Teichmüller空間上の解析とその幾何学的応用

（C. McMullen の最近の仕事から）

大　竹　博　巳（京　大　理）
須　川　敏　幸（京　大　理）
谷　川　晴　美（東 工 大 理）
谷　口　雅　彦（京　大　理）

1990年11月

目　　次

Poincaré 級数による作用素のノルム

大竹 博巳

1990年11月

はじめに

この小論は Curt McMullen 著 "Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps" (Invent. math. 97, 95 – 127 (1989)) の11節までの内容を解説したものである. 原論文には他に主結果の高次元への拡張を述べた第11節と2次微分の幾何的収束を解説した appendix があるが, これはこの小論には加えていない. この appendix については別稿の須川敏幸氏による解説を参考にして頂きたい. また原論文には論法の背景を説明している部分等が各所にあるが, これも割愛した. 一方, 原論文において (仮定された予備知識の違いからか) 容易に解るという理由から略されている証明をこの解説には付け加えてある. 特に, グラフに関しては予備知識なしでも理解できるように詳しく説明しておいた. ただし, この分野に関して筆者は素人であり, この小論で説明に用いた記号・用語・論法が一般的なものであるかどうかは定かではないことをお断りしておく.

この解説の構成及び原論文の節との対応は以下の通りである.

第1章

第2章

第1章

§1. 主定理

R を双曲型 Riemann 面 (即ち普遍被覆面が単位円板 Δ となるような Riemann 面) とし, $Q(R)$ を R 上の正則 2 次微分 $\phi = \phi(z)dz^2$ で

$$\|\phi\| := \iint_R |\phi(z)|\, dx\, dy < \infty$$

を満たすものの成す Banach 空間とする. $Q(R)$ の開単位球 $\{\phi \in Q(R) \colon \|\phi\| < 1\}$ を B_R で表す.

$\pi\colon S \to R$ を正則な (即ち不分岐かつ限界のない) 被覆とする. 但し, この解説では正則な被覆しか考えないので, 以下正則な被覆を略して単に被覆と言う. (U, z) を R の局所座標, $\pi^{-1}(U) = \sum_j V_j$ を連結成分への分解とし, 各 V_j 上の局所座標を $w_j = z \circ \pi$ で定める. $\phi \in Q(S)$ が各 V_j 上で $\phi = \phi_j(w_j)dw_j^2$ と表されている時,

$$(\Theta_{S/R}\phi)(z) := \sum_j \phi_j(w_j)$$

とすることにより, ϕ に対して $\Theta_{S/R}\phi \in Q(R)$ を対応させることができる. このようにして被覆 $\pi\colon S \to R$ に対して, 写像 $\Theta = \Theta_{S/R}\colon Q(S) \to Q(R)$ を定義する.

この $\Theta_{S/R}$ は, 次のように Fuchs 群を用いても定義することができる. Δ に作用する Fuchs 群 Γ と $\Phi \in Q(\Delta)$ に対して, Poincaré 級数を

$$\Theta_\Gamma \Phi = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\Phi \circ \gamma)(\gamma')^2$$

で定める. Θ_Γ は $Q(\Gamma)$ から $Q(\Delta;\Gamma)$ の上への写像となる. ここで $Q(\Delta;\Gamma)$ は Γ に関して不変な重さ -4 の可積分な正則保型形式の成す Banach 空間である. 即ち $\phi \in Q(\Delta;\Gamma)$ とは, ϕ が Δ 上の正則函数で

$$\text{(1-1)} \qquad \begin{aligned} \phi &= \gamma^*\phi := (\phi \circ \gamma)(\gamma')^2 \qquad (\gamma \in \Gamma) \\ \|\phi\|_\Gamma &:= \iint_{\Gamma\backslash\Delta} |\phi(z)|\, dx\, dy < \infty \end{aligned}$$

を満たすことを意味する. さて, Γ, G を Δ に作用する Fuchs 群でそれぞれ R, S を一意化しているようなものとする. G は Γ の部分群であるとして良い.

$$\Theta_{G\backslash\Gamma} := \Theta_\Gamma \circ \Theta_G^{-1}\colon Q(\Delta;G) \to Q(\Delta;\Gamma)$$

と定義する. この時, (相対) Poincaré 級数による作用素 $\Theta_{G\backslash\Gamma}$ と射影 $p\colon \Delta \to R$, $\bar{p}\colon \Delta \to S$ から導かれる同型 $p^*\colon Q(R) \to Q(\Delta;\Gamma)$, $\bar{p}^*\colon Q(S) \to Q(\Delta;G)$ に対して, $(p^*)^{-1} \circ \Theta_{G\backslash\Gamma} \circ \bar{p}^*$ が上記の $\Theta_{S/R}$ である.

