第 3 章　Teichmüller 空間

§1. 定義

双曲的 Riemann 面 R に対して, 第 1 章第 11 節で $M(R)_1$ 上に定義した同値関係 $\sim$ による商集合

$$M(R)_1/\sim\ = \{[\mu] \colon \mu \in M(R)_1\}$$

を R の **Teichmüller 空間**といい, $T(R)$ で表す. 同値類 $[0]$ を Teichmüller 空間 $T(R)$ の**原点**という. また $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群 Γ に対しても同様に, Γ の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ を

$$T(\Gamma) := M(\mathbb{H}, \Gamma)_1/\sim\ = \{[\mu] \colon \mu \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1\}$$

で定義する. $\pi \colon \mathbb{H} \to R$ を普遍被覆, Γ をその被覆変換群とすると, 同値性の定義から

$$T(\Gamma) = T(R)$$

が成り立つ. 特に Teichmüller 空間 $T(1) = T(\mathbb{H})$ を**普遍 Teichmüller 空間**という.

Fuchs 群 Γ に対して 定理 1.11.1 より

$$T(\Gamma) = T(\Gamma \backslash \mathbb{H}_\Gamma)$$

が成立する. そこでこの章も前章同様に, Riemann 面または楕円的変換を含まない Fuchs 群のうちで記述がより簡明になる方のみを取り扱うことにする.

$\mu, \nu \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ に対して

$$\begin{aligned} d_M(\mu, \nu) &:= \tanh^{-1} k(w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \log K(w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}) \end{aligned}$$

とおくと, d_M は $M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ 上の距離函数になる. ここで

$$k(w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}) = \left\| \frac{\mu - \nu}{1 - \bar{\nu}\mu} \right\| \leq \frac{\|\mu - \nu\|}{1 - \|\nu\| \|\mu\|}$$

であるから, d_M は Banach 空間 $M(\mathbb{H}, \Gamma)$ の部分集合としての相対位相と同じ位相を $M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ 上に定める. 特に, d_M による距離は完備である.

また $p, q \in T(\Gamma)$ に対して

$$\begin{aligned} d_{T(\Gamma)}(p, q) &:= \inf\{d_M(\mu, \nu) \colon \mu \in p, \nu \in q\} \\ &= \tanh^{-1} \inf\{k(w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}) \colon \mu \in p, \nu \in q\} \\ &= \frac{1}{2} \log \inf\{K(w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}) \colon \mu \in p, \nu \in q\} \end{aligned}$$

と定義する. このとき,

命題 1. $d_{T(\Gamma)}$ は $T(\Gamma)$ 上に完備な距離を定める.

$d_{T(\Gamma)}(p,q) \geq 0$ および $d_{T(\Gamma)}(p,q) = d_{T(\Gamma)}(q,p)$ が成り立つことは明らかである. その他の性質を示すために, 次の補題が必要である.

補題 1. 任意の $p,\ q \in T(\Gamma)$ と $\nu_0 \in q$ に対して

$$d_{T(\Gamma)}(p,q) = d_M(\mu_0,\nu_0) \tag{1}$$

を成立させる $\mu_0 \in p$ が存在する.

証明: 先ず

$$\begin{aligned}\{w^{\mu}\circ(w^{\nu})^{-1}\colon \mu\in p,\nu\in q\}\\ &= \{w^{\mu}\circ(w^{\nu})^{-1}\circ w^{\nu_0}\circ(w^{\nu_0})^{-1}\colon \mu\in p,\nu\in q\}\\ &= \{w^{\mu}\circ(w^{\nu_0})^{-1}\colon \mu\in p\}\end{aligned}$$

となることを注意しよう. そこで同値類 $\{w^{\mu}\circ(w^{\nu_0})^{-1}\colon \mu\in p\}$ 内の極値擬等角写像を f とし, $\mu_0 := \mu(f\circ w^{\nu_0}) \in p$ とすると,

$$\begin{aligned}d_{T(\Gamma)}(p,q) &= \tanh^{-1} k(f)\\ &= \tanh^{-1} k(w^{\mu_0}\circ(w^{\nu_0})^{-1}) = d(\mu_0,\nu_0)\end{aligned}$$

が成立する. ∎

命題 1 の証明: 上の補題により, $p,\ q\in T(\Gamma)$ に対して, ある $\mu_0\in p$ と $\nu_0\in q$ で (1) を成立させるものが存在しているので, $p\neq q$ とすると, $\mu_0 \not\sim \nu_0$ であるから, $w^{\mu_0}\circ(w^{\nu_0})^{-1}|_{\widehat{\mathbb{R}}} \notin \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})|_{\widehat{\mathbb{R}}}$. そこで, $d_{T(\Gamma)}(p,q) = d_M(\mu_0,\nu_0) > 0$.

次に, $p,\ q,\ r\in T(\Gamma)$ とする. $\nu_0\in q$ に対して, $\mu_0\in p$ と $\kappa_0\in r$ をそれぞれ q からの距離の定義の下限を達成するようなものとすると,

$$\begin{aligned}d_{T(\Gamma)}(p,r) &\leq d_M(\mu_0,\kappa_0)\\ &\leq d_M(\mu_0,\nu_0) + d_M(\nu_0,\kappa_0)\\ &= d_{T(\Gamma)}(p,q) + d_{T(\Gamma)}(q,r)\end{aligned}$$

となり, 三角不等式も成立する.

最後に, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $T(\Gamma)$ 内の Cauchy 列とする. $\{p_n\}$ の部分列 $\{p_{n(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ で

$$d_{T(\Gamma)}(p_{n(m+1)},p_{n(m)}) < 2^{-(m+1)}$$

となるものを選ぶことができる. $\mu_1\in p_{n(1)}$ とし, $\mu_m\in p_{n(m)}$ を

$$d_M(\mu_{m+1},\mu_m) = d_{T(\Gamma)}(p_{n(m+1)},p_{n(m)})$$

が成り立つよう帰納的に取って行くと，$\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ は $M(\mathbb{H},\Gamma)_1$ 内の Cauchy 列となるから，$M(\mathbb{H},\Gamma)_1$ の完備性より，$\{\mu_m\}$ に極限 $\mu \in M(\mathbb{H},\Gamma)_1$ が存在する．$p := [\mu] \in T(\Gamma)$ とおくと，

$$\begin{aligned} d_{T(\Gamma)}(p, p_n) &\leq d_{T(\Gamma)}(p, p_{n(m)}) + d_{T(\Gamma)}(p_{n(m)}, p_n) \\ &\leq d_M(\mu, \mu_m) + d_{T(\Gamma)}(p_{n(m)}, p_n) \to 0. \end{aligned}$$

故に $d_{T(\Gamma)}$ は完備である． ∎

$d_{T(\Gamma)}$ の定める $T(\Gamma)$ 上の完備な距離を **Teichmüller 距離**という．以後 Teichmüller 空間上では Teichmüller 距離のみを考える[25]．

命題 2. 自然な射影 $\pi_\Gamma\colon M(\mathbb{H},\Gamma) \to T(\Gamma)$ は連続な開写像である．

証明: 連続性は明らか．開写像であることは，任意の $\mu \in M(\mathbb{H},\Gamma)_1$ と $r > 0$ に対して

$$\{q \in T(\Gamma)\colon d_{T(\Gamma)}(\pi_\Gamma(\mu), q) < r\} = \pi_\Gamma(\{\nu \in M(\mathbb{H},\Gamma)_1\colon d_M(\mu,\nu) < r\}$$

が成立することからわかる． ∎

この命題と定理 1.16.1 より，$\Phi_{\mathbb{H}} \circ \pi^{-1}\colon T(\Gamma) \to A_2^{\infty}(\mathbb{L},\Gamma)$ は Teichmüller 空間の複素 Banach 空間への埋め込みを与えていることがわかる．この埋め込みを **Bers 埋め込み**という．以後 Bers 埋め込みによる $T(\Gamma)$ の像と $T(\Gamma)$ 自身とを同一視し，Teichmüller 空間に複素構造を入れる．また Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ の次元を $\dim A_2^{\infty}(\mathbb{H},\Gamma)$ で定める．定理 1.5.1 と命題 1.5.1 より，$\dim T(\Gamma) < \infty$ となるのは，$\Gamma\backslash\mathbb{H}$ が解析的有限型 Riemann 面であるときであり，言い替えると Fuchs 群 Γ が有限生成第 1 種であるときであることがわかる．

$p \in T(\Gamma)$ とし，$\nu \in p$ とする．$w^\nu\Gamma(w^\nu)^{-1}$ は $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群であり，p の代表元 ν の選び方に依らない．そこで，この Fuchs 群を Γ^p で表そう．

$$w^{\nu_*(\mu)} = w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}$$

により距離を保つ正則写像 $\nu_*\colon M(\mathbb{H},\Gamma)_1 \to M(\mathbb{H},\Gamma^p)_1$ を定義すると，ν_* は $\nu_*(\nu) = 0$ を満たし同値関係を保つので，$\pi_{\Gamma^p} \circ \nu_* \circ \pi_\Gamma$ は $p = [\nu]$ を $[0]$ にうつす $T(\Gamma)$ から $T(\Gamma^p)$ の上への距離を保つ正則写像になる．この写像も代表元 ν の選び方に依らないで定まるので，τ_p と表すことにする．τ_p を Teichmüller 空間の**基点の取り替え**という．

[25]Teichmüller 空間上には Teichmüller 距離以外にも，Carathéodory 距離や Kobayashi 距離等が定義されている．R がコンパクト Riemann 面の場合 $T(R)$ 上の Teichmüller 距離と Kobayashi 距離が等しいことは Royden [Ro] が示した．Gardiner は一般の Teichmüller 空間を有限次元の Teichmüller 空間で近似することにより，一般の場合に拡張した ([Ga4], [Ga5], [A-8])．

さて, Bers 埋め込みに関する $T(\Gamma)$ の $A_2^\infty(\mathbb{H},\Gamma)$ における形状については $T(\Gamma)$ の次元が有限の場合は良く研究され, 多くの結果が示されているが, それに較べて無限次元の Teichmüller 空間に関してはあまり多くのことは知られていないようである. ここではその中からふたつほど挙げておこう. 証明は省略するので引用論文を見て頂きたい.

