

定理 2.1より，$\dfrac{2\pi}{k}f^{n_0*}[M]=dd^c\varphi\in\mathcal{K}_y$ である。$\nu=\lim\limits_{m\to\infty}dd^c\varphi^+_m$ と置くと，式 (6.1) と補題 5.12より，定義 5.8の c_ν は 1 に等しい。補題 5.10より，$c_1=\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{2\pi}{k}\displaystyle\int_{\mathbb{C}^2}f^{n_0*}[M]\wedge\mu^-=1$ となって，故に定理 5.18より $(f^{n_0*}[M])^+_n\to\dfrac{k}{2\pi}\mu^+\quad(n\to\infty)$ である。

$\displaystyle\int_{\mathbb{C}^2}[M]\wedge\mu^-=\int_{\mathbb{C}^2}f^{n_0*}[M]\wedge f^{n_0*}\mu^-=\frac{1}{d^{n_0}}\int_{\mathbb{C}^2}f^{n_0*}[M]\wedge\mu^-=\frac{2\pi k}{d^{n_0}}$ で，

$[M]^+_n=\dfrac{1}{d^{n_0}}(f^{n_0*}([M]))^+_{n-n_0}\to\dfrac{k}{2\pi d^{n_0}}\mu^+$ である。

次の 1 次元局所閉部分多様体の場合の定理は定理 8.2, 8.3, 8.10に応用される。

定理 6.10 Ω **を** $\mathbb{C}^2$ **の開集合，** M **を** Ω **の純 1 次元の閉部分多様体，** χ **を** $\mathrm{supp}(\chi)\subset\subset\Omega$,

$\chi \geq 0$ をみたす $\mathbb{C}^2$上のC^∞ 級関数とする。このとき次が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} f^{n*}(\chi[M]) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_M \chi\mu^-{}_{|M}\right)\mu^+$$

証明. M上の積分のカレント $[M]$ とχの積 $\chi[M]$ を $\mathrm{supp}(\chi[M]) \subset\subset \Omega$ をみたす $\mathbb{C}^2$ 上の正カレントとみなす。$\mathrm{supp}(\chi) \cap \mathrm{supp}(d[M]) = \emptyset$ が成り立つ。定義 3.4,2.24より
$c_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2} \chi[M] \wedge \mu^- = \frac{1}{4\pi^2}\int_M \chi\mu^-{}_{|M}$となる。定理 5.18より主張が従う。

7 安定集合と不安定集合

定義 7.1 $\mathbb{C}^2$ の部分集合X に対して, X の安定集合$W^s(X)$ と不安定集合$W^u(X)$ を次のように定義する。(dist はユークリッド距離とする。)

$$W^s(X) = \{z \in \mathbb{C}^2; \mathrm{dist}(f^n(z), f^n(X)) \to 0\ (n \to \infty)\}$$

$$W^u(X) = \{z \in \mathbb{C}^2; \mathrm{dist}(f^{-n}(z), f^{-n}(X)) \to 0\ (n \to \infty)\}$$

命題 7.2 (a) $W^s(K) = K^+$ (b) $W^u(K) = K^-$

証明. K は f で不変なコンパクトだから (命題 1.12), $W^s(K) \subset K^+$ が分かる。
逆を示そう。$\sigma > 1$ と $R > 0$ を適当に取ると, 命題 1.12より $K^+ \subset V \cup V_\sigma^+$ である。$z \in K^+$ と $K \subset \tilde{U} \subset\subset V$ である開集合$\tilde{U}$ を任意に取って $U = \tilde{U} \cap K^+$ と置くとき, 正整数 N があって, 次の (7.1) が成り立つことをいえば良い。

$$f^n(z) \in U \qquad (n > N) \tag{7.1}$$

$z = (x_0, x_1)$ と置く。補題 1.11の $R_1 > 0$ を取って $L_1 = K^+ \cap \{|x| \leq \max(R_1, |x_0|)\}$ と置く。
$(x_i, x_{i+1}) \in K^+ \subset V \cup V_\sigma^+$ $(i \geq 0)$ だから, 補題 1.11より $f^n(z) \in L_1$ $(n \geq 0)$ となる。
次に, ある正整数 N があって, 次が成り立つことを示す。

$$f^{-n}(L_1 \cap (K^+ \backslash U)) \cap L_1 = \emptyset \quad (n > N) \tag{7.2}$$

$w \in L_1 \cap (K^+ \backslash U)$ は $w \notin K^-$ だから $\{f^{-n}(w)\}$ は有界でない。
十分大きい N_0 に対して $f^{-N_0}(w) \notin L_1$ となる。すると $n > N_0$ のとき $f^{-n}(w) \notin L_1$ である。故に, $L_1 \cap (K^+ \backslash U)$ はコンパクトだから, (7.2) をみたす Nがある。
この N に対して, (7.1) を示す。$n > N$ とする。 $z = f^{-n} \circ f^n(z) \in L_1$ だから (7.2) より $f^n(z) \notin L_1 \cap (K^+ \backslash U)$ である。ところで $f^n(z) \in L_1 \cap K^+$ だから $f^n(z) \in U$ である。

定義 7.3 $z \in \mathbb{C}^2$は，ある正整数n に対して$f^n(z) = z$ となるときf の周期点という。n の最小値を周期点z の周期とよぶ。特に周期が 1 の周期点はf の固定点ともよばれる。

補題 7.4 周期 $n(n \geq 1)$ の周期点zに対して，$z_0 = z, z_1 = f(z), \cdots, z_{n-1} = f^{n-1}(z)$は$f^n$ の固定点で，f^n の微分Df^n の固有値は$z_0, \cdots, z_{n-1}$ の各点で一致する。

証明. $z_{j+n} = z_j$ と書く。$Df^n(z_j) = Df(z_{j+n-1}) \cdots Df(z_{j+1})Df(z_j)$
$= Df(z_{j-1}) \cdots Df(z_0)\{Df(z_{n-1}) \cdots Df(z_0)\}Df(z_0)^{-1} \cdots Df(z_{j-1})^{-1}$ だから
$P = Df(z_{j-1}) \cdots Df(z_0)$ と置くと，$Df^n(z_j) = P(Df^n(z_0))P^{-1}$ である。故に，$Df^n(z_j)$ と $Df^n(z_0)$ の固有値は一致する。

定義 7.5 z をf の周期n の周期点とする。微分$Df^n(z)$ の固有値を$\alpha, \beta(0 < |\alpha| \leq |\beta|)$ とする。$|\alpha| \neq 1, |\beta| \neq 1$ のとき周期点z を双曲的 (hyperbolic) という。

- $|\alpha| < 1 < |\beta|$ のときz を鞍点 (saddle point) という。
- $1 < |\alpha|$ のとき z を源点 (source) という。
- $|\beta| < 1$ のとき z を沈点 (sink) という。

補題 7.6 z を周期n の周期点とする。$W^s(z) = \{w \in \mathbb{C}^2; |f^k(w) - f^k(z)| \xrightarrow{k\to\infty} 0\}$が$z$の近傍を含むことは$z$が沈点であることの必要十分条件である。

証明. $z \in B \subset\subset W^s(z)$ となる z を含む開球 B があるとする。十分大きい m について，$f^{nm}(B) \subset\subset B$ となる。B で $\{f^{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ は定数写像 z に一様収束する。点 z での微分 $Df^{nm}(z) = (Df^n(z))^m$ は $m \to \infty$ のとき零行列に収束する。故に、$Df^n(z)$ の固有値 α, β は $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ をみたす。 逆は明らかである。

次の定理はよく知られている。

定理 7.7 z を周期$n(\geq 1)$ の周期点とする。
(a) 沈点zの$W^s(z)$, 源点zの$W^u(z)$は $\mathbb{C}^2$ に双正則な領域である。
(b) 鞍点zの$W^s(z)$, $W^u(z)$は $\mathbb{C}^2$に 1 対 1 に埋め込まれた部分多様体で $\mathbb{C}$ と双正則である。

命題 7.8 fのヤコビアンが$|a| < 1$とする。沈点zの安定集合$W^s(z)$はzを含む $\mathrm{int}K^+$の連結成分である。

証明. zの周期をn, zを含む$\mathrm{int}K^+$の連結成分をUと置く。補題 7.6より, $W^s(z)$は$f^n(B)\subset\subset B$をみたすzの近傍Bを含む。故に, $W^s(z)=\bigcup_{m=1}^{\infty}f^{-nm}(B)$より$W^s(z)\subset U$を得る。命題 1.7より$\{f^{nm}\}$は$U$で正規族で, 開集合$W^s(z)$で$\{f^{nm}\}$は定数写像$z$に広義一様収束するので Vitali の定理より, Uで$\{f^{nm}\}$は定数写像zに広義一様収束する。故に$U\subset W^s(z)$, 従って$U=W^s(z)$となる。