この $\Theta_{S/R}$ について以下のことが知られている.

(a) $\Theta_{S/R}$ は上への線形作用素でノルムは 1 以下である.

(b) $\Theta_{S/R}$ の断面で線形かつノルムが 3 以下のものが存在する.

(証明は例えば Kra [3] 定理 3.3.3 を見よ.)

$\psi \in Q(R) - \{0\}$ に対して, $Q(S)$ の部分空間 $Q_\psi(S)$ を

$$Q_\psi(S) := \{\phi \in Q(S) \colon \Theta_{S/R}\phi = c\psi, \quad \exists c \in \mathbb{C}\}$$

で定め

$$N(\psi) = N(\psi; R) := \sup\left\{\frac{\|\Theta_{S/R}\phi\|}{\|\phi\|} \colon \phi \in Q_\psi(S)\right\}$$

とおく. 即ち, $N(\psi)$ は $\Theta_{S/R}$ の定義域を $Q_\psi(S)$ に制限した作用素のノルムである. N は連続でありまた, $Q(R)$ の複素射影空間 $PQ(R)$ からの写像と考えることができる.

連続性を示そう. 任意に 2 元 ψ_1, $\psi_2 \in Q(R)$, $\|\psi_j\| = 1$ $(j = 1, 2)$ をとり, $k = \|\psi_1 - \psi_2\|$ とおく. 上の事実より, ある $\phi' \in Q(S)$ で $\|\phi'\| \leq 3k$, $\Theta\phi' = \psi_1 - \psi_2$ となるものがある. $\phi \in Q(S)$ を $\Theta\phi = \psi_2$ となるようなかってな元とすると, $\Theta(\phi + \phi') = \psi_1$ であるから,

$$N(\psi_1) \geq \frac{1}{\|\phi + \phi'\|} \geq \frac{1}{\|\phi\| + 3k}$$

$\|\phi\| \to 1/N(\psi_2)$ として

$$N(\psi_1) \geq \frac{N(\psi_2)}{1 + 3kN(\psi_2)}$$

ここで $N \leq 1$ を考慮すれば $N(\psi_2) - N(\psi_1) \leq 3k$ を得る. 対称性を利用すれば, 一般の ψ, $\psi' \in Q(R) - \{0\}$ に対して

$$|N(\psi) - N(\psi')| \leq 3\left\|\frac{\psi}{\|\psi\|} - \frac{\psi'}{\|\psi'\|}\right\|$$

が解る.

さて, McMullen の原論文の主定理は以下の定理 1.1 であり, 他の全ての結果はこの定理及びその証明から導かれると言って良い.

定理 1.1. (a) 被覆 : $S \to R$ が amenable ならば, 任意の $\psi \in Q(R) - \{0\}$ に対して $N(\psi) = 1$ となり,
(b) 一方, 被覆 : $S \to R$ が nonamenable ならば, 任意の $\psi \in Q(R) - \{0\}$ に対して $N(\psi) < 1$ である.

被覆が amenable であることの定義は第3節で与えられる．ここでは amenable であるとは，被覆の様子を組み合わせ幾何的に表した性質であり，R 及び S の等角構造には依らないものであることをだけを述べておく．定理の証明は第5節から第7節に渡って与えられるであろう．

さて，この主定理を認めた上で，ここから導かれるいくつかの結果を示そう．

系 1.2. 被覆：$S \to R$ が，
(a) amenable ならば，$\Theta_{S/R}B_S = B_R$，
(b) nonamenable ならば，$\overline{\Theta_{S/R}B_S} \subset B_R$.

