極値擬等角写像と Teichmüller 空間

大 竹 博 巳 (京 教 大)

Topics in Complex Analysis 1992

まえがき

本書は極値擬等角写像とその Teichmüller 空間への応用ついて解説したものです. ただしもちろんのこと, 極値擬等角写像に関するすべての研究を網羅している訳ではありません. 書き残したことはたくさんあります. その第一の理由として, 最も基本的な事項を理解して頂けたら, そこから発展させて行くのは容易であると考えたからですが, 私の能力不足のために, 本書に載せられなかった話題も多くあります. また, 最後に付けてある参考文献も完全ではありません. 本書作成の間に私の手の届く所にたまたまあった文献を表にしたものです.

本文中の各所で証明を省略しました. そのような記述に関しては参考文献を御覧下さい. なお原則として, 付けてある証明はなんらかの意味で私の味付けが加わっています. つまり, 私にとって理解し易い形に書き換えてあります. ただ, そのために本来なかった誤りが加わってしまっていないことを祈っています.

大学院生の方々にも読んで頂けるよう, 予備知識としては Riemann 面, 被覆面, 擬等角写像, 不連続群等の理論の基礎的事実のみを仮定したつもりです. これらの仮定事項については, 参考文献に挙げた図書等 (例えば, [A-16], [Ma], [A-12], [A-20]) を御覧下さい.

最後に, 本書は京都大学理学部数学教室の谷口雅彦先生の御厚意により作成することができました. 谷口先生には, 本書作成の機会を与えて下さったことについての感謝と, 原稿作成が遅れたことについてのお詫びを申し上げたく思います.

大竹 博巳
(京都教育大学教育学部)

目　　次

第 1 章　準　備

§1. Möbius 変換

$A \in SL(2;\mathbb{C})$ による一次変換

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = P^1(\mathbb{C})$ からそれ自身への 1 対 1 正則な写像 γ を定める. このようにして $SL(2;\mathbb{C})$ から得られる $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の元 γ を Möbius 変換と呼び, 行列 A を γ の行列表現という. Möbius 変換全体の集合を Möb で表す. Möb には $SL(2;\mathbb{C})$ から導入される位相が入っているものとする. この位相はコンパクト開位相および広義一様収束から入る位相と同じものである.

なお行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を $(a\,b \mid c\,d)$ と表すことがある. 以下, 省略した証明については関係参考文献を御覧頂きたい.

命題 1. (a)　$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \text{Möb}$
(b)　$SL(2;\mathbb{C}) \to \text{Möb}$ は群の準同型写像であり, その核は $\{\pm(1\,0 \mid 0\,1)\}$. よって

$$\text{Möb} = PSL(2;\mathbb{C}) := SL(2;\mathbb{C})/\{\pm(1\ 0 \mid 0\ 1)\}$$

$A \in SL(2;\mathbb{C})$ は適当な正則行列 B をとれば

$$B^{-1}AB = \begin{cases} \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathrm{tr}A = \pm 2 \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, & \lambda + 1/\lambda = \mathrm{tr}A \neq \pm 2. \end{cases}$$

とできるので,

命題 2. 恒等変換以外の任意の Möbius 変換は次の (a) – (d) のどれか唯一つと Möb で共役になる.

(a)	$z \mapsto z+1,$	
(b)	$z \mapsto \alpha z,$	$\lvert\alpha\rvert = 1,\ \alpha \neq 1$
(c)	$z \mapsto \alpha z,$	$\alpha > 1$
(d)	$z \mapsto \alpha z,$	$\lvert\alpha\rvert > 1,\ \alpha \notin \mathbb{R}$

上の (a) – (d) の場合に対応する $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ はそれぞれ**放物的**, **楕円的**, **双曲的**, **斜航的**であるといわれる. $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ の行列表現を A としたとき, $\mathrm{tr}^2 A$ および $|\mathrm{tr}A|$ は γ に対して一意に定まる. そこでこの値をそれぞれ $\mathrm{tr}^2\gamma$, $|\mathrm{tr}\gamma|$ で表す. tr は共役をとることに関して不変であるので

命題 3. 恒等変換以外の任意の Möbius 変換 γ について

(a) γ が放物的 $\iff$ $\mathrm{tr}^2\gamma = 4.$

(b) γ が楕円的 $\iff$ $\mathrm{tr}^2\gamma \in [0,4),$

(c) γ が双曲的 $\iff$ $\mathrm{tr}^2\gamma \in (4,\infty),$

(d) γ が斜航的 $\iff$ $\mathrm{tr}^2\gamma \notin [0,\infty),$

次の公式は後に用いる.

命題 4. $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ および $z, \zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して

$$(\gamma(z) - \gamma(\zeta))^2 = \gamma'(z)\gamma'(\zeta)(z-\zeta)^2$$

証明: Möb は 3 種類の変換 (i) : $z \mapsto z + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) (ii) : $z \mapsto \beta z$ ($\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$) (iii) : $z \mapsto 1/z$ で生成される[1]ことを利用すれば, 容易にわかる.

$\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 S に対して

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(S) := \{\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b} \colon \gamma(S) = S\}$$

と定める.

§2. Klein 群

Γ を Möb の部分群とする. $z \in \hat{\mathbb{C}}$ は,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(a) = z$$

となるような $a \in \hat{\mathbb{C}}$ と Γ の異なる元から成る列 $\{\gamma_n\}$ が存在するとき, Γ の**極限点**であるという. Γ の極限点の全体の成す集合を $\Lambda(\Gamma)$ で表し, Γ の**極限集合**と呼ぶ. 定義から, 極限集合は Γ で不変な閉集合である. また

$$\Omega(\Gamma) := \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$$

と定義する. 次の事実が知られている.

[1]実は, (i) と (iii) のみで Möb は生成できる.

定理 1. $\Omega(\Gamma)$ は Γ で不変な開集合であり, Γ は $\Omega(\Gamma)$ に不連続に作用している. 即ち, 任意の $z \in \Omega(\Gamma)$ に対して, ある z の近傍 U で

$$^{\#}\{\gamma \in \Gamma : \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\} < \infty$$

となるものが存在する.

そこで, $\Omega(\Gamma)$ を Γ の**不連続領域**[2]という.
$\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ となるような Γ を **Klein 群**という[3].

Γ を Klein 群, S を $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合としたとき, Γ の S に対する**固定部分群** Γ_S を

$$\Gamma_S := \Gamma \cap \mathrm{M\ddot{o}b}(S)$$

で定義する.
Γ' を Klein 群 Γ の部分群とする. $\Omega(\Gamma)$ 部分集合 S が

$$\Gamma' = \Gamma_S \qquad \text{かつ} \qquad \gamma(S) \cap S = \emptyset \quad (\forall \gamma \in \Gamma - \Gamma')$$

のふたつの条件を満たすとき, S は Γ で Γ' に関して**真に不変**であるという. 特に, 自明な群 1 に関して真に不変な集合は Γ の**部分基本集合**と呼ばれる. さらに, Γ の部分基本集合になっている領域 F が

$$\mathrm{meas}(\partial F) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F}) \supset \Omega(\Gamma)$$

を満たすならば, F は Γ の**基本領域**と呼ばれる.

以下では, 領域 D と Klein 群 Γ が

$$\Gamma < \mathrm{M\ddot{o}b}(D) \qquad \text{かつ} \qquad D \subset \Omega(\Gamma)$$

を満たすとき, Γ は D に作用しているということにする.

定理 2. 任意の $\zeta \in \Lambda(\Gamma)$ と $z \in \Omega(\Gamma)$ に対して, Γ 内の列 $\{\gamma_n\}$ で $\gamma_n(z)$ が ζ に収束するようなものが存在する.

定理 3. 任意の Klein 群について, 基本領域が存在する.

§3. Fuchs 群

単位円板 を $\mathbb{D}$ で表す. ある $A \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ に対して, $\mathrm{M\ddot{o}b}(A(\mathbb{D}))$ の部分群になるような Klein 群 Γ を **Fuchs 群**と呼ぶ. このとき, $\Lambda(\Gamma) \subset \partial A(\mathbb{D})$ である.

$$\mathrm{bd}(\Gamma) := \partial A(\mathbb{D}) - \Lambda(\Gamma) \subset \Omega(\Gamma)$$

と定義し, $\mathrm{bd}(\Gamma) = \emptyset$ である場合に Fuchs 群 Γ は**第 1 種**であるといい, そうでない場合に Γ は**第 2 種**であるという.

[2] ここで習慣から, '領域' という用語を用いているが, Ω は連結になるとは限らない.
[3] Möb の位相に関して離散的な部分群を Klein 群と定義することもある. この場合 Klein 群 Γ は, $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ ならば第 1 種であるといい, $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ ならば第 2 種であるという.

定理 1. Möb($\mathbb{D}$) の部分群 Γ に対して, Γ が $\mathbb{D}$ に不連続に作用することと, 即ち, Fuchs 群であることと, Γ が Möb の離散部分群であることは同値である.

$\gamma \in \Gamma$ は

$$\langle\gamma\rangle = \bigcap_{z=\gamma(z)} \Gamma_z$$

が成立するとき, **原始的**であるという.

以下の事実が知られている.

清水の補題. Γ を上半平面 $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とする. もし $\gamma\colon z \to z+1$ が Γ の原始的元であるならば, $\{z \in \mathbb{H}\colon \operatorname{Im} z > 1\}$ は Γ で $\langle\gamma\rangle$ に関して真に不変である.

Γ に含まれる楕円的変換の固定点になっているような点の集合を $\mathrm{br}(\Gamma)$ で表す. $\mathrm{br}(\Gamma) \subset \Omega(\Gamma)$ である. Γ で不変な集合 S に対して

$$S_\Gamma := S - \mathrm{br}(\Gamma)$$

とおく. $\mathrm{br}(\Gamma) = \emptyset$ であるとき, Γ は $\Omega(\Gamma)$ に**自由に作用する**という. このとき, 任意の $z \in \Omega(\Gamma)$ に対して, Γ の部分基本集合になるような z の近傍が存在する.

カラー・レンマ. 次の条件 (a), (b) を満たす函数 $\theta\colon (0,\infty) \to (0,\pi/2)$ が存在する.

(a)
$$\theta = O(t) \qquad t \to 0$$

(b) $\gamma\colon z \to kz$, $k > 1$, が上半平面 $\mathbb{H}$ に自由に作用する Fuchs 群 Γ の原始的元であるならば, Stolz 領域

$$\{z \in \mathbb{H}\colon \theta(k) < \arg z < \pi - \theta(k)\}$$

は Γ で $\langle\eta\rangle$ に関して真に不変となる.

コンパクト Riemann 面から有限個の点を除いて得られる Riemann 面は**解析的有限型**であるという. また, 解析的有限型の面に同相な Riemann 面は**位相的有限型**であるという.

Γ を $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群とする. 射影 $\pi\colon \mathbb{D} \to \Gamma\backslash\mathbb{D}$ が正則になるように複素構造を入れると, $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ は Riemann 面になる. このとき

定理 2. Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ が
(a) 位相的有限型になる必要十分条件は Γ が有限生成であることであり,
(b) 解析的有限型になる必要十分条件は Γ が有限生成第 1 種であることである.

一意化定理と $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ であることより次の定理が得られる.

定理 3. Riemann 面 R が複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$, 複素平面 $\mathbb{C}$, 一点を除いた複素平面, トーラスのどれとも等角同値でないとすると, $\mathbb{D}$ に自由に作用する適当な Fuchs 群を選んで, R と $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ が等角同値になるようにできる.

定理 3 の仮定を満たす Riemann 面は**双曲的**であるという.

双曲的 Riemann 面 R の**縁 (border)** $\mathrm{bd}(R)$ を, $R = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ となるような, $\mathbb{D}$ に自由に作用する Fuchs 群をとることにより,

$$\mathrm{bd}(R) := \Gamma\backslash\,\mathrm{bd}(\Gamma)$$

で定める. $\mathbb{D} \cup \mathrm{bd}(\Gamma)$ に $\Omega(\Gamma)$ の相対位相を入れ, $R \cup \mathrm{bd}(R)$ には, 射影 $\pi\colon \mathbb{D} \cup \mathrm{bd}(\Gamma) \to R \cup \mathrm{bd}(R)$ が局所同相になるように位相を入れる.

また, 清水の補題により, Γ の放物的変換の固定点 p は R の尖点 (punture) に対応していることがわかる. $p(\Gamma)$ で Γ に含まれる放物的変換の固定点の成す集合を表すものとする. $p \in p(\Gamma)$ に対しては, Δ を p において $\partial\mathbb{D}$ に内接する開円板として, $p \cup \Delta$ が p の近傍であると定めることにより, $\mathbb{H} \cup p(\Gamma)$ に位相を入れる. このとき, R の尖点を埋めてできる Riemann 面を $\dot{R}$ で表せば[4], $\dot{R} = \Gamma\backslash(\mathbb{H} \cup p(\Gamma))$ であり, 射影 π は $\mathbb{H} \cup p(\Gamma) \to \dot{R}$ に連続拡張できる.

次の補題は簡単な計算からわかる.

補題 1. $A = (a\ b \mid c\ d) \in SL(2;\mathbb{C})$ が $\{{}^t(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_0| < |z_1|\}$ を不変にするための必要十分条件は

$$c = \bar{b}, \qquad d = \bar{a} \tag{1}$$

である. 言い換えると, $\gamma \equiv (a\ b \mid c\ d)$ が $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ の元であるための必要十分条件は (1) かつ $|a|^2 - |b|^2 = 1$ となることである.

補題 2. 楕円的変換 $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ および, γ と固定点を共有しない $\eta \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ に対して, γ と η の交換子 $[\gamma, \eta] = \gamma^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta$ は放物的である. 特に, $\mathrm{br}(\langle\gamma, \eta\rangle)$ は $\mathbb{D}$ 内のコンパクト集合でない.

証明: Möb での共役を考えることにより,

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \bar{e} \end{pmatrix}, \qquad |e| = 1, e \neq \pm 1$$

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 - |b|^2 = 1, b \neq 0$$

[4] $\dot{R}$ が尖点を持たないとは限らない. 例えば, $R := \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ のとき, $\dot{R} = \mathbb{C}$ である.

