第 2 章　極値擬等角写像

§1. 極値性の定義

$\mu_0 \in M(R)_1$ が

$$\|\mu_0\| = \inf\{\|\mu\|\colon \mu \in M(R)_1,\ \mu \sim \mu_0\}$$

を満たすとき, μ_0 は**極値的**であるといい, μ_0 に同値な極値的 Beltrami 係数が μ_0 自身しか存在しないときに, μ_0 は**一意極値的**であるという. また, 擬等角写像 f の Beltrami 係数 $\mu(f)$ が極値的 (一意極値的) であるとき, f は極値的 (一意極値的) であると定める[15].

命題 1. 各 $\mu \in M(R)_1$ に対して, Beltrami 係数が μ と同値になるような極値擬等角写像 f が少なくともひとつ存在する.

証明: $k := \inf\{\|\nu\|\colon \nu \in M(R)_1, \nu \sim \mu\}$ とおき, μ に同値な Beltrami 係数の列 $\{\mu_n\} \subset M(R)_1$ で, $\|\mu_n\| \searrow k$ となるものをとる. また, $\pi\colon \mathbb{H} \to R$ を普遍被覆とし, Γ をその被覆変換群とする. 森の定理[16] ([Mo]) より, $\{w^{\pi^*\mu_n}\}_{n \geq m}$ は $\mathbb{C}$ 上で広義一様に収束する部分列を含み, その極限 F も擬等角写像であって, $\|\mu(F)\| \leq \|\mu_m\|$ を満たす. 故に, $\mu(F)$ は $\pi^*\mu$ と同値であり, $\|\mu(F)\| \leq k$ が成り立つ. ところで, $\pi^*\mu_n$ はみな同値だから, Fuchs 群の同型写像 θ があって

$$\theta(\gamma) \circ w^{\pi^*\mu_n} = w^{\pi^*\mu_n} \circ \gamma, \qquad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

となる. 極限をとることにより

$$\theta(\gamma) \circ F = F \circ \gamma, \qquad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

となるから, F は Γ と両立する. 即ち, F はある擬等角写像 $f\colon R \to f(R)$ の持ち上げになっている. この f が求めている極値擬等角写像になる. ∎

命題 2. 擬等角写像 $f\colon R \to R'$ が極値的ならば, 逆写像 f^{-1} も極値的である.

証明: $g\colon R' \to g(R')$ を $f^{-1}\colon R' \to R$ と同値な擬等角写像とすると, ある等角写像 $h\colon g(R') \to R$ が存在して, f と $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}\colon R \to R'$ が同値になる. 特に, f が極値的であるとすると,

$$\|\mu(f^{-1})\| = \|\mu(f)\| \leq \|\mu(g^{-1} \circ h^{-1})\| = \|\mu(g^{-1})\| = \|\mu(g)\|$$

であるから, f^{-1} も極値的になる. ∎

---

[15] 従って, 擬等角写像 f が一意極値的であり, g を f と同値な極値擬等角写像とすると, 等角写像の違いを無視すれば, $g = f$ となる. この同一視は以後特に断らずに行う.

[16] 証明は Ahlfors [A-2] または Lehto-Virtanen [A-21] にもあります.

§2. Affine 写像の極値性

この節では Affine 写像の極値性ならびに一意極値性について考察する. ここで述べる内容は後の一般論によっても示すことができるが, 一般論の背景となっている本質的部分を明白にするため直接的な論法による証明を与えておこう.

ところで, $\mathbb{C}$ 内の双曲領域 D 上で定義された擬等角写像の同値性は, D を Riemann 面と見なしたときの縁 $\mathrm{bd}(D)$ を用いて定義されているのであり, $\mathbb{C}$ での相対境界 ∂D に関するものではないのであるから, 同値な擬等角写像の ∂D 上での関係を先ず最初に確認しておかねばならない. 実際この関係は, 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{D} \to D$ から導かれる境界 $\partial\mathbb{D}$ と ∂D の間の対応という既によく研究されてきていること (例えば, 能代 [A-27] 第 1 章第 4 節) から得られるのであるが, ここでは我々が利用し易い形で主張が述べられている次の結果を引用しておこう.

定理 1. (Earle - McMullen [EM] 系 2.4)　D を $\mathbb{C}$ 内の双曲領域とすると, id_D に同値な任意の擬等角写像 $f\colon D \to D$ に対して, $\mathbb{C}$ 上のイソトピー H_t で

$$H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \qquad H_1|_D = f,$$
$$H_t|_D = \mathrm{id}_{(\mathbb{C}-D)} \quad (\forall t \in [0,1])$$

となるものが存在する. 特に, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像 F で

$$F|_{(\hat{\mathbb{C}}-D)} = \mathrm{id}_{(\hat{\mathbb{C}}-D)}, \qquad F|_D = f$$

となるものが存在する.

以後この節では, $K \geq 1$ とし,

$$F_K(x+iy) := Kx + iy$$

とおく. 上の定理を利用すると, 次の系がわかる.

系 1. D を $\mathbb{C}$ 内の双曲領域とする. F_K に同値な任意の擬等角写像 $f\colon D \to F_K(D)$ は, $\hat{\mathbb{C}} - D$ 上では $f = F_K$ と定めることにより $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像に拡張できる.

証明: $f \circ F_K^{-1}$ に対して定理 1 を適用して得られる擬等角イソトピーを H_t とすると, $H_1 \circ F_K$ が f の $\hat{\mathbb{C}}$ への拡張になっている. ∎

領域 D が面積有限の場合, Affine 写像 F_K と同じ境界値を持つ擬等角写像の最大歪曲度は K 以上であり, 等号が成立するのは F_K に限ることは Ozawa が示している ([Oz1]). Strebel は [S2] において面積有限の単連結領域においては, F_K が同値な擬等角写像の中で極値的でありかつ, 極値擬等角写像は一意的であることを示した. ここでは先ず彼等の結果を後の利用のため少し拡張して述べておこう.

領域 D と $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ に対して

$$D(a,b) := \{\, z \in D\colon a < \operatorname{Im} z < b \,\},$$
$$\gamma_a := \{\, z \in D\colon \operatorname{Im} z = a \,\}$$

と定義する.

定理 2. $D(a,b)$ の面積 $|D(a,b)|$ は有限であるとする. $D(a,b)$ 上で定義されていて, $\partial D \cap \partial D(a,b)$ における境界値が F_K と一致するような任意の擬等角写像 f に対して

$$K^2|D(a,b)| \leq K(f)|f(D(a,b))|. \tag{1}$$

さらに

$$f(D(a,b)) \subset F_K(D(a,b)) \tag{2}$$

であるならば, $K(f) \geq K$ であり, 等号成立は $f = F_K$ である場合に限る.

証明: ほとんどすべての y に対して

$$K|\gamma_y| \leq |f(\gamma_y)| = \int_{\gamma_y} |f_x|\, dx \leq \int_{\gamma_y} |f_z| + |f_{\bar z}|\, dx$$

が成り立つ. ただし, ここで $|\gamma_y|$, $|f(\gamma_y)|$ はそれぞれ曲線 γ_y, $f(\gamma_y)$ の Euclid 計量に関する長さを表すものとする. a から b まで積分し, Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
K^2|D(a,b)|^2 &\leq \iint_{D(a,b)} \frac{(|f_z| + |f_{\bar z}|)^2}{|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2}\, dxdy \iint_{D(a,b)} |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2\, dxdy \\
&\leq K(f) \iint_{D(a,b)} dxdy \iint_{f(D(a,b))} dxdy \\
&\leq K(f)|D(a,b)||f(D(a,b))|
\end{aligned}$$

ここから (1) が得られる. 特に (2) ならば $|f(D(a,b))| \leq K|D(a,b)|$ であるから, $K(f) \geq K$ である.

最後に等号が成立したとすると, ほとんどいたるところで

$$|f_z| + |f_{\bar z}| = |f_z + f_{\bar z}|, \qquad \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} = K(f) = K$$

となるから

$$\mu(f) = (K-1)/(K+1) = \mu(F_K)$$

を得る. そこで境界条件より, $f = F_K$ となる. ∎

Strebel は [S2] において面積無限の双曲領域に対しても F_K の極値性について調べており, その後の研究も彼の方法に従っている. 私見ではかなり sensational であったと思われる, 極値写像が Teichmüller 写像であるとは限らなくまた, 一意的であるとも限らないことを示す次の有名な例もこの論文で与えられた.

例 1. (Strebel の煙突) $D = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z < 0$ または $|\operatorname{Re} z| < 1\}$ とすると, $F_K \colon D \to F_K(D)$ は極値擬等角写像であるが, 極値写像の一意性は成立しない.

証明: 極値性は以下に述べる定理 3 よりわかる. 一方, h を $(-\infty, 0]$ の C^1 級自己同相写像で, $1 \le h' \le K^2$ を満たしているようなものとし,

$$f(z) := \begin{cases} Kx + iy, & y > 0 \\ Kx + ih(y), & y \le 0 \end{cases}$$

とおくと, f は F_K と同値な擬等角写像であり

$$|\mu(f)| \le \frac{K-1}{K+1} = \|\mu(F_K)\|$$

となるので, 極値写像の一意性は成立しない. ■

例 2. ([S2], Sethares [St]) $D := \{z \in \mathbb{C} \colon y > |x|^\alpha\}$ において
(a) $\alpha > 1$ ならば F_K は極値擬等角写像である.
(b) $\alpha = 1$ ならば F_K は極値擬等角写像でない.

主張 (a) は次の定理 3 よりわかる. 一方, 主張 (b) は下の例 7 からわかる.

定理 3. (Reich [Re2] 参照) $\mathbb{C}$ 内の双曲領域 D が, ある $a \in \mathbb{R}$ に対して, 次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を満たしているとする.

(a) $$|D(a, y)| < \infty \qquad (\forall y \ge a),$$

(b) $$|D(a, \infty)| = \infty,$$

(c) $$|\gamma_y| = o(y) \qquad (y \to \infty).$$

このとき, ある $D(b, \infty)$, $b \ge a$, 上で定義された擬等角写像 f が 2 つの条件

(d) $$f(D(b, \infty)) \subset F_K(D(a, \infty)),$$

(e) f は $\partial D \cap \partial D(b, \infty)$ まで連続に延びて, そこで F_K と一致する
を満たすならば, $K(f) \ge K$ が成立する.
特に, F_K 自身は極値擬等角写像である.

補題 1. ([S2]) 定理 3 の仮定の下で, $\eta \geq b$ に対して

$$\delta(\eta) := \sup\{\operatorname{Im} f(z) - \eta \colon z \in \gamma_\eta\} \geq 0$$

と定義すると,

$$\delta(\eta) \leq 2\sqrt{KK(f)}\sup\{|\gamma_y| \colon \eta \leq y \leq \eta + \delta(\eta)\}. \tag{3}$$

$$\delta(\eta) = o(\eta) \qquad (\eta \to \infty). \tag{4}$$

証明: $\delta(\eta) = 0$ ならば (3) は自明な不等式であるので, $\delta(\eta) > 0$ とする. 任意に $\delta \in (0, \delta(\eta))$ を取って固定し, $\Gamma := \{\gamma_y \colon \eta \leq y \leq \eta + \delta/2\}$ とおく.

先ず, ρ を許容計量とすると, 即ち, ρ は $\mathbb{C}$ 上の可測函数で

$$A(\rho) := \iint_{\mathbb{C}} \rho(z)^2\, dxdy \neq 0, \infty$$

であるようなものとすると, 任意の $\eta \leq y \leq \eta + \delta/2$ に対して

$$\begin{aligned} L_\rho(\Gamma) &:= \inf\Big\{\int_\gamma \rho(z)\,|dz| \colon \gamma \in \Gamma\Big\} \\ &\leq \int_{\gamma_y} \rho(z)\,|dz| = \int_{\gamma_y} \rho\, dx, \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\delta}{2}L_\rho(\Gamma)\Big)^2 &\leq \Big(\iint_{D(\eta,\eta+\frac{1}{2}\delta)} \rho\, dxdy\Big)^2 \\ &\leq \iint_{D(\eta,\eta+\frac{1}{2}\delta)} dxdy \iint_{D(\eta,\eta+\frac{1}{2}\delta)} \rho^2\, dxdy \\ &\leq |D(\eta,\eta+\delta)|A(\rho) \end{aligned}$$

よって, Γ の極値的長さ $\lambda(\Gamma)$ について

$$\lambda(\Gamma) := \sup_\rho \frac{L_\rho(\Gamma)^2}{A(\rho)} \leq \frac{4|D(\eta,\eta+\delta)|}{\delta^2}$$

が得られる. ここで, 上限はすべての許容計量 ρ についてとる.

一方, 各 $\gamma_y \in \Gamma$ に対して, $f(\gamma_y)$ の少なくともひとつの連結成分は $\{\operatorname{Im} z > \eta + \delta\}$ 内の点を通り, その両端点は $\{\operatorname{Im} z \leq \eta + \delta/2\}$ 内にあるから, 許容計量 $\rho_0 := \chi_{F_K(D(\eta+\delta/2,\eta+\delta))}$ について

$$\int_{f(\gamma_y)} \rho_0\, |dz| \geq 2 \cdot \frac{\delta}{2}$$

が成立する. よって $L_{\rho_0}(f(\Gamma)) \geq \delta$ となり,

$$\lambda(f(\Gamma)) \geq \frac{L_{\rho_0}(f(\Gamma))^2}{A(\rho_0)} \geq \frac{\delta^2}{K|D(\eta,\eta+\delta)|}$$

を得る. 擬等角写像により極値的長さが擬不変, 即ち

$$K\lambda(\Gamma) \geq \lambda(f(\Gamma))$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned} \delta^2 &\leq 2\sqrt{KK(f)}|D(\eta,\eta+\delta)| = 2\sqrt{KK(f)}\int_\eta^{\eta+\delta}|\gamma_y|\,dy \\ &\leq 2\sqrt{KK(f)}\delta\sup\{|\gamma_y|: \eta \leq y \leq \eta+\delta(\eta)\} \end{aligned} \tag{5}$$

となり, δ で割って, $\delta \to \delta(\eta)$ とすると, 主張 (3) が得られる.