証明: (a): $\frac{1}{3}B_R \subset \Theta B_S \subset B_R$ は既に解っている．一方，任意の $\psi \in B_R - \{0\}$ に対して，主定理より

$$\inf\{\|\phi\| \colon \phi \in Q(S),\ \Theta\phi = \psi\} = \frac{\|\psi\|}{N(\psi)} < 1.$$

よって，$\psi \in \Theta B_S$．即ち，$B_R \subset \Theta B_S$.

(b): $\psi \in \overline{\Theta B_S} - \{0\}$ を任意の元とすると，ある列 $\{\phi_n\} \subset B_R$ で $\psi_n = \Theta\phi_n \to \psi$ となるものがある．この時，N の連続性より

$$\|\psi\| = \lim \|\psi_n\| \leq \liminf N(\psi_n)\|\phi_n\| \leq \lim N(\psi_n) = N(\psi) < 1.$$

よって $\psi \in B_R$.

系 1.3. (a) 被覆：$S \to R$ が amenable ならば，$\|\Theta_{S/R}\| = 1$.
(b) 被覆：$S \to R$ が nonamenable でありかつ，R が (解析的) 有限型ならば，$\|\Theta_{S/R}\| < 1$.

系 1.3 の (a) は主定理より，(b) は同定理及び $PQ(R)$ がコンパクトであることより直ちに従う．

Riemann 面 R に対して，その縁(border)を $b(R)$ で表す．擬等角写像 $f \colon R \to R'$ は森明の定理により一意的に同相写像 $\tilde{f} \colon R \cup b(R) \to R' \cup b(R')$ に拡張することができる．2つの擬等角写像 $f \colon R \to f(R)$, $g \colon R \to g(R)$ に対して，ある等角写像 $h \colon g(R) \to f(R)$ があり，$\tilde{f}$ と $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ が $R \cup b(R)$ 上の $b(R)$ に関するホモトピーで移りあえるとき f, g は同値であると言う．この同値関係による各同値類の中に最大変形率(maximal dilatation)を最小にする擬等角写像が少なくとも1つ存在することが知られている．このような擬等角写像を極値擬等角写像と呼ぶ．擬等角写像の被覆面への持ち上げと極値性の保存について次のことが成立する．(a) は大竹 [6] の拡張，(b) は Strebel の予想 [9] の肯定的解決である．

系 1.4. $\pi \colon S \to R$ を被覆，$f \colon R \to R'$ を極値擬等角写像，$F \colon S \to S'$ を f の持ち上げとする．この時，
(a) 被覆が amenable ならば，F は極値的である．
(b) 被覆が nonamenable で，R が有限型でありかつ f が等角でないならば，F は極値的でない．

証明: 擬等角写像 $g\colon R \to g(R)$ が極値的であるための必要十分条件は g の Beltrami 係数 $\mu(g)$ が Hamilton の条件

$$\sup\left\{\left|\int_R \mu(g)\psi\right| : \psi \in B_R\right\} = \|\mu(g)\|_\infty$$

を満たすことであることが Reich と Strebel により示されている ([10] 参照).

これを利用する.

(a): $\phi \in Q(S)$ に対して

$$\int_S \mu(F)\phi = \int_S (\pi^*\mu(f))\phi = \int_R \mu(f)\Theta\phi$$

であるから, 主定理を用いて

$$\sup_{\phi\in B_S}\left|\int_S \mu(F)\phi\right| = \sup_{\psi\in B_R}\left|\int_R \mu(f)\psi\right| = \|\mu(f)\|_\infty = \|\mu(F)\|_\infty.$$

よって F は極値的である.

(b): $\phi \in B_S$ とすると,

$$\left|\int_S \mu(F)\phi\right| \le \|\mu(f)\|_\infty\|\Theta\phi\| \le \|\mu(F)\|_\infty\|\Theta\|.$$

そこで系 1.3 (b) と $\|\mu(F)\|_\infty > 0$ より

$$\sup_{\phi\in B_S}\left|\int_S \mu(F)\phi\right| < \|\mu(F)\|_\infty.$$

即ち, F は極値的でない.