$\mathbb{L}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の中への等角写像で, $\mathbb{L}$ に作用する Fuchs 群 Γ と両立するものの成す集合を $\Sigma(\mathbb{L},\Gamma)$ で表すとし,

$$S(\Gamma) := \{\mathcal{S}(f) \colon f \in \Sigma(\mathbb{L},\Gamma)\}$$
$$J(\Gamma) := \{\mathcal{S}(f) \colon f \in \Sigma(\mathbb{L},\Gamma) \text{ かつ, } f(\mathbb{L}) \text{ は Jordan 領域}\}$$

と定める.

$$T(\Gamma) \subset J(\Gamma) \subset S(\Gamma) \subset A_2^\infty(\mathbb{L},\Gamma)$$
$$J(\Gamma) = J(1) \cap A_2^\infty(\mathbb{L},\Gamma)$$
$$S(\Gamma) = S(1) \cap A_2^\infty(\mathbb{L},\Gamma)$$

は定義より容易にわかる. $T(\Gamma)$ が開であり, $S(\Gamma)$ が閉になることは既に示した[26]. さらに次のことが知られている.

定理 1. (Gehring [Ge2], [Ge3], Flinn [Fl], Sugawa [Sw])

(a)
$$T(1) = \mathrm{int} S(1)$$

(b) Γ が第 2 種ならば

$$S(\Gamma) - \overline{J(1)} \neq \emptyset \qquad \text{かつ} \qquad J(\Gamma) - \overline{T(1)} \neq \emptyset.$$

特に

$$S(\Gamma) - \overline{T(\Gamma)} \neq \emptyset$$

である.

Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ の**外半径** $o(\Gamma)$, **内半径** $i(\Gamma)$ を

$$o(\Gamma) := \sup\{\|\phi\| \colon \phi \in T(\Gamma)\}$$
$$i(\Gamma) := \inf\{\|\phi\| \colon \phi \in A_2^\infty(\mathbb{L},\Gamma) - T(\Gamma)\}$$

により定める. Nehari-Kraus の定理と Ahlfors-Weill の定理より

$$2 \le i(\Gamma) \le o(\Gamma) \le 6$$

がわかるが, さらに以下のことが知られている.

[26] 第 1 章第 13 節参照

定理 2. (a)　Γ が第 1 種有限生成ならば, $i(\Gamma) > 2$. (Nakanishi [Nk])
(b)　任意の正数 ε に対して, Γ 内に $|\mathrm{tr}\gamma| < 2+\varepsilon$ を満たす放物的変換が存在するならば, $i(\Gamma) = 2$. (Nakanishi-Velling [NV])
(c)　$o(\Gamma) = 6$ となる必要十分条件は, Γ が定理 1.7.3 の条件 (a), (b) のどちらかを満たすことである. (Nakanishi-Yamamoto [NY]).

$T(\Gamma)$ の形状について以外にも Teichmüller 空間に関する各種の研究がなされているが, この解説の本題から外れるので, ここでは省略させて頂く[27].

§2. 正則被覆と Teichmüller 距離

正則被覆 $\pi\colon \tilde{R} \to R$ が定める引き戻し π^* は $M(R)$ から $M(\tilde{R})$ の中への距離を保つ線型作用素である. 同値性の定義から π^* は同値関係を保つので, π^* により, $T(R)$ から $T(\tilde{R})$ の中への単射 ι が導かれるが, さらに ι が埋め込みになっていることが容易にわかる. また $\pi^*(M(R))$ は $M(\tilde{R})$ において閉であるから, $\iota(T(R))$ も $T(\tilde{R})$ 内の閉集合である. 特に, すべての Teichmüller 空間 $T(R)$ は普遍 Teichmüller 空間 $T(\mathbb{H})$ に埋め込まれている.

第 2 章第 8 節に述べた極値擬等角写像の正則被覆面への持ち上げの極値性に関する結果と Teichmüller 距離の定義から, 次の定理が成り立つ.

定理 1. (McMullen [Mc1])　(a)　被覆 $\pi\colon \tilde{R} \to R$ が amenable であれば, 埋め込み $\iota\colon T(R) \to T(\tilde{R})$ は Teichmüller 距離を保つ.
(b)　π が amenable でなければ, ι は Teichmüller 距離を真に減少させる.

証明: $\mu \in M(R)_1$ に対して, R を定義域とする擬等角写像で, その Beltrami 係数が μ になるようなものを g^μ とおき, g^μ の $\tilde{R}$ への持ち上げを G^μ で表すものとする. $\mu \in p$ のとき, $\mu(G^\mu) = \pi^*\mu \in \iota(p)$ である.

(a):　$p, q \in T(R)$ に対して, $\mu, \nu \in M(R)_1$ を $d_{T(R)}(p,q) = d_{M(R)}(\mu,\nu)$ が成立するようにとると, $g^\mu \circ (g^\nu)^{-1}$ は極値擬等角写像になる. 定理 1.7.2 と定理 2.8.1 より, その持ち上げ $G^\mu \circ (G^\nu)^{-1}$ も極値的であるので,

$$
\begin{aligned}
d_{T(\tilde{R})}(\iota(p),\iota(q)) &= d_{M(\tilde{R})}(\mu(G^\mu),\mu(G^\nu)) \\
&= d_{M(\tilde{R})}(\pi^*\mu,\pi^*\nu) \qquad (1)\\
&= d_{M(R)}(\mu,\nu) = d_{T(R)}(p,q)
\end{aligned}
$$

となる.

(b):　この場合には持ち上げ $G^\mu \circ (G^\nu)^{-1}$ は極値的にならないので, 式 (1) の最初の等号が成立しない. ∎

[27]例えば, 上記引用論文の著者以外では京大の谷口氏, 後藤氏, 名大の谷川氏, 東工大の志賀氏, 松崎氏等が詳しく御存知ですので直接お尋ね下さい.

被覆が amenable でない場合にどの程度 Teichmüller 距離を減少させるかということをみるために, $p \in T(R)$ と $r > 0$ に対して

$$N(p,r) := \frac{1}{r}\sup\{d_{T(\tilde{R})}(\iota(p),\iota(q)) \colon q \in T(R),\ d_{T(R)}(p,q) < r\}$$

とおく. また, $R(p)$, $\tilde{R}(p)$ をそれぞれ $p \in T(R)$, $\iota(p) \in T(\tilde{R})$ に対応する Riemann 面とする. 即ち, $\mu(g) \in p$ となるような擬等角写像 g による R の像を $R(p)$ とし, g の $\tilde{R}$ への持ち上げ G による $\tilde{R}$ の像を $\tilde{R}(p)$ とする. ここで,

$$\Theta_p := \Theta_{R(p)\backslash\tilde{R}(p)}$$

とおくと[28],

定理 2. ([Mc1])

(a) $$\Big|N(p,\rho) - \|\Theta_p\|\Big| \le \frac{\rho}{2} + O(\rho^2),$$

(b) $$|N(p,\rho) - N(q,\rho)| \le \frac{2}{\rho} d_{T(R)}(p,q),$$

(c) $d_{T(R)}(p,q) < \rho$ ならば

$$\Big|\|\Theta_p\| - \|\Theta_q\|\Big| \le 3\sqrt{\rho} + O(\rho)$$

特に, $\|\Theta_p\|$ は Teichmüller 距離に関して一様連続である.

証明は元論文[29] または [B-9] を御覧頂きたい. なお, 定理 1.7.4 より, $\|\Theta_p\|$ を $T(R)$ 上で一様に 1 より小さく評価することはできないことがわかる.

§3. 部分的に等角な擬等角写像による変形

双曲的 Riemann 面 R の測度正の可測部分集合 V に対して, $E := R - V$ とおき,

$$\begin{aligned} M(R,V) &:= \{\mu \in M(R) \colon \mu|_E = 0\}, \\ M_0(R,V) &:= M_0(R) \cap M(R,V), \\ N(R,V) &:= N(R) \cap M(R,V), \\ M_{harm}(R,V) &:= \{\chi_V \mu \colon \mu \in M_{harm}(R)\} \end{aligned}$$

[28] $\Theta_{R(p)\backslash\tilde{R}(p)}$ を定めるためには, 標識 (marking) も縁 bd(R) 上での境界値が一致することも不要である. つまり, Θ_p は $T(R)$ を定義域と考えるより, R の moduli 空間を定義域とした方が自然かも知れない.

[29] なお, McMullen は R が解析的有限型であるという仮定をおいていますが, この部分に関してはこの仮定は不要です.

と定義する. また, $\delta > 0$ に対して

$$M(R,V)_\delta := \{\mu \in M(R,V) \colon \|\mu\| < \delta\}$$

とおく.

この節では $M(R,V)_\delta$ の Φ_R による像が $T(R)$ における原点の近傍になるための必要条件と十分条件について考察する.

なお, 次の結果は以前から知られている[30].

定理 1. R が解析的有限型である場合, 任意の測度正の可測部分集合 V と任意の $\delta > 0$ に対して, $\mathrm{int}(\Phi_R(M(R,V)_\delta))$ は $T(R)$ の原点を含む.

もちろん, R を解析的有限型に限っても, 一般には $\Phi_R(M(R,V)_1) = T(R)$ とは限らない. この等式が成立するかどうかは V の形状による (Savin [Sv]).

また, 解析的有限型でない Riemann 面の場合には定理 2 の類似が成り立たないことを示す例がある (Oikawa [Oi][31]).

さてこの節の主張であるが, 先ず必要条件として

定理 2. ([Oh4]) $T(R)$ の原点が $\Phi_R(M(R,V)_1)$ の内点になるならば,

$$r(V;R) > 0$$

が成立する. ここに, $r(V;R)$ は第 1 章第 17 節で定義したものである.

定理 1.17.5 を用いると, 定理 2 より次の系が導かれる.

系 1. R が解析的有限型でない場合, もし

$$\int_V \omega_R \lambda_R^2 < \infty$$

ならば, $T(R)$ の原点は $\Phi_R(M(R,V)_1)$ の内点でない. ただし, ω_R は第 1 章第 17 節で定義したものである.

$R = \mathbb{D}$ の場合にはさらに強い主張が成り立つ.

定理 3. ([Oh4])

$$\mathrm{int}(\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},V)_1)) \neq \emptyset$$

ならば,

$$r(V;\mathbb{D}) > 0.$$

[30] 例えば Krushkal [A-14] の第 2 章および Gardiner [Ga1], [Ga2] の議論で実質的に用いられているし, Oikawa [Oi] p.551 では明示的に述べられている.