一方, $|\gamma_y| = o(y)$ であるので, 任意の $\varepsilon \in (0, 1/(2\sqrt{KK(f)})]$ に対して, ある $\eta_0 \geq b$ が存在して,

$$|\gamma_\eta| \leq \varepsilon\eta \qquad (\eta \geq \eta_0)$$

となるから

$$\int_\eta^{\eta+\delta}|\gamma_y|\,dy \leq \int_\eta^{\eta+\delta}\varepsilon y\,dy \leq \varepsilon(\eta+\delta/2)\delta.$$

この式を (5) に代入すれば,

$$\delta \leq 2\sqrt{KK(f)}\varepsilon\eta \qquad (\eta \geq \eta_0).$$

ここから主張 (4) がわかる. ∎

定理 3 の証明: $\eta \geq b$ に対して定理 2 より

$$K^2|D(b,\eta)| \leq K(f)|f(D(b,\eta))| \leq K(f)K|D(a,\eta+\delta(\eta))|$$

となるから,

$$\frac{K}{K(f)} \leq \frac{|D(a,\eta+\delta(\eta))|}{|D(b,\eta)|} \leq 1 + \frac{|D(a,b)| + |D(\eta,\eta+\delta(\eta))|}{|D(b,\eta)|}.$$

補題 1 より $\delta(\eta) = o(\eta)$ であるから, 下の補題 2 を用いると $K(f) \geq K$ が得られる. ∎

補題 2.

$$\liminf_{\eta\to\infty}\frac{|D(\eta,\eta+\delta(\eta))|}{|D(b,\eta)|} = 0$$

証明: 結論を否定すると, ある定数 $C > 0$, $\eta' \geq b$ に対して

$$(6) \qquad |D(\eta, \eta + \delta(\eta))| \geq C|D(b, \eta)| \qquad (\forall \eta \geq \eta')$$

が成立する. $\varepsilon > 0$ を

$$(7) \qquad 1 + C > (1 + \varepsilon)^2$$

が成立するように十分小さく取り固定する. $\delta(\eta)$, $|\gamma_\eta|$ についての仮定より, ある $\eta'' \geq \eta'$ に対して

$$(8) \qquad \delta(\eta) \leq \varepsilon\eta \quad \text{かつ} \quad |\gamma_\eta| \leq \eta \qquad (\forall \eta \geq \eta'')$$

が成り立つ. さて

$$\eta_n := (1 + \varepsilon)^n \eta'' \qquad (n = 1, 2, \dots)$$
$$M := |D(b, \eta_1)|$$

とおくと, $\eta_{n+1} = \eta_n + \varepsilon\eta_n \geq \eta_n + \delta(\eta_n)$ であるから, 不等式 (6) を用いると

$$|D(\eta_n, \eta_{n+1})| \geq C\Big(M + \sum_{k=1}^{n-1} |D(\eta_k, \eta_{k+1})|\Big)$$

がわかり, ここから帰納的に

$$|D(\eta_n, \eta_{n+1})| \geq C(1 + C)^{n-1} M$$

が得られる. 一方 (8) より, n に依らない正定数 C' を用いて

$$|D(\eta_{n+1}, \eta_n)| = \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} |\gamma_y|\, dy \leq \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} y\, dy =: C'(1 + \varepsilon)^{2n}$$

と表されるから,

$$\Big(\frac{1 + C}{(1 + \varepsilon)^2}\Big)^n \leq \frac{C'(1 + C)}{CM} < \infty$$

となるが, これは仮定 (7) に反する. ∎

上の定理の証明は縦方向の Affine 引き延ばし : $x + iy \to x + Kiy$ には適用できない. これは $|f_x| \leq |f_z| + |f_{\bar{z}}|$ という評価が適切でないためである. しかしながら, この場合には引き延ばしの逆写像が $F(x + iy)/K = x + iy/K$ であるので, 上の定理が利用できて, 逆写像が極値的になり, その結果元の縦方向の引き延ばしが極値的であることがわかる.

また $\{x + iy \in \mathbb{C}\colon x > |y|^\alpha\}$, $\alpha > 1$, のように水平方向に無限遠まで延びた領域についても定理は適用できないが, この場合には, 縦方向と横方向の役割を取り替えて, その上で逆写像に対して定理を適用したら良い.

さて, 上の定理からわかるように極値性は局所的な性質であったが, 一意極値性は大域的性質であるので, より詳しい考察が必要になる. 一般に次の定理が成立する.

定理 4. ([S2] および Blum [Bl] 参照) D を $\mathbb{C}$ 内の領域で, Affine 写像 $F_K\colon D \to F_K(D)$ が極値的になっているようなものとする. F_K と同値な極値擬等角写像 $f\colon D \to F_K(D)$ に対して, 以下の条件 (a) - (f) を満たす非負数列 $\{\varepsilon_n\}$ および D の水平断面 γ_y, $y \in \mathbb{R}$, に含まれる線分から成る集合の列 $\{\Gamma_n^{(1)}\}$ と $\{\Gamma_n^{(2)}\}$ が存在するならば, $f = F_K$, 即ち F_K は一意極値的である.

(a) $\Gamma_n := \Gamma_n^{(1)} \cup \Gamma_n^{(2)}$ の相異なる 2 つの元は互いに素でありかつ,

$$D_n^{(1)} := \bigcup_{\gamma\in\Gamma_n^{(1)}} \gamma, \quad D_n^{(2)} := \bigcup_{\gamma\in\Gamma_n^{(2)}} \gamma$$

は共に D 内の可測集合で, 測度有限である.

(b) $$K|\gamma| \le |f(\gamma)|, \qquad (\gamma \in \Gamma_n^{(1)})$$

(c) $$K(|\gamma| - \varepsilon_n) \le |f(\gamma)|, \qquad (\gamma \in \Gamma_n^{(2)})$$

(d) D 内の任意のコンパクト集合 C に対して, n を十分大きくすると $D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}$ は零集合を除いて C を含む.

(e) $$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n |p_y(D_n^{(2)})| = 0$$

ここに p_y は虚軸への射影 $p_y(x+iy) := iy$ である.

(f) $T_n := |f(D_n^{(1)}) - F_K(D_n^{(1)})| + |f(D_n^{(2)}) - F_K(D_n^{(2)})|$ とおくとき,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = 0.$$

証明: 任意の $\gamma \in \Gamma_n^{(1)}$ に対して

$$K|\gamma| \le |f(\gamma)| = \int_\gamma |f_x|\,dx = \int_\gamma |f_z + f_{\bar z}|\,dx$$

であるから, 虚軸方向に積分し, Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
K^2|D_n^{(1)}|^2 &\le \Big(\iint_{D_n^{(1)}} |f_z + f_{\bar z}|\,dxdy\Big)^2 \\
&\le \iint_{D_n^{(1)}} |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2\,dxdy \iint_{D_n^{(1)}} \frac{|f_z + f_{\bar z}|^2}{|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2}\,dxdy \\
&= |f(D_n^{(1)})| \iint_{D_n^{(1)}} \frac{|1+\mu|^2}{1-|\mu|^2}\,dxdy,
\end{aligned}$$

ただし $\mu := \mu(f)$ とおいた. ここで $|\mu| \le k := (K-1)/(K+1)$ より

$$\begin{aligned}\frac{|1+\mu|^2}{1-|\mu|^2} &\le \frac{1+k^2+2\operatorname{Re}\mu}{1-k^2} \\ &= K - \frac{2}{1-k^2}(k-\operatorname{Re}\mu) \le K - 2(k-\operatorname{Re}\mu)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}K^2|D_n^{(1)}|^2 &\le (K|D_n^{(1)}|+T_n)\Big(K|D_n^{(1)}| - 2\iint_{D_n^{(1)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy\Big) \\ &\le K^2|D_n^{(1)}|^2 + K|D_n^{(1)}|T_n - 2K|D_n^{(1)}|\iint_{D_n^{(1)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy,\end{aligned}$$

よって

$$2\iint_{D_n^{(1)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy \le T_n$$

を得る. $\Gamma_n^{(2)}$ に対しても同様にして

$$2\iint_{D_n^{(2)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy \le T_n + 2K\varepsilon_n|p_y(D_n^{(2)})|$$

が得られるので, 結局

$$\iint_{D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy \le T_n + K\varepsilon_n|p_y(D_n^{(2)})|$$

となる. さて C を D 内の任意のコンパクト集合とし, n を十分大きくすると

$$\begin{aligned}0 &\le \iint_C (k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy \\ &\le \iint_{D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)}}(k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy \\ &\le T_n + K\varepsilon_n|p_y(D_n^{(2)})|\end{aligned}$$

であるから, 条件 (e), (f) より

$$\iint_C (k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy = 0.$$

C の任意性より

$$\iint_D (k-\operatorname{Re}\mu)\,dxdy = 0.$$

故に $\mu = k = \mu(F_K)$ となり, 境界条件より $f = F_K$ が成立する. ∎

上の定理を適用するにあたって次の補題が必要になる.

補題 3. ([Re2] および [S2] 参照)　D を $\mathbb{C}$ 内の領域で, ある正定数 a, c, M に対して, 以下の条件 (a) – (e) を満たすようなものとする.

$$\begin{array}{llr}
\text{(a)} & |D(a,\infty)| = \infty, & \\
\text{(b)} & |\gamma_y| > 0, & (\forall y \geq a), \\
\text{(c)} & |\gamma_y| = o(y), & (y \to \infty), \\
\text{(d)} & \sup\{|\gamma_\eta|\colon y \leq \eta \leq (1+c)y\} \leq M|\gamma_y|, & (\forall y \geq a), \\
\text{(e)} & \displaystyle\int^{\infty} \frac{dy}{|\gamma_y|^3} = \infty. &
\end{array}$$

このとき, F_K と同値な極値擬等角写像 f に対して,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \delta(y_n)|\gamma_{y_n}| = 0$$

となる列 $\{y_n\}$ が存在する.

証明: 証明は背理法による. 先ず, $b \geq a$ を $f(D(b,\infty)) \subset F_K(D(a,\infty))$ となるようひとつ取り, 固定しておく.

$$u(\eta) := \iint_{D(b,\eta)} |f_x| - K\,dxdy = \int_b^\eta |f(\gamma_y)| - K|\gamma_y|\,dy \geq 0$$

と定める. 補題 1 より, $\delta(y) = o(y)$ であるから, ある $\eta_1 \geq b$ が存在して,

$$\eta + \delta(\eta) \leq (1+c)\eta \qquad (\forall \eta \geq \eta_1)$$

となる. そこで再び補題 1 と仮定 (d) より, 任意の $\eta \geq \eta_1$ に対して

$$\delta(\eta) \leq 2KM|\gamma_\eta| \tag{9}$$
$$|D(\eta, \eta+\delta(\eta))| \leq M|\gamma_\eta|\delta(\eta) \tag{10}$$

が成立する. ところで,

$$|f(\gamma_y)| \geq 2\sqrt{\Big(\frac{K|\gamma_y|}{2}\Big)^2 + \delta(y)^2} = K|\gamma_y|\sqrt{1+\Big(\frac{2\delta(y)}{K|\gamma_y|}\Big)^2}$$

であるから, (9) を用いると, ある正数 M_1 が存在して

$$\begin{aligned}
u'(\eta) &= |f(\gamma_\eta)| - K|\gamma_\eta| \geq K|\gamma_\eta|\Big\{\sqrt{1+\Big(\frac{2\delta(\eta)}{K|\gamma_y|}\Big)^2} - 1\Big\} \\
&\geq M_1|\gamma_\eta|\Big(\frac{\delta(\eta)}{|\gamma_y|}\Big)^2 = M_1\frac{(\delta(\eta)|\gamma_\eta|)^2}{|\gamma_\eta|^3}
\end{aligned} \tag{11}$$

となる．

さて，結論の否定

$$\liminf_{y\to\infty}\delta(y)|\gamma_y|>0 \tag{12}$$

を仮定しよう．このとき，式 (11) と仮定 (e) より

$$\lim_{y\to\infty}u(y)=\infty$$

が成立している．

一方，$f(D(b,\eta))\subset F_K(D(a,\eta+\delta(\eta)))$ であるから，

$$|f(D(b,\eta))|\le K\{|D(a,b)|+|D(b,\eta)|+|D(\eta,\eta+\delta(\eta))|\}$$

となっているが，(10) と背理法の仮定 (12) より，ある定数 $M_2>0$ と $\eta_2\ge\eta_1$ が存在し，任意の $\eta\ge\eta_2$ に対して

$$|D(a,b)|+|D(\eta,\eta+\delta(\eta))|\le\frac{M_2}{K}\delta(\eta)|\gamma_\eta|$$

よって

$$|f(D(b,\eta))|\le K|D(b,\eta)|+M_2\delta(\eta)|\gamma_\eta|$$

となる．更に

$$\begin{aligned}\Big(\iint_{D(b,\eta)}|f_x|\,dxdy\Big)^2&\le K|D(b,\eta)||f(D(b,\eta))|\\&\le K|D(b,\eta)|^2\Big(1+\frac{M_2\delta(\eta)|\gamma_\eta|}{K|D(b,\eta)|}\Big)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}u(\eta)&\le K|D(b,\eta)|\Big(\sqrt{1+\frac{M_2\delta(\eta)|\gamma_\eta|}{K|D(b,\eta)|}}-1\Big)\\&\le K|D(b,\eta)|\frac{M_2\delta(\eta)|\gamma_\eta|}{2K|D(b,\eta)|}\\&=\frac{M_2}{2}\delta(\eta)|\gamma_\eta|\end{aligned}$$

となる．故に，ある正数 M_3 が存在して

$$\frac{1}{|\gamma_\eta|^3}\le M_3\frac{u'(\eta)}{u(\eta)^2}\qquad(\eta\ge\eta_2)$$

となるが，$\eta_3\ge\eta_2$ を $u(\eta_3)>0$ となるものとすると，

$$\int_{\eta_3}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_\eta|^3}\,d\eta\le M_3\int_{\eta_3}^{\infty}\frac{u'(\eta)}{u(\eta)^2}\,d\eta=\frac{1}{u(\eta_3)}<\infty$$

であるので，仮定 (12) に矛盾する． ∎

この補題から次の結果が導かれる.

定理 5. ([Re2] 参照) D を $\mathbb{C}$ 内の領域で, 補題 3 にある条件 (a) - (e) および

$$\text{(f)} \qquad |D(-\infty, a)| < \infty$$

を満たすようなものとする. このとき, F_K は一意極値的な擬等角写像である.

証明: 定理 2 より F_K は極値的である. さて, f を F_K と同値な極値擬等角写像とし, 補題 3 より得られる列 $\{y_n\}$ を用いて

$$\Gamma_n^{(1)} := \{\gamma_y : y \le y_n\}, \quad \Gamma_n^{(2)} := \emptyset, \quad \varepsilon_n := 0$$

と定めると, これが定理 4 の条件 (a) - (e) を満たしていることは明らかであるが, 更に十分大きな n に対して

$$|f(D_n^{(1)}) - F_K(D_n^{(1)})| \le K|D(y_n, y_n + \delta(y_n))| \le KM|\gamma_{y_n}|\delta(y_n)$$

であるから, (f) も成立している. よって $f = F_K$ となり, F_K は一意極値的な擬等角写像である. ∎

定理 4 と 5 の応用としていくつか具体的な例を挙げておこう.

例 3. ([Bl], Reich-Strebel [RS2]) $D := \{ z \in \mathbb{C} : y > |x|^{\alpha} \}$ において, $\alpha > 1$ ならば F_K は極値擬等角写像であったが, さらに
(a) $\alpha \ge 3$ ならば F_K は一意極値的である.
(b) $3 > \alpha > 1$ ならば F_K は一意極値的ではない.

主張 (a) は定理 5 より直ちにわかる. 一方, 主張 (b) にある F_K と同値な極値擬等角写像の存在については [RS2] を見て頂きたい.

なお, 当然のことではあるが, 定理 5 のような $|\gamma_y|$ の評価に基づく仮定からは, 極値擬等角写像の非一意性が結論できないことを注意しておく. これは面積零の閉集合を境界に加えても $|\gamma_y|$ の評価はほとんどすべての y に対して変化しないから, 例えば, 例 3 の (b) にあるような領域に対して, 縦方向の半直線の族によって境界を増やして, γ_y の各連結成分の長さの最大値が $o(1)$ であるようにすれば, 一意極値性が成立するようにできるからである.

例 4. ([S2]) $S = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1 \}$ において

$$f_0(z) = ax + (b_1 - b_0)y + b_0 + iy \qquad (a > 0)$$

は一意的な極値擬等角写像である.