$\tau = [(f, f(R))] \in T(R)$ に対して, 被覆 $\pi\colon S \to R$ に関する f の持ち上げ F を用いて$\iota(\tau) := [(F, F(S))]$ とすることにより, 自然に Teichmüller 空間の埋め込み $\iota\colon T(R) \to T(S)$ を定めることができる. Teichmüller 空間の Teichmüller 距離が極値擬等角写像の最大変形率を用いて定義されることより, 次のことが成立する.

系 1.5. (a) 被覆 $\pi\colon S \to R$ が amenable ならば, 埋め込み $\iota\colon T(R) \to T(S)$ は Teichmüller 距離に関して等距離写像である,
(b) 被覆 $\pi\colon S \to R$ が nonamenable でありかつ R が有限型ならば, 埋め込み $\iota\colon T(R) \to T(S)$ は異なる 2 点間の Teichmüller 距離を真に減少させる.

証明: amenable 性は被覆の組み合せ幾何的な性質であり, 等角構造に依らないから $T(R)$ の各点 $\tau = [(f, f(R))]$ において対応する被覆 $\pi_\tau\colon F(S) \to f(R)$ は同時に amenable である. よって, この系は上の系 1.4 から従う.

§2. グラフ

まず, グラフの定義を確認しておこう. ここでは 2 つの集合 $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{V}$ への 2 つの写像 ∂^+, ∂^- の組 $(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial^+,\partial^-)$ で, 任意の $v\in\mathcal{V}$ に対して

$$\deg(v) := |\{e\in\mathcal{E}\colon \partial^+ e = v\}| + |\{e\in\mathcal{E}\colon \partial^- = v\}|$$

($|\cdot|$ は集合の濃度) が有限となるようなものを (有向) **グラフ**と呼ぶ.

また, 有向グラフの辺の向きを無視して得られるグラフを**無向グラフ**という. 即ち, 無向グラフとは, 2 つの集合 $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{V}$ の部分集合の全体からなる集合 $2^{\mathcal{V}}$ への写像 ∂ の組 $(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial)$ で以下の性質 (1), (2) を持つものである.

(1) 任意の $e\in\mathcal{E}$ に対して, $|\partial e| = 1, 2$.
(2) 任意の $v\in\mathcal{V}$ に対して

$$\deg(v) := |\{e\in\mathcal{E}\colon \partial e \ni v\}| + |\{e\in\mathcal{E}\colon \partial e = \{v\}\}|$$

は有限.

$\mathcal{V}$ の元を頂点, $\mathcal{E}$ の元を辺, $\deg(v)$ を頂点 v の次数といい, $\sup_{v\in\mathcal{V}}\deg(v)$ をグラフの次数と呼ぶ. 以下, 単に'グラフ' という用語で有向グラフ・無向グラフのどちらか又はそれら両方を意味するものとする. 但し, この節では向きを考慮しなければならないようなことは起きないので, 無向グラフ $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial)$ のみを扱う. 有向グラフ $(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial^+,\partial^-)$ については, $\partial e := \{\partial^+ e, \partial^- e\}$ として読み替えていただきたい.

定義:

(a) 異なる 2 つの頂点 v_1, $v_2 \in \mathcal{V}$ に対して, ある辺 $e\in\mathcal{E}$ が存在して $\partial e = \{v_1, v_2\}$ となる時, v_1 と v_2 は**隣接している**という.

(b) $(l+1)$ 個の頂点 $(l\geq 0)$ と l 個の辺の組 $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_l, v_l)$ で 全ての $j=1,\ldots,l$ に対して $\partial e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$ を満たすものを v_0 から v_l への**長さ l の道**という. 特に, $v_0 = v_l$ となっている長さ $l>0$ の道を**閉路**と呼ぶ.

(c) $\mathcal{V}$ の部分集合 V に対して, V の**縁**(border) $b(V)$ を V のどれかの元と隣接しているような $\mathcal{V}$–V の元の集合として定める. さらに, $B^n(V)\subset\mathcal{V}$ を

$$B^0(V) := V, \qquad B(V) = B^1(V) := V + b(V),$$
$$B^{n+1}(V) := B(B^n(V))$$

により帰納的に定義する. 但し, $V=\emptyset$ の時, $b(V)=\emptyset$ とする.