であるとして良い．

このとき，

$$[\gamma, \eta] \equiv \begin{pmatrix} |a|^2 - \bar{e}^2|b|^2 & * \\ * & |a|^2 - e^2|b|^2 \end{pmatrix} =: A$$

であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}A &= 2|a|^2 - (e^2 + \bar{e}^2)|b|^2 \\ &= 2 + |e - \bar{e}|^2|b|^2 > 2 \end{aligned}$$

故に，交換子は放物的である．

また，$\alpha^n \gamma \alpha^{-n}$ の固定点は $\alpha^n(0)$ であり，α が放物的ならば，$n \to \infty$ のとき $\alpha^n(0) \to \partial\mathbb{D}$ となるから，後半の主張が示される．

後の利用のために次の公式を示しておこう．

補題 3. $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ および $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して

$$(1 - \overline{\gamma(w)}\gamma(z))^2 = \gamma'(z)\overline{\gamma'(w)}(1 - \bar{w}z)^2.$$

特に

$$1 - |\gamma(z)|^2 = |\gamma'(z)|(1 - |z|^2).$$

証明: w の $\partial\mathbb{D}$ に関する対称点 $1/\bar{w}$ を w^* で表すものとする．補題 1 より，$\gamma(w^*) = (\gamma w)^*$ が成立している．この式を $\bar{w}$ で微分することにより，

$$\gamma'(w^*)w^{*2} = (\gamma w)^{*2}\overline{\gamma'(w)}$$

を得る．また，命題 1.4 より

$$(\gamma w^* - \gamma z)^2 = \gamma'(w^*)\gamma'(z)(w^* - z)^2$$

であるから

$$\begin{aligned} (1 - \overline{\gamma w}\gamma z)^2 &= \frac{(\gamma w^* - \gamma z)^2}{(\gamma w^*)^2} \\ &= \frac{\gamma'(w^*)\gamma'(z)(w^* - z)^2}{(\gamma w^*)^2} \\ &= \frac{\gamma'(z)\overline{\gamma'(w)}(w^* - z)^2}{w^{*2}} \\ &= \gamma'(z)\overline{\gamma'(w)}(1 - \bar{w}z)^2 \end{aligned}$$

となる．

次の事実が知られている. 証明は例えば Kra [A-13] 107 頁の補題 5.2 を見て頂きたい.

定理 1. Γ を Fuchs 群とする. このとき, 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(1-|\gamma(z)|^2)^2 \leq C(\Gamma)$$

ここに, $C(\Gamma)$ は Γ のみに依る定数である.

§4. 双曲計量

単位円板 $\mathbb{D}$ 上に計量 $\lambda_{\mathbb{D}} = \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|$ を

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) := \frac{1}{1-|z|^2}$$

によって定める. $\lambda_{\mathbb{D}}$ は -4 の定曲率をもった計量であり, $\mathbb{D}$ 上の**双曲計量**または **Poincaré 計量**と呼ばれる. 補題 3.3 より, $\lambda_{\mathbb{D}}$ は $\text{Möb}(\mathbb{D})$ に関して不変な計量であることがわかる.

双曲的な Riemann 面 R 上の双曲計量 $\lambda_R = \lambda_R(\zeta)|d\zeta|$ を, 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{D} \to R$ を用いて,

$$\pi^*\lambda_R = \lambda_{\mathbb{D}}$$

即ち, 局所座標 ζ で表現すれば

$$\lambda_R(\zeta) := \lambda_{\mathbb{D}}(z)\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|, \qquad \zeta = \zeta\circ\pi(z)$$

を満たす計量として定義する. この定義が普遍被覆 π の選び方に依っていないのは, $\lambda_{\mathbb{D}}$ が $\text{Möb}(\mathbb{D})$ 不変な計量であることからわかる.

λ_R の定める R 上の距離を $d_R(\cdot,\cdot)$ で表すことにし, $p \in R$ と $r > 0$ に対して

$$D_R(p;r) := \{q \in R\colon d_R(p,q) < r\}$$

とおく.

$$\sup\{r > 0\colon\ D_R(p;r) \text{ が単連結 }\}$$

を p における**単射半径**という. p における単射半径を r とし, $\pi\colon \mathbb{D} \to R$ を普遍被覆, $z \in \pi^{-1}(p)$ とすると, $\pi|_{D_{\mathbb{D}}(z;r)}$ は単射であり, $D_{\mathbb{D}}(z;r)$ は π の被覆変換群に関する部分基本集合になる.

双曲的 Riemann 面 R の部分集合 E の双曲計量 λ_R に関する面積を

$$\mathrm{Area}(E) := \int_R \lambda_R^2$$

で表すことにする.

§5. 2次微分

Riemann 面 R 上の可測2次微分全体の成す集合を $L_2(R)$ で表すことにする. 即ち, $\mu \in L_2(R)$ は, R の各局所座標 (U_α, z_α) から, $z_\alpha(U_\alpha)$ 上で定義された可測函数 μ_α への対応で, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば

$$\mu_\beta(z_\beta(p)) = \mu_\alpha(z_\alpha(p))\left(\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}(p)\right)^2 \qquad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

が成立するようなものである. $\mu \in L_2(R)$ に対して, $\lambda_R^{-2}|\mu|$ は R 上の可測函数になることを注意しておく.

$1 \leq p < \infty$ として, $L_2(R)$ の元 μ が

$$\|\mu\|_p := \left(\int_R \lambda_R^{2-2p}|\mu|^p\right)^{1/p} < \infty$$

を満たすならば, μ は p **次可積分**であるという. 1次可積分である場合, 単に**可積分**であるという. 一方

$$\|\mu\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_R \lambda_R^{-2}|\mu| < \infty$$

を満たす $\mu \in L_2(R)$ は**有界**であるという.

$1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$L_2^p(R) := \{\mu \in L_2(R) \colon \|\mu\|_p < \infty\}$$

と定義する. $L_2^p(R)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする複素 Banach 空間になる. また, $L_2(R)$ の元の内で正則なものの成す部分集合を $A_2(R)$ で表し,

$$A_2^p(R) := L_2^p(R) \cap A_2(R)$$

とおく. $A_2^p(R)$ は $L_2^p(R)$ の閉部分空間になっている.

R が $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 D である場合には, $L_2(D)$ は D 上の可測函数の集合と見なせる. $A_2(R)$ についても, $\infty \notin D$ のときには, 同様に $A_2(D)$ を D 上の正則函数の集合と同一視できる. しかしながら, $\mathbb{C}$ の大域座標 z が $z = \infty$ の近くでは正則な局所座標にならないので, $\infty \in D$ の場合には $A_2(D)$ と D 上の正則函数の集合とは同一視できない. この場合は $1/z$ を局所座標とすればわかるように, D 上の正則函数 ϕ が $A_2(R)$ に入る必要十分条件は

$$\phi(z) = O(|z|^{-4})$$

を満たすことである.

一方 Riemann 面の場合とまったく平行に, Klein 群 Γ で不変な領域 $D \subset \Omega(\Gamma)$ に対して

$$\mu = \gamma^*\mu := \mu \circ \gamma \cdot (\gamma')^2 \qquad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

を満たす D 上の可測函数 μ を Γ **に関する重さ** -4 **の可測保型形式**といい, このような μ の成す集合を $L_2(D,\Gamma)$ で表す. P を Γ に関する基本領域としたとき, $L_2(D,\Gamma)$ の元 μ は

$$(1) \qquad \|\mu\|_p := \Big(\iint_P \lambda_D^{2-2p}(z)|\mu(z)|^p \, dxdy \Big)^{1/p} < \infty \qquad p \neq \infty$$

を満たすならば, p **次可積分**であるという. なお, $\lambda_D^{-2}|\mu|$ は Γ で不変な函数になるので, 定義 (1) の積分は基本領域 P の選び方に依らない. また, $\mu \in L_2(D,\Gamma)$ は

$$\|\mu\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{z\in D} \lambda_D^{-2}(z)|\mu(z)| < \infty$$

を満たすならば, **有界**であるという. そして

$$L_2^p(D,\Gamma) := \{\mu \in L_2(D,\Gamma) \colon \|\mu\|_p < \infty\}$$

と定義する. $L_2(D,\Gamma)$ の正則な元の成す部分集合を $A_2(D,\Gamma)$ で表し,

$$A_2^p(D,\Gamma) := L_2^p(D,\Gamma) \cap A_2(D,\Gamma)$$

とおく. $A_2^p(D,\Gamma)$ も $L_2^p(D,\Gamma)$ の閉部分空間になっている.

$\pi \colon \mathbb{D} \to R = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ を自然な射影とすると, π による引き戻し

$$\pi^* \colon L_2^p(R) \to L_2^p(\mathbb{D},\Gamma), \qquad \pi^* \colon A_2^p(R) \to A_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$$

はノルムを保つ同型写像になる. 今後この同型によりそれぞれの空間を同一視する.

$1 \le p < \infty$ とし, q は $1/p + 1/q = 1$ を満たすとする. このとき, $\mu \in L_2^p(R)$ と $\nu \in L_2^q(R)$ の **Petersson 内積**を

$$(\mu,\nu) := \int_R \lambda_R^{-2} \mu\bar{\nu}$$

で定める. この内積により, $L_2^p(R)^*$ と $L_2^q(R)$ は反線型なノルムを保つ同型写像により同一視される. そしてさらに

定理 1. (Bers) Petersson 内積は $A_2^q(R)$ から $A_2^p(R)^*$ の上への反線型な同型写像を定める. $\psi \in A_2^q(R)$ と $\ell \in A_2^p(R)^*$ が対応しているとき

$$\|\ell\| \le \|\psi\|_q \le 3\|\ell\|$$

が成り立つ.

証明は例えば Kra [A-13] の第 3 章を見よ.

なお, 次の事実が知られている.

命題 1. R を双曲的 Riemann 面とし, Γ を普遍被覆 : $\mathbb{H} \to R$ の被覆変換群とすると, 以下の条件は互いに同値である. そしてこのとき, $A_2^1(R) = A_2^\infty(R)$ である.

(a) $\dim A_2^1(\mathbb{H}, \Gamma) < \infty$
(b) R は解析的有限型である.
(c) R は双曲面積有限である.
(d) Γ は有限生成第 1 種である.

証明: [(a) $\Rightarrow$ (b)] R が解析的有限型でないとすると, 無限種数であるか, 無限個の尖点があるか, 縁を持つかのどれかである. それぞれの場合に無限個の一次独立で可積分な $\phi_n \in A_2^1(R)$ を構成することができるので, $A_2^1(R)$ の次元は有限でなくなる[5].

[(a) $\Leftarrow$ (b)] Riemann-Roch の定理を用いれば良い.

[(b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d)] 例えば, [A-13] p.68 を見よ.

R の双曲面積が有限の場合, $A_2^\infty(R) \subset A_2^1(R)$ は容易である. 逆は後の定理 17.4 よりわかる. ∎

次の定理は後に利用する.

定理 2. (Bers [Be3]) D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする. このとき, $\mathbb{C}$ 上で可積分でありかつ D 内に極を持たない有理函数の集合は $A_2^1(D)$ において稠密である.

証明は元論文か [A-13] の第 4 章または Gardiner [A-8] の第 4 章を見て頂きたい.

§6. 再生作用素

この節では断わりのない限り, $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ であるとする.

定義. $z, \zeta \in \mathbb{D}$ に対して

$$K_{\mathbb{D}}(z, \zeta) := \frac{3}{\pi} \frac{1}{(1 - \overline{\zeta} z)^4}$$

と定義する.

[5] Nag [A-26] p.82 からの引用?

$T_\zeta(z) := (z-\zeta)/(1-\overline{\zeta}z)$ とおくと,

$$K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \frac{3}{\pi}\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)^2 T_\zeta'(z)^2$$

と表されることを注意しておく.

$K_{\mathbb{D}}$ は以下の性質を持っている.

定理 1. A を $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ の元, Γ を $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群とする. このとき,

(a) $$K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \overline{K_{\mathbb{D}}(\zeta,z)}$$

(b) $$K_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = K_{\mathbb{D}}(Az, A\zeta)A'(z)^2\overline{A'(\zeta)}^2$$

(c) $$\iint_{\mathbb{D}} |K_{\mathbb{D}}(z,\zeta)|\, d\xi d\eta = 3\lambda_{\mathbb{D}}(z)^2$$

(d) $\mu \in L_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ とする.

$$z \mapsto \iint_{\mathbb{D}} \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)^{-2}K_{\mathbb{D}}(z,\zeta)\mu(\zeta)\, d\xi d\eta$$

は各 $z\in\mathbb{D}$ に対して絶対収束し, z の函数として, $A_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ に属す.
(e) 特に, $\phi \in A_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ に対しては

$$\iint_{\mathbb{D}} \lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)^{-2}K_{\mathbb{D}}(z,\zeta)\phi(\zeta)\, d\xi d\eta = \phi(z)$$

証明: [(a)] 定義式から明らかである.
[(b)] 補題 3.3 よりわかる.
[(c)]

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |K(z,\zeta)|\, d\xi d\eta &= \frac{3\lambda(z)^2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |T_z'(\zeta)|^2\, d\xi d\eta \\ &= \frac{3\lambda(z)^2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} d\xi d\eta = 3\lambda(z)^2.\end{aligned}$$

よって, (c) が成立する.
[(d)] $p=\infty$ の場合は, (c) を用いると,

$$\lambda(z)^{-2}\iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}|K(z,\zeta)||\mu(\zeta)|\, d\xi d\eta \le 3\|\mu\|_\infty$$

を得る. よって, 積分が絶対収束し, $L_2^\infty(\mathbb{D})$ に入ることがわかった. 被積分函数は

(1) $$\lambda(\zeta)^{-2}K(z,\zeta)\mu(\zeta) = \lambda(\gamma\zeta)^{-2}K(\gamma z,\gamma\zeta)\mu(\gamma\zeta)\gamma'(z)^2|\gamma'(\zeta)|^2 \qquad (\forall\gamma\in\Gamma)$$

を満たすから，積分が $L_2^\infty(\mathbb{D},\Gamma)$ に入ることは容易にわかる．積分は正則函数になることも容易である[6]．

次に，$p\neq\infty$ の場合を示す．F を Γ に関する基本領域とし，

$$M(z,\zeta):=\sum_{\gamma\in\Gamma}|K(\gamma z,\zeta)||\gamma'(z)^2|=\sum_{\gamma\in\Gamma}|K(\gamma^{-1}z,\zeta)||(\gamma^{-1})'(z)^2|$$