定義 7.9 κ **を無理数,** $b=e^{i\pi\kappa}$ **と置く。円板**$\Delta=\{\zeta\in\mathbb{C};|\zeta|<r\}$ $(r>0)$ **からの 1 対 1 正則写像**$\varphi:\Delta\to\mathbb{C}^2$**と正整数**$n$ **で**$f^n(\varphi(\zeta))=\varphi(b\zeta)(\zeta\in\Delta)$ **となるものがあるとき,** $\mathcal{D}=\varphi(\Delta)$ **を Siegel 円板という。例えば,** $\mathcal{D}'=\varphi(\frac{1}{2}\Delta)$ **も Siegel 円板となるが, このようなものは排除して包含関係で極大なものだけを Siegel 円板とよぶことにする。**

集合Kの定義 1.5から$\mathcal{D}\subset K$であり, 命題 1.12からKはコンパクトである。従ってΔの半径が∞であるような Siegel 円板はあり得ない。
$\mathcal{D}_0=\mathcal{D},\mathcal{D}_1=f\circ\varphi(\Delta),\cdots,\mathcal{D}_{n-1}=f^{n-1}\circ\varphi(\Delta)$ はすべて Siegel 円板になる。

定義 7.10 κ **を無理数,** $b=e^{i\pi\kappa}$ **と置く。円環**$A=\{\zeta\in\mathbb{C};r_1<|\zeta|<r_2\}$ $(0<r_1)$**からの 1 対 1 正則写像**$\varphi:A\to\mathbb{C}^2$**と正整数**n **が存在して**$f^n(\varphi(\zeta))=\varphi(b\zeta)(\zeta\in A)$ **となるとき,** $\mathcal{H}=\varphi(A)$ **を Herman 環という。**$\mathcal{H}$ **は包含関係で極大なものだけに限ることにする。**

集合Kの定義 1.5から$\mathcal{H}\subset K$であり, 命題 1.12からKはコンパクトである。A の内径r_1 が 0 の場合, 1 対 1 正則写像$\varphi:\{0<|\zeta|<r_2\}\to\mathbb{C}^2$は$\zeta=0$まで正則な$\tilde{\varphi}$に接続されて Siegel 円板$\tilde{\varphi}(\{|\zeta|<r_2\})$を定めるのでこの場合は Siegel 円板として扱うことにして Herman 環には含めない。同様にAの外径r_2が∞である場合も Herman 環には含めない。
$\mathcal{H}_0=\mathcal{H},\mathcal{H}_1=f\circ\varphi(A),\cdots,\mathcal{H}_{n-1}=f^{n-1}\circ\varphi(A)$ はすべて Herman 環になる。

$f^n\circ\varphi(\zeta)=\varphi(b\zeta)$ より A で $\varphi'\neq 0$ である。また$\Delta\setminus\{0\}$ で $\varphi'\neq 0$ である。故に$\mathcal{H},\mathcal{D}\setminus\{\varphi(0)\}$ は非特異に $\mathbb{C}^2$に埋め込まれた 1 次元多様体である。

次に fのヤコビアンが$|a|<1$ の場合に, Siegel 円板 $\mathcal{D}$,Herman 環 $\mathcal{H}$の安定集合を調べる。結論は, 命題 7.18と定理 7.19である。補題 7.11, 7.12では A は Herman 環の場合の円環または Siegel 円板の場合の$\Delta\setminus\{0\}$ を表す。

補題 7.11 $|a|<1$**とする。**$A\times\mathbb{C}$ **における**$A\times\{0\}$ **の開近傍**$\mathcal{N}$ **と**$S(\zeta,0)=\varphi(\zeta)$**をみたす中への双正則写像**$S:\mathcal{N}\to\mathbb{C}^2$**が存在して,** $F=S^{-1}\circ f^n\circ S:\mathcal{N}\to\mathbb{C}^2$ **を次の形にできる。**$F(\zeta,\eta)=(b\zeta+\eta^2f_1,a^nb^{-1}\eta+\eta^2f_2),\quad f_1,f_2\in\mathcal{O}(\mathcal{N})$

証明. $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{O}(A)$ と置く。$\psi_1,\psi_2\in\mathcal{O}(A)$ で $-\psi_1\varphi_2'+\psi_2\varphi_1'=1$ をみたすものを取る。$T:A\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ を $T(\zeta,\eta)=(\varphi_1(\zeta)+\eta\psi_1(\zeta),\varphi_2(\zeta)+\eta\psi_2(\zeta))$ と置くと，$T(\zeta,0)=\varphi(\zeta)$ となり，$A\times\{0\}$ 上で $\det(DT)=1$ である。$A\times\{0\}$ の十分小さい開近傍で $F_1:=T^{-1}\circ f^n\circ T$ と置くと，$F_1(\zeta,0)=(b\zeta,0), DF_1(\zeta,0)=\begin{pmatrix} b & \lambda(\zeta)\\ 0 & a^n/b\end{pmatrix}$ より
$F_1(\zeta,\eta)=(b\zeta+\lambda(\zeta)\eta+\cdots,a^nb^{-1}\eta+\cdots)$ となる。ここに $\lambda\in\mathcal{O}(A)$ である。この証明中では $\cdots$ は η に関する 2 次以上の項を表す。
$g(\zeta)=-b^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}a^{kn}b^{-2k}\lambda(b^k\zeta)\in\mathcal{O}(A)$ と置く。$|a|<1$ より，この級数は A で広義一様に収束する。g は $a^nb^{-1}g(b\zeta)=bg(\zeta)+\lambda(\zeta)$ をみたす。
$R(\zeta,\eta)=(\zeta+\eta g(\zeta),\eta)$ と置くと，$R^{-1}(\zeta,\eta)=(\zeta-g(\zeta)\eta+\cdots,\eta)$ であるので，
$R^{-1}\circ F_1\circ R(\zeta,\eta)$
$=(b(\zeta+\eta g(\zeta))+\lambda(\zeta+\eta g(\zeta))\eta-g(b(\zeta+\eta g(\zeta))+\lambda(\zeta+\eta g(\zeta))\eta+\cdots)a^nb^{-1}\eta+\cdots,a^nb^{-1}\eta+\cdots)$
$=(b\zeta+(bg(\zeta)+\lambda(\zeta)-a^nb^{-1}g(b\zeta))\eta+\cdots,a^nb^{-1}\eta+\cdots)$
$=(b\zeta+\eta^2f_1(\zeta,\eta),a^nb^{-1}\eta+\eta^2f_2(\zeta,\eta))$ となる。したがって，$S=T\circ R$ と置けばよい。

この補題の記号をつぎの補題に継承する。

補題 7.12 $A_0\subset\subset A_1\subset\subset A$ に対して $\varepsilon>0$ を，$(\zeta,\eta)\in A_0\times\{|\eta|<\varepsilon\}$ と正整数 m について，$(\zeta_m,\eta_m)=F^m(\zeta,\eta)\in A_1\times\{|\eta|<\varepsilon\}$ で $|\eta_m|\xrightarrow{m\to\infty}0$ となるように取れる。

証明. $\varepsilon>0$ を $A_1\times\{|\eta|<\varepsilon\}\subset\subset\mathcal{N}$ と取る。$A_1\times\{|\eta|<\varepsilon\}$ で $|f_1|\le M, |f_2|\le M$ とする。ε を小さく取り直して $\delta:=|a|^n+M\varepsilon<1$ で，$\mathbb{C}$ 上で A_0 と ∂A_1 の距離が $\dfrac{M\varepsilon^2}{1-\delta^2}$ より大きくなるようにする。$(\zeta,\eta)\in A_0\times\{|\eta|<\varepsilon\}$ のとき，帰納的に $(\zeta_m,\eta_m)=F^m(\zeta,\eta)$ は $(\zeta_m,\eta_m)\in A_1\times\{|\eta|<\varepsilon\}$ で次の評価をみたすことがわかる。
$|\zeta_1-b\zeta|\le M|\eta|^2\le M\varepsilon^2, |\eta_1|\le|a|^n|\eta|+M|\eta|^2\le\delta|\eta|\le\delta\varepsilon,$
$|\zeta_2-b\zeta_1|\le M|\eta_1|^2\le M\delta^2\varepsilon^2, |\eta_2|\le|a|^n|\eta_1|+M|\eta_1|^2\le\delta|\eta_1|\le\delta^2\varepsilon,\cdots$
$|\zeta_{k+1}-b\zeta_k|\le M|\eta_k|^2\le M\delta^{2k}\varepsilon^2, |\eta_{k+1}|\le|a|^n|\eta_k|+M|\eta_k|^2\le\delta^{(k+1)}\varepsilon$