(d) グラフ G の**展開定数** (expansion constant) $\gamma(G)$ を

$$\gamma(G) := \inf\left\{\frac{|b(V)|}{|V|}\colon\ V \text{ は } \mathcal{V} \text{ の有限部分集合}\right\}$$

で定める. $\gamma(G)=0$ の時, グラフ G は **amenable** であるといい, 一方, $\gamma(G)>0$ の時は, グラフ G は **nonamenable** であるという.

例: 閉路が存在しないようなグラフを木(tree) という. 各頂点における次数が丁度 d であるような木 G について, $d=2$ の時, G は amenable であり, $d \geq 3$ の時, G は nonamenable で, 展開定数は $d-2$ に等しい.

定理 2.1. nonamenable なグラフ $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial)$, $\mathcal{V}$ の部分集合 V 及び V 上で定義された正値可積分な函数 f に対し, $b(V)$ 上の函数 F を

$$F(v_0) := \sup\{f(v)\colon\ v \in \mathcal{V} \text{ は } v_0 \text{ に隣接している}\}$$

で定める. この時, もしある定数 λ $(0<\lambda<1)$ が存在して, 任意の隣接している $v,\, v' \in V$ に対して

$$\lambda^{-1} f(v) \geq f(v') \geq \lambda f(v)$$

となるならば,

$$\sum_{v\in b(V)} F(v) \geq (\lambda\gamma(G)+\lambda-1)\sum_{v\in V} f(v)$$

が成立する.

証明: f は有界であるから, 定数倍して, $f<1$ として良い.

$$X_n := \{v \in V \colon f(v) \geq \lambda^n\}, \qquad x_n := |X_n| \qquad (n=0,1,\ldots)$$

とおくと, 明らかに各 X_n は有限集合で

$$\emptyset = X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots \subset V,$$
$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n.$$

$X_{n+1}-X_n$ 上で $\lambda^{n+1} \leq f < \lambda^n$ であるから,

$$\sum_V f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v\in X_{n+1}-X_n} f(v) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Delta x_n \tag{2-1}$$

である. ただしここで Δx_n は階差 $x_{n+1}-x_n$ を表している. 右辺の級数は絶対収束しているから, 部分積分 (下の注参照) により

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Delta x_n = -\sum_{n=0}^{\infty} x_n \Delta\lambda^{n-1} \tag{2-2}$$

がわかる.

次に $Y_n := b(X_n) \cap b(V)$, $y_n := |Y_n|$ とおく. f についての仮定から

$$b(X_n) \cap V \subset X_{n+1} - X_n$$

が成立しているから, $b(X_n)\subset B(V)$ を用いると

$$b(X_n)\subset (X_{n+1}-X_n)+Y_n$$

がわかる. そこで, 展開定数 $\gamma(G)$ の定義から

$$y_n+\Delta x_n \geq |b(X_n)| \geq \gamma(G)|X_n| = \gamma(G)x_n. \tag{2-3}$$

さて

$$b(V)\supset \sum_{n=0}^{\infty}(Y_{n+1}-Y_n), \qquad |Y_{n+1}-Y_n|\geq |\Delta y_n|$$

及び F の定義から

$$F(v)\geq \lambda^n \qquad (v\in Y_n)$$

となるから

$$\sum_{v\in b(V)} F(v) \geq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v\in Y_{n+1}-Y_n} F(v) \geq \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\Delta y_n$$

がわかる. ここで, 左辺正項級数の和が無限大のとき, 示すべき式は自明であるから, 左辺の和は収束しているとして良い. この時, 右辺の級数は絶対収束する. よって再び部分積分, $\Delta\lambda^n<0$, (2-3), (2-2) 及び (2-1) により

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in b(V)} F(v) &\geq -\sum_{n=0}^{\infty} y_n\Delta\lambda^n \\
&\geq -\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma(G)x_n-\Delta x_n)\Delta\lambda^n \\
&= -\gamma(G)\lambda\sum_{n=0}^{\infty}x_n\Delta\lambda^{n-1}+(\lambda-1)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Delta x_n \\
&\geq (\gamma(G)\lambda+\lambda-1)\sum_{v\in V} f(v).
\end{aligned}$$

これが求める式である.