証明: 任意の正方行列 A は 2 つの直行行列 T_1, T_2 を用いて T_1AT_2 が対角行列となるようにできるから, f_0 は, ある実定数 C, K, α, β ($C>0$, $K\geq 1$, $0\leq\alpha<\pi$, $\beta=\arg F_K(e^{i\alpha})$) を用いて

$$f_0(z)=Ce^{-i\beta}F_K(e^{i\alpha}z)+b_0$$

と表すことができる. よって, $f_0\colon S\to S$ の一意極値性は $F_K\colon D:=e^{i\alpha}S\to F_K(D)$ の一意極値性と同値である. 故に, f_0 の極値性については定理 3 および補題 2 の証明の後に述べたことよりわかる. 一方, 一意極値性については, ふたつの場合 (i): $\alpha\neq 0$ と (ii): $\alpha=0$ に分けて考察する.

[場合 (i)] $f\colon D\to F_K(D)$ を F_K と同値な極値擬等角写像とすると, 補題 3 によって, ある列 $\{y_n^+\}$ と $\{y_n^-\}$ で

$$\lim_{n\to\infty}y_n^+=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n^-=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\delta^+(y_n^+)=\lim_{n\to\infty}\delta^-(y_n^-)=0$$

となるものが存在する. ただし, ここで δ^+ と δ^- は

$$\begin{aligned}\delta^+(y)&:=\sup\{\operatorname{Im}f(z)-y\colon z\in\gamma_y\},\\ \delta^-(y)&:=\inf\{\operatorname{Im}f(z)-y\colon z\in\gamma_y\}\end{aligned}$$

と定義されるものである. そこで, 定理 4 を

$$\Gamma_n^{(1)}:=\{\gamma_y\colon y_n^-\leq y\leq y_n^+\},\quad \Gamma_n^{(2)}:=\emptyset,\quad \varepsilon_n:=0$$

として適用すれば, 主張が従う.

[場合 (ii)] この場合だけのことに限るならば, 単に極値的であることを示した場合と同じように, 縦方向と横方向の役割を取り替えて, その上で逆写像に対して定理を適用したら良いのであるが, ここでは, 後の例にも通用する手法で証明しておこう.

$f\colon D=S\to F_K(D)=S$ を F_K と同値な極値擬等角写像とし,

$$\begin{aligned}\delta^r(x)&:=\sup\{\operatorname{Re}f^{-1}(w)-x\colon \operatorname{Re}w=Kx, w\in S\},\\ \delta^l(x)&:=\inf\{\operatorname{Re}f^{-1}(w)-x\colon \operatorname{Re}w=Kx, w\in S\}\end{aligned}$$

とおく. 縦軸と横軸の役割を取り替えて, 補題 3 を適用することにより, ある列 $\{x_n^+\}$ と $\{x_n^-\}$ で

$$\lim_{n\to\infty}x_n^+=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n^-=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\delta^r(x_n^+)=\lim_{n\to\infty}\delta^l(x_n^-)=0$$

となるものが存在する. そこで,

$$\begin{aligned}C_n^r&:=f^{-1}(\{w\in S\colon \operatorname{Re}w=Kx_n^+\},\\ C_n^l&:=f^{-1}(\{w\in S\colon \operatorname{Re}w=Kx_n^-\}\end{aligned}$$

とおき, さらに, $\Gamma_n^{(1)} := \emptyset$, $\Gamma_n^{(2)}$ を実軸に平行な線分で, その両端点がそれぞれ C_n^r と C_n^l 上にあるようなものの集合とし, $\varepsilon_n := \delta^r(x_n^+) + \delta^l(x_n^-)$ とおくと, 任意の $\gamma \in \Gamma_n^{(2)}$ に対して

$$K(|\gamma| - \varepsilon_n) \leq K(x_n^+ - x_n^-) \leq |f(\gamma)|$$

となるから, 定理 4 の条件 (c) が成立する. 定理の他の条件が成立することは明らかであるから, F_K の一意極値性がわかる. ∎

以上の証明を組み合せれば, 次の主張も成立するのがわかるであろう.

例 5. ([S2], [Bl] 参照) $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| < 1$ または $|\operatorname{Im} z| < 1\}$ において F_K は一意極値的な擬等角写像である. また, $D - \{|\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ の連結成分である 4 つの部分領域を補題 3 にあるような領域に取り替えても同様のことが成立する.

証明の概略: f を F_K と同値な極値擬等角写像とする. 上の例 4 にあるような列 $\{y_n^+\}$, $\{y_n^-\}$, $\{x_n^+\}$, $\{x_n^-\}$ を補題 3 を利用して選び, C_n^r, C_n^l を同様に定める. $D_n := \{z \in D \colon y_n^- < \operatorname{Im} z < y_n^+, Kx_n^- < \operatorname{Re} f(z) < Kx_n^+\}$ とおいて, $D_n \cap \{\operatorname{Im} z = \mathrm{const}\}$ の連結成分のうち両端点が ∂D 上にあるようなものの集合を $\Gamma_n^{(1)}$ とし, 残りの連結成分のうち両端点が同時に C_n^r 上かまたは C_n^l 上にないようなものの集合を $\Gamma_n^{(2)}$ とする. そして $\varepsilon_n := \delta^r(x_n^+) + \delta^l(x_n^-)$ とおく. するとこれらの列が定理 4 の条件をすべて満たすことが確かめられるので, F_K が一意極値的であることがわかる. ∎

例 6. ([S2]) 円環領域 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon r < |\zeta| < R\}$ において, 内側の境界 $\{|\zeta| = r\}$ のみを θ だけ回転させた境界値を持つ擬等角写像 g のうちで

$$g_0(\zeta) := \zeta \exp\left(i\theta \frac{\log|\zeta| - \log R}{\log r - \log R}\right)$$

は一意極値的である.

証明: この例は例 4 の主張よりわかる. 実際, $S := \{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ とし, 普遍被覆

$$\pi \colon S \ni z \mapsto \zeta := R\exp(i(\log R - \log r)z) \in A$$

を用いて極値擬等角写像 g を $f \colon S \to S$ に $f(0) = 0$ となるよう持ち上げたとき, f の境界対応は

$$f(x+iy) = \begin{cases} x + \theta/(\log R - \log r) + i, & y = 1 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

となる. 一方, g_0 の持ち上げ f_0 は

$$f_0(z) = x + \theta y/(\log R - \log r) + iy$$

となるから, Affine 写像であり, 例 4 より, f_0 は一意極値的である. そこで,

$$\|\mu(f_0)\| \le \|\mu(f)\| = \|\mu(g)\| \le \|\mu(g_0)\| = \|\mu(f_0)\|$$

となるから, $f = f_0$. 故に, $g \circ \pi = \pi \circ f = \pi \circ f_0 = g_0 \circ \pi$ となって, g_0 の一意極値性が得られる. ∎

例 7. ([S2]) 角領域 $D := \{z \in \mathbb{C} \colon \alpha < \arg z < \beta\}$, $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, に対して, F_K は極値的でない. しかしながら極値擬等角写像は一意的である.

証明: これも例 4 の主張よりわかる.

$$D' := F_K(D) = \{z \in \mathbb{C} \colon \alpha' < \arg z < \beta'\},$$
$$S := \{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

とし, 等角写像 $\Phi \colon S \to D$, $\Psi \colon S \to D'$ を

$$\Phi(z) := \exp((\beta - \alpha)z + i\alpha), \qquad \Psi(z) := \exp((\beta' - \alpha')z + i\alpha')$$

で定める. このとき, 擬等角写像 $f := \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi \colon S \to S$ は, その Beltrami 係数が

$$\mu(f) = \mu(F_K \circ \Phi) = k\overline{\Phi'}/\Phi'$$

となるので, Affine 写像でない. よって, 例 4 より f は極値的ではないから, F_K も極値的ではない. しかし f の境界値は S 上の Affine 写像

$$f_0(x + iy) = \frac{\beta - \alpha}{\beta' - \alpha'}x + iy + \frac{\log\sqrt{1 + K^2}}{\beta' - \alpha'}$$

の境界値に一致するから, F_K と同値な極値擬等角写像は $\Psi \circ f_0 \circ \Phi^{-1}$ であり, これは一意極値的である. ∎

以上これまでこの節で述べた主張は境界の大きな領域に関するものであった. しかしながら, じつは $\mathbb{C}$ から孤立可算集合 S を除いたような領域についても, S の無限遠点への集積の度合が高ければ, Affine 写像が極値的になり, さらに一意極値的にもなることがある.

定理 6. (Reich [Re9]) $\{R_n\}$ を

$$\lim R_n = \infty \qquad \text{かつ} \qquad R_n = O(n^{1/2})$$

を満たす正数の列とする. また, $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ は $\limsup |c_n|/R_n < 1$ となるような列であるとする. 円周 $|z - c_n| = R_n$ を n 等分する n 個の点の集合を S_n とすると, $\mathbb{C} - \cup_n S_n$ において F_K は一意極値的である.

証明は元論文 [Re9] を見て頂きたい. なお [Re9] では, この定理は後の第 7 節で述べる定理 6 を適用して, 証明されている.

§3. Hamilton 条件と Hamilton 列

定義. 双曲的 Riemann 面 R 上の Beltrami 微分 μ に対して

$$\sup\left\{\left|\int_R \mu\phi\right| : \phi \in \overline{A_2^1(R)_1}\right\} = \|\mu\|$$

が成立するとき, μ は **Hamilton 条件**を満たすという.

$A_2^1(R)$ 内の有界集合は広義一様収束に関して正規族を成すので,

命題 1. $\mu \in M(R)$ が Hamilton 条件を満たす必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty}\int_R \mu\phi_n = \|\mu\|$$

を満たし, R 上で広義一様収束する $A_2^1(R)$ 内のノルム 1 の列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

この命題にある列 $\{\phi_n\}$ を μ に対する **Hamilton 列**と呼ぶ. Hamilton 列 $\{\phi_n\}$ は $\lim \phi_n = 0$ となるとき, **退化している**という.

定理 1. R が解析的有限型の場合, $\mu \in M(R)$ が Hamilton 条件を満たすための必要十分条件は μ が Teichmüller-Beltremi 微分になっていることである.

証明: Riemann-Roch の定理より $A_2^1(R)$ の次元は有限であるから, μ に対する Hamilton 列は, ある $\phi \in A_2^1(R)$ にノルム収束する. このとき, $\|\mu\| = \int_R \mu\phi$ となるから, $\int_R(\|\mu\| - \mathrm{Re}\,\mu\phi/|\phi|)|\phi| = 0$ が成立するが, $\|\mu\| - \mathrm{Re}\,\mu\phi/|\phi| \geq 0$ であるから, $\|\mu\| = \mathrm{Re}\,\mu\phi/|\phi|$, 即ち $\mu = \|\mu\|\overline{\phi}/|\phi|$ となる.

一方, ある $\phi \in A_2(R)$ により $\mu = \|\mu\|\overline{\phi}/|\phi|$ と表されているとすると, R が解析的有限型だから, $A_2(R)$ と $A_2^1(R)$ が一致するので, $\phi_n := \phi$ とおけば, $\{\phi_n\}$ が μ に対する Hamilton 列となる. ∎

補題 1. $\{\phi_n\}$ を $A_2^1(R)$ 内のノルム 1 の元の列で, ϕ に R 上広義一様収束しているようなものとすると,

$$1 - \|\phi\| = \lim_{n\to\infty}\|\phi_n - \phi\|.$$

特に, $\|\phi\| = 1$ ならば, $\{\phi_n\}$ は ϕ にノルム収束している.

証明: K を R のコンパクト集合とすると

$$\begin{aligned}\|\phi_n-\phi\| &\le \int_{R-K}(|\phi_n|+|\phi|)+\int_K|\phi_n-\phi|\\ &\le \int_{R-K}(|\phi_n|-|\phi|+2|\phi|)+\int_K|\phi_n|-|\phi|+2|\phi_n-\phi|\\ &= 1-\|\phi\|+2\Big(\int_{R-K}|\phi|+\int_K|\phi_n-\phi|\Big).\end{aligned}$$

よって

$$\limsup_{n\to\infty}\|\phi_n-\phi\|\le 1-\|\phi\|+2\int_{R-K}|\phi|,$$

$K\nearrow R$ とすれば

$$\limsup_{n\to\infty}\|\phi_n-\phi\|\le 1-\|\phi\|.$$

一方,

$$1-\|\phi\|=\liminf_{n\to\infty}\|\phi_n\|-\|\phi\|\le\liminf_{n\to\infty}\|\phi_n-\phi\|$$

であるから, 補題の主張が成立する. ∎

定理 2. $\{\phi_n\}\subset A_2^1(R)$ を $\mu\in M(R)$ に対する Hamilton 列とし, $\phi:=\lim\phi_n$ とおく. このとき, $0<\|\phi\|<1$ ならば
(a) $\mu=\|\mu\|\overline{\phi}/|\phi|$ でありかつ,
(b) μ に対する退化 Hamilton 列も存在する.

証明: $\psi_n:=(\phi_n-\phi)/\|\phi_n-\phi\|$ とおくと

$$\int_R\mu\phi+\|\phi_n-\phi\|\int_R\mu\psi_n=\int_R\mu\phi_n$$

であるから, 補題 1 より

$$\int_R\mu\phi+(1-\|\phi\|)\lim_{n\to\infty}\int_R\mu\psi_n=\|\mu\|.$$

ここで $|\int_R\mu\phi|\le\|\mu\|\,\|\phi\|$, $|\int_R\mu\psi_n|\le\|\mu\|$ であるから

$$\int_R\mu\phi=\|\mu\|\,\|\phi\|\qquad かつ\qquad \lim_{n\to\infty}\int_R\mu\psi_n=\|\mu\|$$

となり, 前式より $\mu=\|\mu\|\overline{\phi}/|\phi|$ を得る. また, 後式より μ に対する退化 Hamilton 列 $\{\psi_n\}$ も存在している. ∎

この定理より次の系が直ちに従う.

系 1. Hamilton 条件を満たす Beltrami 微分 μ が可積分な正則 2 次微分による Teichmüller-Beltrami 微分でないための必要十分条件は, μ に対する Hamilton 列がすべて退化することである.

もちろん, 上の系は可積分な正則2次微分による Teichmüller-Beltrami 微分が退化 Hamilton 列を持たないことを主張するものではない. 実際

例 1. (Reich [Re3]) $0 < A < \infty$, $\alpha > 1$ に対して, $D := \{x + iy: 0 < x < A, 0 < y < x^\alpha\}$ とする. $g_n(z) := n^{\alpha+1}e^{-nz}$ は D で広義一様に 0 に収束し,

$$\iint_D |g_n(z)|\,dxdy = n^{\alpha+1}\int_0^A x^\alpha e^{-nx}\,dx$$
$$= \int_0^{nA} x^\alpha e^{-x}\,dx \to \Gamma(\alpha+1)$$

である, また Lebesgue の収束定理を用いると

$$\mathrm{Re}\iint_D g_n(z)\,dxdy = \int_0^{nA} e^{-x}\frac{\sin(-n^{1-\alpha}x^\alpha)}{-n^{1-\alpha}}\,dx$$
$$\to \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\,dx = \Gamma(\alpha+1)$$

であるから,

$$\iint_D g_n(z)\,dxdy \to \Gamma(\alpha+1)$$

よって, $1 \in M(D)$ は退化 Hamilton 列 $\{g_n/\|g_n\|\}$ を持っている. ∎

Hamilton 条件を満たす Beltrami 微分で, 可積分な正則2次微分による Teichmüller-Beltrami 微分になっていないようなものが存在することについて, 一般に次の定理が成立する.