とおく．

$$M(z,\zeta)=M(\gamma z,\gamma\zeta)|\gamma'(z)|^2|\gamma'(\zeta)|^2 \qquad (\forall\gamma\in\Gamma)$$

が成り立つことを注意せよ．

先ず，(b) と定理 3.1 を用いると

$$\begin{aligned}\lambda(\zeta)^{-2}M(z,\zeta)&=\lambda(\zeta)^{-2}\sum_{\gamma}|K(z,\gamma\zeta)||\gamma'(\zeta)|^2\\&\leq\frac{3}{\pi(1-|z|)^4}\sum_{\gamma}(1-|\zeta|^2)^2|\gamma'(\zeta)|^2\\&=\frac{3}{\pi(1-|z|)^4}\sum_{\gamma}(1-|\gamma\zeta|^2)^2\\&\leq\frac{3C(\Gamma)}{\pi(1-|z|)^4}\end{aligned}$$

となり，(c) を用いると

$$\iint_F M(z,\zeta)\,d\xi d\eta=\iint_{\mathbb{D}}|K(z,\zeta)|\,d\xi d\eta=3\lambda(z)^2$$

となる．そこで (1) を考慮すると

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}}\lambda(\zeta)^{-2}|K(z,\zeta)||\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta&=\sum_{\gamma}\iint_{\gamma^{-1}(F)}\lambda(\zeta)^{-2}|K(z,\zeta)||\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta\\&=\sum_{\gamma}\iint_{\gamma^{-1}(F)}\lambda(\gamma\zeta)^{-2}|K(\gamma z,\gamma\zeta)||\mu(\gamma\zeta)||\gamma'(z)|^2|\gamma'(\zeta)|^2\,d\xi d\eta\\&=\sum_{\gamma}\iint_F\lambda(\zeta)^{-2}|K(\gamma z,\zeta)||\gamma'(z)|^2|\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta\\&=\iint_F\lambda(\zeta)^{-2}M(z,\zeta)|\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta\\&\leq\Big(\iint_F\lambda(\zeta)^{2-2p}|\mu(\zeta)|^p\,d\xi d\eta\Big)^{1/p}\Big(\iint_F\lambda(\zeta)^{2-2q}M(z,\zeta)^q\,d\xi d\eta\Big)^{1/q}\\&\leq\|\mu\|_pC_1(\Gamma,|z|)\Big(\iint_F M(z,\zeta)\,d\xi d\eta\Big)^{1/q}\\&=C_2(\Gamma,|z|)\|\mu\|_p\end{aligned}$$

[6]例えば，溝畑 [A-24] p.139 定理 4.9 を見よ．

よって, 積分は絶対収束している. ただし, $C_j(\Gamma,|z|)$ は Γ と $|z|$ にのみ依る正定数である.

さらに

$$
\begin{aligned}
&\iint_F \lambda(z)^{2-2p}\Big|\iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}K(z,\zeta)\mu(\zeta)\,d\xi d\eta\Big|^p\,dxdy \\
&\quad\le \iint_F \lambda(z)^{2-2p}\Big(\iint_F \lambda(\zeta)^{-2}M(z,\zeta)|\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta\Big)^p\,dxdy \\
&\quad\le \iint_F \lambda(z)^{2-2p}\Big(\iint_F M(z,\zeta)^{1/q}\lambda(\zeta)^{-2}M(z,\zeta)^{1/p}|\mu(\zeta)|\,d\xi d\eta\Big)^p\,dxdy \\
&\quad\le \iint_F \lambda(z)^{2-2p}\Big(\iint_F M(z,\zeta)\,d\xi d\eta\Big)^{p/q}\Big(\iint_F \lambda(\zeta)^{-2p}M(z,\zeta)|\mu(\zeta)|^p\,d\xi d\eta\Big)\,dxdy \\
&\quad= 3^{p/q}\iint_F \Big(\iint_F \lambda(\zeta)^{-2p}M(z,\zeta)|\mu(\zeta)|^p\,d\xi d\eta\Big)\,dxdy \\
&\quad= 3^{p/q}\iint_F \lambda(\zeta)^{-2p}|\mu(\zeta)|^p\Big(\iint_F M(z,\zeta)\,dxdy\Big)\,d\xi d\eta \\
&\quad= 3^p\iint_F \lambda(\zeta)^{2-2p}|\mu(\zeta)|^p\,d\xi d\eta \\
&\quad= 3^p\|\mu\|_p^p
\end{aligned}
$$

であるから, p 次可積分にもなる. 後は, $p=\infty$ の場合と同様である.

[(e) の証明] $\gamma 0 = z$ となるような $\gamma\in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ をとると,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}K(z,\zeta)\phi(\zeta)\,d\xi d\eta &= \iint_{\mathbb{D}} \lambda(\gamma\zeta)^{-2}K(\gamma 0,\gamma\zeta)\phi(\gamma\zeta)|\gamma'(\zeta)|^2\,d\xi d\eta \\
&= \iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}K(0,\zeta)\gamma'(0)^{-2}(\gamma^*\phi)(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \frac{3}{\pi}\gamma'(0)^{-2}\iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}(\gamma^*\phi)(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \frac{3}{\pi}\gamma'(0)^{-2}(\gamma^*\phi)(0)\iint_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)^{-2}\,d\xi d\eta \\
&= \gamma'(0)^{-2}(\gamma^*\phi)(0) = \phi(z)
\end{aligned}
$$

∎

定義. 定理 1 の主張 (d) にある対応により定義される $L_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ から $A_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ への線型作用素 を $\beta_{\mathbb{D}}$ で表す.

定理 1 の証明から, 次の定理が導かれる.

定理 2. $\beta_{\mathbb{D}}$ は $L_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ から $A_2^p(\mathbb{D},\Gamma)$ の上への有界線型射影であり,

$$\|\beta_{\mathbb{D}}\| \le 3.$$

双曲的 Riemann 面 R に対して, 有界線型射影 $\beta_R\colon L_2^p(R) \to A_2^p(R)$ を, 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{D} \to R$ を用いて,

$$\beta_R := (\pi^*)^{-1} \circ \beta_{\mathbb{D}} \circ \pi^*$$

で定義する. 明らかに, β_R は π に依らない.

次の定理は定義と Fubini の定理よりわかる.

定理 3. 任意の $\mu \in L_2^p(R)$ と $\nu \in L_2^q(R)$ に対して

$$(\beta_R[\mu], \nu) = (\mu, \beta_R[\nu])$$

が成立する.

§7. Poincaré 級数

Γ を領域 D に作用する Klein 群とし, $\phi \in A_2^1(D)$ とする. Γ に関する ϕ の **Poincaré 級数** Θ_Γ を

$$\Theta_\Gamma \phi := \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \phi$$

で定義する.

また, Γ_1 を Γ の部分群として

$$\Theta_{\Gamma_1 \backslash \Gamma} := \Theta_\Gamma \circ \Theta_{\Gamma_1}^{-1}$$

と定める. このとき

定理 1. $\Theta_{\Gamma_1 \backslash \Gamma}$ は $A_2^1(D, \Gamma_1)$ から $A_2^1(D, \Gamma)$ の上への有界線型作用素で, そのノルムは 1 以下である. また, 任意の $\Phi \in A_2^1(D, \Gamma)$ に対して

$$\Phi = \Theta_{\Gamma_1 \backslash \Gamma} \phi \qquad \text{かつ} \qquad \|\phi\| \leq 3\|\Phi\|$$

を満たす $\phi \in A_2^1(D, \Gamma_1)$ が存在する.

この定理で $\Gamma_1 = 1$ の場合の証明は, 例えば Kra [A-13] の第 3 章を見よ. 一般の場合はここから帰着できる.

$\pi\colon \tilde{R} \to R$ を正則被覆[7]とする. $\tilde{\pi}\colon \mathbb{D} \to \tilde{R}$ を普遍被覆とすると, $\pi \circ \tilde{\pi}\colon \mathbb{D} \to R$ も普遍被覆になり, $\tilde{\pi}$ の被覆変換群 Γ_1 は $\pi \circ \tilde{\pi}$ の被覆変換群 Γ の部分群になる. そこで, $\Theta_{\tilde{R}/R}\colon A_2^1(\tilde{R}) \to A_2^1(R)$ を

$$\Theta_{\tilde{R}/R} := ((\pi \circ \tilde{\pi})^*)^{-1} \circ \Theta_{\Gamma_1 \backslash \Gamma} \circ \tilde{\pi}^*$$

で定義する.

[7]非分岐 (unramified) かつ非有界 (unbounded) な被覆を正則被覆 (regular covering) という. [Mc1] では正則被覆という用語を [A-4] や [A-16] にある正規被覆の意味で用いている.

$\Phi \in A_2^1(R)$, $\|\Phi\| = 1$, に対して

$$N(\Phi) := \inf\{\|\phi\| \colon \phi \in A_2^1(\tilde{R}), \Phi = \Theta_{\tilde{R}/R}\phi\}$$

とおく.

$$\inf_{\Phi} N(\Phi) = \frac{1}{\|\Theta_{\tilde{R}/R}\|} \geq 1$$

である. 定理 1 を利用すると,

$$|N(\Phi) - N(\Psi)| \leq 3\|\Phi - \Psi\|$$

が成立することがわかる. よって, N は連続である.

次の予想があった.

theta 予想. R を双曲的かつ解析的有限型 Riemann 面とすると, Poincaré 級数による作用素 $\Theta_{\mathbb{H}/R}\colon A_2^1(\mathbb{H}) \to A_2^1(R)$ のノルム $\|\Theta_{\mathbb{H}/R}\|$ は 1 より小さい.

この予想は, R が双曲的で解析的有限型ならば, 任意の Φ に対して $N(\Phi) > 1$ となることと同値である. [Oh1] において $\pi_1(R)/\pi_1(\tilde{R})$ が有限生成 Abel 群になるならば, 任意の Φ に対して $N(\Phi) = 1$ となることが示されたが, McMullen は次の一般的な結果に拡張し, theta 予想を肯定的に解いた.

定理 2. ([Mc1]) (a) 被覆 : $\tilde{R} \to R$ が amenable であるならば, 任意の Φ に対して, $N(\Phi) = 1$ である.
(b) 被覆 : $\tilde{R} \to R$ が amenable でないならば, 任意の Φ に対して, $N(\Phi) > 1$ である.

被覆が amenable であることの定義および定理の証明は元論文を見て頂きたい[8]. ここでは amenable であるということは, 組み合せ幾何的性質であり, 次のことが成立しているとだけ述べておく.
(a) $\pi_1(R)/\pi_1(\tilde{R})$ が Abel 群になるような被覆 : $\tilde{R} \to R$ は amenable である.
(b) 普遍被覆 : $\mathbb{H} \to R$ が amenable であるのは, 基礎面 R の基本群 $\pi_1(R)$ が巡回群である場合に限る. 故に, 双曲的かつ解析的有限型の Riemann 面の普遍被覆は amenable でない.

最近 Barret-Diller [BD] は普遍被覆の場合に上の定理の別証明を与えた. これとは別に McMullen 自身も別証明を出している ([Mc2]).

基礎面 R が解析的有限型でない場合は状況がかなり複雑になることが予想されるが, これについては次の結果がある.

[8]McMullen の論文の解説集 [B-9] も参考になるであろう.

定理 3. ([Oh5]) 普遍被覆：$\mathbb{H} \to R$ に対しては, $\|\Theta_{\mathbb{H}/R}\| = 1$ となる必要十分条件は以下の 2 つの条件のどちらかが成立することである.
(a): 任意の正数 ε に対して, R 上に ε より短い長さの閉測地線が存在する.
(b): 任意の正数 ρ に対して, 単射半径が ρ より大きくなるような R 上の点が存在する.

各 $\Phi \in A_2^1(R)$ に対して $N(\Phi) > 1$ であることは組み合せ幾何的性質であるが, 定理 3 より普遍被覆では, Φ について一様に $N(\Phi) > 1$, 即ち $\|\Theta_{\mathbb{H}/R}\| < 1$, となるのは双曲幾何的性質であることがわかる.

なお, 定理 3 の条件 (a), (b) はどちらも擬等角不変な条件である. 必要性の証明[9] は元論文を見て頂くとして, 十分性については次の一般的事実からわかる.

定理 4. : $\tilde{R} \to R$ を任意の正則被覆とする.
(a) ある正の絶対定数 l_0, C があって, R 上に長さ l $(0 < l \leq l_0)$ の閉測地線 α が存在するならば,

$$\|\Theta_{\tilde{R}/R}\| \geq 1 - Cl.$$

(b) R 内に単射半径が $\rho > 0$ 以上の点 p が存在するならば,

$$\|\Theta_{\tilde{R}/R}\| \geq 2\tanh^2\rho - 1.$$

証明: (a): 閉測地線 α は単純曲線であるとして良い. 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{H} \to R$ を, α が 被覆変換群 Γ の放物的変換 $\eta\colon z \mapsto kz$ $(k = e^{2l})$ に対応するようにとる. このとき, $\|\Theta_{\tilde{R}/R}\| \geq \|\Theta_{\mathbb{H}/R}\|$ であるから, $\tilde{R} = \mathbb{H}$ の場合のみを考えたら良い. カラー・レンマより, 絶対定数 $l_0 > 0$ と $C_1 > 0$ および函数 $\theta\colon (0, l_0] \to (0, \pi/2)$ で $\theta(t) \leq C_1 t$ となるものが存在して, Stolz 領域

$$S_l := \{z \in \mathbb{H}\colon \theta(l) < \arg z < \pi - \theta(l)\}$$

が Γ において $\langle\eta\rangle$ に関して真に不変となるようにできる. そこで,

$$P := \{z \in \mathbb{H}\colon 1 < |z| < k\} \qquad \text{および} \qquad P' := P \cap S_l$$

とおくと, P は $\langle\eta\rangle$ の基本領域になり, P' は Γ の部分基本集合になる.