注: 上で用いた部分積分についての主張をここに記す. 証明は略す.

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, を $|a_n|$ が単調減少して, 0 に収束するような数列, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $b_0=0$ であるような数列とする. もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\Delta b_n$ が絶対収束するならば, この級数の和は $-\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Delta a_n$ に等しい.

I を頂点 V の部分集合とする. 任意の $v\in I$ に対して $b(\{v\})\cap I=\emptyset$ であるとき, I は独立集合であるという.

命題 2.2. $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},\partial)$ を次数が高々 d であるようなグラフ, V を $\mathcal{V}$ の部分集合, f を V 上の正値可積分な函数とする. このときの V 独立部分集合 I で

$$\sum_{v\in V} f(v) \le (d+1)\sum_{v\in I} f(v)$$

なるものが存在する.

証明: 最初に V の元を $f(v)$ の値が単調減少になるよう番号付けしておく. 即ち, $V=\{v_n\}_{n\ge 0}$ であり, $m\le n$ ならば $f(v_m)\ge f(v_n)$ なるようにしておく.

次に整数の増加列 $\{n(j)\}_{j\ge 0}$ と V の独立有限部分集合の列 $\{I_j\}_{j\ge 0}$ を以下のように帰納的に選んで行く. 先ず

$$n(0):=0, \qquad I_0:=\{v_0\}$$

とする. $n(k)$, I_k まで選び終えた後で, $V-B(I_k)=\emptyset$ となっているならば,

$$n(k+1):=|V|+1$$

とし, この段階でこれ以上 I_j, $n(j+1)$ $(j\ge k+1)$ を選ぶのを止めにする. 一方, $V-B(I_k)\ne\emptyset$ ならば,

$$n(k+1):=\min\{n\colon v_n\in V-B(I_k)\}, \qquad I_{k+1}:=I_k\cup\{v_{n(k+1)}\}$$

とし, さらに上の操作を繰り返す.

最終的に $\{I_j\}_{j\ge 0}$ を選んだ後で

$$I:=\bigcup_{j\ge 0} I_j$$

とおく. 次数が高々 d であることに注意すれば,

$$n(j)<n(j+1)\le n(j)+d+1$$

が解るから,

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} f(v) &= \sum_{j\ge 0}\sum_{n=n(j)}^{n(j+1)-1} f(v_n)\\ &\le \sum_{j\ge 0}(d+1)f(v_{n(j)}) = (d+1)\sum_{v\in I} f(v)\end{aligned}$$

を得る. 証明終

§3. 被覆と amenability

この節では, 前節のグラフに対する amenability を用いて, 被覆 $\pi\colon S \to R$ に対する amenability を定義しよう.

$p \in R$ を基点とする基本群 $\pi_1(R,p)$ の有限個の元 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ に対して, 以下の性質 (1), (2), (3) を持つ有向グラフ $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \partial^+, \partial^-)$ を $\mathcal{C}$ に関する被覆の**組み合せモデル**と呼ぶことにする.

(1) $\mathcal{V} = \pi^{-1}(p)$
(2) $e \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow e$ はある C_j $(j = 1, \ldots, n)$ の持ち上げ
(3) $\partial^+ e = v$ ($\partial^- e = v$) $\Longleftrightarrow v$ は e の終点(始点)

命題 3.1. 基本群 $\pi_1(R,p)$ の有限個の元から成る 2 つの組 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, $\mathcal{C}' = \{C_1', C_2', \ldots, C_m'\}$ に関して, 上のようにして作った被覆 : $S \to R$ の組み合せモデルをそれぞれ $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ とする. また, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ が生成する $\pi_1(R,p)$ の部分群をそれぞれ $\langle\mathcal{C}\rangle, \langle\mathcal{C}'\rangle$ とする. この時, $\langle\mathcal{C}'\rangle \subset \langle\mathcal{C}\rangle$ かつ $\mathcal{G}$ が amenable ならば, $\mathcal{G}'$ は amenable である. 特に, $\langle\mathcal{C}\rangle = \langle\mathcal{C}'\rangle$ ならば, $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ は同時に amenable である.