定理 3. 0 に広義一様収束する $A_2^1(R)$ のノルム 1 の元の列 $\{\phi_n\}$ および, R の部分集合 E で $\lim\|\phi_n|_E\| = 0$ であるようなものに対して, $\{\phi_n\}$ のある部分列を Hamilton 列とするノルム 1 の Beltrami 微分で $\mu|_E = 0$ となるものが存在する.

証明: $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ を R の近似列とする. このとき, 帰納的に次の条件 (1), (2) を満たす部分列 $\{R_{m(j)}\}_{j=1}^\infty$ と $\{\phi_{n(j)}\}_{j=1}^\infty$ を, $R_{m(1)} := R_1$ から始めて, $\phi_{n(1)}$, $R_{m(2)}$, $\phi_{n(2)}$, ... と選ぶことができる.

(1) $$\int_{R_{m(j)}\cup E}|\phi_{n(j)}| < 1/j$$

(2) $$\int_{R_{m(j+1)}-R_{m(j)}\cup E}|\phi_{n(j)}| > 1-1/j$$

そこで,

$$\mu := \sum_{j=1}^\infty \chi_{(R_{m(j+1)}-R_{m(j)}\cup E)}\frac{\overline{\phi}_{n(j)}}{|\phi_{n(j)}|}$$

とおくと, $|\mu| = \chi_{(R-E)} \neq 0$ でありかつ

$$\begin{aligned}\left|1 - \int_R \mu\phi_{n(j)}\right| &= \left|\int_R (|\phi_{n(j)}| - \mu\phi_{n(j)})\right| \\ &= \left|\int_{R-(R_{m(j+1)}-R_{m(j)}\cup E)} (|\phi_{n(j)}| - \mu\phi_{n(j)})\right| \\ &\leq 2\int_{R-(R_{m(j+1)}-R_{m(j)}\cup E)} |\phi_{n(j)}| \\ &< 2/j.\end{aligned}$$

故に, $\{\phi_{n(j)}\}$ と μ が主張にある性質を持った列と Beltrami 微分になる. ∎

系 2. R が解析的有限型でないとし, E を $r(E;R) = 0$ を満たす R の部分集合とすると, Hamilton 条件を満たす $\mu \in M(R)$ で $\mu|_E = 0$ となるものが, 存在する. 特に, Hamilton 条件を満たしかつ, 可積分な正則 2 次微分による Teichmüller-Beltrami 微分になっていないものが存在する.

さらに次のことも成立する.

定理 4. E を $\int_E \omega_R\lambda_R^2 < \infty$ を満たす R の部分集合とし, μ_0 を退化 Hamilton 列が存在するような $M(R)$ の元とする. このとき,

$$\mu|_{(R-E)} = \mu_0|_{(R-E)} \qquad \text{かつ} \qquad \|\mu|_E\| \leq \|\mu_0\|$$

となるような $\mu \in M(R)$ は Hamilton 条件を満たす.

特に, $\mu_0|_{(R-E)}$ も Hamilton 条件を満たす.

証明: $\{\phi_n\}$ を μ_0 に対する退化 Hamilton 列とすると, $\lim \int_E |\phi_n| = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\|\mu_0\| &= \lim_{n\to\infty} \int_R \mu_0\phi_n = \lim_{n\to\infty} \int_R \mu\phi_n \\ &\leq \|\mu\| \leq \|\mu_0\|\end{aligned}$$

故に, 定理が成立する. ∎

Hamilton 条件を満足する μ について $|\mu(z)|$ が $\|\mu\|$ に近い値をとる z の集合に関しては以下のことがわかっている.

補題 2. $\{\phi_n\}$ を $\mu \in M(R)$, $\mu \neq 0$, に対する Hamilton 列とすると, 任意の ρ, $0 \leq \rho < 1$, に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|\mu(z)| \leq \rho\|\mu\|\}} |\phi_n| = 0$$

証明:

$$\left|\int_R \mu\phi_n\right| \le \rho\|\mu\| \int_{\{|\mu|\le\rho\|\mu\|\}} |\phi_n| + \|\mu\| \int_{\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}} |\phi_n|$$
$$= \|\mu\|\Big(1-(1-\rho)\int_{\{|\mu|\le\rho\|\mu\|\}} |\phi_n|\Big)$$

よりわかる. ∎

定理 5. $r(V;R)>0$ となるような R の可測部分集合 V と, Hamilton 条件を満たす $\mu\in M(R)$, $\mu\ne 0$, および $0\le\rho<1$ に対して, $V\cap\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}$ の測度は正である. 特に, $\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}$ は R で相対コンパクトでない.

証明: $\{\phi_n\}$ を μ に対する Hamilton 列とする. もし, $V\cap\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}$ が零集合であるとすると, 零集合を除いて $V\subset\{|\mu|\le\rho\|\mu\|\}$ となるから, 前補題より

$$r(V;R)\le \lim_{n\to\infty}\int_{\{|\mu|\le\rho\|\mu\|\}}|\phi_n| = 0.$$

これは仮定に反する. ∎

この定理と定理 1.17.7 より, 特に $R=\mathbb{D}$ の場合は

系 3. 平均的に一様分布している $\mathbb{D}$ の可測部分集合 V と, Hamilton 条件を満たす $\mu\in M(R)$, $\mu\ne 0$, および $0\le\rho<1$ に対して, $V\cap\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}$ の測度は正である.

命題 1.17.2 を考慮するとこの系は Belna-Ortel [BO] の定理 1 の拡張になっている. 一方, 集合 $\{|\mu|>\rho\|\mu\|\}$ は R で相対コンパクトではないが, 次のような例も構成できる.

例 2. R を $\mathrm{bd}(R)\ne\emptyset$ であるような Riemann 面とし, $b\in\mathrm{bd}(R)$ とする. このとき, Hamilton 条件を満足する $\mu\in M(R)$ で, その台 $\operatorname{supp}\mu$ が $R\cup\mathrm{bd}(R)$ において相対コンパクトでありかつ, $R\cup\mathrm{bd}(R)$ における $\operatorname{supp}\mu$ の閉包と $\mathrm{bd}(R)$ の共通部分が一点 $\{b\}$ のみから成るようなものが存在する.

証明: 普遍被覆 $\pi\colon\mathbb{D}\to R$ を $\{z\in\mathbb{D}\colon \operatorname{Re}z>0\}$ への制限が単射でありかつ, $\pi(1)=b$ となるようにとり, その被覆変換群を Γ とする. $\limsup\rho_n=\infty$ となる正数の列 $\{\rho_n\}$ をひとつとり, これに対して, c_n, $0<c_n<1$, を

$$d_{\mathbb{D}}(0,c_n) = 2\sum_{k=1}^{n}\rho_k - \rho_n$$

を満たすように定め, $\eta_n\in\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$, $\phi_n\in A_2^1(\mathbb{D})$ と $\mu_0\in M(\mathbb{D})$ を

$$\eta_n(z) := \frac{z+c_n}{1+c_n z},\qquad \phi_n := \eta_n^*1 = (\eta_n')^2 \qquad \mu_0 := \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{D_n}\frac{\overline{\phi_n}}{|\phi_n|}$$

で定義する．ただし，D_n は中心 c_n 半径 ρ_n の双曲円板 $D(c_n;\rho_n)$ である．ここで，D_n は互いに素でありかつ，$D_n = \eta_n(D(0;\rho_n))$ となっていることを注意しておく．

$$\operatorname{supp}\mu_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subset \{z \in \mathbb{D}:\ \operatorname{Re} z > 0\}$$

であるから，$\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\mu_0$ は $M(\mathbb{D},\Gamma)$ の元になる．そこで，

$$\mu := (\pi^*)^{-1}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\mu_0\Big)$$

とすると，これが求める $\mu \in M(R)$ になっている．後半の位相的な性質を μ が満たすことは構成法より明らかであろう．前半の Hamilton 条件を満足することについては，$\Theta_\Gamma\phi_n/\|\Theta_\Gamma\phi_n\|$ が $\sum_\Gamma \gamma^*\mu_0$ に対する Hamilton 列になっていることを示したら良いが，それは以下のようにしてわかる．

先ず，

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\mu_0\phi_n\,dxdy &= \iint_{D_n}|\phi_n|\,dxdy = \iint_{D(0;\rho_n)}dxdy\\ &= \iint_{|z|<\tanh\rho_n}dxdy = \pi\tanh^2\rho_n \to \pi,\\ \Big|\iint_{\mathbb{D}-D_n}\mu_0\phi_n\,dxdy\Big| &\le \iint_{\mathbb{D}-D_n}|\phi_n|\,dxdy\\ &= \iint_{\mathbb{D}-D(0;\rho_n)}dxdy \to 0\end{aligned}$$

である．Γ に関する基本領域で $\{z\in\mathbb{D}:\ \operatorname{Re} z>0\}$ を含むものを Ω とすると，

$$\bigcup_{\Gamma-1}\gamma(\operatorname{supp}\mu_0) \subset \mathbb{D}-\Omega \subset \mathbb{D}-\operatorname{supp}\mu_0 \subset \mathbb{D}-D_n$$

より

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\Gamma-1}\iint_{\mathbb{D}}\mu_0\gamma^*\phi_n\,dxdy\Big| &\le \sum_{\Gamma-1}\iint_{\operatorname{supp}\mu_0}|\gamma^*\phi_n|\,dxdy\\ &\le \iint_{\mathbb{D}-D_n}|\phi_n|\,dxdy \to 0,\\ \iint_{\Omega}\Big(\sum_{\Gamma}\gamma^*\mu_0\Big)(\Theta_\Gamma\phi_n)\,dxdy &= \iint_{\mathbb{D}}\mu_0\Theta_\Gamma\phi_n\,dxdy\\ &= \iint_{\mathbb{D}}\mu_0\phi_n\,dxdy + \sum_{\Gamma-1}\iint_{\mathbb{D}}\mu_0\gamma^*\phi_n\,dxdy \to \pi\end{aligned}$$

がわかる．また

$$
\begin{aligned}
\Big| \|\Theta_\Gamma \phi_n\| - \pi \Big| &= \Big| \|\Theta_\Gamma \phi_n\| - \|\phi_n\| \Big| \\
&= \left| \iint_\Omega \Big| \sum_\Gamma \gamma^* \phi_n \Big| \, dxdy - \iint_{\mathbb{D}} |\phi_n| \, dxdy \right| \\
&\leq \left| \iint_\Omega \Big| \sum_\Gamma \gamma^* \phi_n \Big| - |\phi_n| \, dxdy \right| + \iint_{\mathbb{D}-\Omega} |\phi_n| \, dxdy \\
&\leq \sum_{\Gamma-1} \iint_\Omega |\gamma^* \phi_n| \, dxdy + \iint_{\mathbb{D}-\Omega} |\phi_n| \, dxdy \\
&\leq 2 \iint_{\mathbb{D}-D_n} |\phi_n| \, dxdy \to 0
\end{aligned}
$$

である．故に

$$
\int_\Omega \Big(\sum_\Gamma \gamma^* \mu_0 \Big) \frac{\Theta_\Gamma \phi_n}{\|\Theta_\Gamma \phi_n\|} \, dxdy \to 1,
$$

これは前半の主張のために示すべき式である． ∎

§4. Hamilton-Krushkal の定理

この節の目的は次の定理を示すことである．

定理 1. (Hamilton [H], Krushkal [A-14]) $\mu \in M(R)_1$ が極値的であるための必要条件は μ が Hamilton 条件を満たすことである．

実は定理 1 の逆も成立することが知られている．逆は後の節で Reich-Strebel の不等式の系として示そう．

定理 1 は以下のふたつの補題から直ちにわかる．

補題 1. $\mu \in M(R)_1$ が極値的であるならば，任意の $\nu \in N(R)$ に対して

(1)
$$
\|\mu - \nu\| \geq \|\mu\|
$$

証明: 対偶を示す．即ち，ある $\nu_0 \in N(R)$ に対して

$$
\|\mu - \nu_0\| < \|\mu\|
$$

となったとする．このとき，定理 1.16.1 と陰函数定理の系より，$M_0(R)$ 内の曲線 $\nu(t)$ で

$$
\nu(t) = t\nu_0 + o(t) \qquad (t \to 0)
$$

となるものが存在する. $f\colon R \to f(R)$ を $\mu(f)=\mu$ である擬等角写像, $g_t\colon R\to R$ を $\mu(g_t)=\nu(t)$ なる id_R と同値な擬等角写像とすると, $f\circ g_t^{-1}\colon R\to f(R)$ は f と同値な擬等角写像であるが, 十分小さい $t>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\mu(f\circ g_t^{-1})| &= \Big|\frac{\mu-\nu(t)}{1-\overline{\nu(t)}\mu}\Big| \\
&= |(\mu - t\nu_0 + o(t))(1+t\nu_0\mu + o(t))| \\
&= |\mu - t(1-|\mu|^2)\nu_0| + o(t) \\
&\le [1-t(1-|\mu|^2)]|\mu| + t(1-|\mu|^2)|\mu-\nu_0| + o(t) \\
&\le [1-t(1-|\mu|^2)]\|\mu\| + t(1-|\mu|^2)\|\mu-\nu_0\| + o(t) \\
&= \|\mu\| - t(1-|\mu|^2)(\|\mu\|-\|\mu-\nu_0\|) + o(t) \\
&\le \|\mu\| - t(1-\|\mu\|^2)(\|\mu\|-\|\mu-\nu_0\|) + o(t) \\
&< \|\mu\|
\end{aligned}
$$

となるので, μ は極値的でない. ∎

補題 2. $\mu\in M(R)$ が Hamilton 条件を満たすための必要十分条件は補題 1 の条件 (1) が成立することである.

証明: [必要性] 任意の $\nu\in N(R)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\mu-\nu\| &\ge \sup_{\|\phi\|\le 1}\Big|\int_R (\mu-\nu)\phi\Big| \\
&= \sup_{\|\phi\|\le 1}\Big|\int_R \mu\phi\Big| = \|\mu\|.
\end{aligned}
$$

[十分性] 対偶を示す. 即ち,

$$\sup_{\|\phi\|\le 1}\Big|\int_R \mu\phi\Big| < \|\mu\|$$

であるとする. $A_2^1(R)$ 上の有界線型汎函数

$$\phi \mapsto \int_R \mu\phi$$

を Hahn-Banach の拡張定理を利用して $L_2^1(R)$ 上の有界線型汎函数に拡張し, さらに F.Riesz の定理 $L_2^1(R)^* \cong M(R)$ を用いると, ある $\tilde\mu\in M(R)$ が存在して

$$\|\tilde\mu\| = \sup_{\|\phi\|\le 1}\Big|\int_R \mu\phi\Big|,$$

$$\int_R \tilde\mu\phi = \int_R \mu\phi, \qquad \phi\in A_2^1(R)$$

となる. このとき, $\mu-\tilde\mu\in N(R)$ でありかつ,

$$\|\mu-(\mu-\tilde\mu)\| = \|\tilde\mu\| < \|\mu\|$$

となるので, 補題 1 の条件 (1) は成立しない. ∎

定理 1 は, R が解析的有限型である場合に Krushkal が示した[17]. ただし, その論法は R が解析的有限型であることに強く依存している部分があり[18], そのままでは一般の Riemann 面に拡張できない. 後に Krushkal は $|\mu|$ が定数となるような極値 Beltrami 係数 μ に対しては, 一般の面でも同様の主張が成立することを示した[19]. 一方 Hamilton は一般の面において任意の極値的な Beltrami 係数に対して主張を証明している. 以上の証明は Bers [Be9] を基にしている.