さて, $\Phi(z) := 1/z^2$ とおくと, $\Phi \in A_2^1(\mathbb{H}, \langle\eta\rangle)$ かつ $\|\Phi\| = \pi \log k$ である. 巡回群に対しては $N(\Phi) = 1$ となるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\phi \in A_2^1(\mathbb{H})$ で

$$\|\Phi\| \geq (1 - \varepsilon)\|\phi\| \qquad \text{かつ} \qquad \Phi = \Theta_{\langle\eta\rangle}\phi$$

[9] もちろん, こちらの方が格段に難しい.

となるものが存在している. そこで

$$
\begin{aligned}
\|\Theta_\Gamma\phi\| = \|\Theta_{\langle\eta\rangle\backslash\Gamma}\Phi\| &\geq \iint_{P'}\Big|\sum_{\gamma\in\langle\eta\rangle\backslash\Gamma}\gamma^*\Phi\Big|\,dxdy \\
&\geq \iint_{P'}\Big(|\Phi| - \sum_{\gamma\in\langle\eta\rangle\backslash(\Gamma-\langle\eta\rangle)}|\gamma^*\Phi|\Big)\,dxdy \\
&\geq \iint_{P'}|\Phi|\,dxdy - \iint_{P-P'}|\Phi|\,dxdy \\
&= (\pi - 4\theta(l))\log k \\
&\geq (1-C_1 l)(1-\varepsilon)\|\phi\| \\
&\geq (1-Cl)\|\phi\|
\end{aligned}
$$

となるから, (a) を得る.

(b): こんどは, 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{D}\to R$ を $\pi(0)=p$ となるように選び, Γ をその被覆変換群とする. やはり, $\|\Theta_{\tilde{R}/R}\| \geq \|\Theta_{\mathbb{D}/R}\|$ であるから, $\tilde{R}=\mathbb{D}$ であるとして良い. このとき, 0 中心, 双曲半径 ρ の円板 D は Γ の部分基本集合になる. そこで, $\phi = 1 \in A_2^1(\mathbb{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\Theta_\Gamma\phi\| &\geq \iint_D\Big|\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\phi\Big|\,dxdy \\
&\geq \iint_D\Big(|\phi| - \sum_{\gamma\in(\Gamma-1)}|\gamma^*\phi|\Big)\,dxdy \\
&\geq \iint_D|\phi|\,dxdy - \iint_{\mathbb{D}-D}|\phi|\,dxdy \\
&= (2\tanh^2\rho - 1)\|\phi\|
\end{aligned}
$$

となるから, (b) がわかる. ∎

§8. Beltrami 微分

Riemann 面 R に対して, R 上の Beltrami 微分の成す複素 Banach 空間を $M(R)$ で表すものとする. 即ち, $\mu\in M(R)$ であるとは

$$
\mu = \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}
$$

が R の座標近傍のとり方に依らないで定まる $(-1,1)$ 型の可測微分形式で

$$
\|\mu\|_\infty := \operatorname{esssup}|\mu(z)| < \infty
$$

を満たすことである. ここで, μ が Beltrami 微分のとき, $|\mu|$ は R 上の函数になることを注意しておく. R が $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域 D のときは, $M(R)$ は有界な可測函数の集合 $L^\infty(D)$ と同一視できる.

さらに, $r > 0$ に対して

$$M(R)_r := \{\mu \in M(R) \colon \|\mu\|_\infty < r\}$$

とおき,

$$M_{harm}(R) := \{\lambda_R^{-2}\overline{\psi} \colon \psi \in A_2^\infty(R)\}$$

と定義する. $M_{harm}(R)$ は $M(R)$ の閉部分空間である.

定数 $k \geq 0$ と $\phi \in A_2(R)$ により, $k\overline{\phi}/|\phi|$ と表される Beltrami 微分を **Teichmüller-Beltrami 微分**と呼ぶことにする.

また, Klein 群 Γ と Γ-不変な領域 D に対して,

$$\begin{aligned} M(D,\Gamma) &:= \left\{\mu \in M(D) \colon \mu = \gamma^*\mu := \mu \circ \gamma \cdot \frac{\overline{\gamma'}}{\gamma'} \ (\forall \gamma \in \Gamma)\right\} \\ M(D,\Gamma)_r &:= M(D,\Gamma) \cap M(D)_r \end{aligned}$$

と定める.

§9. 擬等角写像

擬等角写像に関する基本的なことは既知であると仮定する. この節の主目的は記号の定義である.

擬等角写像 $f \colon R \to f(R)$ に対して, その Beltrami 係数を

$$\mu(f) = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$$

で表すこととし,

$$k(f) := \|\mu(f)\|, \qquad K(f) := \frac{1 + k(f)}{1 - k(f)}$$

と定める.

擬等角写像の合成および逆写像は再び擬等角写像になる. 次の公式が成り立つことは計算で確かめられる.

$$\begin{aligned} \mu(g \circ f) &= \frac{\mu(f) + \mu_1}{1 + \overline{\mu}(f)\mu_1}, \qquad \mu_1 = \mu(g) \circ f \cdot \frac{\overline{f}_{\bar{z}}}{f_z} \\ \mu(g \circ f^{-1}) \circ f &= \frac{\mu(g) - \mu(f)}{1 - \overline{\mu}(f)\mu(g)} \cdot \frac{f_z}{\overline{f}_{\bar{z}}} \end{aligned}$$

擬等角写像 $f\colon R \to f(R)$ は $\mu(f)$ が Teichmüller-Beltrami 微分になるとき, **Teichmüller 写像**ということにする. 文献によっては, Teichmüller 写像を定数 $0 < k < 1$ と可積分な正則 2 次微分 ϕ によって, $\mu(f) = k\overline{\phi}/|\phi|$ と表されることであると定義することもあるが, この解説では上のように定義し, 特に, ϕ が可積分な正則 2 次微分である場合は, **可積分な正則 2 次微分による** Teichmüller 写像と呼ぶことにする. Teichmüller 写像の逆写像も再び Teichmüller 写像になることが知られている[10].

擬等角写像の存在定理. D を $\mathbb{C}$ 内の有界領域とする. 任意の $\mu \in M(D)_1$ に対して,

$$f^{\mu}(z) := z + P[(1-\mu T)^{-1}\mu](z) \tag{1}$$

とおくと, f^{μ} は $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像であり, Beltrami 方程式 $\mu(f) = \mu$ の正規化条件

$$f(0) = 0, \qquad f_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$$

の下での一意的な解である. ここで, P, T はそれぞれ Cauchy 変換, Hilbert 変換であり, p は $\|\mu\|$ に合わせて 2 に十分近くとった 2 より大きな値である.

この定理からその他の形の存在定理がすべて導かれる. 存在定理の証明は省略する[11].

Beltrami 方程式の解が上の定理にあるように具体的な形で表現できることを後に利用するので, 少し詳しく式 (1) を解説しておこう.

先ず, Hilbert 変換 T については次の事実が知られている.

定理 1. (Calderon-Zygmund)
(a) $1 < p < \infty$ に対して, T は $L^p(\mathbb{C})$ から $L^p(\mathbb{C})$ への有界線型作用素であり,
(b) $L^p(\mathbb{C})$ についてのノルムを $\|T\|_{L^p}$ とすると

$$\lim_{p\to 2} \|T\|_{L^p} = \|T\|_{L^2} = 1$$

が成立する.

$0 \leq k < 1$ に対して, $p > 2$ を $C := k\|T\|_{L^p} < 1$ となるよう 2 に十分近くとる. すると, $\|\mu\|_{\infty} \leq k$ となる Beltrami 係数 $\mu \in M(D)_1$ に対して, $\mu T\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ のノルムは C 以下であるから, 級数

$$(1-\mu T)^{-1} := 1 + \mu T + \mu T \mu T + \cdots$$

[10]今吉, 谷口 [A-12] p.163 命題 5.19 参照
[11]Ahlfors [A-2] の第 5 章または今吉, 谷口 [A-12] の第 4 章第 2 節を御覧下さい.

は強収束し, ノルムが $1/(1-C)$ 以下の $L^p(\mathbb{C})$ から $L^p(\mathbb{C})$ への有界線型作用素になる. D が有界なので, $\mu \in L^p(D)$ とみなせるから, $(1-\mu T)^{-1}\mu \in L^p(\mathbb{C})$ であり,

$$\|(1-\mu T)^{-1}\mu\|_p \leq \frac{|D|^{1/p}}{1-C}\|\mu\|_\infty$$
$$\|(1-\mu T)^{-1}\mu - \mu\|_p \leq \frac{|D|^{1/p}C}{k(1-C)}\|\mu\|_\infty^2$$

と評価できる.

次に, Cauchy 変換 P は, $h \in L^p(\mathbb{C})$, $2 < p < \infty$, に対して

$$P[h](z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} h(\zeta)\Big\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\Big\}\, d\xi d\eta$$

により定義される. また, $n = 1, 2, \ldots,$ に対して

$$P_n[h](z) := -\frac{n!}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\xi d\eta$$

と定める. $P[h]$ は $\operatorname{supp} h$ の外で正則であり, $P[h]^{(n)} = P_n[h]$ となる. ここで, $\mu \in M(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$ とし, j を $\partial\mathbb{D}$ に関する反転 : $z \mapsto 1/\bar{z}$ とすると,

$$\begin{aligned} P_3[\mu](z) &= -\frac{6}{\pi z^4}\iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\mu}(\zeta)}{(\overline{\zeta} - 1/z)^4}\, d\xi d\eta \\ &= -2\Big(j_{\bar{z}}(z)^2 \beta_{\mathbb{D}}[\lambda_{\mathbb{D}}^2 \overline{\mu}](j(z))\Big)^- \end{aligned}$$

となる. つまり, $\mathbb{D}^* := \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ とおき, ノルムを保つ反線型作用素 $\mathcal{L}_{\mathbb{D}}, \mathcal{B}_{\mathbb{D}}$ を

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{\mathbb{D}} \colon A_2^\infty(\mathbb{D}) \ni \psi \mapsto (\psi \circ j \cdot j_{\bar{z}}^2)^- \in A_2^\infty(\mathbb{D}^*) \\ &\mathcal{B}_{\mathbb{D}} \colon L_2^\infty(\mathbb{D}) \ni \psi \mapsto \lambda_{\mathbb{D}}^{-2}\overline{\psi} \in M(\mathbb{D}) \end{aligned}$$

で定めると,

$$P_3 = -2\mathcal{L}_{\mathbb{D}} \circ \beta_{\mathbb{D}} \circ \mathcal{B}_{\mathbb{D}}^{-1} \tag{2}$$

が成立する.

$\mu \in M(\mathbb{H})_1$ に対して, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像 f で

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(\infty) = \infty \tag{3}$$

$$\mu(f)(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{H} \\ \overline{\mu}(\bar{z}), & z \in \mathbb{L} \end{cases} \tag{4}$$

を満たすものが一意的に存在する．ただし，$\mathbb{L}$ は下半平面である．この擬等角写像 f を w^{μ} と書く．また (3) を満たしかつ，(4) の代りに

$$\mu(f)(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{H} \\ 0, & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

を満たす $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像も一意に定まるので，これを w_{μ} で表す．

一方，$\mu \in M(\mathbb{D})_1$ に対しては

$$f(1) = 1, \quad f(i) = i, \quad f(-1) = -1$$
$$\mu(f)(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{D} \\ (\bar{z}^2/z^2)\overline{\mu}(1/\bar{z}), & z \in \mathbb{D}^* \end{cases}$$

により一意的に定まる $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像を W^{μ} で表す．

以上の擬等角写像の間には以下のような関係がある．

補題 1． (a) $A \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ を $1, i, -1$ をそれぞれ $0, 1, \infty$ にうつすようなものとすると，$\mu \in M(\mathbb{H})_1$ に対して，

$$A \circ W^{A^*\mu} = w^{\mu} \circ A$$

であり，適当な $B \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ をとれば

$$B \circ f^{A^*\mu} = w_{\mu} \circ A$$

となる．

(b) $\mu, \nu \in M(\mathbb{H})_1$ に対して，

$$\text{(i)}: w^{\mu}|_{\partial\mathbb{H}} = w^{\nu}|_{\partial\mathbb{H}}, \qquad \text{(ii)}: w_{\mu}|_{\partial\mathbb{H}} = w_{\nu}|_{\partial\mathbb{H}}, \qquad \text{(iii)}: w_{\mu}|_{\mathbb{L}} = w_{\nu}|_{\mathbb{L}}$$

はそれぞれ同値である．

§10. 群の作用と両立するホモトピー

一般に，X と Y を位相空間とし，A を X の部分空間とする．ふたつの連続写像 $f_0, f_1 \colon X \to Y$ に対して，ホモトピー $H \colon X \times [0,1] \to Y$ で

$$H(\cdot, 0) = f_0, \qquad H(\cdot, 1) = f_1,$$
$$H(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \qquad (a \in A, t \in [0,1])$$

を満たすようなものが存在するとき，f_0 と f_1 は X において **A に関してホモトープである**という．空集合に関してホモトープであるとき，単に X において**ホモトープ**という．

D を Klein 群 Γ で不変な領域とし, f を D から $\hat{\mathbb{C}}$ の中への連続写像とする. もし, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して,

$$(1) \qquad f \circ \gamma = \eta \circ f$$

を満たす $\eta \in \text{Möb}$ が存在するならば,

f は Γ と**両立する (compatible)** という. また, $\eta \in \text{Möb}$ が γ に対して一意的に定まるとき, (1) の対応 $\Gamma \ni \gamma \mapsto \eta \in \text{Möb}$ を $\theta[f]$ で表す. 明らかに, $\theta[f]$ は群の準同型写像である. もし f が同相写像であれば, $\theta[f]$ は同型になり, $\theta[f](\Gamma)$ も Klein 群になる. また, $\mu \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ に対して定まる, 中への同型 $\theta[w^\mu]: \Gamma \to \text{Möb}(\mathbb{H})$ を θ^μ で表すこととする.

補題 1. Γ を Klein 群, f を $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像としたとき, f が Γ と両立することと, $\mu(f) \in M(\hat{\mathbb{C}}, \Gamma)$ であることは同値である.

証明: f が Γ と両立するとき, $f \circ \gamma = \theta[f](\gamma) \circ f$ となるので, 両辺の Beltrami 係数を計算すれば, $\mu(f) \in M(\hat{\mathbb{C}}, \Gamma)$ であることがわかる.