[31] 例は若林氏と谷口氏による.

証明: κ を $M(\mathbb{D},V)_1$ の任意の元とする. $\kappa_*\colon M(\mathbb{D})_1 \to M(\mathbb{D})_1$ を

$$W^{\kappa_*(\mu)} = W^{\mu} \circ (W^{\kappa})^{-1}$$

で定めると,

$$\kappa_*(M(\mathbb{D},V)_1) = M(\mathbb{D},W^{\kappa}(V))_1$$

を満たすので, κ から定まる $T(\mathbb{D})$ の基点の取り替え $\tau_{[\kappa]}$ も

$$\tau_{[\kappa]}(\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},V)_1)) = \Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},W^{\kappa}(V))_1) \tag{1}$$

を満たしている.

さて, $r(V;\mathbb{D})=0$ であると仮定すると, 系 1.17.3 より,

$$r(W^{\kappa}(V);\mathbb{D}) = 0$$

となるので, 定理 2 から, $T(\mathbb{D})$ の原点 $\Phi_{\mathbb{D}}(0)$ は $\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},W^{\kappa}(V))_1)$ の内点ではない. よって (1) より,

$$\Phi_{\mathbb{D}}(\kappa) \notin \mathrm{int}(\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},V)_1)).$$

κ は任意であるから,

$$\mathrm{int}(\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},V)_1)) = \emptyset$$

が得られた. ∎

定理 2 の証明: $r(V,R)=0$ とすると, ノルム 1 の列 $\{\phi_n\} \subset A_2^1(R)$ で $\|\chi_V \phi_n\| \to 0$ となるものが存在する. 部分列を選ぶことにより, $\{\phi_n\}$ はある $\phi \in A_2^1(R)$ に広義一様収束しているとして良い. Fatou の補題を用いると, $\|\chi_V\phi\| \le \lim \|\chi_V\phi_n\| = 0$ であるから, $\chi_V\phi = 0$ となり, V の測度が正であるから, $\phi=0$ となる. つまり, $\{\phi_n\}$ は 0 に広義一様収束している. このとき, 定理 2.3.3 より, Hamilton 条件を満たす $\mu_0 \in M(R,E)$, $\|\mu_0\|=1$, が存在する. さて, 定理の主張を示すには, 任意の ζ, $0<|\zeta|<1$, に対して

$$\Phi_R(\zeta\mu_0) \notin \Phi_R(M(R,V)_1) \tag{2}$$

となることを証明したら良い.

(2) が成立しなかったとしよう. すると, ある ζ, $0<|\zeta|<1$, に対して, $\zeta\mu_0$ と同値な $\nu \in M(R,V)_1$ が存在する. $h\colon R \to R'$ を $\mu(h) = \zeta\mu_0$ であるような擬等角写像とすると, μ_0 が Hamilton 条件を満たしているから, h は極値的になり, また極値性の定義から, 逆写像 h^{-1} も極値的である. $V' := h(V)$, $E' := h(E)$, $\mu := \mu(h^{-1})$ とおくと, $|\mu \circ h| = |\zeta|\,|\mu_0|$, であるから, $\mu \in M(R',E')_1$ である. $\{\psi_n\} \subset A_2^1(R')$ を μ に対する Hamilton 列とすると,

$$\begin{aligned}\int_{V'} |\psi_n| = 1 - \int_{E'} |\psi_n| &\le 1 - \frac{1}{|\zeta|}\left|\int_{R'} \mu\psi_n\right| \\ &\to 1 - \frac{1}{|\zeta|}\|\mu\| = 0\end{aligned}$$

であるから, R' 上で Reich-Strebel の不等式を適用すると,

$$\begin{aligned}
1 &\le \int_{R'} \frac{|1-\mu\psi_n/|\psi_n||^2}{1-|\mu|^2} \frac{(1+|\nu\circ h^{-1}|)^2}{1-|\nu\circ h^{-1}|^2} |\psi_n| \\
&\le \frac{1}{1-\|\mu\|^2} \int_{E'} \left|1-\frac{\mu\psi_n}{|\psi_n|}\right|^2 |\psi_n| + \frac{1+\|\nu\|}{1-\|\nu\|} \int_{V'} |\psi_n| \\
&\le \frac{1}{1-\|\mu\|^2} \Bigl(1 - 2\,\mathrm{Re} \int_{R'} \mu\psi_n + \|\mu\|^2\Bigr) + o(1) \\
&\to \frac{(1-\|\mu\|)^2}{1-\|\mu\|^2}.
\end{aligned}$$

よって, $\|\mu\| = 0$ となるが, これは, $\|\mu\| = |\zeta|\,\|\mu_0\| \neq 0$ に反する. 故に, $r(V,R) > 0$ が成立する. ∎

一方, 十分条件は

定理 4. ([Oh2], [Oh3]) もし V の測度が正でありかつ,

$$\int_E \max(\omega_R^2, 1)\lambda_R^2 < \infty$$

が成り立つならば,
(a) $T(R)$ の原点 [0] のある近傍 U から $M_{harm}(R,V)$ の原点のある近傍上への正則な同相写像 s_V で, $\Phi_R \circ s_V = \mathrm{id}_U$ となるものが存在する. 特に, 任意の $\delta > 0$ に対して, $\Phi_R(M(R,V)_\delta)$ は $T(R)$ の原点の近傍になる.
(b) さらに, 任意の $\nu \in N(R,V)$ に対して, $M_0(R,V)$ 内の C^1 級曲線 ν_t で

$$\nu_0 = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \left.\frac{d\nu_t}{dt}\right|_{t=0} = \nu$$

となるものが存在する.

系 1.17.1 の証明と同様にすれば, 次の系が導かれる. この系は定理 1 を含んでいる.

系 2. E が R のすべての尖点を埋めた Riemann 面 $\dot{R}$ において相対コンパクトでありかつ, V の測度が正であるならば, 定理 4 の主張 (a), (b) が成立する.

次の系は系 1.17.2 よりわかる.

系 3. ある正数 ε が存在して, R 上の任意の閉測地線の長さが ε 以上になるとすると,

$$\mathrm{Area}(E) = \int_E \lambda_R^2 < \infty$$

が成り立つならば, 定理 4 の主張 (a), (b) が成立する.

さて，定理 4 を証明しよう．この拡張された場合についても，$V = R$ の場合と同じく陰函数定理が適用できる状況であること，即ち，正則写像 Φ_R の $M(R,V)_1$ への制限 $\Phi_R|_{M(R,V)_1}$ についても，次の主張 (3)-(7) が成立することを示したら良い．

(3) $d(\Phi_R|_{M(R,V)_1})(0)\colon M(R,V) \to A_2^\infty(R^*)$ は全射である．

(4) $\ker d(\Phi_R|_{M(R,V)_1})(0) = N(R,V)$.

(5) $M_{harm}(R,V) \cap N(R,V) = \{0\}$.

(6) $M_{harm}(R,V) + N(R,V) = M(R,V)$.

(7) M_{harm} は $M(R,V)$ の閉部分空間である．

主張 (3) の証明: J を R からその鏡像 R^* への自然な反等角写像とする．

$$\mathcal{L}_{R^*}\colon A_2^\infty(R^*) \ni \psi \mapsto \overline{\psi} \circ J \in A_2^\infty(R)$$

は Banach 空間の間のノルムを保つ反線型写像である．また，

$$\mathcal{B}_R\colon M(R) \ni \mu \mapsto \lambda_R^2 \bar{\mu} \in L_2^\infty(R) \tag{8}$$

も Banach 空間の間のノルムを保つ反線型写像である．$\mu \in M(R)$ に対して

$$\mathcal{L}_{R^*}(d\Phi_R(0)[\mu]) = -2\beta_R[\mathcal{B}_R(\mu)]$$

であったので，

$$L^p(V) := \{\nu \in L_2^p(R)\colon \nu|_E = 0\}$$

とおくと，主張 (3) は

$$\beta_R\colon L^\infty(V) \to A_2^\infty(R)$$

が全射であることと同値である．さらに，$\phi \in A_2^1(R)$ と $\nu \in L^\infty(V)$ に対して，定理 1.6.2 と 1.6.3 より

$$(\phi, \beta_R[\nu]) = (\beta_R[\phi], \nu) = (\phi, \nu) = (\phi, \chi_V \nu) = (\chi_V \phi, \nu)$$

であるので，β_R は $\chi_V\colon A_2^1(R) \to L^1(V)$ の共役作用素になるから，β_R が全射であることは χ_V に有界な逆作用素が存在することと同値である．V が測度正であるので，逆作用素 χ_V^{-1} は存在しているが，第 1 章第 17 節で注意したように $\|\chi_V^{-1}\| = 1/r(V;R)$ であったから，結局，主張 (3) は $r(V;R) > 0$ と同値である．ところで，定理の仮定と Schwarz の不等式より

$$\int_E \omega_R \lambda_R^2 \le \Big(\int_E \omega_R^2 \lambda_R^2\Big)^{1/2} \Big(\int_E \lambda_R^2\Big)^{1/2} \le \int_E \max(\omega_R^2, 1)\lambda_R^2 < \infty$$

となるから，定理 1.17.6 を用いると，$r(V;R) > 0$ が導かれる．故に，主張が成立する． ∎

主張 (4) の証明: $\ker d\Phi_R(0) = N(R)$ であるから

$$\ker d(\Phi_R|_{M(R,V)_1})(0) = M(R,V) \cap N(R) = N(R,V)$$

である. ∎

主張 (5)–(7) の証明には以下の事実を用いる.

補題 1. ([Oh2]) 定理 4 の仮定の下で,

$$\beta_R[\chi_E\phi] = \phi, \qquad \text{即ち} \qquad \beta_R[\chi_V\phi] = 0 \tag{9}$$

を満たす $\phi \in A_2^1(R)$ は $\phi = 0$ のみである. 同様のことが $\phi \in A_2^\infty(R)$ についても成り立つ.