証明: 先ず, $\mathcal{G}$ の頂点の集合と $\mathcal{G}'$ の頂点の集合は同じものであることを注意しておく. さて仮定より, 各 C_j' $(j = 1, \ldots, m)$ は $C_1, \ldots, C_n$ を用いた語で表現できる. このような語をそれぞれひとつずつ固定し, これらの語の最大長を N とおく. V を $\mathcal{G}$ の頂点のかってな有限部分集合とし, $\mathcal{G}$ 及び $\mathcal{G}'$ における V の縁をそれぞれ $b(V), b'(V)$ で表す. $b'(V)$ の各点 v' はある C_j' によって V のある点 v_0 と結ばれるから, グラフ $\mathcal{G}$ においては v' は高々長さ N の道によって v_0 と結ばれる. よって

$$b'(V) \subset B^N(V) - V$$

となる. 一方, $B^N(V) - V$ の各点は $b(V)$ のある点と高々長さ $N-1$ の道で結べ, $\mathcal{G}$ の各頂点の次数は定数 $2n$ であるから,

$$|B^N(V) - V| \leq (2n-1)^{N-1}|b(V)|$$

が成立する. 故に,

$$\inf_V \frac{|b'(V)|}{|V|} \leq (2n-1)^{N-1} \inf_V \frac{|b(V)|}{|V|}.$$

即ち, $\mathcal{G}$ が amenable ならば, $\mathcal{G}'$ は amenable となる. 証明終

上の議論が基点の選び方に依らないのは明らかである. 従って, $\pi_1(R)$ の有限生成部分群 G に対して, $p \in R$ 及び $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \subset \pi_1(R,p)$ を ($\pi_1(R)$ において) $\langle\mathcal{C}\rangle = G$ を満たすように取り, $\mathcal{C}$ に関する被覆 $\pi\colon S \to R$ の組み合せモデル $\mathcal{G}$ を上の様にして構成した時, $\mathcal{G}$ が amenable であるかどうかは, p 及び $\mathcal{C}$ の選び方に依らない.

定義: 上記の状況において, $\mathcal{G}$ が amenable (nonamenable) の時, 被覆 $\pi\colon S \to R$ は $\pi_1(R)$ の有限生成部分群 G に関して amenable (nonamenable) と言う.

さらに, 被覆が $\pi_1(R)$ の任意の有限生成部分群に関して amenable の時, 単に被覆は amenable であるという. amenable でない被覆を nonamenable という.

以上で主定理の主張にある用語の定義ができた訳であるが, 定理の証明にはより細かいグラフが必要となる. 以下でそれを定義し, 被覆の組み合せモデルとの関係を考察する.

定義: $\mathcal{D}$ を Riemann 面上の高々可算個の局所円板の族で, 次の条件を満たしているものとする

(*) 任意の $D, D' \in \mathcal{D}$ に対して, $D \cap D'$ は (空か又は) 連結である.

このような族 $\mathcal{D}$ があった時, $\mathcal{D}$ の各元を頂点と考え, 交わりが空でないような異なる2つの $D, D' \in \mathcal{D}$ は隣接していると見なしてできる無向グラフを $\mathcal{D}$ の Čech グラフと呼ぶ.

以下, $\mathcal{D}$ は R 上の有限個の局所円板の族 $\{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ で, 上の定義の条件 (*) を満たしさらに, $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$ が連結になっているようなものとする. また, $\pi^*\mathcal{D}$ により, D_j $(j = 1, \ldots, n)$ の逆像 $\pi^{-1}(D_j)$ のすべての連結成分より成る, S 上の高々可算個の局所円板の族を表すものとする. これら2つの局所円板の族 $\mathcal{D}, \pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフについて共に次数は高々 $|\mathcal{D}| - 1 = n$ であることを注意しておく.

命題 3.2. $\iota\colon \bigcup_{j=0}^n D_j \hookrightarrow R$ を自然な包含写像とし, ι から定まる準同型写像 $\iota^*\colon \pi_1(\bigcup_{j=0}^n D_j) \to \pi_1(R)$ の像である有限生成部分群を G とする. この時, 次の2つの条件は同値である.