逆に, $\mu(f) \in M(\hat{\mathbb{C}}, \Gamma)$ ならば, $A := f \circ \gamma \circ f^{-1}$ の Beltrami 係数は 0 になるから, $A \in \text{Möb}$ となる. ∎

以下の事実は次の節で利用する.

補題 2. $f: R \to f(R)$, $g: R \to g(R)$ を擬等角写像とし, $\pi: \mathbb{H} \to R$ を普遍被覆, Γ をその被覆変換群とする. このとき, 以下の条件の (a) と (b) は同値である.

(a) f, g の持ち上げ $\tilde{f}$, $\tilde{g}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ で, $\theta[\tilde{f}] = \theta[\tilde{g}]$ を満たすものが存在する.

(b) ある等角写像 $h: g(R) \to f(R)$ に対して, f と $h \circ g$ は R においてホモトープである.

証明は, 今吉, 谷口 [A-12] p.142 の補題 5.1 の証明がそのまま通用する.

補題 3. Γ を $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とし, 擬等角写像 $f, g: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は Γ と両立しているとする. このとき,

(a) $\theta[f] = \theta[g]$ ならば, $f|_{\Lambda(\Gamma) \cup \mathrm{br}(\Gamma)} = g|_{\Lambda(\Gamma) \cup \mathrm{br}(\Gamma)}$.

(b) Γ で不変な $\sigma \subset \hat{\mathbb{R}}$ で, $\#\sigma \geq 3$ となるようなものに対して, $f|_\sigma = g|_\sigma$ が成立するならば, $\theta[f] = \theta[g]$.

[A-12] p.144 の補題 5.2 の証明がほぼそのまま通用する.

擬等角写像 $f: R \to S$ の持ち上げ $\tilde{f}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は境界 $\partial\mathbb{H}$ まで込めた同相写像に拡張できたので, f は $R \cup p(R) \cup \mathrm{bd}(R)$ から $S \cup p(S) \cup \mathrm{bd}(S)$ への同相写像に拡張できることがわかる.

補題 4. $\pi\colon \mathbb{H} \to R$ を普遍被覆, Γ をその被覆変換群とする. 擬等角写像 $f\colon R \to f(R)$, $g\colon R \to g(R)$ に対して, 以下の (a) と (b) は同値である.
(a) f と g の持ち上げ $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ で $\tilde{f}|_{\hat{\mathbb{R}}} = \tilde{g}|_{\hat{\mathbb{R}}}$ を満たすものがある.
(b) ある等角写像 $h\colon g(R) \to f(R)$ に対して, f と $h \circ g$ は $R \cup \mathrm{bd}(R)$ において $\mathrm{bd}(R)$ に関してホモトープである.

証明: [(a) ⇒ (b)] $\mu(\tilde{f}), \mu(\tilde{g}) \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ であるから, 補題 2 より $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ は Γ と両立する. そこで補題 3 より, $\theta[\tilde{f}] = \theta[\tilde{g}]$ となる. $\Gamma' := \theta[\tilde{f}](\Gamma)$ とおく. $z \in \mathbb{H}$ に対しては, $\tilde{f}(z)$ と $\tilde{g}(z)$ とを両端点とする双曲的線分の $t : (1-t)$ の内分点を $H(z,t)$ と定め, $z \in \mathrm{bd}(\Gamma)$ に対しては, $H(z,t) := \tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)$ と定めると, これが Γ と両立するホモトピー $H\colon (\mathbb{H} \cup \mathrm{bd}(\Gamma)) \times [0,1] \to \mathbb{H} \cup \mathrm{bd}(\Gamma')$ になることが容易に分かる. そこでこのホモトピーを $R \cup \mathrm{bd}(R) \to \Gamma' \backslash (\mathbb{H} \cup \mathrm{bd}(\Gamma')) = f(R) \cup \mathrm{bd}(f(R)) = g(R) \cup \mathrm{bd}(g(R))$ に落としたものが求める f と g のホモトピーになる.

[(a) ⇐ (b)] $h = \mathrm{id}$ であるとして良い.

f から g への $R \cup \mathrm{bd}(R)$ における $\mathrm{bd}(R)$ に関するホモトピー H を, $\tilde{f} := w^{\pi^*\mu(f)}$ からの $\mathbb{H} \cup \mathrm{bd}(\Gamma)$ における $\mathrm{bd}(\Gamma)$ に関するホモトピー $\tilde{H}$ に持ち上げる. このとき, $\tilde{H}(\cdot, 1)$ も $\tilde{g} := w^{\pi^*\mu(g)}$ も g の持ち上げであるので, ある $\alpha \in \Gamma$ について, $\tilde{H}$ は $\tilde{f}$ から $\alpha \circ \tilde{g}$ へのホモトピーになる. 補題 2 と 3 より, $\tilde{f}$ と $\alpha \circ \tilde{g}$ は $\Lambda(\Gamma)$ 上で一致する. 補集合 $\mathrm{bd}(\Gamma)$ 上では射影 π は局所単葉であり, また, 各 $b \in \mathrm{bd}(\Gamma)$ に対して, $\tilde{H}(b, \cdot)$ は連続で, $H(\pi(b), \cdot)$ は定値写像であるので, $\tilde{H}(b, \cdot)$ も定値写像になる. つまり, $\tilde{H}$ は $\hat{\mathbb{R}}$ に関するホモトピーになる. そこで特に, $\{0, 1, \infty\}$ 上で $\tilde{f}$ と $\alpha \circ \tilde{g}$ は一致するので, $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ の正規化条件より, $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ となる. 故に, $\tilde{f}|_{\hat{\mathbb{R}}} = \tilde{g}|_{\hat{\mathbb{R}}}$ となる. ∎

なお, 上の [(a) ⇒ (b)] の証明の中で構成したホモトピー H は **Ahlfors ホモトピー**と呼ばれる.

次の定理は後で用いる. 証明は元論文を御覧下さい.

定理 1. (Marden [Mr]) Γ を $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とし, F を Γ と両立する $\mathbb{H}$ の自己同相写像で, $\theta[F] = \mathrm{id}_\Gamma$ となるようなものとする. このとき, F から導かれる $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ の自己同相写像 f は $\Gamma \backslash \mathbb{H}_\Gamma$ において恒等写像とホモトープである.

§11. Beltrami 係数の同値関係

ふたつの Beltrami 係数 $\mu, \nu \in M(\mathbb{H})_1$ が

$$w^\mu|_{\hat{\mathbb{R}}} = w^\nu|_{\hat{\mathbb{R}}}$$

を満たすとき, μ と ν は**同値である**といい,

$$\mu \sim \nu$$

で表す.

一般の双曲型 Riemann 面 R に対しては, $\mu, \nu \in M(R)_1$ が同値であるということを, 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{H} \to R$ を用いて, その引き戻し $\pi^*\mu, \pi^*\nu \in M(\mathbb{H})_1$ が同値になるということで定義する. もちろん, この同値性の定義は普遍被覆 π の選び方に依らない. この同値関係 $\sim$ に関する同値類を $[\cdot]$ で表す.

$$M_0(R) := \{\mu \in M(R)_1 \colon \mu \sim 0\} = [0]$$

とおく. また, R 上で定義された擬等角写像 f と g に対しては, $\mu(f)$ と $\mu(g)$ が同値になるとき, f と g は同値であると定義する.

Γ を $\mathbb{H}$ に作用する楕円的変換を含まない Fuchs 群とし, 自然な射影 : $\mathbb{H} \to \Gamma\backslash\mathbb{H} =: R$ を π とおく. (または, Γ を Riemann 面の普遍被覆 : $\mathbb{H} \to R$ の被覆変換群とする.) このとき, $\pi^*\colon M(R) \to M(\mathbb{H}, \Gamma)$ はノルムを保つ線型写像であり, 定義から, $M(R)_1$ および $M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ における同値関係を保存する. そこで, この解説でも $M(R)$ と $M(\mathbb{H}, \Gamma)$ を同一視するが, この同一視を記述に統一性を持たせるため Riemann 面の言葉または Fuchs 群の言葉のどちらかのみで表現していくのではなく, 場合に応じて, より記述が簡単になり直感的にわかり易い方で表現して行くことにする.

さて, この場合には楕円的変換を含む Fuchs 群の扱いが問題になるが, これについては, 以下のようにして楕円的変換を含まない Fuchs 群に帰着させる.

Γ を $\mathbb{H}$ に作用し楕円的変換を含む Fuchs 群とする. このとき, $\mathbb{H}$ と $\mathbb{H}_\Gamma$ は高々可算個の点しか違わないので, $M(\mathbb{H})$ と $M(\mathbb{H}_\Gamma)$ は自然に同一視できるが, この同一視は同値関係を保存する. 即ち

定理 1. Γ を $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とする. このとき, $\mu, \nu \in M(\mathbb{H}, \Gamma)_1$ に対して, 次の条件 (a), (b) は同値である.
(a) μ と ν は $M(\mathbb{H}_\Gamma)_1$ の元として同値である.
(b) μ と ν は $M(\mathbb{H})_1$ の元として同値である.

証明: [(a) $\Rightarrow$ (b)] $\pi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_\Gamma$ を普遍被覆とし, G をその被覆変換群とする. 仮定と同値性の定義より $w^{\pi^*\mu}$ と $w^{\pi^*\nu}$ から導かれる Fuchs 群の同型について $\theta^{\pi^*\mu} = \theta^{\pi^*\nu}$ となる. そこで, $G_1 := \theta^{\pi^*\mu}(G) = \theta^{\pi^*\nu}(G)$ とおき, さらに $\Gamma_1 := \theta^\mu(\Gamma)$, $\Gamma_2 := \theta^\nu(\Gamma)$ とする. このとき, $\pi_1 := w^\mu \circ \pi \circ (w^{\pi^*\mu})^{-1}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_{\Gamma_1}$ は普遍被覆になり, その被覆変換群は G_1 である. また, $\pi_1 \circ w^{\pi^*\nu} \circ \pi^{-1}$ は擬等角写像 : $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_{\Gamma_1}$ になり, その Beltrami 係数は ν に等しい. よって, ある $A \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ が存在して, $\pi_1 \circ w^{\pi^*\nu} \circ \pi^{-1} = A \circ w^\nu$ と書くことができる. ここで, $z \in \text{bd}(\mathbb{H}_\Gamma) \cup p(\mathbb{H}_\Gamma)$ とすると, $\pi^{-1}(z) \subset \text{bd}(G) \cup p(G) \subset \widehat{\mathbb{R}}$ であるから,

$$w^\mu(z) = \pi_1 \circ w^{\pi^*\mu} \circ \pi^{-1}(z) = \pi_1 \circ w^{\pi^*\nu} \circ \pi^{-1}(z) = A \circ w^\nu(z)$$

となり, $\mathrm{bd}(\mathbb{H}_\Gamma)\cup p(\mathbb{H}_\Gamma)=\mathrm{bd}(\Gamma)\cup\mathrm{br}(\Gamma)$ の閉包は $\hat{\mathbb{R}}$ を含むので, 任意の $x\in\hat{\mathbb{R}}$ に対して, $w^\mu(x)=A\circ w^\nu(x)$ である. w^μ と w^ν の正規化条件より $A=\mathrm{id}$. 故に, μ と ν は $M(\mathbb{H})_1$ の元としても同値である.

[(b) $\Rightarrow$ (a)] $\mathrm{br}(\Gamma)=\emptyset$ のとき, 示すべきことは何もないので, $\mathrm{br}(\Gamma)\neq\emptyset$ と仮定する. $F:=(w^\nu)^{-1}\circ w^\mu$ とおく. F は $\gamma\in\Gamma$ と可換であるから, $\mathrm{br}(\Gamma)$ の各点を固定する.

(i) $\#\,\mathrm{br}(\Gamma)\geq 2$ の場合: 射影 $\mathbb{H}_\Gamma\to R:=\Gamma\backslash\mathbb{H}_\Gamma$ を π_1 とし, $f:=\pi_1\circ F\circ\pi_1^{-1}$ とおくと, Marden の定理より f は R において id_R とホモトープである. このホモトピーを π_1 で持ち上げると, ある $\alpha\in\Gamma$ と F が $\mathbb{H}_\Gamma$ でホモトープになる. F は $\mathrm{br}(\Gamma)$ の各点を固定するから, α もそうである. よって, $\alpha=\mathrm{id}$, 即ち, F は id と $\mathbb{H}_\Gamma$ でホモトープになる. さらに, このホモトピーを $\pi\colon\mathbb{H}\to\mathbb{H}_\Gamma$ で持ち上げると, F の持ち上げ $\tilde{F}$ で $\Lambda(G)$ に関して id とホモトープなものが存在する. ここで, G は先ほどと同じく π の被覆変換群である. このことから特に, $\tilde{F}$ は $\mathrm{bd}(G)$ の各連結成分 I を集合として固定する. また, $G_I:=\{\gamma\in\Gamma\colon\gamma I=I\}$ は単位元のみから成る. なんとなれば, $G_I\neq\{\mathrm{id}\}$ とすると, I の端点を固定する $\eta\in\Gamma$ によって, $G_I=\langle\eta\rangle$ と表されるから,

$$\hat{\mathbb{R}}-\overline{\mathrm{br}(\Gamma)}=\mathrm{bd}(\mathbb{H}_\Gamma)\supset G_I\backslash I\approx S^1$$

となるが, これは補題 3.2 により, $\#\,\mathrm{br}(\Gamma)\geq 2$ に反する. そこで, $\pi|_I\colon I\to\pi(I)\subset\mathrm{bd}(\mathbb{H}_\Gamma)$ は単射である. 仮定より $F|_{\hat{\mathbb{R}}}=\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{R}}}$ であるから, $\tilde{F}|_I=(\pi|_I)^{-1}\circ F\circ\pi|_I=\mathrm{id}_I$. 故に, $\tilde{F}|_{\hat{\mathbb{R}}}=\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{R}}}$ となる. さて, $(w^{\pi^*\nu})^{-1}\circ w^{\pi^*\mu}$ も F の持ち上げであるから, ある $g\in G$ により, $g\circ\tilde{F}=(w^{\pi^*\nu})^{-1}\circ w^{\pi^*\mu}$ と書くことができるが, 正規化条件より g も $0, 1, \infty$ を固定することになり, $g=\mathrm{id}$, 即ち, $w^{\pi^*\nu}\circ\tilde{F}=w^{\pi^*\mu}$. 特に, $\hat{\mathbb{R}}$ 上で $w^{\pi^*\nu}=w^{\pi^*\mu}$ となる.