補題 3. $\mu \in M(R)$ とする. $\{\phi_n\} \subset A_2^1(R)$, $\|\phi_n\| \leq 1$, に対して次の 2 条件は同値である.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \int_R \mu\phi_n = \|\mu\|$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_R \frac{\mu\phi_n}{1-|\mu|^2} = \frac{\|\mu\|}{1-\|\mu\|^2}$$

証明: $k := \|\mu\|$ とおく.

$$0 \leq \int_R (k-|\mu|)|\phi_n| \leq k - \Big|\int_R \mu\phi_n\Big|$$

であるから, (a) を仮定すると

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \int_R (k-|\mu|)|\phi_n| = 0$$

が成立する. 一方, (b) を仮定しても

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{1-k^2}\int_R (k-|\mu|)|\phi_n| &\leq \frac{k}{1-k^2} - \int_R \frac{|\mu\phi_n|}{1-|\mu|^2} \\ &\leq \frac{k}{1-k^2} - \Big|\int_R \frac{\mu\phi_n}{1-|\mu|^2}\Big| \end{aligned}$$

であるからやはり (2) が成立する. ところで (2) を仮定すると,

$$\begin{aligned} \Big|\int_R \mu\phi_n - (1-k^2)\int_R \frac{\mu\phi_n}{1-|\mu|^2}\Big| &= \int_R \Big|1 - \frac{1-k^2}{1-|\mu|^2}\Big||\mu\phi_n| \\ &= \int_R \frac{(k-|\mu|)(k+|\mu|)}{1-|\mu|^2}|\mu\phi_n| \\ &\leq \frac{2k^2}{1-k^2}\int_R (k-|\mu|)|\phi_n| \to 0 \end{aligned}$$

であるから, (a) と (b) は同値である. ∎

[17] [A-14] p.64 参照
[18] [A-14] p.66 の議論と補題 1
[19] [A-14] p.117 参照

この補題を用いると定理 1 は次のように書換えることができる.

定理 1′. ([RS5]) $\mu \in M(R)_1$ が極値的である必要十分条件は

$$\sup\left\{\left|\int_R \frac{\mu\phi}{1-|\mu|^2}\right| : \phi \in A_2^1(R), \|\phi\| \le 1\right\} = \frac{\|\mu\|}{1-\|\mu\|^2}$$

が成立することである.

§5. Reich-Strebel の不等式

定理 1. (Reich-Strebel の不等式; [RS1], [RS4], [RS5], [S6], [S9])
(a) $f \colon R \to R$ を id_R と同値な擬等角写像とする. このとき, 任意の $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$\|\phi\| \le \int_R \frac{\left|1-\mu(f)\phi/|\phi|\right|^2}{1-|\mu(f)|^2}|\phi|$$

(b) (a) と同じ仮定の下で

$$\left|\int_R \frac{\mu(f)\phi}{1-|\mu(f)|^2}\right| \le \int_R \frac{|\mu(f)|^2|\phi|}{1-|\mu(f)|^2}$$

(c) ふたつの擬等角写像 $f, g \colon R \to R'$ が同値であるならば, 任意の $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$\|\phi\| \le \int_R \frac{|1-\mu\theta|^2}{1-|\mu|^2} \frac{\left|1-\nu\theta\dfrac{1-\overline{\mu}\overline{\theta}}{1-\mu\theta}\right|^2}{1-|\nu|^2}|\phi|$$

ただし, ここで $\mu := \mu(f)$, $\theta := \phi/|\phi|$, $\nu := \mu(g^{-1}) \circ f \cdot \overline{f}_{\bar{z}}/f_z$ である.
(d) 擬等角写像 $f \colon R \to R'$ と $\phi \in A_2^1(R)$, $\|\phi\| = 1$, に対して

$$\frac{1}{K_0(f)} \le \int_R \frac{\left|1-\mu(f)\phi/|\phi|\right|^2}{1-|\mu(f)|^2}|\phi|$$

ここに, $K_0(f)$ は f と同値な極値擬等角写像の最大変形率である.

定理 1 は先ず R が単位円の場合に [RS1], [RS4], [RS5] において示された. そして [S6] で R が解析的有限型の場合に, さらに [S9] において一般の Riemann 面の場合に拡張された. 彼等の証明方法は大まかに言うと, 第 2 節で Affine 写像の極値性を示した際に用いた方法を Euclid 計量でなく正則 2 次微分 $\phi \in A_2^1(R)$ による計量 $|\phi|^{1/2}$ に適用するものである. ところで, この Reich-Strebel の不等式には Reich-Strebel 自身による証明以外にも Bers による別証明がある ([Be10]). Bers の証明の方針は Reich-Strebel の不等式と同値な不等式を先ず解析的有限

型の Riemann 面に対して示し[20], それを一般の場合に拡張してゆくというものである. なお, Bers と同様の方法を用いることによる Reich-Strebel の不等式の証明は Gardiner [A-8] の第 2, 3, 4 章にも述べてある.

さて, 定理の証明は上記の参考文献を見て頂きたい[21]. ここでは定理の主張 (a)–(d) の同値性のみを以下に示そう.

証明: [(a) $\Leftrightarrow$ (b)] $A_2^1(R)$ は複素線型空間だから, (b) の左辺を

$$\mathrm{Re}\int_R \frac{\mu(f)\phi}{(1-|\mu(f)|^2)}$$

で置き換えても良い. その際得られる不等式は (a) の右辺の分子を展開したものと同じである.

[(a) $\Rightarrow$ (c)] id_R と同値な擬等角写像 $g^{-1}\circ f\colon R\to R$ の Beltrami 係数は

$$\mu(g^{-1}\circ f)=\frac{\mu+\nu}{1+\overline{\mu}\nu}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
|1+\overline{\mu}\nu||1-\mu(g^{-1}\circ f)\theta| &= |(1+\overline{\mu}\nu)-(\mu+\nu)\theta| \\
&= |(1-\mu\theta)-\nu\theta(1-\overline{\mu}\overline{\theta})| \\
&= |1-\mu\theta|\left|1-\mu\theta\frac{1-\overline{\mu}\overline{\theta}}{1-\mu\theta}\right|, \\
|1+\overline{\mu}\nu|^2(1-|\mu(g^{-1}\circ f)|^2) &= |1+\overline{\mu}\nu|^2-|\mu+\nu|^2 \\
&= (1-|\mu|^2)(1-|\nu|^2)
\end{aligned}$$

を用いると, (a) より (c) が得られる.

[(c) $\Rightarrow$ (d)] g を f と同値な極値擬等角写像のひとつとして (c) を適用する. $|\mu(g^{-1})\circ f\cdot \bar{f}_{\bar{z}}/f_z|\le\|\mu(g)\|$ であるから, 不等式 (c) の被積分函数の 2 番目の因子は

$$\frac{(1+\|\mu(g)\|)^2}{1-\|\mu(g)\|^2}=K_0(g)=K_0(f)$$

以下である. 故に (d) が成立する.

[(d) $\Rightarrow$ (a)] f が id_R と同値であるから, $K_0(f)=1$ となり, (a) は (d) より直ちに従う. ∎

---

[20]Bers が示した不等式の閉 Riemann 面の場合の証明は [A-12] の第 5 章の 3.3 でも述べられていて, Teichmüller の一意性定理の証明に用いられている.

[21]Reich-Strebel の不等式を証明するだけならば, Bers の証明が最もわかり易い. また, Reich-Strebel 自身の方法での不等式の証明の大まかな説明が Reich [B-10], Reich-Strebel [RS1], Strebel [B-12] にある. これを先に読まれるのも良いかも知れない.

Reich-Strebel の不等式には多くの応用がある．それらは後の節で与えるとして，先ず，Hamilton-Krushkal の定理の逆が成立することを示そう．

定理 2. 擬等角写像 $f\colon R \to R'$ が極値的であるための必要十分条件は $\mu(f)$ が Hamilton 条件を満たすことである．

この定理の結果，第 2 節にある主張で "$\mu \in M(R)$ が Hamilton 条件を満たす" というのは，すべて "$\mu \in M(R)_1$ が極値的である" と読み替えることができる．

証明: 必要性は既に示したので，十分性即ち $\mu(f)$ が Hamilton 条件を満たしているならば，f は極値的になることを示せば良い．$\{\phi_n\}$ を $\mu(f)$ に対する Hamilton 列とすると，定理 1 (d) より

$$\begin{aligned}\frac{1}{K_0(f)} &\leq \int_R \frac{\left|1-\mu(f)\phi_n/|\phi_n|\right|^2}{1-|\mu(f)|^2} \\ &\leq \frac{1+k(f)^2-2\operatorname{Re}\int_R \mu(f)\phi_n}{1-k(f)^2}\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{K_0(f)} \leq \frac{(1-k(f))^2}{1-k(f)^2} \qquad \text{即ち} \qquad K(f) \leq K_0(f)$$

故に，f は極値的である． ∎

この定理 2 と定理 2.1 より直ちに

系 1. (Teichmüller) 解析的有限型の Riemann 面 R に対しては，擬等角写像 $f\colon R \to f(R)$ が極値的であるための必要十分条件は，f Teichmüller 写像になることである．

さて，Hamilton 条件を満たすことが極値的であるための必要十分条件であることより，$\mu \in M(R)_1$ が極値的ならば，任意の $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < 1/\|\mu\|$, に対して，$\zeta\mu$ も極値的になることが直ちに従うが，さらに次の結果を得ることができる．

定理 3. 擬等角写像 $f\colon R \to f(R)$, $g\colon R \to g(R)$ の Beltrami 係数が Hamilton 条件を満足する $\mu \in M(R)$, $\|\mu\| = 1$, と $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ を用いて $\mu(f) = \alpha\mu$, $\mu(g) = \beta\mu$ と表されるならば，$f \circ g^{-1}\colon g(R) \to f(R)$ は極値擬等角写像である．

証明: $\nu := (\mu.\cdot g_z/\bar{g}_{\bar{z}}) \circ g^{-1}$ とおくと, $\|\nu\| = 1$, $\mu(g^{-1}) = \beta\nu$ かつ

$$\mu(f \circ g^{-1}) = \frac{(\alpha - \beta)\nu}{1 - \alpha\overline{\beta}|\nu|^2}$$

である. 極値性の定義から g^{-1} も極値擬等角写像になるので, ν に対する Hamilton 列 $\{\psi_n\} \subset A_2^1(g(R))$ が存在する. そこで補題 3.3 の証明より,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{g(R)} \frac{(\alpha-\beta)\nu}{1-\alpha\overline{\beta}|\nu|^2}\psi_n - \frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\overline{\beta}}\Big| &= \Big|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\overline{\beta}}\Big|\Big|\int_{g(R)}\Big[\frac{(1-\alpha\overline{\beta})}{1-\alpha\overline{\beta}|\nu|^2} - 1\Big]\nu\psi_n\Big| \\ &\leq \frac{2|\alpha\beta|}{1-|\alpha\beta|}\Big|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\overline{\beta}}\Big|\int_{g(R)}(1-|\nu|)|\psi_n| \to 0\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_{g(R)}\mu(f\circ g^{-1})\psi_n\Big| = \Big|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\overline{\beta}}\Big| = \|\mu(f\circ g^{-1})\|.$$

故に, $f \circ g^{-1}$ も極値的である. ∎

なお, 極値的な Beltrami 係数の場合と違って, 0 と同値な Beltrami 係数の集合 $M_0(R)$ については定理 3 のような主張は成立しない. 詳しくいうと, $\nu \in M_0(R)$ ではあるが, 十分小さい $t > 0$ に対して, $t\nu \notin M_0(R)$ となるものが存在する. この主張は後に第 3 章第 5 節で示す.

ところで実は, Hamilton-Krushkal の定理の逆だけでなく, 定理自体も Reich-Strebel の不等式から導くことができる. しかしながら, その方法は本文では詳しく扱わなかった, ある境界条件に関する同値類内の極値擬等角写像が有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像になることを利用するものであるので, ここでは証明を述べないこととする. 詳細は Strebel [S9] を見て頂きたい.

§6. Teichmüller 写像の存在条件

この節では極値擬等角写像が有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像になるための十分条件をいくつか与えよう. これらの条件に共通している基本的なアイデアは, そのような条件下では, 極値写像が等角である場合を除けば, 退化 Hamilton 列は存在しないということを示すものである.

先ず, 最初に Strebel の枠写像定理 (frame mapping theorem) を述べるための準備として, 以下の擬等角写像の拡張定理を与えておこう.

定理 1. $f\colon R \to S$ を擬等角写像とし, K を R のすべての尖点を埋めた Riemann 面 $\hat{R}$ 内のコンパクト部分集合ととする. このとき, $f|_{R-K}$ と $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトープな任意の擬等角写像 $g\colon R - K \to S$ に対して, 次の条件を満たす擬等角写像 $\tilde{g}\colon R \to S$ と $\hat{R}$ のコンパクト部分集合 $\tilde{K}$ が存在する.

(a) $\tilde{g}|_{R-\tilde{K}} = g|_{R-\tilde{K}}$

(b) $\tilde{g}$ と f は $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトープ

略証: $\tilde{K}$ を, K を含みかつ, その相対境界 $\partial\tilde{K}$ の各連結成分 C_j, $1 \le j \le n$, が R 内の非自明な解析的 Jordan 曲線であるような閉領域とする. この時, $\tilde{K}$ は位相的有限型の Riemann 面であるから, $f|_{\mathrm{int}\tilde{K}}$ とホモトープな擬等角写像 $h\colon \mathrm{int}\tilde{K} \to S$ で, $\partial\tilde{K}$ 上 $h = g$ となるものが存在する. この h を用いて擬等角写像 $g_1\colon R \to S$ を, $\tilde{K}$ 上では $g_1 = h$, $R - \tilde{K}$ 上では $g_1 = g$ と定める. この g_1 自身は $\mathrm{bd}(R)$ に関して f とホモトープとは限らないが, 各 C_j に関して Dehn のねじり変換 τ_j を $m(j)$ 回づつ合成した $g_1 \circ \tau_1^{m(1)} \circ \cdots \circ \tau_n^{m(n)}$ は f と $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトープとなるようにできる. これが求める $\tilde{g}$ である. ∎

定理 2. (Strebel [S7], [S9]) $f\colon R \to S$ を極値擬等角写像とする. もし, R のコンパクト部分集合 K と, $\mathrm{bd}(R)$ に関して $f|_{R-K}$ とホモトープな擬等角写像 $g\colon R - K \to S$ で $\|\mu(g)\| < \|\mu(f)\|$ となるようなものが存在するならば, f は有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像である.

証明: 前定理より g は R 全体において定義された擬等角写像であるとして良い. $K' := f^{-1} \circ g(K)$, $\mu := \mu(f)$, $\nu := \nu(g^{-1}) \circ f \cdot f_z/\bar{f}_{\bar{z}}$, $k := \|\nu|_{R-K'}\|$ とおく. $|\nu| = |\mu(g^{-1}) \circ f| = |\mu(g) \circ g^{-1} \circ f|$ であるから,

$$k = \|\mu(g)|_{R-K}\| < \|\mu\| \tag{1}$$

が成立している.