補題 7.13 $|a|<1$ とする。Siegel 円板 $\mathcal{D}$, Herman 環 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{D},\mathcal{H}\subset\mathrm{int}K^+$ をみたす。

証明. $\mathcal{H}$ の場合は，補題 7.11, 7.12 より $\mathcal{H}$ の近傍が K^+ に含まれるから $\mathcal{H}\subset\mathrm{int}K^+$ である。$\mathcal{D}=\varphi(\Delta)$ についても $\varphi(\Delta\backslash\{0\})$ では同補題より $\varphi(\Delta\backslash\{0\})\subset\mathrm{int}K^+$ である。最後に $\varphi(0)\in\mathrm{int}K^+$ を示そう。$\mathcal{D}'=\varphi(\{|\zeta|<\frac{r}{2}\}), \partial\mathcal{D}'=\varphi(\{|\zeta|=\frac{r}{2}\})$ と置く。$\mathbb{C}^2$ の $z=0$ の近傍 B を，すべての $z\in B$ に対して $\partial\mathcal{D}'$ を z 平行移動した図形 $(z+\partial\mathcal{D}')$ が $(z+\partial\mathcal{D}')\subset\mathrm{int}K^+$ となるように取る。$\{f^n\}$ は $\bigcup_{z\in B}(z+\partial\mathcal{D}')$ で有界なので解析集合 $(z+\mathcal{D}')$ 上での最大値の原理よ

り $\{f^n\}$ は $\bigcup_{z\in B}(z+\mathcal{D}')$ で有界となる。故に $\bigcup_{z\in B}(z+\mathcal{D}')\subset K^+$ である。$\varphi(0)\in \mathrm{int}(\bigcup_{z\in B}(z+\mathcal{D}'))$ なので $\varphi(0)\in \mathrm{int}K^+$ が得られる。

以下の補題 7.16 で使う定理を 2 つ述べる。

定理 7.14 Ω_1, Ω_2 を $\mathbb{C}^2$ の領域，$F:\Omega_1\to\Omega_2$ を $\det(DF)\equiv 0$ をみたす非定数正則写像とする。$z\in\Omega_1$ に対して z の近傍 U が取れて $F(U)$ は Ω_2 の 1 次元局所閉解析的集合である。

次の定理は，例えば [M, Theorem 3.3] より得られる。

定理 7.15 双曲型リーマン面 R の正則自己同型写像 $h:R\to R$ は次の 3 種類に限る。
(1) 任意の $\zeta\in R$ に対して，$h^n(\zeta)$ は $(n\to\infty)$ のとき R の境界に近ずく。
(2) h は位数有限の自己同型である。
(3) R は円板 $\{|\zeta|<1\}$ または円環 $\{0\le r<|\zeta|<1\}$ に正則同型で，この同型で h は回転 $\zeta\to e^{i\pi\kappa}\zeta$（ κ は無理数）に共役となる。

補題 7.16 $|a|<1$ とする。U を Siegel 円板 $\mathcal{D}$ を含む $\mathrm{int}K^+$ の連結成分とする。部分列 f^{n_j} を適当に取ると U で広義一様に正則写像 $\Phi:U\to\mathcal{D}$ に収束する。正則レトラクション $\rho:U\to\mathcal{D}$ と Δ の回転に共役な $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ があって U で $\phi\circ\Phi=\rho, \rho\circ f^n=f^n\circ\rho$ が成り立つ。$\mathcal{D}$ の変わりに $\mathcal{H}$ に対しても同様の命題が成り立つ。

証明．$f^n\circ\varphi(\zeta)=\varphi(b\zeta)$ と命題 1.7 より，部分列 n_j を適当に取ると $f^{n n_j}$ が U で広義一様に正則写像 $\Phi:U\to\bar{U}$ に収束し，かつ $b^{n_j}\to b_1, |b_1|=1$ となるようにできる。$\Phi\circ f^n=f^n\circ\Phi, \Phi\circ\varphi(\zeta)=\varphi(b_1\zeta)$ をみたす。補題 7.12 より $\mathcal{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ のある近傍 $\omega\subset\mathbb{C}^2$ では $\Phi_{|\omega}:\omega\to\mathcal{D}$ となるから Φ の rank は 1 となる。$\Phi(U)=M\subset\overline{U}$ と置く。補題 7.12 より $\mathcal{D}\subset M$ である。
$M=f^n(M)$ をいう。$u=\Phi(v), v\in U$ のとき，$f^n(u)=f^n\circ\Phi(v)=\Phi\circ f^n(v)\in M$ より $M\subset f^n(M)$ である。同様に，$f^{-n}\circ\Phi=\Phi\circ f^{-n}$ より $M\subset f^{-n}(M)$ が成り立つ。合わせて，$M=f^n(M)$ が示された。
命題 7.2 より $M\subset K$ である。定理 7.14 より M の正規化 (normalization)$\tilde{M}$ は双曲型のリーマン面である。f^n が誘導する正則自己同型 $\tilde{f}:\tilde{M}\to\tilde{M}$ は定理 7.15 の (1)-(3) の (3) の場合に該当する。$f^n\circ\varphi(\zeta)=\varphi(b\zeta)$ より (1)，(2) の場合が起こらないからである。
$\mathcal{D}\subset M$ で，$\mathcal{D}$ では $f^n\circ\varphi(\zeta)=\varphi(b\zeta)$ であったので，$\tilde{M}$ は円板に同型で φ により $\tilde{f}$ は回転 $\zeta\to b\zeta$ に共役である。$\mathcal{D}$ の極大性より $\mathcal{D}=M$ となる。$\phi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ を $\phi(\varphi(b_1\zeta))=\varphi(\zeta)$ とおけば $\phi\circ\Phi$ は $\phi\circ\Phi:U\to\mathcal{D}$ で $\mathcal{D}$ への制限は恒等写像である，すなわちレトラクションである。$\mathcal{D}$ 上では f^n も ϕ も回転に φ で共役だから $f^n\circ\phi=\phi\circ f^n$ であるので，U で $\rho\circ f^n=\phi\circ\Phi\circ f^n=\phi\circ f^n\circ\Phi=f^n\circ\phi\circ\Phi=f^n\circ\rho$ となる。

補題 7.17 **$|a| < 1$ のとき，Siegel 円板$\varphi : \Delta \to \mathcal{D}$ は$\varphi(0) \in \mathcal{D}$ でも非特異である。**

証明. $\mathcal{D}$ を含む $\mathrm{int}K^+$ の連結成分を U とする。補題 7.16より，正則なレトラクション $\rho : U \to \mathcal{D}$ がある。特に，ρ の $\mathcal{D}$ への制限は恒等写像だから，微分 $D\rho(z_0)$ は rank が 1 である。故に $\mathcal{D}$ は z_0 でも非特異である。

この結果 Siegel 円板の場合は，補題 7.11を修正して $\mathcal{N}$ を $D \times \mathbb{C}$ の開近傍とできる。また，$A_0 \subset\subset A_1 \subset\subset A$ の代わりに $D_0 \subset\subset D_1 \subset\subset D$ として，補題 7.12の結論が成り立つ。

命題 7.18 **$|a| < 1$ とする。$\mathcal{D}$ を Siegel 円板とすると$\mathcal{D}$ の安定集合$W^s(\mathcal{D})$ は$\mathcal{D}$ を含む $\mathrm{int}K^+$ の連結成分となる。Herman 環についても同様の主張が成り立つ。**

証明. $\mathcal{D}$ を含む $\mathrm{int}K^+$ の連結成分を U と置く。補題 7.11, 補題 7.12より，$W^s(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ の $\mathrm{int}K^+$での近傍 $\mathcal{M}$ を含む。故に，$W^s(\mathcal{D}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{M})$ となって $W^s(\mathcal{D}) \subset U$ は明らかである。補題 7.16の証明より $\{f^{nm}\}$ の任意の部分列に対してさらに部分列 $\{f^{nn_j}\}$ を取ると，rank が 1 の或る正則写像$\Phi : U \to \mathcal{D}$に広義一様収束するから，$U \subset W^s(\mathcal{D})$ である。

次に $|a| < 1$ の場合に $\mathcal{D}, \mathcal{H}$の安定集合 $W^s(\mathcal{D}), W^s(\mathcal{H})$ で fが線形化できることを示す。