(ii) $\#\,\mathrm{br}(\Gamma)=1$ の場合: この場合 G は有限巡回群であるから, F の持ち上げ $\tilde{F}$ で $\tilde{F}|_{\hat{\mathbb{R}}}=\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{R}}}$ となるものが存在するのは容易にわかる. 後は (i) の場合と同様である.

なお, 定理 1 の主張 (b) $\Rightarrow$ (a) には次の Earle-McMullen の定理を用いて別証明を付けることができる.

定理 2. (Earle-McMullen [EM]) $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群と, Γ と両立する $\mathbb{H}$ の擬等角自己写像 f に対して, 次の条件 (a) と (b) は同値である.

(a) $f|_{\hat{\mathbb{R}}}=\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{R}}}$

(b) f は Γ と両立する $\hat{\mathbb{R}}$ に関しての擬等角イソトピーで $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ と結ぶことができる.

この定理 2 の証明は元論文を見て頂きたい.

定理 1 の (b) $\Rightarrow$ (a) の別証: $f:=(w^\nu)^{-1}\circ w^\mu$ は Γ と両立する擬等角写像で, $\hat{\mathbb{R}}$ 上の点を動かさないから, 上の定理より Γ と両立する $\hat{\mathbb{R}}$ に関しての擬等角イ

ソトピー $H: I\times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ で $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ と結ぶことができる. このとき, $H_t := H(t,*)$ は $\mathrm{br}(\Gamma)$ 上の点も固定する. 各 t に対して H_t は同相写像であるから, $\mathbb{H}_\Gamma$ を $\mathbb{H}_\Gamma$ にうつすので, H は $\mathrm{bd}(\mathbb{H}_\Gamma)$ に関する $\mathbb{H}_\Gamma$ 上のホモトピーと見なすことができる. よって, w^μ と w^ν は $\mathbb{H}_\Gamma$ 上で $\mathrm{bd}(\mathbb{H}_\Gamma)$ に関してホモトープである. すると, 補題 10.4 より普遍被覆 π の被覆変換 g で $\hat{\mathbb{R}}$ 上では $w^{\pi^*\nu}$ と $g\circ w^{\pi^*\mu}$ が一致するようなものが存在するが, 正規化条件より $g=\mathrm{id}$ となるので, μ と ν は $M(\mathbb{H}_\Gamma,\Gamma)_1$ の元として同値である.

定理 1 の証明で用いた Marden の定理には Bers-Greenberg による証明もある ([BG]). しかし, 彼等の証明は Teichmüller 空間の理論を利用したものであるので, ここでは文献を紹介することに止めておく.

§12. 正則可積 2 次微分に直交する Beltrami 微分

Riemann 面 R に対して

$$N(R) := \left\{\nu\in M(R)\colon \int_R \nu\phi = 0 \quad (\forall\phi\in A_2^1(R))\right\}$$

と定義する. また, 領域 D に作用する Klein 群 Γ に対して,

$$N(D,\Gamma) := \left\{\nu\in M(D,\Gamma)\colon \iint_P \nu\phi\, dxdy = 0 \quad (\forall\phi\in A_2^1(D,\Gamma))\right\}$$

と定める.

補題 1.

$$N(D,\Gamma) = N(D)\cap M(D,\Gamma)$$

証明: P を D における Γ に関する基本領域とする. 任意の $\nu\in M(D,\Gamma)$, $\phi\in A_2^1(D)$ に対して

$$\iint_P \nu\Theta_\Gamma\phi\, dxdy = \iint_D \nu\phi\, dxdy$$

が成り立つ. 定理 7.1 より Θ_Γ は全射であるから, 主張が成立する. ∎

定理 1. D を有界 Jordan 領域とし, $D^* := \hat{\mathbb{C}} - \overline{D}$ とおく. $\mu\in M(D)$ に対して, 次の (a), (b) は同値である.

(a) $$\mu\in N(D)$$
(b) $$P'''[\mu]|_{D^*} = 0$$

証明: [(a) $\Rightarrow$ (b)] 各 $z \in D^*$ に対して, $\zeta \mapsto (\zeta - z)^{-4}$ は $A_2^1(D)$ の元であるから, この主張は明らかである.

[(a) $\Leftarrow$ (b)]

$$h(z) := -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta$$

とおくと, $h'''|_{D^*} = P'''[\mu]|_{D^*} = 0$ であり, D^* は連結だから, h は D^* 上では高々2次の整式である. ここで, $z \to \infty$ のとき $h(z) \to 0$ であることを用いると, 実は $h|_{D^*} = 0$ となる. この等式を微分することにより, 任意の $z \in D^*$ と $n \geq 1$ に対して

$$\iint_D \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\xi d\eta = 0$$

が成立する. そこで, $\mathbb{C}$ 上で可積分でありかつ D 内に極を持たない有理函数 r に対しても, $\iint_D \mu r\, d\xi d\eta = 0$ となるが, 定理 5.2 より, このような有理函数 r の集合は $A_2^1(D)$ 内で稠密であるから, $\mu \in N(D)$ が従う. ∎

系 1. Γ を有界 Jordan 領域 D に作用する Klein 群 とすると, $\mu \in M(D, \Gamma)$ に対して, $\mu \in N(D, \Gamma)$ と $P'''[\mu]|_{D^*} = 0$ とは同値である.

§13. Schwarz 微分

D を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の双曲領域とする. 局所単葉有理型函数 f に対して, その Schwarz 微分 $\mathcal{S}(f)$ を

$$\mathcal{S}(f) := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

で定義する. 各点における f の Laurent 展開を用いて, $\mathcal{S}(f)$ を計算することより, $\mathcal{S}(f)$ は D 上正則でありかつ

$$\mathcal{S}(f)(z) = O(z^{-4}) \qquad (z \to \infty)$$

となることがわかる. よって, $\mathcal{S}(f) \in A_2(D)$ である. 次の命題は定義に従って計算することによりわかる.

命題 1.

(a) $$\mathcal{S}(f \circ g) = \mathcal{S}(f) \circ g \cdot (g')^2 + \mathcal{S}(g)$$

(b) $$\mathcal{S}(f) = 0 \iff f \in \text{Möb}$$

系 1. (a) $A, B \in$ Möb に対して, $A \circ f = f \circ B$ となるならば, $\mathcal{S}(f) = B^*\mathcal{S}(f)$. 特に, f が, 領域 D に作用する Klein 群 Γ と両立しているならば, $\mathcal{S}(f) \in A_2(\Gamma)$.

(b) $$\mathcal{S}(f^{-1}) \circ f \cdot (f')^2 = \mathcal{S}(f)$$

(c) $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(g)$ となる必要十分条件は, $A \in$ Möb が存在して, $f = A \circ g$ となることである.

この他に次の定理が知られている. $\mathbb{D}^*$ に作用する Fuchs 群 Γ に対して, $\mathbb{D}^*$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の中への, Γ と両立する等角写像の成す集合を $\Sigma(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ で表すとし,

$$S(\Gamma) := \{\mathcal{S}(f) : f \in \Sigma(\mathbb{D}^*, \Gamma)\}$$

と定める.

定理 1. (Nehari-Kraus, [Nh]) $f \in \Sigma(\mathbb{D}^*, 1)$ ならば, $\mathcal{S}(f) \in A_2^\infty(\mathbb{D}^*)$ であり,

$$\|\mathcal{S}(f)\| \leq 6$$

定理 2. $S(\Gamma)$ は $A_2^\infty(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ の閉部分集合である.

$\Gamma = 1$ の場合の証明は例えば Lehto [A-22] p.115 を見よ. 一般の場合は, $S(\Gamma) = S(1) \cap A_2^\infty(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ であることよりわかる.

§14. Banach 空間上での微積分

この節では $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ は Banach 空間であり, U は $\mathbb{X}$ 内の開集合であるとする. $\mathbb{X}$ から $\mathbb{Y}$ への有界線型写像全体の成す Banach 空間を $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ で表す.

写像 $f : U \to \mathbb{Y}$ と $a \in U$ に対して, ある $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ が存在して

$$\|f(x) - \{f(a) + T(x-a)\}\|_{\mathbb{Y}} = o(\|x-a\|_{\mathbb{X}}) \qquad (x \to a)$$

が成立するならば, f は a で (**Fréchet**) **微分可能**であるという. このような T は一意的であるので, これを $df(a)$ または $f'(a)$ で表す. もし U 内の全ての点において f が微分可能であり, 写像 $df : U \ni a \mapsto df(a) \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ が連続であるならば, f は C^1 級であるといい, さらに逆写像 f^{-1} も C^1 級であるならば f は C^1 微分同相写像という.

逆函数定理. C^1 級の $f : U \to \mathbb{Y}$ について, もしある点 $a \in U$ において $df(a)$ が全単射であるならば, a のある開近傍 U' が存在して, $f|U'$ は C^1 微分同相になる.

この定理と次の定理の証明は例えば Lang [A-17] または [A-17'] の第一章を見よ.

$\mathbb{X}_1$ を $\mathbb{X}$ の閉部分空間とする. $\mathbb{X}$ の閉部分空間 $\mathbb{X}_2$ が $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 = \{0\}$ かつ $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}$ を満たすとき, $\mathbb{X}_2$ を $\mathbb{X}_1$ の**補空間**という.

陰函数定理. $f : U \to \mathbb{Y}$ は C^1 級であり, $0 \in U$ かつ $f(0) = 0$ とする. $df(0)$ が全射でかつ $\ker df(0)$ に補空間 $\mathbb{X}_1$ が存在するならば, $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$, $\ker df(0)$ および $\mathbb{Y}$ それぞれにおける原点の開近傍 U', U_1, U_2 および V と, ふたつの C^1 微分同相 $h : U_1 \times U_2 \to U'$, $h(0,0) = 0$ および $g : U_1 \to V$, $g(0) = 0$ で

$$f \circ h(x_1, x_2) = g(x_1), \qquad (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$$
$$dh(0,0)(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{X}_1 \times \ker df(0)$$

を満たすようなものが存在する.

系 1. 陰函数定理と同じ仮定の下で
(a) 任意の $x_0 \in \ker df(0)$ に対して, C^1 級の曲線 $x\colon (-\delta,\delta) \to f^{-1}(0)$, $\delta > 0$, で $dx(0) = x_0$ となるものが存在する.
(b) $\mathbf{Y}$ の原点のある開近傍 V において, $f \circ s = \mathrm{id}_V$ となるものが存在する. 即ち, f の局所断面が原点の近くにおいて存在する.

証明: 陰函数定理の主張にある微分同相写像 h と g を用いて,
(a) は $x(t) := h(0, tx_0)$ と,
(b) は $s(y) := h(g^{-1}(y), 0)$ と定めれば良い. ∎

§15. Banach 空間上の正則写像

前節と同様にこの節でも $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ は Banach 空間であり, U は $\mathbf{X}$ 内の開集合であるとするが, ここではさらに Banach 空間はすべて複素 Banach 空間であるとする.

写像 $f\colon U \to \mathbf{Y}$ は U 内の各点で微分可能であるとき, U **上正則**であるという. もちろん $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{C}$ の場合は通常の正則性の定義そのものである.

$\mathbf{Y}^*$ の部分集合 Y' は, すべての $\ell \in Y'$ に対して $(y, \ell) = 0$ となるような $y \in \mathbf{Y}$ が $y = 0$ 以外には存在しないようなとき, $\mathbf{Y}^*$ の**基集合**であるという.

この節の目的は次の定理を証明することである.

定理 1. 写像 $f\colon U \to \mathbf{Y}$ は有界であるとし, Y' を次の 2 条件を満たす $\mathbf{Y}^*$ の基集合とする.

(a)
$$\sup\{\|\ell\|\colon \ell \in Y'\} = 1$$

(b) 任意の $y \in \mathbf{Y}$ に対して
$$\sup\{|(y,\ell)|\colon \ell \in Y'\} = \|y\|$$

このとき, もしすべての $\ell \in Y'$ に対して, 写像
$$U \ni x \mapsto (f(x), \ell) \in \mathbb{C}$$
が正則ならば, f 自身も正則である.

証明は任意の $x_0 \in U$ に対して $df(x_0)$ の存在を示すのであるが, 主張は局所的なものであるから, 一般性を失うことなく $x_0 = 0$ として良い. また相似変換との合成を考えることにより, U は $\mathbf{X}$ の単位球であるとして良い.
$$M := \sup\{\|f(x)\|\colon x \in U\}$$
とおく.

補題 1. f は連続である.

証明: a を U の任意の点とする. $b \in U$ を $0 < \|b-a\| < (1-\|a\|)/3$ であるような任意の点とし, $h := (b-a)/\|b-a\|$ とおくと, 各 $\ell \in Y'$ に対して, $(f(a+zh),\ell)$ は $|z| < 1-\|a\|$ 上の正則函数で, 仮定 (a) より $|(f(a+zh),\ell)| < M$ が成り立つから

$$\begin{aligned}|(f(b)-f(a),\ell)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2(1-\|a\|)/3}\Big(\frac{1}{z-\|b-a\|}-\frac{1}{z}\Big)(f(a+zh),\ell)\,dz\right| \\ &\le \frac{3M\|b-a\|}{1-\|a\|}.\end{aligned}$$

この式に仮定 (b) を用いると, $\|f(b)-f(a)\|$ についても同じ評価が成立することがわかる. ∎

補題 2. $h \in \mathbb{X}-\{0\}$, $z \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して, $|z| < r < 1/\|h\|$ ならば

$$f(zh) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta h)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

特に右辺の積分は r に依らないで定まる.

上式の右辺の線積分は Banach 空間に値をとる連続函数の Riemann 積分で, 函数論で用いられる通常の線積分と同様に定義されるものである. 線積分を行うことと $\mathbb{Y}^*$ の元を作用させることの順序が交換可能であることは容易にわかる.