証明: $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$\int_E \lambda_R^{-2}|\phi|^2 \le \int_E \lambda_R^2\omega_R^2 < \infty$$

であり, 一方, $\phi \in A_2^\infty(R)$ に対しても

$$\int_E \lambda_R^{-2}|\phi|^2 \le \|\phi\|_\infty^2 \int_E \lambda_R^2 < \infty$$

であるから, 共に $\chi_E\phi \in L_2^2(R)$ となる. そこで, 条件 (9) を満たすならば

$$\|\phi\|_2 = \|\beta_R[\chi_E\phi]\|_2 \le \|\beta_R\|\,\|\chi_E\phi\|_2 \le 3\|\chi_E\phi\|_2$$

より, $\phi \in A_2^2(R)$ となるが,

$$\|\chi_V\phi\|_2^2 = (\chi_V\phi, \phi) = (\beta_R[\chi_V\phi], \phi) = 0$$

であるから, $\chi_V\phi = 0$. V の測度は正であるから, $\phi = 0$ となる. ∎

定理 5. ([Oh2]) 定理 4 の仮定の下で,

$$\sup\left\{\frac{\|\phi\|}{\|\beta_R[\chi_V\phi]\|} : \phi \in A_2^1(R)\right\} < \infty. \tag{10}$$

証明: (10) が成立しないと仮定すると, ある列 $\{\phi_n\} \subset A_2^1(R)$, $\|\phi_n\| = 1$, で

$$\lim_{n\to\infty} \|\beta_R[\chi_V\phi_n]\| = 0$$

となるものが存在する. 部分列を選んだとして, $\{\phi_n\}$ 自身がある $\phi \in A_2^1(R)$ に広義一様収束しているとして良い. すると, 仮定と命題 1.17.1 より

$$\|\beta_R[\chi_E(\phi_n - \phi)]\| \le \|\beta_R\|\,\|\chi_E(\phi_n - \phi)\| \to 0$$

となる. そこで, R 内の任意のコンパクト集合 C に対して,

$$\begin{aligned}
&\|\chi_C(\phi-\beta_R[\chi_E\phi])\| \\
&\qquad \le \|\chi_C(\phi-\phi_n)\| + \|\chi_C(\phi_n-\beta_R[\chi_E\phi_n])\| + \|\chi_C\beta_R[\chi_E(\phi_n-\phi)]\| \\
&\qquad \le \|\chi_C(\phi-\phi_n)\| + \|\beta_R[\chi_V\phi_n]\| + \|\beta_R\|\,\|\chi_E(\phi_n-\phi)\| \\
&\qquad \to 0.
\end{aligned}$$

C は任意だから, $\phi=\beta_R[\chi_E\phi]$ となり, 上の補題 1 より, $\phi=0$ であることがわかる. しかしながら, このとき

$$\begin{aligned}
1=\|\phi_n\| &\le \|\beta_R[\chi_V\phi_n]\| + \|\beta_R[\chi_E(\phi_n-\phi)]\| \\
&\le \|\beta_R[\chi_V\phi_n]\| + \|\beta_R\|\,\|\chi_E(\phi_n-\phi)\| \to 0
\end{aligned}$$

となり, 矛盾が生じる. 故に, (10) は成立する. ∎

主張 (5) の証明:

$$\begin{aligned}
A_V^p &:= \{\chi_V\phi\colon \phi\in A_2^p(R)\} \\
(A_V^1)^\perp &:= \{\nu\in L^\infty(V)\colon \int_R \nu\phi=0 \quad (\forall\phi\in A_2^1(R))\} \\
&= L^\infty(V)\cap A_2^1(R)^\perp
\end{aligned}$$

とおく. (8) で定めた同型写像 $\mathcal{B}_R$ を用いることにより,

(11)
$$A_V^\infty \cap (A_V^1)^\perp=\{0\}$$

を示したら良い.

$\psi\in A_2^\infty(R)$ が $\chi_V\psi\in(A_V^1)^\perp\subset A_2^1(R)^\perp$ を満たすならば, 任意の $\phi\in A_2^1(R)$ に対して

$$(\phi,\beta_R[\chi_V\psi])=(\phi,\chi_V\psi)=(\chi_V\phi,\psi)=(\beta_R[\chi_V\phi],\psi)=0$$

であるから, $A_2^\infty(R)\cong A_2^1(R)^*$ より, $\beta_R[\chi_V\psi]=0$ となるから, 補題 1 より, $\psi=0$. 故に, (11) が成立する. ∎

主張 (6) の証明: 上の主張 (5) の証明と同様に

$$A_V^\infty+(A_V^1)^\perp=L^\infty(V)$$

であることを示したら良い. ところで (11) は, $\beta_R\colon A_V^1\to A_2^1(R)$ の値域 $\beta_R[A_V^1]$ が $A_2^1(R)$ において稠密であることと同値である. そこで, 稠密な定義域 $\beta_R[A_V^1]$ を持つ β_R の逆作用素 $\beta_R^{-1}\colon A_2^1(R)\to L^1(V)$ の共役作用素 $\beta_V\colon L^\infty(V)\to A_2^\infty(R)$

が定義できる. 定理 5 より, β_R^{-1} は有界になるから, 共役作用素 β_V も有界である. β_V の定義より, 任意の $\phi \in A_2^1(R)$ と $\nu \in L^\infty(V)$ に対して

$$\begin{aligned}(\phi, \chi_V\beta_V[\nu]) &= (\chi_V\phi, \beta_V[\nu]) = (\beta_R[\chi_V\phi], \beta_V[\nu]) \\ &= (\chi_V\phi, \nu) = (\phi, \nu)\end{aligned}$$

が成立するから, $\nu - \chi_V\beta_V[\nu] \in A_2^1(R)^\perp \cap L^\infty(V) = (A_V^1)^\perp$ がわかる. よって, 任意の $\nu \in L_V^\infty$ は $\chi_V\beta_V[\nu] \in A_V^\infty$ と $\nu - \chi_V\beta_V[\nu] \in (A_V^1)\perp$ の和で表すことができた. ∎

主張 (7) の証明: $\psi \in A_2^\infty(R)$ とする. 任意の $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$(\beta_R[\chi_V\phi], \psi) = (\chi_V\phi, \psi) = (\chi_V\phi, \chi_V\psi) = (\beta_R[\chi_V\phi], \beta_V[\chi_V\psi])$$

であるから, $\beta_R[A_V^1]$ の $A_2^1(R)$ における稠密性と $A_2^\infty(R) \cong A_2^1(R)^*$ より, $\psi = \beta_V[\chi_V\psi]$. つまり, $\beta_V\chi_V = \mathrm{id}_{A_2^\infty(R)}$ である.

そこで, $\nu \in L^\infty(V)$ が A_V^∞ 内の点列 $\{\chi_V\psi_n\}$ の極限であるとすると,

$$\begin{aligned}\nu &= \lim \chi_V\psi_n = \lim \chi_V\beta_V[\chi_V\psi_n] \\ &= \chi_V\beta_V[\lim \chi_V\psi_n] = \chi_V\beta_V[\nu] \in A_V^\infty.\end{aligned}$$

よって, A_V^∞ は $L^\infty(V)$ の閉部分空間となるが, これは主張 (7) と同値である. ∎

上の証明中に用いた事実をまとめると,

定理 6. ([Oh2]) 定理 4 の仮定の下で, 以下の性質を持つ有界線型作用素 $\beta_V : L^\infty(V) \to A_2^\infty(R)$ が存在する.
(a) $\beta_V|_{A_V^\infty}$ は $\chi_V : A_2^\infty(R) \to A_V^\infty$ の逆作用素である. 特に, β_V は全射である.
(b)
$$\ker \beta_V = (A_V^1)^\perp$$

ここから, 次のこともわかる. 証明は容易である.

定理 7. ([Oh2]) 定理 4 の仮定の下で, A_V^1, A_V^∞ はそれぞれ $L^1(V)$, $L^\infty(V)$ の閉部分空間であり,

$$(A_V^1)^* \cong A_V^\infty$$

定理 4 の応用として, 以下のことが得られる.

定理 8. 任意の $\mu \in M(\mathbb{D})_1$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正数 $r \leq 1/2$ と $\nu \in M_0(\mathbb{D})$ で

$$\begin{aligned}\nu(z) &= \mu(z), & |z| < r \\ |\nu(z)| &\leq \varepsilon, & |z| \geq r\end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

補題 2. 任意の $K \geq 1$ と $0 < r < 1$ に対して, 1 より小さい正数 ρ, ρ' で次の条件 (a) を満たすものが存在する.
(a) f が $\mathbb{D}$ の K-擬等角自己写像で, 境界 $\partial\mathbb{D}$ 上の 3 点 ± 1, i を固定しているならば,

$$f(\Delta(r)) \subset \Delta(\rho) \qquad \text{かつ} \qquad f(\mathbb{D} - \Delta(\rho')) \cap \Delta(\rho) = \emptyset.$$

ここに, $\Delta(r) := \{|z| < r\}$ である.

証明: K-擬等角写像の逆写像はやはり K-擬等角写像であり, 境界上の 3 点を固定する $\mathbb{D}$ の K-擬等角自己写像の族 $\mathcal{F}$ は正規族を成すから,

$$\rho := \sup\{|f(z)| \colon f \in \mathcal{F}, |z| < r\} < 1,$$
$$\rho' := \sup\{|f^{-1}(z)| \colon f \in \mathcal{F}, |z| < \rho\} < 1.$$

この ρ, ρ' が求める正数である. ∎

定理 8 の証明: $0 < t \leq 1/2$ とし, $k := \|\mu\|$, $\mu_t := \chi_{\Delta(t)}\mu$ とおく. $\varepsilon \leq k$ として良い. $p > 2$ を 2 に十分近くとり, Hilbert 変換 $T\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ のノルムが $1/k$ より小さくなるようにして, 以下固定する. また, q を $1/p + 1/q = 1$ で定める.