定理 7.19 **$|a| < 1$ とする。Herman 環 $\mathcal{H}$に対して$L(\zeta, \eta) = (b\zeta, a^n b^{-1}\eta)$と置く。上への双正則写像$G : A \times \mathbb{C} \to W^s(\mathcal{H})$で$G(A \times \{0\}) = \mathcal{H}$, $f^n \circ G = G \circ L$ をみたすものがある。Siegel 円板 $\mathcal{D}$ についても同様の主張が成り立つ。**

証明. 補題 7.11の $\mathcal{N}, S$, $F(\zeta, \eta) = (b\zeta + \eta^2 f_1, a^n b^{-1}\eta + \eta^2 f_2)$ から始める。
$\varphi : A \to \mathcal{H}$の逆写像を$\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ とする。補題 7.16のレトラクション$\rho : U \to \mathcal{H}$を用いて，$\tilde{\rho} : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ を$\tilde{\rho} = \psi \circ \rho \circ S$と定める。ここで，補題 7.11の $\mathcal{N}$は $S(\mathcal{N}) \subset U$となるように取り直す。(補題 7.12よりこれは可能である。)
$f_3 = a^n b^{-1}(1 + a^{-n} b\eta f_2)^2$, $h = a^{-n} b(f_2 + f_2 \circ F f_3 + \cdots + f_2 \circ F^k \prod_{j=0}^{k-1} f_3 \circ F^j + \cdots)$ と置く。
補題 7.12と $|a| < 1$ より，h は $A \times \mathbb{C}$ 内での $A \times \{0\}$ のある近傍 $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$で広義一様収束する。$h$ は次をみたす。

$$f_2 + a^n b^{-1} h \circ F f_3 = a^n b^{-1} h \tag{7.3}$$

$H : \mathcal{N}_1 \to \mathbb{C}^2$を $H(\zeta, \eta) = (\tilde{\rho}(\zeta, \eta), \eta + \eta^2 h(\zeta, \eta))$ と置く。
$H \circ F = L \circ H$をいう。第一成分が両辺一致することは$\tilde{\rho} \circ F = b\tilde{\rho}$を示せばよいが，$\mathcal{N}_1$上で $\tilde{\rho} \circ F = \psi \circ \rho \circ S \circ F = \psi \circ \rho \circ f^n \circ S = \psi \circ f^n \circ \varphi \circ \psi \circ \rho \circ S = b\psi \circ \rho \circ S = b\tilde{\rho}$ となって示せた。
第二成分は，上の式 (7.3) を用いると $a^n b^{-1}\eta + \eta^2 f_2 + (a^n b^{-1}\eta + \eta^2 f_2)^2 h \circ F = a^n b^{-1}(\eta + \eta^2 h)$ が得られるので，両辺が一致する。

$A \times \{0\}$ の近傍で $G = S \circ H^{-1}$ と置く。$G(A \times \{0\}) = \mathcal{H}, f^n \circ G = G \circ L$ をみたす。この関係を用いて G の定義域を $A \times \mathbb{C}$ に接続したものを改めて G と書く。$G(A \times \mathbb{C}) = W^s(\mathcal{H})$ となる。

定義 7.20 U**を**$\mathrm{int}K^+$**の連結成分とする。正整数**n**が存在して**$f^n(U) = U$**となるとき**U**を周期的 (periodic) という。そのような**n**の最小値を**U**の周期という。反対に，如何なる正整数**n**に対しても**$f^n(U) \cap U = \emptyset$ **となるとき，遊走的 (wandering) であるという。**

また，U**は点**$w \in U$**とコンパクト**$L \subset\subset U$**で無限個の**$n > 0$**について**$f^n(w) \in L$ **をみたすものがあるとき回帰的 (recurrent) という。**

回帰的な成分は周期的であるので，$\mathrm{int}K^+$の連結成分は次のように分類される。

$$\mathrm{int}K^+\text{の連結成分} \begin{cases} \text{周期的} \begin{cases} \text{回帰的} \\ \text{非回帰的} \end{cases} \\ \text{遊走的} \end{cases}$$

この節の最後に，$|a| < 1$ の場合に周期的かつ回帰的な成分の特徴付けを与える定理 7.22 を証明する。回帰的でない周期的成分については完全にはわかっていない。遊走的成分については存在するかどうか何も知られていないようである。

定理 7.21 ([FM, Theorem 3.1]) 正整数 n を決めると，f^nの固定点は高々d^n個である。

[FM] では，固定点の重複度を適当に定義して，f^nの固定点は重複度も込めて d^nである ことが示してある。

定理 7.22 $|a| < 1$**とする。**$\mathrm{int}K^+$**の回帰的な，周期**$n(\geq 1)$**の連結成分**U**は，沈点**z**,Siegel 円板**$\mathcal{D}$**,Herman 環**$\mathcal{H}$**の安定集合**$W^s(z), W^s(\mathcal{D}), W^s(\mathcal{H})$ **のいずれかになる。**

証明. Uは回帰的だから，コンパクト $L \subset\subset U$と点 $w, w_1 \in L$ と部分列 n_j(すべて n の倍数) が存在して $f^{n_j n}(w) \to w_1$が成り立つ。さらに部分列を取りこの部分列を改めて n_jと表して，$m_j = n_{j+1} - n_j$と置くとき，$m_j \to \infty\,(j \to \infty)$ で，$f|_U{}^{m_j}$が正則写像 $F : U \to \overline{U}$に広義一様収束するようにする。命題 1.7よりこれは可能である。
次に，$F(w_1) = w_1$をいう。w_1の近傍で$\sup_j |Df^{m_j}| \leq A$ となる正数 A がある。jについて帰納的に考えて，$|f^{n_{j+1}}(w) - f^{m_j}(w_1)| = |f^{m_j} \circ f^{n_j}(w) - f^{m_j}(w_1)| \leq |Df^{m_j}||f^{n_j}(w) - w_1| \leq A|f^{n_j}(w) - w_1|$ だから $F(w_1) = \lim_{j \to \infty} f^{m_j}(w_1) = w_1$が成り立つ。

$f^n \circ F = F \circ f^n$が成り立つ。$F = \lim_{j \to \infty} f^{m_j}$より $\det(DF) = \lim_{j \to \infty} a^{m_j} = 0$である。$F(w_1) = w_1$だから $w_1 \in F(U) \cap U$である。

(1)rank$F = 0$ のとき　　Fは定数写像 w_1である。$f^n(w_1) = f^n \circ F(w_1) = F \circ f^n(w_1) = w_1$ だから w_1は f^nの固定点である。$j \to \infty$ のとき $Df^{m_j}(w_1) \to DF(w_1)$ だから w_1は fの沈点になり $U = W^s(w_1)$ となる。

(2)rank$F = 1$ のとき　　$M = U \cap F(U)$ と置く。$w_1 \in M$が成り立つ。

まず，$f^n(M) = M$をいう。$u = F(v) \in M, v \in U$のとき $f^n(u) = f^n \circ F(v) = F \circ f^n(v) \in F(U)$ だから $f^n(M) \subset M$が成り立つ。同様に $f^{-n} \circ F = F \circ f^{-n}$ より $f^{-n}(M) \subset M$が成り立つ。合わせて $f^n(M) = M$となる。

命題 7.2より $M \subset K$である。定理 7.14より Mの正規化 (normalization) を$\rho : \tilde{M} \to M$とすると，$\tilde{M}$は双曲型のリーマン面である。f^nが誘導する$\tilde{M}$の正則同型を$\tilde{f}^n$と置く。

$\tilde{f}^n : \tilde{M} \to \tilde{M}$に対して定理 7.15を適用するとき，(1),(2) の場合が起きないことをいう。

$w_1 \in M, F(w_1) = w_1$より (1) は起きない。定理 7.21より $f_{|M}{}^n : M \to M, \tilde{f}^n : \tilde{M} \to \tilde{M}$ は位数有限でない。従って (2) は起きない。

定理 7.15より$\tilde{M}$は円板 $\{|\zeta| < 1\}$ または円環 $\{0 \leq r < |\zeta| < 1\}$ に正則同型で，この同型で$\tilde{f}$は回転$\zeta \to e^{i\pi\kappa}\zeta$($\kappa$は無理数) に共役となる。従って$\tilde{M} = M, \tilde{f} = f, U = W^s(M)$ となる。