証明: 任意の $\ell \in Y'$ に対して Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}(f(zh),\ell) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{(f(\zeta h),\ell)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta h)}{\zeta - z}\,d\zeta,\ell\Big).\end{aligned}$$

Y' が基集合であることより主張の式が導かれる. ∎

補題 2 より, $h \in \mathbb{X}$ に対して,

$$A(h) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta h}{\zeta^2}\,d\zeta, \qquad 0 < r < \frac{1}{\|h\|}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(1)\qquad & f(zh) = f(0) + zA(h) + \epsilon(z,h), \\ & \|\epsilon(z,h)\| \le \frac{1}{2}M|z|^2\|h\|^2, \qquad |z| \le \frac{1}{2\|h\|}\end{aligned}$$

が成立する. 特に, $\|h\| < 1$, $z = 1$ とすれば,

$$\|f(h) - (f(0) + A(h))\| = O(\|h\|^2)$$

であるから, 後は次の補題 3 が示せたら, 定理の証明が終了したことになる.

補題 3. 上の定義より定まる写像 $A\colon \mathbb{X} \ni h \mapsto A(h) \in \mathbb{Y}$ は有界線型作用素である.

証明: 定義式より $\|A(h)\| \le M/r$ がわかる. そこで $r \to 1/\|h\|$ とすることにより, $\|A(h)\| \le \|h\|$, 即ち $\|A\| \le M$ が従う.

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $A(\alpha h) = \alpha A(h)$ であることは定義式の積分を変数変換することによりわかる.

$h_1, h_2 \in \mathbb{X} - \{0\}$, $0 < r < 1/\max\{\|h_1\|, \|h_2\|\}$ とする. 任意の $\ell \in Y'$ に対して, 函数

$$(z_1, z_2) \mapsto (f(z_1 h_1 + z_2 h_2), \ell)$$

は $\max\{|z_1|, |z_2|\} < r$ において, 連続でありかつ, 各変数ごとに正則であるから, 補題 2 と同様にして

$$f(z_1 h_1 + z_2 h_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1| = r} \int_{|\zeta_2| = r} \frac{f(\zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2$$

が得られ, ここから

$$f(z_1 h_1 + z_2 h_2) = f(0) + z_1 A(h_1) + z_2 A(h_2) + o(|z_1| + |z_2|)$$

がわかる. さて, 上式において $z_1 = z_2$ とし, 式 (1) と比較すると

$$A(h_1 + h_2) = A(h_1) + A(h_2).$$

以上より, A は有界線型作用素である. ∎

§16. Bers 射影

D を有界 Jordan 領域とし, $D^* := \hat{\mathbb{C}} - \overline{D}$ とおく. このとき, $\mu \in M(D)_1$ に対して

$$\Phi_D(\mu) := \mathcal{S}(f^\mu|_{D^*})$$

と定義する. ここに, f^μ は第 9 節で定義した Beltrami 方程式 $\mu = \mu(f)$ の正規解である.

この節の目的は次の定理を示すことである.

定理 1. (Bers [Be2]) $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群 Γ に対して,
(a) $\Phi_{\mathbb{D}}$ は $M(\mathbb{D},\Gamma)_1$ から $A_2^\infty(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ の中への有界正則開写像である. また, $\Phi_{\mathbb{D}}$ は正則な局所断面を持つ. 即ち, $\Phi_{\mathbb{D}}(M(\mathbb{D},\Gamma))$ の各点において, ある近傍 V と正則写像 s_V で $\Phi\circ s_V=\mathrm{id}_V$ となるものが存在する.

(b)
$$\ker d\Phi_{\mathbb{D}}(0)=N(\mathbb{D},\Gamma)$$

(c) $\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_1)=\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_2)$ となる必要十分条件は μ_1 と μ_2 が同値なことである.

写像 $\Phi_{\mathbb{D}}$ を **Bers 射影**という.

補題 1. $\zeta\in D^*$ とする. このとき, $\mu\in M(D)_1$ に対して
$$\Phi_D(\mu)(\zeta)=P_3[\mu](\zeta)+O(\|\mu\|^2).$$
特に, $\Phi_D(*)(\zeta)\colon M(D)_1\ni\mu\mapsto\Phi_D(\mu)(\zeta)\in\mathbb{C}$ は $\mu=0$ において微分可能である.

証明: $f:=f^\mu|_{D^*}$ とおく. f の具体的な表現
$$f(\zeta)=\zeta+P[(1-\mu T)^{-1}\mu](\zeta)$$
より
$$\begin{aligned}f'(\zeta)&=1+O(\|\mu\|),\\ f''(\zeta)&=O(\|\mu\|),\\ f'''(\zeta)&=P_3[\mu](\zeta)+O(\|\mu\|^2).\end{aligned}$$
となる. そこで
$$\begin{aligned}\Phi_D(\mu)(\zeta)&=\mathcal{S}(f)(\zeta)\\ &=\frac{P_3[\mu](\zeta)+O(\|\mu\|^2)}{1+O(\|\mu\|)}-\frac{3}{2}\Big(\frac{O(\|\mu\|)}{1+O(\|\mu\|)}\Big)^2\\ &=P_3[\mu](\zeta)+O(\|\mu\|^2)\end{aligned}$$
が得られる. ∎

補題 2. 各 $z\in\mathbb{D}^*$ に対して, 写像

(1)
$$M(\mathbb{D})_1\ni\mu\mapsto\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)(z)\in\mathbb{C}$$
は正則である.

証明: μ を $M(\mathbb{D})_1$ の任意の点とし, $f := f^\mu$, $D := f(\mathbb{D})$ とおく. $\nu \in M(\mathbb{D})$, $\|\nu\| < 1 - \|\mu\|$, に対して, $\tilde{\mu}(\nu) \in M(D)_1$ を

$$\tilde{\mu}(\nu) := \mu(f^{\mu+\nu} \circ f^{-1}) = \Big(\frac{\nu}{1-(\mu+\nu)\bar{\mu}} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}}\Big) \circ f^{-1}$$

で定める. また, 有界線型作用素 : $M(\mathbb{D}) \ni \nu \mapsto \mu[\nu] \in M(D)$ を

$$\mu[\nu] := \Big(\frac{\nu}{1-|\mu|^2} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}}\Big) \circ f^{-1}$$

で定義する. このとき,

$$\tilde{\mu}(\nu) = \mu[\nu] + O(\|\nu\|^2)$$

が成立する. また, $A^\nu := f^{\mu+\nu} \circ f^{-1} \circ (f^{\tilde{\mu}(\nu)})^{-1} \in$ Möb が成り立つので

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbb{D}}(\mu+\nu)(z) - \Phi_{\mathbb{D}}(\mu)(z) &= \mathcal{S}(A^\nu \circ f^{\tilde{\mu}(\nu)} \circ f)(z) - \mathcal{S}(f)(z) \\
&= \mathcal{S}(f^{\tilde{\mu}(\nu)} \circ f)(f(z))f'(z)^2 \\
&= \Phi_{\mathbb{D}}(\tilde{\mu}(\nu))(f(z))f'(z)^2 \\
&= P_3[\tilde{\mu}(\nu)](f(z))f'(z)^2 + O(\|\tilde{\mu}(\nu)\|^2) \\
&= P_3[\mu[\nu]](f(z))f'(z)^2 + O(\|\nu\|^2).
\end{aligned}$$

ここで,

$$M(\mathbb{D}) \ni \nu \mapsto P_3[\mu[\nu]](f(z))f'(z)^2 \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎函数であるから, 主張が成立する. ∎

$\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像 f による単位円板の像 $f(\mathbb{D})$ を**擬円板** (quasi-disk) という. また, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己写像 f と $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群 Γ に対して, Klein 群 $f\Gamma f^{-1}$ を**擬 Fuchs 群** (quasi-Fuchsian group) という.

定理 2. (Bers [Be7]) G を擬円板 D に作用する擬 Fuchs 群とする. このとき,

$$M(D,G) \ni \mu \mapsto P_3[\mu] \in A_2^\infty(D^*,G)$$

は全射である.

証明は省略させて頂く. 元論文等[12]を参照下さい.

[12]Nag [A-26] は丁寧に証明してあるようです.

定理 1 の証明: 先ず最初に, $\Phi_{\mathbb{D}}$ が $M(\mathbb{D},\Gamma)_1$ から $A_2^\infty(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ の中への有界正則写像であることを示す. 定義と Nehari-Kraus の定理より, $\Phi_{\mathbb{D}}$ は $M(\mathbb{D})_1$ から $A_2^\infty(\mathbb{D}^*)$ の中への有界写像であることがわかる. さらに, $f^\mu|_{\mathbb{D}^*}$ は Γ と両立するので, $\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)=\mathcal{S}(f^\mu|_{\mathbb{D}^*})\in A_2^\infty(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ がわかる.

$z\in\mathbb{D}^*$ に対して, $A_2^\infty(\mathbb{D}^*)$ 上の有界線型汎函数 ℓ_z を

$$\ell_z(\phi):=\lambda_{\mathbb{D}^*}(z)^{-2}\phi(z)$$

で定めると, $\{\ell_z\colon z\in\mathbb{D}^*\}$ が $A_2^\infty(R)^*$ の基集合となり, さらに定理 15.1 の条件 (a), (b) を満たすことは明らかであろう. ところで, 補題 2 により, 各 $z\in\mathbb{D}^*$ に対して, $\ell_z(\Phi_{\mathbb{D}})\colon M(\mathbb{D})_1\ni\mu\mapsto\lambda_{\mathbb{D}^*}(z)^{-2}\Phi_{\mathbb{D}}(z)\in\mathbb{C}$ は正則であるから, 定理 15.1 より, $\Phi_{\mathbb{D}}$ の正則性がわかる. さらにまた, 補題 2 の証明より, $\mu\in M(\mathbb{D})_1$, $\nu\in M(\mathbb{D})$ に対して

$$d\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)[\nu]=(f^\mu)^*P_3[\mu[\nu]] \tag{2}$$

となるので, 定理 12.1 より, $\nu\in M(\mathbb{D},\Gamma)$ が $\nu\in\ker d\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)$ となるのは, $\mu[\nu]\in N(f^\mu(D),G)$, $G:=f^\mu\Gamma(f^\mu)^{-1}$, と同値になる. 特に, $\mu=0$ とすると, 主張 (b) が導かれる. ここで,

$$\|\nu\|\le\|\mu[\nu]\|\le\frac{\|\nu\|}{1-\|\mu\|^2}$$

であるので,

$$M(\mathbb{D},\Gamma)\ni\nu\mapsto\mu[\nu]\in M(D,G)$$

は Banach 空間の同型写像である. よって, $\ker d\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)$ に補空間が存在する. また, $(f^\mu)^*$ も Banach 空間の同型写像であるので, 定理 2 から, $d\Phi_{\mathbb{D}}(\mu)$ が全射になる. 故に, 陰函数定理の系より, $\Phi_{\mathbb{D}}$ の局所的な断面が存在する. 以上で主張 (a) も示せた.

(c): $\mu_j\in M(\mathbb{D})_1$ $(j=1,2)$ に対して, $f_j:=f^{\mu_j}$ とおく. また A を $A(\mathbb{H})=\mathbb{D}$ となるような Möb の元とし, $w_j:=w_{A^*\mu_j}$ とおく. このとき, ある $B_j\in$ Möb に対して, $w_j=B_j\circ f_j\circ A$ が成立する.

先ず, μ_1 と μ_2 が同値であるとすると, 同値性の定義により, $w^{A^*\mu_1}|_{\mathbb{R}}=w^{A^*\mu_2}|_{\mathbb{R}}$ となる. そこで, 補題 9.1 より, $w_1|_{\mathbb{L}}=w_2|_{\mathbb{L}}$, 即ち, $B_1\circ f_1|_{\mathbb{D}^*}=B_2\circ f_2|_{\mathbb{D}^*}$ となる. よって, $\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_1)=\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_2)$ が成立する.

一方逆に, $\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_1)=\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_2)$ であるとすると, 系 13.1 より, ある $B\in$ Möb が存在して, $f_1|_{\mathbb{D}^*}=B\circ f_2|_{\mathbb{D}^*}$ となる. そこで, $w_1|_{\mathbb{H}^*}=B_1\circ B\circ B_2^{-1}\circ w_2|_{\mathbb{H}^*}$ となるが, この等式は, 連続性から 0, 1, ∞ においても成立するので, w_j の正規化条件より, $B_1\circ B\circ B_2^{-1}=\mathrm{id}$, 即ち, $w_1|_{\mathbb{H}^*}=w_2|_{\mathbb{H}^*}$. よって, 補題 9.1 より, μ_1 と μ_2 は同値になる. ∎

上の定理 1 は各点のある近傍において $\Phi_{\mathbb{D}}$ の断面が存在していることを主張するが, この近傍がどのくらいの大きさでとれるかについては不問にしている. そのような近傍の大きさまで主張する結果として, 次の定理がある. 証明は略させて頂く.

定理 3. (Ahlfors-Weill [AW]) $\psi \in A_2^\infty(\mathbb{D}^*, \Gamma)_2$ に対して

$$\mu_\psi(z) := -\frac{1}{2}\lambda_{\mathbb{D}}(z)^{-2}\psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\frac{1}{\bar{z}^4} \in M_{harm}(\mathbb{D}, \Gamma)_1$$

とおくと,

$$\Phi_{\mathbb{D}}(\mu_\psi) = \psi.$$

即ち, $A_2^\infty(\mathbb{D}^*, \Gamma)_2$ 上で $\Phi_{\mathbb{D}}$ の正則な断面が存在する.

最後に, 双曲的 Riemann 面 R に対しても Bers 射影 Φ_R を以下のようにして定義しておく.

$\pi\colon \mathbb{D} \to R$ を普遍被覆とし, Γ を $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群とする. このとき, Γ は $\mathbb{D}^*$ にも作用していて, $R^* := \Gamma\backslash\mathbb{D}^*$ は $R = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ と鏡像の関係にある Riemann 面になる. 自然な射影 : $\mathbb{D}^* \to R^*$ を Π で表すことにして, Bers 射影 Φ_R を

$$\Phi_R := (\Pi^*)^{-1} \circ \Phi_{\mathbb{D}} \circ \pi^*\colon M(R)_1 \to A_2^\infty(R^*)$$

で定義する.