このとき, 第 1 章第 9 節の議論から, $\tilde{\mu}_t := (1 - \mu_t T)^{-1}\mu_t$ について

$$\|\tilde{\mu}_t\|_p \leq A_1\|\mu_t\|_p \leq A_2 t^{2/p}$$

となる. ここで, A_1, A_2 は k と p のみによる正定数であり, 以下の $A_3, \ldots$ も同様である. そこで, $\tilde{\mu}_r$ の Cauchy 変換

$$P[\tilde{\mu}_t](z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta(t)} \tilde{\mu}_t(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\Big)\, d\xi d\eta$$

について, $|z| > 1$ ならば

$$\begin{aligned}
|P[\tilde{\mu}_t]'(z)| &\leq \frac{1}{\pi}\|\tilde{\mu}_t\|_p\Big(\iint_{\Delta(t)} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{2q}}\Big)^{1/q} \\
&\leq A_3 t^2(|z| - 1/2)^{-2} \leq A_4 t^2 \\
|P[\tilde{\mu}_t]''(z)| &\leq A_5 t^2(|z| - 1/2)^{-3} \\
|P[\tilde{\mu}_t]'''(z)| &\leq A_6 t^2(|z| - 1/2)^{-4}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
|1 + P[\tilde{\mu}_t]'(z)| &\geq 1 - A_4 t^2 \\
(|z|^2 - 1)|P[\tilde{\mu}_t]''(z)| &\leq A_7 t^2 \\
(|z|^2 - 1)|P[\tilde{\mu}_t]'''(z)| &\leq A_8 t^2
\end{aligned}$$

となり, 故に

$$\|\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_t)\| = \|\mathcal{S}(z + P[(1-\mu_t T)^{-1}\mu_t])\| \le A_9 t^2.$$

である.

$f_r := W^{\mu_t}$ とおくと, 補題 2 より, k のみに依る正数 $\rho < 1$ と $\rho' < 1$ が存在して,

$$f_t(\Delta(t)) \subset f_t(\Delta(1/2)) \subset D_\rho,$$
$$f_t(\mathbb{D} - \Delta(\rho)) \cap \Delta(\rho') = \emptyset$$

となるので, 相対コンパクト集合 $\Delta(\rho')$ を除いた部分 $\mathbb{D} - \Delta(\rho')$ において部分擬等角変形の定理 4 を適用すると, 十分小さな t に対しては, f_t に同値な $\mathbb{D}$ の擬等角自己写像 g_t で

$$\mu(g_t)|_{\Delta(\rho')} = 0, \qquad \text{かつ} \qquad \|\mu(g_t)\| \le A_{10} t^2$$

となるものが存在する.

r を $A_{10} r^2 < \varepsilon$ となるよう小さくとって, $\nu := \mu(g_r^{-1} \circ f_r)$ とおくと, これが定理の主張にある ν と r になっている. 実際先ず, $\nu \in M_0(\mathbb{D})$ は作り方から明らかである. また, g_r は $\Delta(\rho')$ 上で等角だから, ρ, ρ' の定め方より, g_r^{-1} は $\Delta(\rho) \supset f_r(\Delta(r))$ 上で等角である. よって

$$\nu = \frac{\mu_r + \kappa}{1 + \bar{\mu}_r \kappa}, \qquad \kappa := \mu(g_r^{-1}) \circ f_r \cdot \frac{(\bar{f}_r)_{\bar{z}}}{(f_r)_z}$$

より, $\Delta(r)$ 上で $\kappa = 0$, 即ち $\nu = \mu_r = \mu$. 一方, $\mathbb{D} - \Delta(r)$ 上では $\mu_r = 0$ だから, $|\nu| = |\kappa| \le \|\mu(g_r)\| < \varepsilon$ となる. ∎

系 4. f を $\mathbb{D}$ の擬等角自己写像とする. このとき, 任意の正数 ε に対して, $\mathbb{D}$ の開部分集合 U と f に同値な擬等角写像 g で

$$\mu(g)|_U = 0, \qquad \|\mu(g)\| \le \|\mu(f)\| + \varepsilon$$

となるものが存在する.

証明: $\mu := \mu(f)$ として定理 8 を適用して得られる, $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ と同値な擬等角写像 h, $\mu(h) = \nu$, および正数 r に対して, $U := h(\{|z| < r\})$, $g := f \circ h^{-1}$ とおくと, g は f と同値でありかつ,

$$|\mu(g)| = \left|\left(\frac{\mu - \nu}{1 - \bar{\nu}\mu}\right) \circ h^{-1}\right|$$

であるから, U 上では $\mu(g) = 0$ となり, また

$$\begin{aligned}\|\mu(g)\| &\le \frac{\|\mu\| + \|\nu\|}{1 + \|\nu\|\,\|\mu\|} \\ &\le \|\mu\| + \|\nu\| \le \|\mu\| + \varepsilon\end{aligned}$$

も成立する. ∎

系 5. $F\colon R \to R'$ を極値擬等角写像で, ある正数 $\delta < 1$ に対して,

$$U := \mathrm{int}\{p \in R\colon |\mu(F)(p)| \le \delta\|\mu(F)\|\} \neq \emptyset$$

となるようなものとすると, F に同値な極値擬等角写像 G で

$$\mathrm{int}\{p \in R\colon \mu(G)(p) = 0\} \neq \emptyset \tag{12}$$

であるようなものが存在する.

証明: F が等角であれば, $G := F$ とすれば良い. そこで $\|\mu(F)\| > 0$ と仮定する. U 内の局所円板 (Δ, ϕ) と等角写像 $\psi\colon F(\Delta) \to \mathbb{D}$ をとる. $f := \psi \circ F \circ \phi^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ と $\varepsilon := (1-\delta)\|\mu(F)\|$ に対して系 4 を適用して得られる g を用いて

$$G(p) := \begin{cases} F(p), & p \in R - U \\ \psi^{-1} \circ g \circ \phi, & p \in U \end{cases}$$

と定めると, G は R から R' への擬等角写像で, F と同値でありかつ, (12) を満たしていることがわかる. さらに,

$$\begin{aligned} \|\mu(g)\| &\le \|\mu(f)\| + \varepsilon \\ &\le \delta\|\mu(F)\| + (1-\delta)\|\mu(F)\| = \|\mu(F)\| \end{aligned}$$

であるから,

$$\|\mu(G)\| \le \max(\|\mu(F)\|, \|\mu(g)\|) \le \|\mu(F)\|$$

故に, G も極値的である. ∎

§4. Teichmüller 空間の測地線の一意性

有限次元の Teichmüller 空間においては任意の 2 点を通る Teichmüller 距離に関する測地線は一意的である (Kravetz [Kv]). 無限次元の Teichmüller 空間においても次の主張が成立する.

定理 1. (Li [Li2]) $p, p' \in T(R)$ とする. Beltrami 係数の同値類 $\tau_{p'}(p)$ の中の極値的な元 μ_0 が一意極値的でありかつ, $|\mu_0|$ が定数ならば, $T(R)$ において p と p' とを結ぶ測地線は一意的である.

証明: 基点の取り替えで測地性は保たれるから, 一般性を失うことなく, p' が原点であるとして良い. つまり, p と $[0]$ とを結ぶ測地線は一意的であることを示せば良い. $d_{\mathbb{D}}$ で $\mathbb{D}$ の双曲距離を表すこととする.

l を $[0]$ と p とを結ぶ測地線のひとつとし, $q=[\nu]\in l$ とする. ν は極値的である, 即ち $d_{\mathbb{D}}(0,\|\nu\|)=d_{T(R)}([0],q)$ であるとして良い. $\kappa\in\tau_q(p)$ を極値的な元とすると,

$$d_{\mathbb{D}}(0,\|\kappa\|)=d_{\tau_q(T(R))}([0],\tau_q(p))=d_{T(R)}(q,p)$$

である. q は測地線 l 上の点であることを用いると,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(0,\|\mu_0\|) &= d_{T(R)}([0],p)=d_{T(R)}([0],q)+d_{T(R)}(q,p) \\ &= d_{\mathbb{D}}(0,\|\nu\|)+d_{\mathbb{D}}(0,\|\kappa\|)=d_{\mathbb{D}}\Big(0,\frac{\|\nu\|+\|\kappa\|}{1+\|\nu\|\,\|\kappa\|}\Big) \\ &\geq d_{\mathbb{D}}(0,\|(\nu_*)^{-1}(\kappa)\|) \end{aligned}$$

となる. μ_0 は $(\nu_*)^{-1}(\kappa)$ と同値な一意極値的 Beltrami 係数であるので, $\mu_0=(\nu_*)^{-1}(\kappa)$. 即ち

$$\frac{\nu+\tilde{\kappa}}{1+\overline{\nu}\tilde{\kappa}}=\mu_0, \qquad \tilde{\kappa}=(\kappa\circ f)\frac{\overline{f_z}}{f_z}$$

である. 仮定 $|\mu_0|=\|\mu_0\|$ を用いると,

$$|\nu|=\|\nu\|, \quad |\tilde{\kappa}|=\|\tilde{\kappa}\|$$
$$\arg\nu=\arg\tilde{\kappa}=\arg\mu_0$$

となるので, $\nu/\|\nu\|=\mu_0/\|\mu_0\|$. よって, 測地線は μ_0 により一意的に定まる. ∎

以上の証明を見ると, 極値 Beltrami 係数の一意性および, その絶対値が定数になることが保証されない無限次元の Teichmüller 空間においては測地線の一意性が成立しないことが予想されるであろう. 実際, Li は普遍 Teichmüller 空間においては測地線の一意性が成立しないことを示した ([Li2]). Tanigawa は, Taniguchi [Tc7] と Maitani [Mi2] の結果を利用して, 一般の無限次元 Teichmüller 空間においてもやはり測地線の一意性が成立しないことを示した ([Tw1]). なお, Li は [Li3] において Tanigawa の結果の別証明[32]を与えている. ここでは 2 人の証明を踏まえて, 次の形の主張を述べておこう.

定理 2. p, p' を無限次元 Teichmüller 空間 $T(R)$ の相異なる 2 点とする. もし, $\tau_{p'}(p)$ 内に極値的な元 ν で, ある δ, $0\leq\delta<1$, に対して, $\mathrm{int}\{z\colon |\nu(z)|\leq\delta\|\nu\|\}\neq\emptyset$ となるようなものが存在したら, p と p' を結ぶ測地線は一意的でない.

証明: 定理 1 の証明と同様に p' は原点であるとして良い. さらに, 系 3.5 を用いることにより,

$$U:=\mathrm{int}\{z\colon \nu(z)=0\}\neq\emptyset$$

[32]現時点で筆者が入手していない発表予定の論文 Shen [Sn] の結果を利用している部分については検証できなかった.