8　カレントの収束定理の応用

この節では，カレントの fによる逐次引き戻しの収束に関する定理 6.9と定理 6.10 の応用として定理 8.1, 8.2, 8.3, 8.10 を証明する。

定理 8.1 M を$\mathbb{C}^2$ の 1 次元代数的集合，f の正則ヤコビアン a は $|a| < 1$ とする。U は沈点z の$W^s(z)$, Siegel 円板$\mathcal{D}$ の$W^s(\mathcal{D})$, Herman 環$\mathcal{H}$ の$W^s(\mathcal{H})$ のいずれかとする。
(a) $M \cap U \neq \emptyset$　　(b) $M \cap \overline{U}$ はコンパクトである。

証明. (a)M上の積分の定めるカレントを $[M]$ と書く。supp$([M]) = M$である。$|a| < 1$ だから命題 1.16より $K^- = J^-$である。定理 2.19と合わせて，supp$(\mu^-) = K^-$となる。ところで，$M \cap U = \emptyset$ とすると supp$(\frac{1}{d^k} f^{-k*}[M]) \cap U = \emptyset$ だから，x, yの役割を入れ換えた定理 6.9より supp$(\mu^-) \cap U = \emptyset$ である。故に，$K^- \cap U = \emptyset$ となる。一方 Uが沈点 zの$W^s(z)$, Siegel 円板 $\mathcal{D}$の $W^s(\mathcal{D})$, Herman 環 $\mathcal{H}$の $W^s(\mathcal{H})$ のいずれかに応じて，$z \in K^-$, $\varphi(\{|\zeta| = \frac{r}{2}\}) \subset K^-, \varphi(\{|\zeta| = \frac{r_1 + r_2}{2}\}) \subset K^-$だから矛盾である。$M \cap U \neq \emptyset$ となる。

(b) Mの定義多項式を $h(x, y)$ とする。$h(x, y)$ に対して命題 6.8を x, yの役割を入れ換えて用いると，正整数 n_1が存在して $h \circ f^{-n_1}(x, y)$ の最高次の項は cx^k唯一つとできる。故に，十

分大きい Rに対して $f^{n_1}(M)\cap\overline{V^+}=\emptyset$ となる。一方命題1.12より $U\subset \mathrm{int}K^+\subset(V\cup V^+)$ である。故に$\overline{U}\subset\overline{(V\cup V^+)}$ となる。従って，$\overline{U}\cap f^{n_1}(M)\subset V$である。$\overline{U}$は fで不変な集合なので$\overline{U}\cap M\subset f^{-n_1}(V)$ となる。故に，$\overline{U}\cap M$ はコンパクトである。

定理 8.2 ***f*の正則ヤコビアン*a*は$|a|<1$とする。*n*を正整数，*U*を$\mathrm{int}K^+$の連結成分で，$f^n(U)=U, U\cap K^-\neq\emptyset$ をみたすものとする。このとき，*U*の境界はJ^+と一致する。**

証明. $\partial U\subset\partial K^+=J^+$は明らかに成り立つ。$z\in U\cap K^-$ を取る。命題1.16より K^-は内点を持たないので，zを通る複素直線 L と zを中心とする L 内の円板 Dを $D\subset U, D\not\subset K^-$ となるようにできる。$G^-|_D$は zで 0 をとる，≥ 0 の劣調和関数である。$G^-|_D$ が D で調和関数になったとすると Dの内点 zで最小値を取るので，最小値の原理から $G^-|_D$は Dで恒等的に 0 となる。これは定理 2.16と $D\not\subset K^-$に矛盾する。故に$\mu^-|_D(D)>0$ となる。$\mathbb{C}^2$の C^∞級関数χで $\mathrm{supp}\ (\chi)\cap D\subset\subset D$, $\mu^-|_D(\chi D)>0$ となるものを取る。定理 6.10より，$c_1=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_D\chi\mu^-|_D>0$ として，$\dfrac{1}{d^k}f^{k*}(\chi[D])\xrightarrow{k\to\infty}c_1\mu^+$が成り立つ。定理 2.19より $J^+=\mathrm{supp}(\mu^+)\subset\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-k}(D)}\subset\overline{U}$ となる。$J^+\cap U=\emptyset$ だから，$J^+\subset\partial U$となる。

特に，沈点 zの $W^s(z)$,Siegel 円板 $\mathcal{D}$の $W^s(\mathcal{D})$, Herman 環 $\mathcal{H}$の $W^s(\mathcal{H})$ は $\mathrm{int}K^+$の連結成分で (命題 7.8,7.18), その境界は J^+と一致する。

定理 8.3 ***z*を*f*の鞍点とする。$\overline{W^s(z)}=J^+,\overline{W^u(z)}=J^-$ が成り立つ。**

証明. zの周期を n とする。微分 $Df^{nm}(z)$ の固有値β^mは$\beta^m\to\infty(m\to\infty)$ だから，$\{f^{nm}\}$ は zの近傍で正規族にならない。命題 1.7から $z\notin\mathrm{int}K^+$である。一方 zは周期点なので，$z\in K^+$である。故に，$z\in J^+,\overline{W^s(z)}\subset J^+$となる。
逆に，$\overline{W^s(z)}\supset J^+$を示そう。$z\in M\subset W^s(z)$ となる局所閉部分多様体 Mを取る。$\{f^{-n}|_M\}$ は zの近傍で正規族でないので，$M\not\subset K^-$である。$G^-|_M$が Mで調和とすると内点 zで最小値 0 を取るので $G^-|_M$は恒等的に 0 となって $M\subset K^-$となり矛盾である。故に，$\mu^-|_M>0$ である。$\mathbb{C}^2$の C^∞級関数χで $\mathrm{supp}(\chi)\cap M\subset\subset M,\mu^-|_M(\chi M)>0$ となるものを取る。定理 6.10より，$c_1>0$ があって$\dfrac{1}{d^k}f^{k*}(\chi[M])\to c_1\mu^+(k\to\infty)$ が成り立つ。定理 2.19より $J^+=\mathrm{supp}(\mu^+)\subset\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty}f^{-k}(M)}\subset\overline{W^s(z)}$となる。

[BS4, Theorem 4.2] には，測度μに関してほとんどいたるところの $z\in J^*$について $W^s(z),W^u(z)$ は$\mathbb{C}$に双正則な部分多様体で$\overline{W^s(z)}=J^+,\overline{W^u(z)}=J^-$となると述べてある。

A. Katok [Ka] にある次の定理を認めると，以下の定理 8.5が，定理 8.3より従う。

定理 8.4 ***f* は鞍点を持つ。**

定理 8.5 J^+, J^- は連結集合である。

定義 8.6 $\mathbb{C}^2$ の点z はz の開近傍U を，すべての整数$n \geq 1$ に対して$U \cap f^n(U) = \emptyset$ となるように選べるとき遊走的 (wandering)，そうでないとき非遊走的 (nonwandering) という。非遊走的な点の全体をf の非遊走集合と呼び$\Omega(f)$ と書く。

定義 8.7 $\mathbb{C}^2$ の点z は，任意の$\varepsilon > 0$ に対して正整数N と点列$\{z_n\}_{n=1}^{N+1}$ を$z = z_1 = z_{N+1}$, $|z_{n+1} - f(z_n)| < \varepsilon (1 \leq n \leq N)$ となるように選べるとき鎖回帰的 (chain recurrent) という。鎖回帰的な点の全体をf の鎖回帰集合といい$R(f)$ で表す。

次の証明は容易である。M. Shub [Sh] の第 1 章に (a),(c) の証明がある。

命題 8.8 (a) $\Omega(f)$ はf 不変な閉集合である。$\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$ が成り立つ。
(b) $R(f)$ はf 不変な閉集合である。$R(f) = R(f^{-1})$ が成り立つ。
(c) $\Omega(f) \subset R(f)$

命題 8.9 $R(f) \subset K$ となる。

証明. $w \notin K^+$であると $m \geq 0$ が存在して $z := f^m(w) \notin V \cup V^+$となる (命題 1.13)。$\varepsilon > 0$を十分小さく取ると，点列 $\{z_n\}_{n=1}^{N+1}$を $z = z_1 = z_{N+1}$, $|z_{n+1} - f(z_n)| < \varepsilon$ $(1 \leq n \leq N)$ となるようには作れないことが命題 1.12の証明よりわかる。故に $R(f) \subset K^+$ である。f^{-1} に対して同様に，$R(f^{-1}) \subset K^-$を得る。故に $R(f) = R(f^{-1}) \subset K$である。

定理 8.10 $z_1 \in J^+, z_2 \in J^-$ の任意の開近傍U_1, U_2 に対して$n \geq 1$ で$f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ となるものがある。特に$J \subset \Omega(f)$ が成り立つ。