さて, μ に対する退化 Hamilton 列 $\{\phi_n\}$ が存在したと仮定すると, Reich-Strebel の不等式より

$$1 \le \frac{1+k}{1-k} \int_{R-K'} \frac{\left|1 - \mu\phi_n/|\phi_n|\right|^2}{1-|\mu|^2} |\phi_n| + \frac{1+\|\nu\|}{1-\|\nu\|} \cdot \frac{1+\|\mu\|}{1-\|\mu\|} \int_{K'} |\phi_n|$$

となる. 最初の積分は上から

$$\begin{aligned}\int_R \frac{\left|1 - \mu\phi_n/|\phi_n|\right|^2}{1-|\mu|^2} |\phi_n| &\le \frac{1}{1-\|\mu\|^2}\left(1 + \|\mu\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \int_R \mu\phi_n\right) \\ &= \frac{1-\|\mu\|}{1+\|\mu\|} + o(1)\end{aligned}$$

と評価でき, 後の積分については, 命題 1.17.1 と系 1.17.1 より

$$\int_{K'} |\phi_n| = o(1)$$

と評価できるから,

$$1 \le \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{1+\|\mu\|}{1-\|\mu\|}.$$

即ち, $\|\mu\| \le k$ を得る. しかし, これは (1) に矛盾する. ∎

この定理から次の系が導かれる.

系 1. $f_0\colon R \to R$ を id_R と同値な擬等角写像とする. $p_1, \ldots, p_n \in R$ とし, $R' := R - \{p_1, \ldots, p_n\}$ とおくとき, $f_0|_{R'}\colon R' \to f_0(R')$ と同値な擬等角写像 $f\colon R' \to f_0(R')$ の成す族の極値写像は一意的であり, それは有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像である.

$R = \mathbb{D}$, $n = 1$ の場合が Teichmüller の定理 ([Te] p.705 Verschiebungssatz) である.

この系の場合のように同値な擬等角写像の中にコンパクト集合の外で等角になるものが存在している場合は, 定理 2 の条件は確かめ易いことであるが, 一般に定理 2 の条件を確かめるのは容易ではない. しかし, R が位相的有限型である場合には, 定理 2 の条件を満たすための, f の境界対応に関する十分条件が知られている. 証明は [S6] を見て頂きたい.

補題 1. $h\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ を向きを保つ同相写像とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 正数 $r < 1$ と中への擬等角写像 $f\colon \{r < |z| < 1\} \to \mathbb{D}$ で

$$f|_{\partial\mathbb{D}} = h \qquad \text{かつ} \qquad \|\mu(f)\| < \varepsilon$$

を満たすものが存在するため必要十分条件は,

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{h(e^{i(\alpha+\theta)}) - h(e^{i\alpha})}{h(e^{i\alpha}) - h(e^{i(\alpha-\theta)})} = 1$$

となることである.

この補題と定理 2 より次の定理が従う.

定理 3. R を解析的有限型の Riemann 面とし, $f\colon R \to f(R)$ を擬等角写像とする. $\mathrm{bd}(R)$ の各連結成分 C の局所座標 $z\colon C \to \partial\mathbb{D}$ と $f(C)$ の局所座標 $w\colon C \to \partial\mathbb{D}$ とを用いて表される f の境界対応 $h := w \circ f \circ z^{-1}\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ が, 条件 (2) を満たすならば, f に同値な極値擬等角写像は有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像になる.

この定理の系として

系 2. ([S7]) 定理 3 において, 境界対応 h が C^2 級であり,

$$\inf |h'| > 0, \qquad \sup |h''| < \infty$$

を満たすならば, f に同値な極値擬等角写像は有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像になる.

一般の境界対応 $h\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ に対しては, h を境界値にする $\mathbb{D}$ の擬等角自己写像の成す族の極値写像が Teichmüller 写像になるとは限らないが, h が滑らかであったら, 極値写像が有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像になるであろうという Belinskiĭ-Teichmüller 予想[22] があるが, 上の結果はこれを肯定的に解いている. なお, [S7] には境界条件が条件 (2) を満たさないような場合についての研究指針が述べられている. また Li [Li1] にもこれと関係した話題が記されている.

さて, 解析的有限型の Riemann 面 R に対しては, 極値擬等角写像 f が有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像になるための十分条件として, f の Beltrami 係数の $\mathrm{bd}(R)$ の近傍での挙動に関するものがいくつか知られている. それを以下に述べよう.

補題 2. ([HO], [BO]) 円環領域 $A := \{\rho < |z| < 1\}$ 上の Beltrami 微分 μ が
(a) $\overline{A}$ まで連続に拡張できるかまたは,
(b) $|z|$ のみに依っていて, $\arg z$ に依らないならば,
$A_2^1(A)_1$ 内の広義一様に 0 に収束する任意の列 $\{\phi_n\}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_A \mu\phi_n \, dxdy = 0. \tag{3}$$

証明: 先ず, ϕ_n の Laurent 展開を $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(n)} z^m$ とすると, ϕ_n は広義一様に 0 に収束しているから, $\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)} = 0$ である.

[(a) の場合] ε を任意の正数とする. Stone-Weierstrass の定理より, $\|\mu - p\| \le \varepsilon$ と μ を一様近似する整式 $p(z,\bar z) := \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \bar z^k$ が存在する. そこで

$$\lim_{n\to\infty} \iint_A p(z,\bar z)\phi_n(z)\, dxdy = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} c_{k-j}^{(n)} \int_\rho^1 r^{2k+1}\, dr = 0$$

を得る. よって

$$\lim_{n\to\infty} \left| \iint_A \mu\phi_n\, dxdy \right| \le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \left| \iint_A p\phi_n\, dxdy \right| \le \varepsilon.$$

となる. 故に, (3) が成立する.

[(b) の場合]

$$\begin{aligned}
\left| \iint_A \mu\phi_n\, dxdy \right| &= \left| \int_\rho^1 \mu(r) r dr \int_0^{2\pi} \phi_n(re^{i\theta})\, d\theta \right| \\
&= 2\pi |c_0^{(n)}| \left| \int_\rho^1 \mu(r) r dr \right| \\
&\le \pi \|\mu\| \cdot |c_0^{(n)}|
\end{aligned}$$

であるから, (3) が成立する. ∎

[22] Krushkal [A-14] p.123

定理 4. (Harrington-Ortel [HO] 定理 2.2, Belna-Ortel [BO] 定理 2 参照) R を位相的有限型の Riemann 面とし, $f\colon R \to R'$ を等角でない極値擬等角写像とする. もし $R \cup \mathrm{bd}(R)$ における $\mathrm{bd}(R)$ のある近傍 U で, その各連結成分 U_j が局所座標により円環領域として表されるようなものと, U 上の Beltrami 微分 ν で, 各 U_J 上で補題 2 の条件 (a) または (b) を満たしかつ

$$\sup_U |\mu(f) - \nu| < \|\mu(f)\|$$

となるようなものが存在したら, f は有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像である.

証明: $\mu(f)$ に対する退化 Hamilton 列 $\{\phi_n\}$ が存在したとする. 前補題により $\lim_{n\to\infty} \int_U \nu\phi_n = 0$. また, $R-U$ はコンパクトであるから $\lim_{n\to\infty} \int_{R-U} \mu(f)\phi_n = 0$. よって,

$$\begin{aligned}\|\mu(f)\| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_R \mu(f)\phi_n \right| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \left| \int_{R-U} \mu(f)\phi_n \right| + \limsup_{n\to\infty} \left| \int_U (\mu(f) - \nu)\phi_n \right| \\ &\le \sup_U |\mu(f) - \nu| \cdot \|\phi_n\| < \|\mu(f)\|\end{aligned}$$

となって矛盾が生じる. 即ち, $\mu(f)$ に対する退化 Hamilton 列は存在していない. 故に f は有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像である. ∎

上の定理の仮定にある ν の縁 $\mathrm{bd}(R)$ の近傍での連続性についての条件は更に弱めることができる. これについては Harrington-Ortel [HO] を見て頂きたい.

§7. 一意極値的な擬等角写像

有限ノルムの正則 2 次微分による Teichmüller 写像が一意極値的であることは, Strebel [S3] において先ず単位円板の場合に示され, 後に Reich-Strebel の不等式の系として一般の場合に拡張された. ここでは少し一般的な次の主張を示そう.

定理 1. (Reich-Strebel [RS1]) $f\colon R \to R'$ を, その逆写像 f^{-1} の Beltrami 係数が非負値函数 k と $\psi \in A_2^1(R')$ により $\mu(f^{-1}) = k\overline{\psi}/|\psi|$ と表されるような擬等角写像とする. このとき, $g \neq f$ が f と同値な擬等角写像であれば, 測度正の集合上で $|\mu(g)| > |\mu(f)|$ が成立する.

証明: $\nu := -(\mu(g) \circ f^{-1}) \cdot (\overline{f^{-1}})_{\bar{z}}/(f^{-1})_z$ とおく. もし $|\mu(g)| \le |\mu(f)|$ であるとすると,

$$|\nu| \le |\mu(f) \circ f^{-1}| = |\mu(f^{-1})| = k$$

が成立する．そこで f^{-1}, g^{-1}, ψ に対して R' 上で Reich-Strebel の不等式を適用すると,

$$\|\psi\| \le \int_{R'} \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{\left|1-\nu\psi/|\psi|\right|^2}{1-|\nu|^2} |\psi|$$

となるが, 被積分函数について

$$\frac{\left|1-\nu\psi/|\psi|\right|^2}{1-|\nu|^2} \le \frac{(1+|\nu|)^2}{1-|\nu|^2} \le \frac{1+k}{1-k}$$

であるから, 逆向きの不等号も成立する．等号成立は $\nu\psi/|\psi| = k$ を意味するから,

$$\nu = \mu(f^{-1}) = -\mu(f) \circ f^{-1} \cdot \frac{\overline{(f^{-1})}_{\bar{z}}}{(f^{-1})_z},$$

即ち, $\mu(g) = \mu(f)$. 故に, $g = f$ となる． ∎

この定理で特に k を定数とすると, 次の Teichmüller の一意性定理がわかる．

系 1. 有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像は一意極値的である．

証明: f が有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像であるとき, f^{-1} も有限ノルムの正則2次微分による Teichmüller 写像になる．そこで, g を f と同値な極値擬等角写像とすると, $|\mu(g)| \le \|\mu(f)\| = |\mu(f)|$ であるから, 定理より $g = f$. よって f は一意極値的である． ∎

一般の Teichmüller 写像に対しては, 次のようなことも起こり得る．証明は [RS1] を見て頂きたい．

定理 2. r を $\partial\mathbb{D}$ のみに極を持つ有理函数で, $\mathbb{D}$ において $r'(z) \neq 0$ となるものとすると, $\phi := (r')^2 \in A_2(\mathbb{D})$ による Teichmüller 写像は $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ と同値である．

一般の一意極値的な擬等角写像についての十分条件として以下の定理が示されている．

定理 3. (Sethares [St]) $\phi \in A_2(\mathbb{D})$ が以下の条件 (a), (b) を満たしているならば, ϕ による Teichmüller 写像は一意極値的な擬等角写像である．

(a) $\partial\mathbb{D}$ 上に有限個の点 $z_1, \ldots, z_n$ が存在して, 任意の $r > 0$ について

$$\iint_{\mathbb{D}-\cup_{j=1}^{n}\{z\in\mathbb{D}\,:\,|z-z_j|<r\}} |\phi|\, dx\, dy < \infty$$

(b) 各 j, $1 \le j \le n$, に対して, 複素数 $\alpha_j \neq 0$ と実数 t_j, $-1 < t_j \le 0$, が存在して

$$\frac{\sqrt{\phi}}{(\log(z_j - z))^{t_j}} - \frac{\alpha_j}{z_j - z} = O(1), \qquad z \to z_j$$

証明は元論文を見て頂きたい[23].

定理 4. ([St]) $\mathbb{D}$ 上で正則かつ, $\overline{\mathbb{D}}$ 上で有理型であるような ϕ に対応する Teichmüller 写像 f が一意極値的な擬等角写像であるための必要十分条件は ϕ の $\partial\mathbb{D}$ 上にある各極の位数が 2 以下になっていることである.

証明: [十分性] 2 位の極を $z_1, \ldots, z_n$ として定理 3 を適用すれば良い.

[必要性] 3 位以上の極 p が存在したとする. $N_r := \{z \in \mathbb{D}\colon |z-p| < r\}$, $r > 0$ は十分小, においては ϕ による自然座標 $\zeta = \zeta(z) := \int^z \sqrt{\phi}\, dz$ が定義でき, ζ の函数としては f は Affine 写像と見なせる. 一方, $\zeta(N_r)$ はある角領域 S を含むことが計算からわかるが, 第 2 節で示したように角領域上では Affine 写像は極値的でないので, S 上で f を例えば同値な極値擬等角写像と取り替えることにより, f が一意極値的な擬等角写像でないことがわかる. ∎

定理 5. (Reich [Re9]) f を $|\mu(f)|$ が定数 k となるような Riemann 面 R 上の擬等角写像とする. もし $A_2^1(R)$ 内の列 $\{\phi_n\}$ で, 次の 2 条件を満たすものが存在するならば, f は一意極値的である.

(a) $\{\phi_n\}$ はほとんどいたるところで各点収束し, その極限の可測 2 次微分 ϕ_0 は $\phi_0(z) \neq 0$ a.e. を満たす.

(b)
$$\delta\{\phi_n\} := k\|\phi_n\| - \mathrm{Re}\int_R \mu(f)\phi_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

補題 1. f を $|\mu(f)|$ が定数 k となるような Riemann 面 R 上の擬等角写像とし, g を f と同値な極値擬等角写像とする. このとき,

$$\kappa := \mu(f), \quad \alpha := \mu(f^{-1}) \circ f, \quad \nu := \mu(g^{-1}) \circ f$$

とおくと, k のみに依る正定数 $C(k)$, $C'(k)$ が存在して, 任意の $\phi \in A_2^1(R)$ に対して

$$\int_R |\alpha - \nu|^2 |\phi| \leq C(k) \int_R |\alpha - \nu| \left|1 - \frac{\kappa\phi}{|\kappa\phi|}\right| |\phi| \tag{1}$$

$$\int_R |\alpha - \nu|^2 |\phi| \leq C'(k)\delta\{\phi\}. \tag{2}$$

が成立する.

---

[23]ただし, その証明の脚注 5 の部分については, やはり Strebel [S2] の定理 3 の証明にあるような手続きが必要なように思われる.