として良い. $\phi \in A_2^1(R)$, $\phi \neq 0$, をひとつ取って, 固定する. ϕ の零点は孤立集合であるから, U 内に $\phi(z_0) \neq 0$ となる点 z_0 が存在する. z_0 の近くにおける局所座標として, ϕ に関する自然座標 $\zeta(z) := \int_{z_0}^{z} \sqrt{\phi}$ を採用し, この座標に関する単射半径を $2r$ として, $\Delta \subset U$ を $\Delta := \zeta^{-1}(\mathbb{D}_r)$ にて定める. ここで, ϕ をその定数倍に取り替えることにより $r = 1$ として良い.

$|\alpha| \leq \|\nu\|/2$ に対して, $f_\alpha(\zeta) := \zeta + \alpha(1 - \zeta\bar{\zeta})$ により擬等角写像 $f_\alpha \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を定め, 擬等角写像 $F_\alpha \colon R \to R$ を

$$F_\alpha(z) := \begin{cases} z, & z \in R - \Delta \\ \zeta^{-1} \circ f_\alpha \circ \zeta(z), & z \in \Delta \end{cases}$$

で定義すると, F_α は id_R と $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトピックであり, $F_0 = \mathrm{id}_R$ となっている.

$G \colon R \to G(R)$ を $\mu(G) = \nu$ となるような擬等角写像とし, 擬等角写像の族 $G_\alpha \colon R \to G(R)$ を $G_\alpha := G \circ F_\alpha$ にて定める. G_α は $G_0 = G$ と $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトピックである. また

$$\nu_\alpha(z) := \mu(G_\alpha)(z) = \begin{cases} \dfrac{-\alpha\zeta}{1 - \alpha\bar{\zeta}}, & z \in \Delta \\ \nu(z), & z \in R - \Delta \end{cases}$$

であるから, $\|\nu_\alpha\| = \|\nu\|$. よって, ν_α も同値類 $[\nu_\alpha] = [\nu]$ 内の極値的元である. そこで, $l_\alpha := \{[t\nu_\alpha] \colon 0 \leq t \leq 1\}$ とおくと, 各 l_α は $[0]$ と $[\nu] = p$ を結ぶ測地線になっている.

さて, 定理の証明を完結するには次の補題を証明すれば良い.

補題 1. 上の定理の証明の状況において, もし $l_\alpha = l_\beta$ ならば $\alpha = \pm\beta$ である.

証明: $l_\alpha = l_\beta$ であるとする. ν_α と ν_β は $\|\nu_\alpha\| = \|\nu_\beta\| = \|\nu\|$ となる極値 Beltrami 係数であるから, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して,

$$d_{T(R)}([0], [t\nu_\alpha]) = d_M(0, t\nu) = d_{T(R)}([0], [t\nu_\beta])$$

が成立するので, $[t\nu_\alpha] = [t\nu_\beta]$ 即ち, $\Phi_R(t\nu_\alpha) = \Phi_R(t\nu_\beta)$ が成り立つ. そこで

$$d\Phi_R(0)[\nu_\alpha] = d\Phi_R(0)[\nu_\beta]$$

即ち, $\nu_\alpha - \nu_\beta \in N(R)$ である. よって特に, 局所座標 (Δ, ζ) を定めている $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R (\nu_\alpha - \nu_\beta)\phi = \int_\Delta (\nu_\alpha - \nu_\beta)\phi \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \Big(\frac{-\alpha\zeta}{1 - \alpha\bar{\zeta}} - \frac{-\beta\zeta}{1 - \beta\bar{\zeta}} \Big) d\xi d\eta = -\frac{\pi}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \end{aligned}$$

故に, $\alpha = \pm\beta$ である.

定理 2 と 補題 1 の証明から次のことがわかる.

定理 3. 十分小さい $t>0$ に対して, $t\nu \notin M_0(R)$ となるような $\nu \in M_0(R)$ が存在する.

Gehring は上の定理で $R=\mathbb{H}$ の場合を示している ([Ge1]). また, Reich-Strebel は $R=\mathbb{D}$ の場合の別証を与えている ([RS1]). ここでは [RS1] の議論を参考にしている.

参 考 文 献

参考書

[A-1] W. Abikoff : *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer Lecture Notes **820**, 1980.

[A-2] L. V. Ahlfors : *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, 1966.

[A-3] L. V. Ahlfors : *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, 1973.

[A-4] L. V. Ahlfors and L. Sario : *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[A-5] A. F. Beardon : *The Geometry of Discrete Groups*, GTM **91**, Springer-Verlag, 1983.

[A-6] P. L. Duren : *Univalent Funcions*, Springer-Verlag, 1983.

[A-7] L. R. Ford : *Automorphic Funcions*, 2nd edition, Chelsea, 1951.

[A-8] F. P. Gardiner : *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Wiley, 1987.

[A-9] F. W. Gehring : *Characteristic Properties of Quasidisks*, Sém. Math. Sup. **84**, Presses Univ. Montréal, 1982.

[A-10] R. S. Hamilton : *Variation of Structure on Riemann Surfaces*, not published.

[A-11] E. Hille and R. S. Phillips : *Functional Analysis and Semi-groups*, Colloquium Publications **31**, A.M.S., 1957.

[A-12] 今吉 洋一, 谷口 雅彦 : タイヒミュラー空間論, 日本評論社, 1989.

[A-12′] Y. Imayoshi and M. Taniguchi : *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1992.

[A-13] I. Kra : *Automorphic Forms and Kleinian Groups*, W. A. Benjamin, 1972.

[A-14] S. L. Krushkal : *Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces*, Winston and Sons, 1979.

[A-15] S. L. Krushkal and R. Kühnau : *Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen*, Teubner, 1983.

[A-16] 楠 幸男 : 函数論 — リーマン面と等角写像 —, 朝倉書店, 1973.

[A-17] S. Lang : *Introduction to Differentiable Manifolds*, Wiley, 1962.

[A-17′] S. Lang : *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, 1985.

[A-18] J. Ławrynowics and J. Krizyż : *Quasiconformal Mappings in the Plane: Parametrical Methods*, Springer Lecture Notes **978**, 1983.

[A-19] J. Lehner : *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, American Mathematical Society, 1964.

[A-20] J. Lehner : *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[A-21] O. Lehto and K. I. Virtanen : *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag, 1973.
[A-22] O. Lehto : *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1987.
[A-23] B. Maskit : *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1988.
[A-24] 溝畑 茂 : ルベーグ積分, 岩波全書 265, 1966.
[A-25] J. Mujica : *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, 1986.
[A-26] S. Nag : *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Wiley Interscience, 1988.
[A-27] 能代 清 : 近代函数論, 岩波書店, 1954.
[A-28] 及川 廣太郎 : リーマン面, 共立出版, 1987.
[A-29] H. Poincaré : *Papers on Fuchsian Functions*, Springer-Verlag, 1985.
[A-30] Ch. Pommerenke : *Univalent,Functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.
[A-31] Ch. Pommerenke : *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, 1992.
[A-32] M. Schiffer and D. C. Spencer : *Functionals of Finite Riemann Surfaces*, Princeton Math. Ser. **16**, Princeton Univ. Press, 1954.
[A-33] E. M. Stein : *Sinular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.
[A-34] K. Strebel : *On Quadratic Differentials and Extremal Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes, Univ. of Minnesota 1967.
[A-35] K. Strebel : *Quadratic differentials*, Springer-Verlag, 1984.
[A-36] A. E. Taylor and D. C. Lay : *Introduction to Functional Analysis*, 2nd edition, Krieger, 1980.
[A-37] A. J. Tromba : *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
[A-38] M. Tsuji : *Potential Theory in Modern Function Theory*, Chelsea, 1959.

総合報告

[B-1] L. V. Ahlfors (亀谷 俊司 訳) : 擬等角写像とその応用, (T. L. サーティ編, 現代の数学 II, 第5章), 岩波書店, 1966.
[B-2] L. Bers : Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology, Bull. A.M.S. **83** (1977), 1083–1100.
[B-3] L. Bers : Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations, Bull. A.M.S. **5** (1981), 131–172.
[B-4] I. Kra : Canonical mappings between Teichmüller spaces, Bull. A.M.S. **4** (1981), 143–179.

[B-5] O. Lehto : On the boundary value problem for quasiconformal mappings, Springer Lecture Notes **743** (1979), 184–196.

[B-6] A. Marden : Geometric relations between homeomorphic Riemann surfaces, Bull. A.M.S. **3** (1980), 1001–1017.

[B-7] 森 明 : 擬等角性及び擬解析性について, 数学 **7** (1955), 75–89.

[B-8] 及川 廣太郎 : Riemann 面の modulus について, 数学 **12** (1960), 79–104.

[B-9] 大竹 博巳, 須川 敏幸, 谷川 晴美, 谷口 雅彦 : Teichmüller 空間上の解析とその幾何学的応用, Topics in Complex Analysis 1990.

[B-10] E. Reich : Quasiconformal mappings of the unit disk with given boundary values, Springer Lecture Notes **505** (1976), 101–137.

[B-11] 柴田 敬一 : Riemann 面の調和位相写像について, 数学 **20** (1968), 193–202.

[B-12] K. Strebel : Extremal quasiconformal mappings, Results in Math. **10** (1986), 168–210.

論文

[Ab] W. Abikoff : On boundaries of Teichmüller spaces and Kleinian groups III, Acta Math. **134** (1975), 212–237.

[Ah1] L. V. Ahlfors : On quasiconformal mappings, J. d'Analyse Math. **3** (1953/4), 1–58.

[Ah2] L. V. Ahlfors : The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, in *Analytic Functions*, Princeton Univ. Press (1960), 45–66.

[Ah3] L. V. Ahlfors : Some remarks on Teichmüller space of Riemann surfaces, Ann. of Math. **74** (1961), 171–191.

[Ah4] L. V. Ahlfors : Curvature properties of Teichmüller space, J. d'Analyse Math. **9** (1961), 161–176.

[Ah5] L. V. Ahlfors : Quasiconformal reflections, Acta Math. **109** (1963), 291–301.

[AB] L. V. Ahlfors and L. Bers : Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math. **72** (1960), 385–404.

[AW] L. V. Ahlfors and G. Weill : A uniqueness theorem for Beltrami equations, Proc. A.M.S. **13** (1962), 975–978.

[An] J. M. Anderson : The extremum problem for analytic functions with finite area integral, Comment. Math. Helv. **55** (1980), 87–96.