証明. z_1を通る複素直線 L と z_1を中心とする開球 Bを，開円板 $D = L \cap B$が $D \subset U_1, D \cap (\mathbb{C}^2 \setminus K^+) \neq \emptyset$ となるように取る。すると，$G^+(z_1) = 0$ で，$G^+{}_{|D} > 0$ である点が Dに存在する。$\mu^+{}_{|D} = 0$ であると $G^+{}_{|D}$が Dで調和関数となるが，これは $G^+{}_{|D}$の最小値の原理に矛盾する。故に$\mu^+{}_{|D}$は零ではない。
$\chi \in C_0^2(\mathbb{C}^2)$ を$\chi(z_1) > 0, \int_D \chi\mu^+{}_{|D} > 0, \chi \geq 0, \mathrm{supp}(\chi) \subset\subset B_1$ と取り $\mathbb{C}^2$ の正 (1,1) カレント $\chi[D]$ を定める。$\mathrm{supp}(\chi[D]) \subset U_1$ である。$c_1 = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_D \chi\mu^+{}_{|D} > 0$ と置くと，定理 6.10(x, y の役割を入れ換えたもの) より $(\chi[D])_n^- \to c_1\mu^-$ となる。定理 2.19より，$\mathrm{supp}(c_1\mu^-) = J^-$ だから十分大きいある n に対して $\mathrm{supp}((\chi[D])_n^-) \cap U_2 \neq \emptyset$ となる。
$\mathrm{supp}((\chi[D])_n^-) = f^n(\mathrm{supp}(\chi[D])) \subset f^n(U_1)$ だから $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ である。

9 f が双曲的である場合

次では，Λは f不変なコンパクト,d はΛ の近傍の C^∞級の Hermite 計量での距離を表す。

定義 9.1 ([Sh, Definition 6.1]) $z \in \Lambda$に対して
$W^s_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}^2; d(f^n(w), f^n(z)) \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ d(f^n(w), f^n(z)) \le \varepsilon(n \ge 0)\}$,
$W^u_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}^2; d(f^{-n}(w), f^{-n}(z)) \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ d(f^{-n}(w), f^{-n}(z)) \le \varepsilon(n \ge 0)\}$,
$W^s(z) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(z)))$,　$W^u(z) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W^u_\varepsilon(f^{-n}(z)))$と置く。

Λがコンパクトなので，Λの適当な近傍で計量はユークリッド計量と同値である。故に，$W^s(z)$ はこのような計量の取り方に依らない。特に定義 7.1の $W^s(z)$ と一致する。

定義 9.2 f不変なコンパクト$\Lambda \subset \mathbb{C}^2$は，$T\mathbb{C}^2$の$\Lambda$への制限$T\mathbb{C}^2_{|\Lambda}$が$f$不変で連続な，次の性質をもつ複素部分束$E^s, E^u$の直和となるときに$f$の双曲的集合であるという。
$C > 0, 0 < \sigma < 1$が取れてE^s上で$|Df^n| < C\sigma^n$, E^u上で$|Df^{-n}| < C\sigma^n$　$(n \ge 1)$
Λの各点でE^uの複素次元が一定のとき，これをΛの指数 (index) と呼ぶ。

ここに，$T\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$は $\mathbb{C}^2$の正則接束，$Df^n : T\mathbb{C}^2 \to T\mathbb{C}^2$は f^nの微分，$|\cdot|$ はΛの近傍の C^∞級の Hermite 計量による作用素のノルムを表す。

補題 9.3 ([Sh, Proposition 4.2]) Λの近傍のC^∞級の Hermite 計量と，$0 < \lambda < 1$をE^sでは$|Df| < \lambda$, E^uでは$|Df^{-1}| < \lambda$となるように取ることができる。

このような計量を fの双曲的集合Λに適合した (adapted) 計量と呼ぶ。

次の定理は，可微分多様体の範疇では [Sh, Theorem 6.2] である。

定理 9.4 fの双曲的集合Λに適合した計量を固定する。正数εが存在して$z \in \Lambda$に対して$W^s_\varepsilon(z), W^s(z)$は次元が$\dim E^s_z$ の開球に微分同相な複素多様体で，接空間について$T_zW^s_\varepsilon(z) = E^s_z, T_zW^s(z) = E^s_z$ が成り立つ。すべての$n \ge 0, w \in W^s_\varepsilon(z)$に対して$d(f^n(w), f^n(z)) \le \lambda^n d(w, z)$が成り立つ。$W^u_\varepsilon(z), W^u(z)$についても同様である。

定義 9.5 fはJが双曲的集合になるとき双曲的という。(このときf^{-1}も双曲的である。)

後に，定理 9.18で，定義 9.5と同値な他の条件を与える。

命題 9.6 fが双曲的ならばJの指数は1で$W^s(J) \subset J^+, W^u(J) \subset J^-$となる。

証明. $\dim E^u_z = 0$ となる $z \in J$があるとする。(矛盾を導く。) $f^n(z) \in J$だから部分列を取ると $w \in J$ があって $f^{n_j}(z) \to w$となる。$\dim E^u_w = 0$ である。$W^s(w)$ は wを含む $\mathbb{C}^2$の開集合である。定理 9.4より，εを小さく取って固定すると $C > 1$ が取れて，$B := W^s_\varepsilon(w)$ で，$|Df^n| \le C\lambda^n$となる。$\xi := f^{n_j}(z), \eta := f^{n_{j+k}}(z) \in B$とする。このとき $m = n_{j+k} - n_j$ と置くと$\lambda^m < \dfrac{1}{2}$となり，またξを中心にした半経が $2C|\xi - \eta|$ の球が Bの内部に含まれるように大きい n_j, n_{j+k}を取るものとする。$f^{im}(\xi), f^{(i-1)m}(\xi) \in B$ならば
$|f^{im}(\xi) - f^{(i-1)m}(\xi)| = |f^{(i-1)m}(\eta) - f^{(i-1)m}(\xi)| \le C\lambda^{(i-1)m}|\eta - \xi|$,
$|f^{nm}(\xi) - \xi| \le \sum_{i=1}^{n} |f^{im}(\xi) - f^{(i-1)m}(\xi)| \le C(\sum_{i=1}^{n} \lambda^{(i-1)m})|\eta - \xi| \le \dfrac{C}{1-\lambda^m}|\eta - \xi| \le 2C|\eta - \xi|$ だから帰納的に $f^{nm}(\xi) \in B$と，上の評価が得られる。$\{f^{nm}(\xi)\}$ はある ζに収束する。$f^m(\zeta) = \zeta$が成り立つ。ζは沈点になる。$\zeta \in \mathrm{int}K^+$であり$\zeta \notin J^+$，$\zeta \notin J$となる。これは矛盾である。$\dim E^s_z = 0$ となる zがあれば f^{-1}についての同様の推論から矛盾がでる。
Jの $\mathbb{C}^2$での近傍を Nとする。$z \in N$に対して $T_z\mathbb{C}^2$の原点を頂点とする斉次の錐 C_z, D_zを $\overline{C_z} \cap \overline{D_z} = \{0\}$ となるように，N上で C_z, D_zが zについて連続に動くように取る。さらに，$z \in J$ならば，$E^u_z \subset C_z, E^s_s \subset D_z$をみたすものとする。整数 n を，すべての $z \in N$に対して $Df^n(C_z) \subset C_{f^n(z)}, v \in C_z$ならば $|Df^n(v)| \ge 2|v|$ となるように固定する。
$W^s(J) \subset J^+$をいう。命題 7.2より $W^s(J) \subset K^+$がわかっているので，$z \in W^s(J) \cap \mathrm{int}K^+$ が存在したとして，矛盾を示す。命題 1.7より zで $|Df^m|$ は有界である。他方，$z \in W^s(J)$ だから十分大きい Mがあって，$m \ge M$について $f^m(z) \in N$となる。$Df^M(v) \in C_{f^M(z)}$である $v \in C_z$を取る。$|Df^{M+kn}(v)| \ge 2^k|Df^M(v)|$ だから非有界で矛盾である。