証明: f, g および ϕ に対して Reich-Strebel の不等式を適用すると,

$$\|\phi\| \le \int \frac{\left|1-\kappa\frac{\phi}{|\phi|}\right|^2}{1-|\kappa|^2} \frac{\left|1+\nu\frac{\kappa}{\alpha}\frac{\phi}{|\phi|}\frac{1-\overline{\kappa}\overline{\phi}/|\phi|}{1-\kappa\phi/|\phi|}\right|^2}{1-|\nu|^2}|\phi|.$$

$|\alpha| = |\kappa|$ を考慮すれば, 右辺の分子は

$$(1-|\kappa|^2)(1-|\nu|^2) + 2|\alpha-\nu|^2 - 2\operatorname{Re}\left[(1-\overline{\nu}\alpha)(\alpha-\nu)\frac{\kappa}{\alpha}\frac{\phi}{|\phi|}\right]$$

と変形でき, $|\kappa|$ は定数であるから

$$\int_R \frac{\operatorname{Re}[(1-\alpha\overline{\nu})(\alpha-\nu)\kappa\phi/(\alpha|\phi|)]}{1-|\nu|^2}|\phi| \le \int_R \frac{|\alpha-\nu|^2}{1-|\nu|^2}|\phi|$$

を得る. この両辺を

$$\int_R \frac{\operatorname{Re}[(1-\alpha\overline{\nu})(\alpha-\nu)\overline{\alpha}/|\alpha|]}{1-|\nu|^2}|\phi|$$

から引くと, 右辺の分子について

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left[(1-\alpha\overline{\nu})(\alpha-\nu)\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right] - |\alpha-\nu|^2 \\
&\qquad = (1-|\alpha|)\operatorname{Re}\left[(\alpha-\nu)\left(\overline{\nu}+\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)\right] \\
&\qquad = (1-|\alpha|)\left[|\alpha|^2-|\nu|^2+(1-|\alpha|)|\alpha|\operatorname{Re}\left(1-\frac{\overline{\nu}}{\overline{\alpha}}\right)\right] \\
&\qquad \ge C_1(k)\operatorname{Re}\left(1-\frac{\overline{\nu}}{\overline{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

となる. ここで $C_1(k)$ は k のみに依存する正定数であり, 以下の $C_2(k)$ 等も同様の正定数である. ところで

$$|\alpha-\nu|^2 = |\alpha|^2+|\nu|^2-2|\alpha|^2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\nu}}{\overline{\alpha}}\right) \le 2k^2\operatorname{Re}\left(1-\frac{\overline{\nu}}{\overline{\alpha}}\right)$$

であるから, 結局右辺の下からの評価として,

$$C_2(k)\int_R |\alpha-\nu|^2|\phi|$$

が得られる.

一方, 左辺の分子については

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha\overline{\nu})(\alpha-\nu)\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\left(1-\frac{\kappa\phi}{|\alpha\phi|}\right)\right] \le C_3(k)|\alpha-\nu|\left|1-\frac{\kappa\phi}{|\kappa\phi|}\right|$$

となり, 左辺は

$$C_4(k)\int_R |\alpha-\nu|\Big|1-\frac{\kappa\phi}{|\kappa\phi|}\Big||\phi|$$

で上から評価される. よって, 不等式 (1) が得られた. (1) に Schwarz の不等式を用いると

$$\Big(\int_R |\alpha-\nu|^2|\phi|\Big)^2 \le C_6(k)\int_R |\alpha-\nu|^2|\phi|\int_R \Big|1-\frac{\kappa\phi}{|\kappa\phi|}\Big|^2|\phi|,$$

故に

$$\int_R |\alpha-\nu|^2|\phi| \le C_6(k)\int_R \Big|1-\frac{\kappa\phi}{|\kappa\phi|}\Big|^2|\phi| = C'(k)\delta\{\phi\}.$$

となる. ∎

定理 5 の証明: α, ν, g を補題 1 にあるものとする. 不等式 (2) を $\phi := \phi_n$ に対して適用し, Fatou の補題を用いると,

$$\int_R |\alpha-\nu|^2|\phi_0| = 0.$$

$\phi_0(z) \neq 0$ a.e. であるから, $\alpha=\nu$, 即ち $f^{-1}=g^{-1}$ を得る. 故に f は一意極値的である. ∎

定理 5 の応用として, 例 1.4 の別証明を与えよう.

例 1. (Reich-Strebel [RS5] 参照) $S := \{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ において, Affine 写像 f は一意極値的である.

証明: Affine 写像 f の Beltrami 係数 $\mu(f)$ は $0 \le k < 1$ と $|\alpha| = 1$ により, $\mu(f) = k\alpha$ と表される. そこで, $\{\phi_n\} \subset A_2^1(S)$ を

$$\phi_n(z) := \overline{\alpha}\exp(-z^2/n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

で定めると,

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(z) = \overline{\alpha} \neq 0$$

であるから, 定理 5 の条件 (a) を満たす. また, Cauchy の積分定理を用いると, 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x+iy)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)\,dx = \overline{\alpha}\sqrt{n\pi}.$$

であることがわかる. 一方,

$$\begin{aligned}\iint_S |\phi_n|\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(\frac{-x^2}{n}\Big)\,dx\int_0^1\exp\Big(\frac{y^2}{n}\Big)\,dy\\ &\le \sqrt{n\pi}\exp\Big(\frac{1}{n}\Big)\end{aligned}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
0 \le \delta\{\phi_n\} &= \iint_S (k|\phi_n| - \operatorname{Re}\mu(f)\phi_n)\,dxdy \\
&\le k\sqrt{n\pi}\exp\left(\frac{1}{n}\right) - k\sqrt{n\pi} \\
&= O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).
\end{aligned}
$$

よって, 定理 5 の条件 (b) も成立する. 故に, f は一意極値的である. ∎

定理 6. ([Re9]) f を R 上の擬等角写像で, その Beltrami 係数 κ が, 定数 k, $0<k<1$, および R 上の局所可積分な可測 2 次微分 ϕ_0, $\phi_0(z)\neq 0$ a.e., により, $\kappa = k\overline{\phi_0}/|\phi_0|$ と表されるようなものとする. もし $A_2^1(R)$ 内の列 $\{\phi_n\}$ で, 次の 3 条件を満たすものが存在するならば, f は一意極値的である.

(a) $\{\phi_n\}$ はほとんどいたるところで ϕ_0 に各点収束する.

(b)
$$M := \sup_n \delta\{\phi_n\} < \infty$$

(c)
$$\liminf_{A\to\infty}\Big(\sup_n \int_{R(n,A)} |\phi_n|\Big) = 0$$

ただしここで $R(n,A) := \{z\in R\colon |\phi_n(z)| > A|\phi_0(z)|\}$ である.

証明:

$$\liminf_{n\to\infty}\int_R |\alpha-\nu|\Big|1-\frac{\kappa\phi_n}{|\kappa\phi_n|}\Big||\phi_n| = 0 \tag{3}$$

を示したら, 後は補題 1 の不等式 (1) と Fatou の補題から主張が従う.

$\{R_m\}$ を R の近似列とし,

$$R' := R - R_m - R(n,A), \qquad R'' := R_m - R(n,A)$$

とおく, 式 (3) の積分 I_n の積分域を $R(n,A)$, R', R'' に制限したものをそれぞれ $J_0(n,A)$, $J_1(m,n,A)$, $J_2(m,n,A)$ とおくと, Schwarz の不等式より

$$
\begin{aligned}
J_0(n,A)^2 &\le \int_{R(n,A)} |\alpha-\nu|^2|\phi_n| \int_{R(n,A)} \Big|1-\frac{\kappa\phi_n}{|\kappa\phi_n|}\Big|^2|\phi_n| \\
&\le (2k)^2\int_{R(n,A)}|\phi_n|\cdot\frac{2}{k}\delta\{\phi_n\} \\
&\le 8kM\int_{R(n,A)}|\phi_n|.
\end{aligned}
$$

故に

$$\liminf_{A\to\infty}\Big(\sup_n J_0(n,A)\Big) = 0.$$

次に $J_1(m,n,A)$ についても同様に

$$\begin{aligned}J_1(m,n,A)^2 &\leq \frac{2M}{k}\int_{R'}|\alpha-\mu|^2|\phi_n| \\ &\leq \frac{2AM}{k}\int_{R'}|\alpha-\mu|^2|\phi_0| \\ &\leq \frac{2AM}{k}\int_{R-R_m}|\alpha-\mu|^2|\phi_0|.\end{aligned}$$

ここで, 補題 1 の不等式 (2) と Fatou の補題より, $|\alpha-\mu|^2|\phi_0|$ は R 上で可積分になっているから

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_n J_1(m,n,A)\right)=0.$$

最後に R'' 上では被積分函数は可積分な $4kA|\phi_0|$ によって上から評価されるから, Lebesgue の収束定理と仮定 (a) より

$$\lim_{n\to\infty} J_2(m,n,A)\leq 2k\int_{R''}\lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{\kappa\phi_n}{|\kappa\phi_n|}\right||\phi_n|=0$$

以上から

$$\liminf_{n\to\infty} I_n\leq \sup_n J_0(n,A)+\sup_n J_1(m,n,A)$$

$m\to\infty$ とした後で, $A\to\infty$ とすれば, 定理の主張が従う. ∎

系 1. ([Re9]) D を平面領域とする. 一様有界な函数の列 $\{\phi_n\}\subset A_2^1(D)$ で

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(z)=1 \qquad \text{a.e. } D$$

$$\sup_n\iint_D[|\phi_n(z)|-\operatorname{Re}\phi(z)]\,dxdy<\infty$$

となるものが存在したら, Affine 写像 $F_K(z)=Kx+iy$, $K>1$, は D に関して一意極値的な擬等角写像である.

系 2. ([Re9]) D は平面領域で

(a) $$\inf\{\operatorname{Im} z\colon z\in D\}>-\infty,$$

(b) $$\iint_D e^{-ty}\,dxdy<\infty \qquad (\forall t>0)$$

を満たしているものとする. このとき, もし

(c) $$\liminf_{t\to 0}\iint_D e^{-ty}\sin^2\frac{tx}{2}\,dxdy<\infty$$

ならば, $F_K\colon D\to F_K(D)$ は一意極値的な擬等角写像である.

証明: 正数の列 $\{t_n\}$, $t_n \to 0$, を

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D \exp(-t_n y) \sin^2 \frac{t_n x}{2}\, dxdy$$

が存在して, 有限値になるようなものとし, $\phi_n(z) := \exp(it_n z)$ と定めて, 系 1 を適用すれば良い. ∎

この系を用いても第 1 節で示した主張を証明することができる.

例 2. (例 1.3 の別証明, [Re9]) $D := \{x+iy \colon y > |x|^\alpha\}$, $\alpha > 1$, とする. この場合系 2 の条件 (a), (b) が成立することは容易にわかる. (c) については, $\beta := 1/\alpha$ として

$$\begin{aligned} I(t) &:= \iint_D e^{-ty} \sin^2 \frac{tx}{2}\, dxdy \\ &= 2\int_0^\infty \sin^2 \frac{tx}{2}\, dx \int_{x^\alpha}^\infty e^{-ty}\, dy \\ &= \frac{2}{\alpha t^{1+\beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\beta-1} \sin^2\Big(\frac{t^{1-\beta}u^\beta}{2}\Big)\, du \end{aligned}$$

であるので,

$$t^{3\beta-1} I(t) = \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty e^{-u} u^{\beta-1} (g(u;t))^2\, du$$

ただし

$$g(u;t) := \frac{1}{t^{1-\beta}} \sin\Big(\frac{t^{1-\beta}u^\beta}{2}\Big)$$

である. ここで, $|g(u;t)| \le u^\beta/2$ であるから, Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{t\to 0} t^{3\beta-1} I(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-u} u^{3\beta-1}\, du.$$

故に, $3\beta - 1 \le 0$ つまり $\alpha \ge 3$ ならば, $F_K \colon D \to F_K(D)$ は一意極値的な擬等角写像である. ∎

定理 6 を用いて, Hayman-Reich [HR] は次のことを証明している. 証明は元論文を見て頂きたい.

定理 7. ϕ を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の正則 2 次微分で

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(re^{i\theta})|\, d\theta = O\Big(\frac{1}{1-r}\Big) \tag{4}$$

を満たすならば, ϕ と k, $0 \le k < 1$, に対応する Teichmüller 写像は一意極値的な擬等角写像である.

定理 4 の十分性はこの定理からもわかる. また, 例 1.2 より, 角領域 $S := \{re^{i\theta} : |\theta| < 2\alpha/\pi\}$, $\alpha > 0$, 上の Affine 写像 F_K, $K > 1$, は極値的でないから, 等角写像

$$\Phi : \mathbb{D} \ni z \mapsto \Big((1+z)/(1-z)\Big)^{\alpha} \in S$$

との合成でできる $f := F_K \circ \Phi$ は正則 2 次微分

$$(\Phi'(z))^2 = 4\alpha^2 \frac{(1+z)^{2\alpha-2}}{(1-z)^{2+2\alpha}}$$

に対応した, 極値的でない Teichmüller 写像である. ここで, ある正定数 C が存在して

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \geq \frac{C}{(1-r)^{1+2\alpha}}$$

となることに注意すれば[24], 定理 6 の条件 (c) は緩めることができないのがわかる. しかしながら, 定理 3 を考慮すると定理 7 の条件は Teichmüller 写像が一意極値的な擬等角写像であるための必要条件でないこともわかる. 例えば

例 3. 等角写像

$$\Phi(z) := \Big(\log \frac{2e}{1-z}\Big)^{1+t}, \qquad 0 < t \leq 1/2$$

と Affine 写像 $F_K(z)$ の合成 $f := F_k \circ \Phi$ は一意極値的な擬等角写像であるが, 条件 (4) を満たさない.

証明: 単位円板 $\mathbb{D}$ の $\log(2e/(1-z))$ による像は $\{z : |\mathrm{Im}\, z| < \pi/2, \mathrm{Re}\, z > 1\}$ に含まれる. また

$$u + iv := w(x + \pi i/2) = x^{1+t} + \frac{(1+t)\pi i}{2} x^t + O(x^{t-1}), \qquad t \to \infty$$

より $v = O(u^{t/(1+t)})$ であるから, ある正定数 C に対して, Φ による $\mathbb{D}$ の像は $D := \{u + iv : u > C|v|^3\}$ に含まれる. D に関して F_K は一意極値的な擬等角写像であるから, f は正則 2 次微分

$$\phi(z) := (\Phi'(z))^2 = \frac{C_1}{(1-z)^2}\Big(\log \frac{2e}{1-z}\Big)^{2t}$$

に対応する Teichmüller 写像でありかつ, 一意極値的な擬等角写像である.

---

[24]次の例 3 の証明を参照せよ.

一方, $r \to 1$ のとき, $|1-re^{i(1-r)}|/(1-r) \to \sqrt{2}$ であることを利用すると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\phi(re^{i\theta})|\, d\theta &\geq C_1 \int_0^{1-r} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2}\Big|\log \frac{2e}{1-re^{i\theta}}\Big|^{2t} d\theta \\ &\geq C_1 \int_0^{1-r} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^2}\Big(\log \frac{1}{|1-re^{i\theta}|}\Big)^{2t} d\theta \\ &\geq \frac{C_1(1-r)}{|1-re^{i(1-r)}|^2}\Big(\log \frac{1}{|1-re^{i(1-r)}|}\Big)^{2t} \\ &\geq \frac{C_2}{1-r}\Big(\log \frac{1}{1-r}\Big)^{2t}\end{aligned}$$

となるので, 条件 (4) は成立しない. ∎

極値擬等角写像に対する Hamilton 条件のような, 一意極値的な擬等角写像に対する特徴付けは知られていないが, 次のような予想がある.

Reich の予想. (Reich [Re5], [Re7]) 極値的擬等角写像 f 一意極値的であるための必要十分条件は$\mu(f) \in$ UHB となることである.

ここで $\mu \in$ UHB とは, 有界線型汎函数

$$A_2^1(R) \in \phi \mapsto \int_R \mu\phi$$

の $L_2^1(R)$ 上への Hahn-Banach 拡張が一意的であることである.

もちろん, 既に知られている一意極値的であるような例についてはやはり UHB でもあることが確かめられている. 以下, 解かれていない問題をいくつか述べておく.