[AG] K. Astala and F. W. Gehring : Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space, J. d'Analyse Math. **46** (1986), 16–57.

[AZ] K. Astala and M. Zinsmeister : Teichmüller spaces and BMOA, Math.

Ann. **289** (1991), 613–625.
[BD] D. E. Barrett and J. Diller : Poincaré series and holomorphic averaging, Invent. math. **110** (1992), 23–27.
[BO] C. Belna and M. Ortel : Extremal quasiconformal mappings: necessary conditions, J. d'Analyse Math. **33** (1978), 1–11.
[Be1] L. Bers : Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem, in *Analytic Functions*, Princeton Univ. Press (1960), 89–119.
[Be2] L. Bers : Simultaneous uniformization, Bull. A.M.S. **66** (1960), 94–97.
[Be3] L. Bers : Uniformization by Beltrami equations, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 215–228.
[Be4] L. Bers : Automorphic forms and general Teichmüller spaces, in *Proceedings of the Conference on Complex Analysis* (Minneapolis, 1964), Springer (1965), 109–113.
[Be5] L. Bers : Automorphic forms and Poincaré series for infinitely generated Fuchsian groups, Amer. J. Math. **87** (1965), 196–214.
[Be6] L. Bers : An approximation theorem, J. d'Analyse Math. **14** (1965), 1–4.
[Be7] L. Bers : A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, Acta Math. **116** (1966), 113–134.
[Be8] L. Bers : On boundaries of Teichmüller spaces and Kleinian groups I, Ann. of Math. **91** (1970), 570–600.
[Be9] L. Bers : Extremal quasiconformal mappings, Ann. of Math. Studies **66** (1971), 27–52.
[Be10] L. Bers : A new proof of a fundamental inequality for quasiconformal mappings, J. d'Analyse Math. **36** (1979), 15–30.
[BE] L. Bers and L. Ehrenpreis : Holomorphic convexity of Teichmüller spaces, Bull. A.M.S. **70** (1964), 761–764.
[BG] L. Bers and L. Greenberg : Isomorphisms between Teichmüller spaces, Ann. of Math. Studies **66** (1971), 53–79.
[BR] L. Bers and H. Royden : Holomorphic families of injection, Acta. Math. **157** (1986), 259–286.
[Bl] V. E. Blum : Die Extremalität gewisser Teichmüllersher Abbildungen des Einheitskreises, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 319–340.
[DoE] A. Douady and C. J. Earle : Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle, Acta Math. **157** (1986), 23–48.
[DrE] D. Drasin and C. J. Earle : On the boundedness of automorphic forms, Proc. A.M.S. **19** (1968), 1039–1042.
[E1] C. J. Earle : Reduced Teichmüller spaces, Trans A.M.S. **126** (1967), 54–63.
[E2] C. J. Earle : The Teichmüller distance is differentiable, Duke Math. **44** (1977), 389–397.

[EE] C. J. Earle and J. Eells, Jr : On the differential geometry of Teichmüller spaces, J. d'Analyse Math. **19** (1967), 35–52.

[EKK] C. J. Earle, I. Kra and S. L. Krushkal : Holomorphic motions and Teichmüller spaces, preprint.

[EM] C. J. Earle and C. McMullen : Quasiconformal isotopies, in *Holomorphic Functions and Moduli, Vol.I*, Springer-Verlag (1988), 143–154.

[Fe1] R. Fehlmann : Ueber extremale quasikonforme Abbildungen, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 558–580.

[Fe2] R. Fehlmann : On absolutely extremal quasiconformal mappings, University of Minnesota – Mathematics Report, 81 - 146.

[Fe3] R. Fehlmann : Quasiconformal mappings with free boundary components, Ann. Acad. Sci. Fenn. **7** (1982), 337–347.

[Fe4] R. Fehlmann : Extremal quasiconformal mappings with free boundary components in domains of arbitrary connectivity, Math. Z. **184** (1983), 109–126.

[Fe5] R. Fehlmann : On a fundamental variational lenma for extremal quasiconformal mappings, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 565–580.

[FS1] R. Fehlmann and K. Sakan : On the set of substantial boundary points for extremal quasiconformal mappings, Complex Variables **6** (1986), 323–335.

[FS2] R. Fehlmann and K. Sakan : On extremal quasiconformal mappings with varying dilatation bounds, Osaka J. Math. **23** (1986), 751–764.

[Fl] B. B. Flinn : Jordan domains and the universal Teichmüller space, Trans. A.M.S. **282** (1984), 603–610.

[Ga1] F. P. Gardiner : Schiffer's interior variation and quasiconformal mapping, Duke Math. J. **42** (1975), 371–380.

[Ga2] F. P. Gardiner : The existence of Jenkins-Strebel differentials from Teichmüller theory, Amer. J. Math. **99** (1977), 1097–1104.

[Ga3] F. P. Gardiner : On partially Teichmüller Beltrami differentials, Michigan Math. J. **29** (1982), 237–242.

[Ga4] F. P. Gardiner : The Teichmüller-Kobayashi metric for infinite dimensional complex Teichmüller spaces, Springer Lecture Notes **971** (1983), 48–67.

[Ga5] F. P. Gardiner : Approximation of infinite dimensional Teichmüller spaces, Trans. A.M.S. **282** (1984), 367–383.

[GS] F. P. Gardiner and D. Sullivan : Symmetric structures on a closed curve, Amer. J. Math. **114** (1992) 683–736.

[Ge1] F. W. Gehring : Quasiconformal mappings which hold the real axis pointwise fixed, Mathmatical essays dedicated to A. J. Macintyre, Ohio Univ. Press, 1970, 145–148.

[Ge2] F. W. Gehring : Univalent functions and the Schwarzian derivative,

Comment. Math. Helv. **52** (1977), 561–572.
[Ge3] F. W. Gehring : Spirals and the universal Teichmüller space, Acta Math. **141** (1978), 99–113.
[H] R. S. Hamilton : Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values, Trans. A.M.S. **138** (1969), 399–406.
[HO] A. Harrington and M. Ortel : The dilatation of an extremal quasiconformal mappings, Duke Math. J. **43** (1976), 533–544.
[HR] W. K. Hayman and E. Reich : On Teichmüller mappings of the disk, Complex Variables **1** (1982), 1–12.
[Kn] M. I. Knopp : Bounded and integrable automorphic forms, Indiana Univ. Math. J. **22** (1973), 769–778.
[Ka1] I. Kra : Deformations of Fuchsian groups I, II, Duke Math. **36** (1969), 537–546, ibid. **38** (1971), 499–508.
[Ka2] I. Kra : The Carathéodory metric on Abelian Teichmüller disks, J. d'Analyse Math. **40** (1981), 129–143.
[Kv] S. Kravetz : On the geometry of Teichmüller spaces and the structure of their modular groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. **278** (1959), 1–35.
[Ku1] S. L. Krushkal : Invariant metrics on Theichmüller spaces and quasiconformal extendability of analytic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. **10** (1985), 249–253.
[Ku2] S. L. Krushkal : Grunsky coefficient inequalities, Caratheodory metric and extremal quasiconformal mappings, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 650–660.
[Ku3] S. L. Krushkal : The Green function of Teichmüller spaces with applications, Bull. A.M.S. **27** (1992), 143–147.
[KM] Y. Kusunoki and F. Maitani : Variations of abelian differentials under quasiconformal deformations, Math. Z. **181** (1982), 435–450.
[Ln1] J. Lehner : On the $A_q(\Gamma) \subset B_q(\Gamma)$ conjecture, Springer Lecture Notes **320** (1973), 187–194.
[Ln2] J. Lehner : On the $A_q(\Gamma) \subset B_q(\Gamma)$ conjecture for infinitely generated groups, Ann. of Math. Studies **79** (1974), 283–288.
[Ln3] J. Lehner : On the boundedness of integrable automorphic forms, Illinois J. Math. **18** (1974), 575–584.
[Ln4] J. Lehner : Automorphic forms, in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (ed. by W. J. Harvey), Academic Press (1977), 73–120.
[Lt] O. Lehto : Group isomorphims induced by quasiconformal mappings, in *Contributions to Analysis* (L. V. Ahlfors et al. eds.), Academic Press (1974), 241–244.
[Li1] Li Zhong : On the existence of extremal Teichmüller mappings, Comment. Math. Helv. **57** (1982), 511–517.
[Li2] Li Zhong : Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teich-

müller spaces, Complex Variables **16** (1991), 261–272.

[Li3] Li Zhong : Non-uniqueness of Geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces (II), preprint.

[Ma] A. M. Macbeath : Topological background, in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (ed. by W. J. Harvey), Academic Press (1977), 1–45.

[Mi1] F. Maitani : Variations of meromorphic differentials under quasiconformal deformations, J. Math. kyoto Univ. **24** (1984), 49–66.

[Mi2] F. Maitani : On the rigidity of an end under conformal mappings preserving the infinit homology bases, preprint.

[Md] A. Marden : On homotopic mappings of Riemann surfaces, Ann. of Math. **90** (1969), 1–8.

[Mk] B. Maskit : On boundaries of Teichmüller spaces and Kleinian groups II, Ann. of Math. **91** (1970), 607–639.

[Ms1] M. Masumoto : A characterization of the kernel of the Poincaré series operator, Trans. A.M.S. **300** (1987), 695–704.

[Ms2] M. Masumoto : Adjoints of the Poincaré series operator, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 569–589.

[Mr] H. Masur : On a class of geodesics in Teichmüller spaces, Ann. of Math. **102** (1975), 205–221.

[Mc1] C. McMullen : Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Invent. math. **97** (1989), 95–127.

[Mc2] C. McMullen : Amenable coverings of complex manifolds and holomorphic probability measures, Invent. math. **110** (1992), 29–37.

[MR1] T. A. Metzger and K. V. Rao : On integrable and bounded automorphic forms, Proc. A.M.S. **28** (1971), 562–566.

[MR2] T. A. Metzger and K. V. Rao : On integrable and bounded automorphic forms II, Proc. A.M.S. **32** (1972), 201–204.

[Mo] A. Mori : On an absolute constant in the theory of quasiconformal mappings, J. Math. Soc. Japan **8** (1956), 156–166.

[Nk] T. Nakanishi : The inner radii of finite-dimensional Teichmüller spaces, Tôhoku Math. J. **41** (1989), 679–688.