定理 9.7 ***f*を双曲的とする。$z \in J$に対して$W^s(z), W^u(z)$は $\mathbb{C}$ と双正則である。**

証明. 定理9.4より，$z \in J$のとき $W^s(z)$ は $\mathbb{R}^2$に微分同相な複素1次元多様体である。ある $z \in J$について $W^s(z)$ が単位円に双正則とすると $W^s(f^n(z))$ も，f^nで $W^s(z)$ に双正則なので，単位円型になる。$W^s(z)$ 上 $|h| < 1$ である正則関数 h で $h(z) = 0, h(w) = \dfrac{1}{2}$となるものを取る。$h_n = h \circ f^{-n}$は $W^s(f^n(z))$ 上 $|h_n| < 1$ である正則関数で $h_n(f^n(z)) = 0, h_n(f^n(w)) = \dfrac{1}{2}$ となる。単位円の小林距離=Poincaré 距離ρで $\rho(f^n(z), f^n(w)) \to 0$ であることを示せば，十分大きい n について，h_nの存在が Schwarz の補題に矛盾する。
一般に n 次元複素多様体 Mの infinitesimal な小林計量 $F: TM \to \mathbb{R}_+$ の定義は $F(z,v) = \inf\{\dfrac{1}{r}; h : \Delta(r) \to M, h(0) = z, Dh_0(\dfrac{\partial}{\partial\zeta}) = v\}$ である。ここに，TMは Mの正則接束，$\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R}; s \ge 0\}, v \in T_zM, \Delta(r)$ は半径 $r > 0$ の円板 $\{|\zeta| < r\} \subset \mathbb{C}, h$ は正則写像で Dh_0はその$\zeta = 0$ での微分である。$F^s : E^s \to \mathbb{R}_+$を $(z,v) \in E^s$に対しては $F(z,v)$ は $W^s(z)$ の infinitesimal な小林計量の $(z,v) \in W^s(z) \times E^s_z = W^s(z) \times T_zW^s(z)$ での値と定める。E^sが J上の連続な部分束であることから直ちに F^sは上半連続になることがわかる。$W^s_\varepsilon(z)$

上に Jの近傍の adapted な C^∞級計量から誘導される距離 d と $W^s(z)$ の小林距離ρについて $C_\varepsilon(z)>0$ を$\rho\le C_\varepsilon(z)d$ と取る。E^sの連続性, F^sの上半連続性と Jがコンパクトなことより zに依らない $C_\varepsilon>0$ が取れて$\bigcup_{z\in J} W^s_\varepsilon(z)$ で$\rho\le C_\varepsilon d$ となる。$d(f^n(z),f^n(w))\to 0$ から $\rho(f^n(z),f^n(w))\to 0$ が従う。

定義 9.8 不変集合Λは$z_1,z_2\in\Lambda$ならば$W^s(z_1)\cap W^u(z_2)\subset\Lambda$ をみたすとき local product structure を持つという。

命題 9.9 fが双曲的ならば, Jは local product structure を持つ。

証明. 命題 9.6より $z_1,z_2\in J$のとき $W^s(z_1)\subset J^+, W^u(z_2)\subset J^-$だから, $W^s(z_1)\cap W^u(z_2)\subset J$である。

次の命題は Jが双曲的集合で, local product structure をもつことから従う。

命題 9.10 ([Sh, Proposition 8.22]) fが双曲的ならば, Jの開近傍Nで, Nに含まれるf不変集合はJに含まれるという性質をもつものが取れる。

一般の fについては intK^+の連結成分の分類には, 未解決の部分が多いことを述べた。しかし, fが双曲的である場合には, 以下の命題 9.12, 9.13, 9.14 が完全な分類を与える。

次の定理をポアンカレの回帰定理という。命題 9.12の証明に利用する。

定理 9.11 (M,m)を全測度$m(M)$が有限の測度空間で, mは全単射$S:M\to M$で不変な測度であるとする。このとき, 可測部分集合$A\subset M$に対して$m(B)=m(A)$である可測部分集合$B\subset A$が存在して, $p\in B$ならば無限個の正整数nに対して$S^n(p)\in A$となる。

証明. 正整数νに対して, $A_\nu=S^{-\nu}(A), C_\nu=\bigcup_{k\ge\nu}A_k$と置く。$S(C_\nu)=C_{\nu-1}\supset C_\nu$, $m(C_{\nu-1})=m(S(C_\nu))=m(C_\nu)$ となる。$C_\infty=\bigcap_{\nu=0}^{\infty}C_\nu$と置くと, $C_0\backslash C_\infty=\bigcup_{\nu>0}(C_{\nu-1}\backslash C_\nu)$ である。故に, $m(C_0\backslash C_\infty)=0$ となる。$B=A\cap C_\infty$と置く。$A=A_0\subset C_0$なので $A=A\cap C_0=(A\cap C_\infty)\cup(A\cap(C_0\backslash C_\infty))=B\cup(A\cap(C_0\backslash C_\infty))$ となる。故に, $m(B)=m(A)$である。$p\in C_\nu$は, $k\ge\nu$である kが存在して $S^k(p)\in A$ と同値なので$p\in C_\infty$は, $k_1<k_2<\cdots$が存在して $S^{k_j}(p)\in A$ と同値である。

命題 9.12 fは双曲的とする。intK^+の連結成分で遊走的なものは存在しない。

証明. 命題1.16より $|a| \leq 1$ の場合だけ考えればよい。$|a| = 1$ の場合は，命題1.15より $\mathrm{int}K^+$の連結成分 Uのルベーグ測度が有限なので，定理9.11より，Uは遊走的ではない。
$|a| < 1$ とする。Uを $\mathrm{int}K^+$の連結成分，$z \in U$とする。収束部分列 $\{f^{n_j}(z)\}$ の極限点の全体を L とする。命題7.2,1.16より $L \subset K = K^+ \cap K^- = K^+ \cap J^-$である。
(a)$w \in L \cap \mathrm{int}K^+$となる wがある場合
U_0を wを含む $\mathrm{int}K^+$の連結成分として，異なる2正整数 n_1, n_2があって $f^{n_1}(w), f^{n_2}(w) \in U_0$ である。故に $f^{n_1}(U) = U_0 = f^{n_2}(U)$ となって Uは非遊走的成分である。
(b)$L \subset J^+$の場合 (すなわち (a) 以外の場合)
$L \subset J$となる。これは $z \in W^s(J)$ を意味する。ここで，初めて fが双曲的であることを使うと，命題9.6より $W^s(J) \subset J^+$となり，$z \in J^+$で，$z \in \mathrm{int}K^+$ に矛盾する。故に (b) の場合は起こらない。

命題 9.13 **$|a| = 1$, fが双曲的ならば $\mathrm{int}K^+ = \mathrm{int}K^- = \emptyset$である。**

証明. 命題1.16より，$\mathrm{int}K^+$=$\mathrm{int}K^-$=$\mathrm{int}K$である。$U \neq \emptyset$ を連結成分として矛盾を示す。$\partial U \subset J$である。$n(\geq 1)$ を Uの周期とする。Jの開近傍 Nを，Nに含まれる f不変集合は J に含まれるという性質をもつように取る (命題9.10)。
任意のコンパクト $L \subset\subset U$に対して，$\hat{L} = \overline{\{f^{mn}(z); z \in L, m \in \mathbb{Z}\}}$と置く。$\hat{L}$は f不変集合である。$\hat{L} \cap \partial U = \emptyset$ すなわち $\{f^{mn}(z); z \in L, m \in \mathbb{Z}\}$ は∂Uには集積しないことをいう。例えば，部分列 $\{m_j > 0\}$ と $z_j \in L$ で $\{f^{m_j n}(z_j); m_j > 0\}$ が $w \in \overline{U}$に収束するとする。さらに部分列を取ったものを改めて $\{z_j\}, \{f^{m_j n}\}$ として，$z_j \to \zeta \in L, \{f^{m_j n}\}$ は Uで広義一様に正則写像 $h : U \to \overline{U}$に収束するとする (命題1.7)。$|a| = 1$ より $\det(Dh) = 1$ で h は局所同相写像になるので $h : U \to U$である。故に $w = h(\zeta) \in U$で，$\hat{L} \cap \partial U = \emptyset$ がわかった。
コンパクト $L \subset\subset U$を $(K \backslash \hat{L}) \subset N$となるように取る。$\partial U \subset J$なので可能である。上で示したことから $(K \backslash \hat{L}) \cap \mathrm{int}K^+ \neq \emptyset$ なので f不変集合 $(K \backslash \hat{L})$ は Jに含まれない。これは命題9.10の Nの性質に矛盾である。

命題 9.14 **fは双曲的とする。$\mathrm{int}K^+$の連結成分Uは沈点zの安定集合$W^s(z)$である。**

証明. 命題1.16, 9.13より，$\mathrm{int}K^+ \neq \emptyset$ であり得るのは $|a| < 1$ の場合だけである。Uの周期を $n \geq 1$ とする。まず，Uが回帰的である (定義7.20) ことをいう。Rを大きく取って，$B := \mathrm{int}(V \cap \Omega) \neq \emptyset, U \subset \mathrm{int}(V^+ \cup V)$ としておく (命題1.12)。$f^n(U) = U \subset V^+ \cup V$である。また，補題1.10より，$f^n(V) \subset V^- \cup V$である。有界開集合 Bに対して $f^n(B)$ も開集合だから $f^n(B) \subset B$である。$z \in B$と部分列 $\{f^{m_j n}\}$ による極限点 $w = \lim_{j \to \infty} f^{m_j n}(z)$ の全体を L と書く。$L \subset \overline{B}$なので，$L \neq \emptyset$ である。$f^{-n}(L) \subset L$ なので $L \subset K^- = J^-$である。