問題 1. Beltrami 係数 μ が一意極値的であるならば, $\zeta\mu$, $|\zeta| < 1/\|\mu\|$, もそうか?

上の予想が正しければ, この問題は肯定的である. なお, Hamilton 条件より, 単に極値的である μ についての対応する命題は真である.

問題 2. 一意極値的な擬等角写像は Teichmüller 写像に限るか?

この問題の少し弱い形として

問題 3. 異なる極値的 Teichmüller 写像が同値になることがはたしてあるか? 即ち, Teichmüller 写像の族に限ると, 一意性はいつも成立するか?

なお, Teichmüller 写像として有理型のものまで含めるならば, 一意性が成立しないことが知られている.

例 4. (Reich [Re11]) $D_a := \{x+iy\colon 4x > ay^2\}$, $a>0$, とおく. 例 2.2 と 2.3 から F_K は D_1 に関して（一意極値的ではないが）極値的である. ところで,

$$f(z) := K^{-1}\Bigl(F_K(\sqrt{z-1})\Bigr)^2 + 1$$

とおくと, f も D_1 から $D_K = F_K(D_1)$ の上への擬等角写像であり, $z \in \partial D_1$ に対して $f(z) = F_K(z)$ となる. また

$$\mu(f) = \mu(F_K)\frac{|z-1|}{\bar{z}-1}$$

であるから, f は有理型 2 次微分 $1/(z-1)$ に対応する極値的な Teichmüller 型の擬等角写像となる. ∎

問題 4. f が一意極値的な擬等角写像ならば, $|\mu(f)|$ は定数か?

上の問題に関して, 次のことは容易にわかる.

命題 1. $\mu \in M(R)_1$ が一意極値的な擬等角写像 f の Beltrami 係数ならば, 任意の ε, $0<\varepsilon<1$, に対して, 集合

$$\{z \in R\colon |\mu(z)| \le \varepsilon\|\mu\|\}$$

は内点を含まない.

証明: もしある ε に対して

$$U := \mathrm{int}\{z \in R\colon |\mu(z)| \le \varepsilon\|\mu\|\} \neq \emptyset$$

であるとすると, U に含まれるような局所円板 Δ と十分小さな α を取り, 下の補題 2 を用いて Δ 上で g_α に等しく, それ以外で恒等写像に等しいような, R からそれ自身への擬等角写像 G_α をつくったとき, $f\circ G_\alpha$ は f と同値な極値擬等角写像になる. 故に f は一意極値的な擬等角写像でなくなる. ∎

補題 2. ([RS1]) $|\alpha| < 1/2$ とすると,

$$g_\alpha(z) := z + \alpha(1 - z\bar{z})$$

は $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ と同値な $\mathbb{D}$ 上の擬等角自己写像で, $\|\mu(f_\alpha)\| = |\alpha|/(1-|\alpha|)$.

証明: g_α が $\overline{\mathbb{D}}$ からそれ自身の中への連続かつ単射な写像であることは定義式から計算できる. また, $\partial\mathbb{D} = g_\alpha(\partial\mathbb{D})$ は一点にホモトープであるから g_α は全射である. 同相写像であることがわかれば, Beltrami 係数を計算することにより擬等角写像であることがわかる. ∎

§8. 擬等角写像の持ち上げと極値性

Riemann 面間の極値擬等角写像 $f\colon S \to R$ をその正則被覆面間の擬等角写像 $\tilde{f}\colon \tilde{S} \to \tilde{R}$ に持ち上げたとき, $\tilde{f}$ は極値的か, という問題がある. この問題に対して, Blum [Bl] は $\mathbb{C}$ 内の有界 2 重連結領域上の Affine 写像 $F_K(z) := Kx + iy$ の普遍被覆面間への持ち上げ $\tilde{F}_K$ は極値的であり, もし内側の境界が連続体であるならば, $\tilde{F}_K$ は一意極値的であることを示した. 一方, Strebel [S8] は R が解析的有限型 Riemann 面の場合に極値擬等角写像の持ち上げが極値的でなくなる例を構成し, 次の予想を与えた.

Strebel の予想. 双曲的かつ解析的有限型 Riemann 面間の等角でない極値擬等角写像の普遍被覆面間への持ち上げは極値的にならない.

Strebel の予想は第 1 章第 7 節で述べた tehta 予想と同値である.

一般に次の定理が成立する. 上の二つの予想の同値性はこの定理よりわかる.

定理 1. $\pi\colon \tilde{R} \to R$ を正則被覆とするとき,
(a): $\|\Theta_{R\backslash\tilde{R}}\| < 1$ であるならば, 任意の $\mu \in M(R)$, $\mu \neq 0$, に対して, $\pi^*\mu$ は Hamilton 条件を満たさない.
(b): $N(\Phi) = 1$ ならば, $\pi^*(\overline{\Phi}/|\Phi|) \in M(\tilde{R})$ は Hamilton 条件を満たす. ここで N は第 1 章第 7 節で定義した函数である.
(c): 恒等的に $N = 1$ であるとすると, $\mu \in M(R)$ が Hamilton 条件を満たせば, $\pi^*\mu$ も Hamilton 条件を満たす.
(d): $A_2^1(R)$ が有限次元ならば (a), (b), (c) の逆も成立する.

証明: (a): $\mu \in M(R)$ に対して

$$\sup_{\phi \in A_2^1(\tilde{R})_1} \left| \int_{\tilde{R}} (\pi^*\mu)\phi \right| = \sup_{\phi \in A_2^1(\tilde{R})_1} \left| \int_R \mu\Theta\phi \right| \leq \|\mu\|\,\|\Theta\| < \|\mu\|$$

であるから, $\pi^*\mu \in M(\tilde{R})$ は Hamilton 条件を満たさない.

(b): $\{\phi_n\} \subset A_2^1(\tilde{R})$ を $\Theta\phi_n = \Phi$ かつ $\lim\|\phi_n\| = 1$ であるような列とすると,

$$\int_{\tilde{R}} \pi^*\Big(\frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Big)\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} = \int_R \frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Theta\Big(\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}\Big) = \frac{1}{\|\phi_n\|} \to 1$$

よって $\pi^*(\overline{\Phi}/|\Phi|)$ は Hamilton 条件を満たす.

(c): $\mu \in M(R)$ の Hamilton 列 $\{\Phi_n\} \subset A_2^1(R)$ に対して, 列 $\{\phi_n\} \subset A_2^1(\tilde{R})$ で $\Theta\phi_n = \Phi_n$ かつ $\lim\|\phi_n\| = 1$ を満たすものが存在しているから,

$$\int_{\tilde{R}} (\pi^*\mu)\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} = \frac{1}{\|\phi_n\|}\int_R \mu\Phi_n \to 1$$

故に $\pi^*\mu$ は Hamilton 条件を満たす．

(d): [(a) の逆]　$\|\Theta\| = 1$ であるとしよう．$A^1_2(R)$ が有限次元であるから，ある $\Phi \in A^1_2(R)$, $\|\Phi\| = 1$, において $N(\Phi) = 1$ となる．故に，(b) から (a) の逆がわかる．

[(b) の逆]　$\{\phi_n\} \subset A^1_2(\tilde{R})$ を $\pi^*(\overline{\Phi}/|\Phi|)$ に対する Hamilton 列とし，$\Phi_n := \Theta\phi_n$ とおくと，$\|\Phi_n\| \leq 1$ である．また，$A^1_2(R)$ は有限次元であるから，$\{\Phi_n\}$ はノルム収束する部分列を含む．一般性を失うことなく，$\{\Phi_n\}$ 自身がある $\Psi \in A^1_2(R)$ にノルム収束しているとして良い．このとき，$\|\Psi\| \leq 1$ でありかつ

$$\int_R \frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Psi = \lim_{n\to\infty}\int_R \frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Theta\phi_n = \lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{R}} \pi^*\Big(\frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Big)\phi_n = 1$$

であるから，$\|\Psi\| = 1$ かつ $\Psi = \Phi$ となる．よって，

$$\|\Phi_n\| \to 1 \qquad \text{かつ} \qquad \Big|\|\Phi_n/\|\Phi_n\| - \Phi\|\Big| \to 0$$

となるから，N の連続性を用いて，

$$1 \leq N(\Phi) = \lim_{n\to\infty} N\Big(\frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|}\Big) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|\Phi_n\|} = 1$$

[(c) の逆]　特に，$\mu = \overline{\Phi}/|\Phi|$, $\Phi \in A^1_2(R)$, $\|\Phi\| = 1$, に対して (b) の逆を適用すれば良い．■

系 1． theta 予想と Strebel 予想は同値である．従って，Strebel 予想も成立する．

注． 普遍被覆：$\mathbb{H} \to R$ が定理 1.7.3 の条件 (a) または (b) を満たす場合は，たとえすべての Φ に対して $N(\Phi) > 1$ であっても，R 上の極値擬等角写像で，その $\mathbb{H}$ への持ち上げが極値的になるものが構成できる．例えば，条件 (b) を満たしている場合は例 2.2 のように Beltrami 係数を構成したら良い．故に，普遍被覆の場合には定理 1 の主張 (a) の逆が成立する．

最後に，持ち上げの一意極値性についての Blum の結果の拡張を McMullen の定理 (定理 1.7.2) と Reich の定理 (定理 6.5) を用いて証明しておこう．

定理 2． 可積分な正則 2 次微分に対する Teichmüller 写像の amenable な被覆面間への持ち上げは一意極値的である．

証明: $\pi\colon \tilde{R} \to R$ を amenable な被覆とし，$\Phi \in A^1_2(R)$ とする．McMullen の定理より，ある列 $\{\phi_n\} \subset A^1_2(\tilde{R})$ で $\Theta\phi_n = \Phi$ かつ $\lim\|\phi_n\| = \|\Phi\|$ となるものがある．このとき，

$$\begin{aligned}\|\phi_n\| - \int_{\tilde{R}} \pi^*\Big(\frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Big)\phi_n &= \|\phi_n\| - \int_R \frac{\overline{\Phi}}{|\Phi|}\Theta\phi_n \\ &= \|\phi_n\| - \|\Phi\| \to 0\end{aligned}$$

であるから, Reich の定理より, Φ に対する Teichmüller 写像の $\tilde{R}$ への持ち上げは一意極値的である. ∎

§9. 他の極値問題

最後に, 本解説で扱わなかった擬等角写像に関する極値問題をいくつか紹介しておこう. 詳細については各参考文献をご覧頂きたい.

極値問題 I: Γ を $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とし, σ を $\partial\mathbb{H} = \hat{\mathbb{R}}$ の Γ で不変かつ, $\{0, 1, \infty\}$ を含む閉集合とする. このとき, $M(\mathbb{H}, \Gamma)$ の 2 元 μ, ν が同値であることを

$$w^{\mu}|_{\sigma} = w^{\nu}|_{\sigma}$$

で定め, $\mu \underset{\sigma}{\sim} \nu$ と表すものとする. この同値関係 $\underset{\sigma}{\sim}$ に関する同値類の中で L^{∞} ノルムを最小にする元の特徴付けを調べよ.

Grötzsch の極値問題は $\Gamma = 1$, $^{\#}\sigma = 4$ の場合である. また, 話が前後するが, $\{0, 1, \infty\} \subset \Lambda(\Gamma)$ となる Γ に対して, $\sigma := \Lambda(\Gamma)$ と定めた場合の, この同値関係による $M(\mathbb{H}, \Gamma)$ の商集合が退化 Teichmüller 空間 (reduced Teichmüller space) と呼ばれているものである. この退化 Teichmüller 空間も含んだ一般的な設定で Teichmüller 空間を論じることは Gardiner 等が行っている. 例えば, [A-8] を見よ.

なお, この問題は $\hat{\mathbb{C}} - \sigma$ の普遍被覆面を考えることにより, この解説で扱っている $\sigma = \hat{\mathbb{R}}$ の場合に帰着できる. ただし, 扱う Banach 空間はすべて実 Banach 空間になるので, '正則' という部分は '実解析的' と読み替えなければならない.

極値問題 II: $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群 Γ で不変な $\mathbb{H}$ の可測部分集合 E と, E 上で定義されている Γ 不変な非負値有界可測函数 b で $\|b\|_{\infty} < 1$ を満たすようなものに対して, Beltrami 係数の集合 $M(\Gamma, E, b)$ を

$$M(\Gamma, E, b) := \{\mu \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1 \colon |\mu(z)| \leq b(z) \quad (z \in E)\}$$

で定め, $M(\Gamma, E, b)$ に第 1 章第 ? 節で定めたのと同じ同値関係 $\sim$ を入れる. $\mu_0 \in M(\Gamma, E, b)$ が属する同値類を

$$M(\Gamma, \mu_0, E, b) := \{\mu \in M(\Gamma, E, b) \colon \mu \sim \mu_0\}$$

で表すものとして, μ_0 が

$$\|\mu_0|_{(\mathbb{H}-E)}\| = \inf\{\|\mu|_{(\mathbb{H}-E)}\| \colon \mu \in M(\Gamma, \mu_0, E, b)\}$$

を満たすとき, μ_0 は極値的であると定義する. このとき, 極値的な元はどのように特徴付けられるか.

これは最初に Reich [Re5] において考察された問題であり, $0 < \operatorname{essinf} b$ の条件の下で, 極値的な元の特徴付けが与えられている.

極値問題 III: 上の I, II を合わせた問題即ち, $\mu_0 \in M(\Gamma, E, b)$ が属する同値類を

$$M(\Gamma, \mu_0, \sigma, E, b) := \{\mu \in M(\Gamma, E, b) \colon \mu \underset{\sigma}{\sim} \mu_0\}$$

で表し, μ_0 が

$$\|\mu_0|_{(\mathbb{H}-E)}\| = \inf\{\|\mu|_{(\mathbb{H}-E)}\| \colon \mu \in M(\Gamma, \mu_0, \sigma, E, b)\}$$

を満たすとき, μ_0 は極値的であるとする. この極値元についてはどうか.

これは Gardiner [Ga3] において $b = 0$ の場合が考察され, 後に Sakan と Fehlmann が一般の場合に拡張した ([Sk3], [Sk4], [FS2]). なお, 共に極値性を判定するために変分を用いているのであるが, Gardiner はこの解説と同じく Bers 射影の断面を利用しているのに対して, Sakan と Fehlmann は Reich [Re5] にならい, Reich-Strebel の不等式を利用した基本変分補題を用いている ([Fe5], [Sk5]).

極値問題 IV: σ を $\hat{\mathbb{R}}$ の閉部分集合, E を $\mathbb{H}$ 内のコンパクト集合で, $\mathbb{H} - E$ が領域になるようなものとする. $\mathbb{H} - E$ から $\mathbb{H}$ の中への擬等角写像で $\hat{\mathbb{R}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ にうつすものの成す集合に, σ 上での境界値が一致しているものを同値とする同値関係を入れる. このとき, 同値類の中で最大歪曲度を最小にするものを特徴付けよ.

これは, Fehlmann [Fe2], [Fe3], [Fe4] において考察されている. この問題の極値写像は**絶対極値擬等角写像**と呼ばれている.

その他に, 極値擬等角写像と調和写像の関係を調べる研究もあり, 巻末の参考文献では Shibata [Sb], [B-11], Reich [Re4], [Re12], Šeretov [Sr1], [Sr2], [Sr3], Krushkal [A-14] 等の中で論じられている.