[NV] T. Nakanishi and J. A. Velling : On inner radii of Teichmüller spaces, Springer Lecture Notes **1468** (1991), 115–126.

[NY] T. Nakanishi and H. Yamamoto : On the outradius of the Teichmüller space, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 288–299.

[Nh] Z. Nehari : The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. A.M.S. **55** (1949), 545–551.

[NS] D. Niebur and M. Sheingorn : Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, Ann. of Math. **106** (1977), 239–258.

[Oh1] H. Ohtake : Lifts of extremal quasiconformal mappings of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 191–200.

[Oh2] H. Ohtake : A canonical decomposition of automorphic forms which vanish on an invariant measurable subset, Tôhoku Math. J. **39** (1987), 299–311.

[Oh3] H. Ohtake : On the deformation of Fuchsian groups by quasiconformal mappings with partially vanishing Beltremi coefficients, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 69–90.

[Oh4] H. Ohtake : Partially conformal qc mappings and the universal Teichmüller space, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 171–180.

[Oh5] H. Ohtake : On the norm of the Poincaré series operator for a universal covering group, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 57–72

[Oi] K. Oikawa : A problem on the deformation and extension of Riemann surfaces, Hokkaido Math. J. **10** (1981), Special issue, 546–554.

[Or1] M. Ortel : Integral means and the theorem of Hamilton, Reich and Strebel, Springer Lecture Notes **747** (1979), 301–308.

[Or2] M. Ortel : The support of an extremal dilatation, Pacific J. Math. **99** (1982), 431–438.

[Oz1] M. Ozawa : On an approximation theorem in a family of quasiconformal mappings, Kōdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 65–76.

[Oz2] M. Ozawa : On extremal quasiconformal mappings, Kōdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 109–123.

[P] Ch. Pommerenke : On inclusion relations for spaces of automorphic forms, Springer Lecture Notes **505** (1976), 92–100.

[Re1] E. Reich : On the relation between local and global properties of boundary values for extremal quasi-conformal mappings, Ann. of Math. Studies **79** (1974), 391–407.

[Re2] E. Reich : On extremality and unique extremality of Affine mappings, Springer Lecture Notes **419** (1974), 294–304.

[Re3] E. Reich : An extremum problem for analytic functions with area norm, Ann. Acad. Sci. Fenn. **2** (1976), 429–445.

[Re4] E. Reich : A generalized Dirichlet integral, J. d'Analyse Math. **30** (1976), 456–463.

[Re5] E. Reich : Quasiconformal mappings with prescribed boundary values and a dilatation bound, Arch. Rat. Mech. Anal. **68** (1978), 99–112.

[Re6] E. Reich : On the decomposition of a class of plane quasiconformal mappings, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 15–27.

[Re7] E. Reich : On the uniqueness problem for extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values, Springer Lecture Notes **747** (1979), 314–320.

[Re8] E. Reich : Uniqueness of Hahn-Banach extensions from certain spaces

of analytic functions, Math. Z. **167** (1979), 81–89.
[Re9] E. Reich : On criteria for unique extremality of Teichmüller mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. **6** (1981), 289–301.
[Re10] E. Reich : On the uniqueness question for Hahn-Banach extensions from the space of L^1 analytic functions, Proc. A.M.S. **88** (1983), 305–310.
[Re11] E. Reich : Nonuniqueness of Teichmüller extremal mappings, Proc. A.M.S. **88** (1983), 513–516.
[Re12] E. Reich : Harmonic mappings and quasiconformal mappings, J. d'Analyse Math. **46** (1986), 239–245.
[RS1] E. Reich and K. Strebel : On quasiconformal mappings which keep the boundary points fixed, Trans. A.M.S. **138** (1969), 211–222.
[RS2] E. Reich and K. Strebel : On the extremality of certain Teichmüller mappings, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 353–362.
[RS3] E. Reich and K. Strebel : Teichmüller mappings which keep the boundary pointwise fixed, Ann. of Math. Studies **66** (1971), 365–367.
[RS4] E. Reich and K. Strebel : Extremal plane quasiconformal mappings with given boundary values, Bull. A.M.S. **79** (1973), 488–490.
[RS5] E. Reich and K. Strebel : Extremal quasiconformal mappings with given boundary values, in *Contributions to Analysis* (L. V. Ahlfors et al. eds.), Academic Press (1974), 375–392.
[RS6] E. Reich and K. Strebel : On Approximation of mappings by Teichmüller mappings, Complex Variables **7** (1986), 181–196.
[Ro] H. L. Royden : Automorphisms and isometries of Teichmüller space, Ann. of Math. Studies **66** (1971), 369–383.
[Sk1] K. Sakan : On quasiconformal mappings compatible with a Fuchsian group, Osaka J. Math. **19** (1982), 159–170.
[Sk2] K. Sakan : On extremal quasiconformal mappings compatible with a Fuchsian group, Tôhoku Math. J. **34** (1982), 87–100.
[Sk3] K. Sakan : On extremal quasiconformal mappings compatible with a Fuchsian group with a dilatation bound, Tôhoku Math. J. **37** (1985), 79–93.
[Sk4] K. Sakan : Necessary and sufficient conditions for extremality in certain classes of quasiconformal mappings, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 31–37.
[Sk5] K. Sakan : A fundamental variational lemma for extremal quasiconformal mappings compatible with a Fuchsian group, Tôhoku Math. J. **39** (1987), 105–114.
[Sv] V. V. Savin : On moduli of Riemann surffaces, Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 267–270.
[SY] H. Sekigawa and H. Yamamoto : Outradii of the Teichmüller spaces of Fuchsian groups of the second kind, Tôhoku Math. J. **38** (1986),

365–370.
[Sr1] V. G. Šeretov : Extremal quasiconformal mappings with given boundary correspondence, Siberian Math. J. **19** (1978), 671–678.
[Sr2] V. G. Šeretov : On the theory of extremal quasiconformal mappings, Math. USSR Sborñik **35** (1979), 437–447.
[Sr3] V. G. Šeretov : Locally extremal quasiconformal mappings, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 343–345.
[St] G. C. Sethares : The extremal property of certain Teichmüller mappings, Comment. Math. Helv. **43** (1968), 98–119.
[Sn] Y. Shen : The uniqueness of extremal quasiconformal mappings, to appear.
[Sb] K. Shibata : On the existence of a harmonic mapping, Osaka Math. J. **15** (1963), 173–211.
[Sg1] H. Shiga : On the quasiconformal deformation of open Riemann surfaces and variations of some conformal invariants, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 463–480.
[Sg2] H. Shiga : On the deformation of Riemann surfaces and differentials by quasiconformal mappings, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 397–407.
[Sg3] H. Shiga : Characterization of quasi-disks and Teichmüller spaces, Tôhoku Math. J. **37** (1985), 541–552.
[SgT] H. Shiga and H. Tanigawa : Grunsky's inequality and its applications to Teichmüller spaces, to appear in Kôdai Math. J.
[Sm] H. Shimizu : On discontinuous groups operating on the product of upper half-plane, Ann. of Math. **77** (1959), 33–71.
[Sl] Z. Slodkowski : Holomorphic motions and polynomial hulls, Proc. A.M. S. **111** (1991), 374–355.
[S1] K. Strebel : On the maxmal dilataion of quasiconformal mappings, Proc. A.M.S. **6** (1955), 903–909.
[S2] K. Strebel : Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises, Comment. Math. Helv. **36** (1962), 306–323.
[S3] K. Strebel : Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II, Comment. Math. Helv. **39** (1964), 77–89.
[S4] K. Strebel : A uniqueness theorem for extremal quasiconformal mappings with fixed points and free boundary intervals, Proc. of the conference on quasiconformal mappings, moduli and discontinuous groups, Tulane University (1965), 144–156.
[S5] K. Strebel : Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 469–475.
[S6] K. Strebel : On the trajectory structure of quadratic differentials, Ann.

of Math. Studies **79** (1974), 419–438.

[S7] K. Strebel : On the existence of extremal Teichmüller mappings, J. d'Analyse Math. **30** (1976), 464–480.

[S8] K. Strebel : On lifts of extremal quasiconformal mappings, J. d'Analyse Math. **31** (1977), 191–203.

[S9] K. Strebel : On quasiconformal mappings of open Riemann surfaces, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 301–321.

[S10] K. Strebel : Inflatable families of holomorphic functions, Springer Lecture Notes **747** (1979), 378–386.

[S11] K. Strebel : Is there always a unique extremal Teichmüller mappings?, Proc. A.M.S. **90** (1984), 240–242.

[Sw] T. Sugawa : On the Bers conjecture for Fuchsian groups of the second kind, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 45–52.

[ST] D. P. Sullivan and W. P. Thurston : Extending holomorphic motions, Acta Math. **157** (1986), 243–257.

[Tw1] H. Tanigawa : Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces, to appear in Nagoya Math. J.

[Tw2] H. Tanigawa : Discreteness of finite dimensional Teichmüller spaces in the universal Teichmüller space, to appear.

[Tc1] H. Taniguchi : On convergence of holomorphic abelian differentials on the Teichmüller spaces of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 305–321.

[Tc2] H. Taniguchi : Variational formulas on arbitrary Riemann surfaces under pinching deformation, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 507–530; Supplements to my previous paper, ibid. **28** (1988), 81–86.

[Tc3] H. Taniguchi : Pinching deformation of arbitrary Riemann surfaces and variational formulas for abelian differentials, in *Analytic Function Theory of One Complex Variables* (ed. by Y. Komatu, K. Niino and C. Yang), Pitman Research Notes in Math. **212** (1989), 330–345.

[Tc4] H. Taniguchi : Abelian differentials with normal behavior and complex pinching deformation, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 45–56.

[Tc5] H. Taniguchi : On the first variation of Green's functions under quasiconformal deformations, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 591–600.

[Tc6] H. Taniguchi : A note on the second variational formulas of functions on Riemann surfaces, Kôdai Math. J. **12** (1989), 283–295.

[Tc7] H. Taniguchi : On the rigidity of the ideal boundary of an infinite Riemann surface, Complex Variables **14** (1990), 161–167.

[Te] O. Teichmüller : *Collected Papers*, Springer-Verlag, 1982.

[Tu] P. Tukia : Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group, Acta Math. **154** (1985), 153–193.