$L \cap U \neq \emptyset$ ならば Uは回帰的である。$L \cap U = \emptyset$ ならば $L \subset \partial U \subset J^+$なので $L \subset J$となる。これは $B \subset W^s(J)$ を示している。命題 9.6より，$B \subset J$となって矛盾である。
定理 7.22より Uは沈点 z,Siegel 円板 $\mathcal{D}$,Herman 環 $\mathcal{H}$の安定集合 $W^s(z), W^s(\mathcal{D}), W^s(\mathcal{H})$ のいずれかである。後 2 者の場合が起きないことをいう。$U = W^s(\mathcal{D})$ とする。Jの開近傍 Nを Nに含まれる f不変集合は Jに含まれるという性質をもつように取る (命題 9.10)。ところが，$\partial\mathcal{D} \subset J$であり，$J$に含まれない N内の f不変集合として Siegel 円板 $\mathcal{D}$の$\partial\mathcal{D}$に近い円周が取れるので矛盾である。同様に，$U = W^s(\mathcal{H})$ の場合も起きない。

命題 9.15 **$|a| < 1, f$ は双曲的とする。沈点の総数は有限である。**

証明. 無限個の沈点があるとして矛盾を示す。沈点は周期点だから Kに含まれる。相異なる沈点からなる点列の極限となる点の全体を L とする。$L \neq \emptyset$ である。命題 9.14より $L \cap \mathrm{int}K^+ = \emptyset$ だから，$L \subset J^+$ である。また，$L \subset K \subset K^- = J^-$である。故に，$L \subset J$である。$J$の開近傍 Nを Nに含まれる f不変集合は Jに含まれるという性質をもつように取る。沈点 zで，その軌道 $\{f^i(z); 0 \le i \le n-1\}$($n$ は周期) が，$\{f^i(z); 0 \le i \le n-1\} \subset N$とならないものが無限個あると $L \subset J$に矛盾する。$\{f^i(z); 0 \le i \le n-1\} \subset N$となるものがあると f不変集合 $\{f^i(z); 0 \le i \le n-1\} \subset \mathrm{int}K^+$なので，$N$の性質に矛盾する。

命題 9.16 **fを双曲的とする。**
(a)$|a| = 1$のとき，$R(f) = J$となる。
(b)$|a| < 1, f$の沈点の全体の有限集合をSとすると，$R(f) = J \cup S$となる。
(c) $|a| > 1, f$の源点の全体の有限集合をS_1とすると，$R(f) = J \cup S_1$となる。

証明. $J \subset R(f)$(命題 8.8, 定理 8.10) と $R(f) \subset K$(命題 8.9) がすでにわかっている。
(a) 命題 9.13より，$K = K^+ \cap K^- = J^+ \cap J^- = J$だから $R(f) \subset J$である。
(b) 命題 9.14より $\mathrm{int}K^+$の連結成分は沈点 zの安定集合 $W^s(z)$ である。
明らかに $(W^s(z) \backslash z) \cap R(f) = \emptyset$ なので $R(f) \subset K = K^+ \cap K^- = (J^+ \cup S) \cap K^- = (J^+ \cap K^-) \cup S$である。命題 1.16より $K^- = J^-$なので，$R(f) \subset J \cup S$となる。定理 8.10と $S \subset R(f)$ と合わせて，$R(f) = J \cup S$を得る。

命題 9.17 **fを双曲的とする。**
(a)$|a| = 1$ならば，$W^s(J) = J^+, W^u(J) = J^-$
(b)$|a| < 1$ならば，沈点全体の有限集合をS として，$W^s(J) = J^+, W^u(J) = J^- \backslash S$
(c)$|a| > 1$ならば，源点全体の有限集合をS_1として，$W^s(J) = J^+ \backslash S_1, W^u(J) = J^-$

証明. $|a| \leq 1$ の場合だけ証明を書く。$W^s(J) \subset J^+, W^u(J) \subset J^-$は命題 9.6で示した。
まず $J^+ \subset W^s(J)$ をいう。命題 7.2より，$W^s(K) = K^+$だから $J^+ \subset W^s(K)$ であるが J^+は f不変閉集合だから $J^+ \subset W^s(K \cap J^+)$ である。$|a| = 1$ のときは命題 9.13，$|a| < 1$ のときは命題 1.16より $K^- = J^-$なので，$K \cap J^+ = J$となり $J^+ \subset W^s(J)$ がわかる。
次に，$W^u(J) \subset J^- \backslash S$は明らかだから逆の包含関係を示す。
まず $J^- \backslash \mathrm{int}K^+ \subset W^u(J)$ を示す。命題 7.2より，$J^- = K^- = W^u(K)$ で，$J^- \backslash \mathrm{int}K^+$は f不変な閉集合だから $J^- \backslash \mathrm{int}K^+ \subset W^u(K \cap (J^- \backslash \mathrm{int}K^+))$ である。$K \cap (J^- \backslash \mathrm{int}K^+) = K^+ \cap (J^- \backslash \mathrm{int}K^+) = J^+ \cap J^- = J$だから $J^- \backslash \mathrm{int}K^+ \subset W^u(J)$ を得る。
次に $J^- \cap (\mathrm{int}K^+ \setminus S)$ の各点が $W^u(J)$ に入るかどうか検討する。補題 9.14 より $\mathrm{int}K^+$の連結成分は沈点 zの安定集合 $W^s(z)$ である。$w \in W^s(z) \backslash \{z\}$ のとき $w \in W^u(J^+)$ である。さらに $w \in J^-$ならば $w \in W^u(J^-)$ である。$J^- \cap (\mathrm{int}K^+ \backslash S) \subset W^u(J^+ \cap J^-) = W^u(J)$ となる。合わせて $J^- \backslash S \subset W^u(J)$ となる。

定理 9.18 次の 3 条件は同値である。
(a) 鎖回帰集合$R(f)$はfの双曲的集合である。
(b) 非遊走的集合$\Omega(f)$はfの双曲的集合である。
(c)fは双曲的である。（Jはfの双曲的集合である。）

証明. 定理 8.10より $J \subset \Omega(f) \subset R(f)$ だから，(c)→(a) を示せばよい。沈点の集合，源点の集合は双曲的集合だから命題 9.16より主張が従う。

参考文献

[B] Bedford E.,Iteration of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$, Proceedings of the ICM. 1990 Kyoto Japan,1991,847-858

[BS1] Bedford E., Smillie J.,Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: Current, equilibrium measure and hyperbolicity,Invent. Math. 87(1990),69-99

[BS2] Bedford E., Smillie J.,Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms,Indiana U. Math. J. 40(1991),789-792

[BS3] Bedford E., Smillie J.,Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ II: Stable manifolds and recurrence, J. AMS 4(1991),657-679

[BS4] Bedford E., Smillie J.,Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ III: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure, Math. Annalen, to appear

[BLS] Bedford E., Lyubich M., Smillie J.,Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ IV: The measure of maximal entropy and laminar current, preprint

[FM] Friedland S. ,Milnor J. ,Dynamical properties of plane polynomial automorphisms,Ergodic Th. and Dynamical Syst. 9(1989),67-99

[FS] Fornaess J. E.,Sinony N.,Complex Henon mappings in $\mathbb{C}^2$ and Fatou Bieberbach domains,Duke Math. J. 65(1992),345-380

[H] Hubbard J.,The Henon mapping in the complex domain,In: M. Bansley et al.(Eds.) Chaotic dynamics and Fractals,Academic Press,1986,101-111

[HO] Hubbard J.,Oberste-Vorth R.,Henon mappings in the complex domain, preprint

[Ka] Katok A. ,Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, Publ. Math. IHES. 51(1980),137-174

[K] Klimek M.,Pluripotential theory,Clarendon Press Oxford-New York-Tokyo,1991

[L] Lelong P.,Fonction entieres (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$,J. Analyse Math. Jerusalem 12(1964),365-407

[LG] Lelong P.,Gruman L.,Entire functions of several complex variables,Grund. der Math. Wiss. 282 Springer,1986

[M] Milnor J.,Dynamics in one complex variables: Introductory Lectures,SUNY Stony Brook Preprint #1990/5

[Sh] Shub M.,Global Stability of Dynamical Systems,Springer,1987