定義より

$$d\Phi_R(0) = (\Pi^*)^{-1} \circ d\Phi_{\mathbb{D}}(0) \circ \pi^*$$

となる. j を $\partial\mathbb{D}$ に関する反転とし, $J := \pi \circ j \circ \Pi^{-1}$ とおく. ノルムを保つ反線型作用素 $\mathcal{L}_R, \mathcal{B}_R$ を

$$\mathcal{L}_R\colon A_2^\infty(R) \ni \psi \mapsto (\psi \circ J \cdot J_{\bar{z}}^2)^- \in A_2^\infty(R^*)$$
$$\mathcal{B}_R\colon L_2^\infty(R) \ni \psi \mapsto \lambda_R^{-2}\bar{\psi} \in M(R)$$

で定めると,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{D}} \circ \pi^* = \pi^* \circ \mathcal{B}_R, \qquad \mathcal{L}_{\mathbb{D}} \circ \pi^* = \Pi^* \circ \mathcal{L}_R$$

が成立するのが計算できる. そこで, $d\Phi_R$, β_R の定義と式 (2), (9.2) より,

$$d\Phi_R(0) = -2\mathcal{L}_R \circ \beta_R \circ \mathcal{B}_R^{-1}$$

がわかる.

§17. $A_2^1(R)$ から見た部分集合の大きさ

定義. R 上の函数 ω_R を

$$\omega_R(p) := \sup\{(\lambda_R^{-2}|\phi|)(p) \colon \phi \in \overline{A_2^1(R)_1}\}$$

により定める. ここで, $\lambda_R^{-2}|\phi|$ は R 上の函数になっていることを注意しておく.

定理 1. $p \in R$ における単射半径を ρ とすると,

$$\omega_R(p) \leq \frac{1}{\pi \tanh^2 \rho}.$$

証明: $\pi\colon \mathbb{D} \to R$ を $\pi(0) = p$ であるような普遍被覆, Γ をその被覆変換群とする. $\Delta := \{|z| < \tanh \rho\}$ とおくと, Δ は原点中心, 双曲半径 ρ の円板であるから, π は Δ 上で単射になる. ここで, $\psi \in \overline{A_2^1(\mathbb{D}, \Gamma)_1}$ に対して

$$|\psi(0)| \leq \frac{1}{\pi \tanh^2 \rho} \iint_\Delta |\psi(z)|\, dxdy \leq \frac{1}{\pi \tanh^2 \rho}$$

であるから,

$$\omega_R(\pi(z)) = \sup\{\lambda_{\mathbb{D}}^{-2}(z)|\psi(z)| \colon \psi \in \overline{A_2^1(\mathbb{D}, \Gamma)_1}\}$$

および, $\lambda_{\mathbb{D}}(0) = 1$ より主張が導かれる. ∎

ω_R が R 上で下半連続であるのは定義より明らかであるが, 実際は $\overline{A_2^1(R)_1}$ が R の各点において同程度連続であるから, ω_R は R 上で連続になる. そしてさらに次のことが成り立つ.

定理 2. p を R の尖点とすると,

$$\lim_{q \to p} \omega_R(q) = 0,$$

特に, ω_R は $\hat{R}$ 上へ連続に拡張できる.

証明: 普遍被覆 $\pi\colon \mathbb{H} \to R$ を, その被覆変換群 Γ が放物的変換 $\gamma\colon z \mapsto z + 1$ を素な元として含みかつ γ の固定点 ∞ が尖点 p に対応しているようにとる. このとき, 清水の補題より $H_1 := \{\operatorname{Im} z > 1\}$ は $\langle \gamma \rangle$ に関して真に不変である. そこで, $\pi_1\colon \mathbb{H} \ni z \mapsto \exp(2\pi i z) \in D := \{0 < |\zeta| < 1\}$ とすると, $\pi \circ \pi_1^{-1}\colon D \to R$ は $\pi_1(H_1) = \{0 < |\zeta| < e^{-2\pi}\}$ 上で単射になるから, $\pi \circ \pi_1^{-1}|_{\pi_1(H_1)}$ の逆写像 $\zeta\colon U_p := \pi(H_1) \to \pi_1(H_1)$ を尖点 p の局所座標とみなす. この局所座標を用いると, 双曲計量 λ_R は

$$\lambda_R(\zeta)|d\zeta| = \frac{|d\zeta|}{2|\zeta|\log(1/|\zeta|)}$$

と表される. 一方, $\phi = \phi(\zeta)d\zeta^2 \in \overline{A_2^1(R)_1}$ の U_p での Laurent 展開の $1/\zeta$ の係数 c_{-1} について

$$|c_{-1}| \leq \frac{e^{2\pi}}{2\pi} \int_{U_p} |\phi| \leq \frac{e^{2\pi}}{2\pi} =: M_1$$

が成り立つから,

$$\iint_{U_p} \left|\phi(\zeta) - \frac{c_{-1}}{\zeta}\right| d\xi d\eta \leq 1 + M_1 \iint_{U_p} \frac{1}{|\zeta|} d\xi d\eta = 2.$$

そこで, ある正の絶対定数 M_2 を用いて, $\zeta \in U'_p := \pi(\{\mathrm{Im}\, z > 2\})$ に対して

$$|\phi(\zeta)| \leq \frac{M_1}{|\zeta|} + M_2$$

を得る. 以上より, 評価

$$\omega_R(\zeta) \leq 4\Big(\frac{M_1}{|\zeta|} + M_2\Big)|\zeta|^2\Big(\log\frac{1}{|\zeta|}\Big)^2 \tag{1}$$

が得られ, $\zeta \to 0$ とすれば, 主張が導かれる. ∎

閉グラフ定理より, ω_R が有界であるための必要十分条件は $A^1_2(R) \subset A^\infty_2(R)$ であることがわかる. また, 次の事実が知られている.

定理 3. (Lehner [Ln3], [Ln4], Niebur-Sheingorn [NS]) Γ を $\mathbb{D}$ に作用する Fuchs 群 (楕円的元を含んでも良い) としたとき $A^1_2(\mathbb{D},\Gamma) \subset A^\infty_2(\mathbb{D},\Gamma)$ であるための必要十分条件は正数 δ が存在して, $\gamma \in \Gamma$ が双曲的ならば

$$|\mathrm{tr}\gamma| \geq 2 + \delta$$

が成立することである[13].

この定理の証明は元の論文を参照されたい. 以上から次のことが成立するがわかる.

定理 4. ω_R が有界であるための必要十分条件は,
(2) 正数 δ が存在して, R 上のすべての閉測地線の長さが δ 以上になることである[14].

なお, この定理は上に述べた定理 3 からわかるが, 定理 1 と 2 を用いれば十分性の証明ができる.

証明: R の各尖点 p ごとに定理 2 の証明にある p の近傍 U'_p をとり, $R' := R - \cup_{p \in \hat{R}-R} U_p$ とおく. C を R 内の p にホモトープな閉曲線で R' 内の点を通るようなものとすると, 定理 2 にある普遍被覆 π による C の持ち上げで $\{\mathrm{Im}\, z \leq 2\}$ 内の点 a と $a+1$ を結ぶものが存在する. そこで, ある絶対定数 $M_1 > 0$ が存在して, C の長さは M_1 以上になる.

さて, R' の各点における単射半径は $M_2 := \frac{1}{2}\min(\delta, M_1)$ 以上である. なんとなれば, もしある $q \in R'$ において単射半径が M_2 より小さくなったとすると, q

[13] Γ が有限生成のときに, $A^1_2(\mathbb{D},\Gamma) \subset A^1_2(\mathbb{D},\Gamma)$ が成立することは Drasin-Earle [DrE], Metzger-Rao [MR1], [MR2], Knopp [Kn], Lehner [Ln1] 等により証明されていた. [Ln1], [Ln2] の題名からして, すべての Γ に対し, この包含関係が成立することが予想されていたようであるが, 反例が Pommerenke [P] によって与えられた.

[14] もちろん R 上に閉測地線が存在しない場合には, この条件は満たされるものと見なす.

を通る閉曲線で長さが $2M_2 \leq M_1$ より短いものが存在する. この閉曲線は上に述べたことより尖点にホモトープでない. しかし, 定理の仮定より閉測地線にホモトープでもないので矛盾が生じる.

よって, 定理 1 より ω_R は R' 上で有界になる. 一方, $R - R'$ においては, 定理 2 の評価 (1) より一様有界になっている. ∎

次のことは Lebesgue の収束定理より明らかである.

命題 1. E を R の可測部分集合で

$$\int_E \omega_R \lambda_R^2 < \infty \tag{3}$$

を満たすようなものとする. このとき,

(4) 列 $\{\phi_n\} \subset \overline{A_2^1(R)_1}$ が広義一様に 0 に収束するならば,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |\phi_n| = 0.$$

条件 (3) が成立するための十分条件として, 定理 2 と 4 より

系 1. R の可測部分集合 E が $\hat{R}$ において相対コンパクトであるならば, (3) が成立する.

系 2. R が条件 (2) 満たしているとき, R の可測部分集合 E の双曲面積 $\mathrm{Area}(E) := \int_E \lambda_R^2$ が有限であれば, (3) が成立する.

定義. R の可測部分集合 V に対して

$$r(V; R) := \inf\left\{ \int_V |\phi| : \phi \in A_2^1(R), \|\phi\| = 1 \right\}$$

と定義する.

測度正の部分集合 V に対しては, 有界線型作用素

$$\chi_V : A_2(R) \ni \phi \mapsto \chi_V \phi \in L_2^1(V)$$

に逆作用素 χ_V^{-1} が存在するが, このとき

$$r(V; R) = 1/\|\chi_V^{-1}\|$$

が成立することを注意しておく.

先に定義した ω_R との関係については以下の定理 5 と 6 が成立する.

定理 5. 解析的有限型でない Riemann 面 R に対して,

$$\int_V \omega_R \lambda_R^2 < \infty$$

ならば

$$r(V; R) = 0$$

補題 1. R が解析的有限型でないならば, $A_2^1(R)$ 内のノルム 1 の元の列で広義一様に 0 に収束するものが存在する.

証明: $A_2^1(R)$ は無限次元 Banach 空間であるので, $A_2^1(R)$ のノルム 1 の元の列 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ で, 任意の自然数 m, n に対して $\|\phi_m - \phi_n\| > 1/2$ となるものが存在する. $A_2^1(R)$ の有界集合は正規族を成すから, $\{\phi_n\}$ の部分列 $\{\phi_{n(j)}\}_{j=1}^\infty$ で, ある $\phi \in A_2^1(R)$ に広義一様収束するものが存在する. ここで $\{\phi_{n(j)}\}$ は, そのいかなる部分列もノルム収束していないので, $\liminf \|\phi_{n(j)} - \phi\| > 0$ となるから, $\{(\phi_{n(j)} - \phi)/\|\phi_{n(j)} - \phi\|\}_{j=1}^\infty$ が主張にある性質を持った列になる. ∎

定理 5 の証明: 補題 1 より, 広義一様に 0 に収束する $\{\phi_n\} \subset A_2^1(R)$, $\|\phi\| = 1$, が存在するから, 命題 1 から主張が従う. ∎

定理 6. R の零集合でない可測部分集合 V に対して

$$\int_{R-V} \omega_R \lambda_R^2 < \infty$$

ならば

$$r(V; R) > 0$$

である.

証明: $r(V; R) = 0$ とすると, 定義より, $A_2^1(R)$ 内の列 $\{\phi_n\}$ で

$$\|\phi_n\| = 1 \quad (\forall n), \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_V |\phi_n| = 0 \tag{5}$$

となるものが存在する. 部分列を取ることにより, $\{\phi_n\}$ 自身が広義一様収束しているとして良い. $\phi := \lim \phi_n$ とおくと, Fatou の補題より

$$\int_V |\phi| \le \liminf_{n\to\infty} \int_V |\phi_n| = 0.$$

V の測度は正だから, $\phi = 0$. 即ち, $\{\phi_n\}$ は 0 に広義一様収束している. すると仮定と命題 1 より, $\lim \int_{R-V} |\phi_n| = 0$. しかし, これは (5) に反する. ∎

特に, $R = \mathbb{D}$ の場合には以下のことが示されている. 証明は元論文を見て頂きたい.

定理 7. ([Oh4] 定理 2)　$\mathbb{D}$ の可測部分集合 V に対して, 以下の 3 条件は同値である.

(a)
$$r(V;\mathbb{D}) > 0$$

(b)　ある正数 ρ に対して
$$\inf\left\{\frac{\mathrm{Area}(V\cap D(z;\rho))}{\mathrm{Area}(D(z;\rho))} : z \in \mathbb{D}\right\} > 0$$

(c)　$\mathbb{D}$ のある可算部分集合 S およびある正数 ρ が存在して
$$\bigcup_{z\in S} D(z;\rho) \supset \mathbb{D}$$
$$\sup\{{}^{\#}(S\cap D(z;2\rho)) : z\in\mathbb{D}\} < \infty$$
$$\inf\{\mathrm{Area}(V\cap D(z;\rho)) : z \in S\} > 0$$

定義. $\mathbb{D}$ の可測部分集合 V が定理 7 の条件 (b) を満たすとき, V は平均的に一様分布しているという.

平均的に一様分布している可測集合を含む可測集合が平均的に一様分布していることは定義から明らかであるが, さらに次のことが容易にわかる.

命題 2. l_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, を $\mathbb{D}$ 内の有限個の双曲的直線とし, $\rho > 0$ とする. このとき, $\cup_{j=1}^{n} l_j$ からの双曲距離が ρ 以上の点から成る集合, 即ち, 有限個の Stolz 領域の和集合の補集合は平均的に一様分布している.

また次の結果も知られている. 証明は元論文を御覧下さい.

定理 8. ([Oh4] 定理 3)　平均的に一様分布しているという条件は擬等角不変である. 即ち, V を $\mathbb{D}$ の可測部分集合とし, f を $\mathbb{D}$ の擬等角自己写像としたとき, V が平均的に一様分布していることと $f(V)$ が平均的に一様分布していることは互いに必要十分である.

系 3. f を $\mathbb{D}$ の擬等角自己写像としたとき, $r(V;\mathbb{D}) = 0$ と $r(f(V);\mathbb{D}) = 0$ は同値である.