(a) $\pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフは amenable である.

(b) G に関する被覆 $\pi\colon S \to R$ の組み合せモデル $\mathcal{G}$ は amenable である.

証明: 最初に, 証明で用いる記号を定義する.

先ず, a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ を $D_j \in \mathcal{D}$ 内の点とする. また, e_{kl} $(0 \le k, l \le n)$ を $k \le l$ に対しては, $D_k \cup D_l$ 内にあって, a_k に始まり a_l で終わる曲線とし, $k > l$ に対しては, $e_{kl} = e_{lk}^{-1}$ とする. さらに, 各 j に対して $\{e_{kl}\}$ を使って, a_0 と a_j を結ぶ道 $r_j = e_{0*} \cdots e_{*j}$ をひとつずつ選んでおき, これらの道の長さの最大値を N とする. ただし r_j の長さとは r_j を表すのに用いた e_{kl} の個数を意味する.

次に, G の生成元 $\{C_1, \ldots, C_m\}$ をとる. 各 C_j は $\{e_{kl}\}$ の語で表現されているとして良い. これら m 個の語の最大長を L とする. 一方, 各 k, l に対して, $r_k e_{kl} r_l^{-1}$ は $C_1, \ldots, C_m$ の語で表現できるが, これら語の長さの最大値 M をとする.

最後に, 各 $D \in \pi^*\mathcal{D}$ に対し, j を $D \subset \pi^{-1}(D_j)$ なるものとし, $\pi^{-1}(a_j) \cap D$ を始点とするような e_{j0} の持ち上げの終点を $b \in \pi^{-1}(a_0)$ とする. この対応 : $D \mapsto b$ により定められる $|\mathcal{D}|$ 対 1 の写像 : $\pi^*\mathcal{D} \to \pi^{-1}(a_0)$ を f で表す. 以下では, f は $\pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフの頂点からグラフ $\mathcal{G}$ の頂点への写像と考える.

(a) $\Rightarrow$ (b): V を頂点 $\pi^*\mathcal{D}$ の有限部分集合とする．この時，$\mathcal{G}$ の頂点の有限部分集合 $f(V)$ について，

$$f^{-1}(b(f(V))) \subset B^{2N+L}(V)$$

が成立するから，$|b(f(V))| = |f^{-1}(b(f(V)))|/|\mathcal{D}|$ を用いて

$$|b(f(V))| \leq \frac{|B^{2N+L}(V)|}{|\mathcal{D}|} \leq n^{2N+L-1}\frac{|b(V)|}{|\mathcal{D}|}$$

が解る．一方，$|f(V)| \geq |V|/|\mathcal{D}|$ であるから，

$$\frac{|b(f(V))|}{|f(V)|} \leq n^{2N+L-1}\frac{|b(V)|}{|V|}.$$

故に (a) から (b) が導かれる．

(b) $\Rightarrow$ (a): 今度は V を $\mathcal{G}$ の頂点 $\pi^{-1}(a_0)$ の有限部分集合とする．この時，$\pi^*\mathcal{D}$ の有限部分集合 $f^{-1}(V)$ について

$$b(f^{-1}(V)) \subset f^{-1}(B^M(V))$$

が成立する．よって前と同様に

$$\frac{|b(f^{-1}(V))|}{|\mathcal{D}|} \leq \frac{|f^{-1}(B^M(V))|}{|\mathcal{D}|} = |B^M(V)| \leq (2n-1)^{M-1}|b(V)|$$

を得る．故に

$$\frac{|b(f^{-1}(V))|}{|f^{-1}(V)|} \leq (2n-1)^{M-1}\frac{|b(V)|}{|V|}.$$

ここから (b) ならば (a) であることが解る．

§4. $Q(\Delta)$ の単位球の形状

この節から主定理の証明のための解析的考察に入る。
$M(X)$ を Riemann 面 X 上の Beltrami 微分 $\mu = \mu(z)d\bar{z}/dz$,

$$\|\mu\|_\infty = \sup_X |\mu(z)| < \infty,$$

の成す Banach 空間とする．$Q(X)$ の元 ψ と $M(X)$ の元 μ の積 $\langle\psi,\mu\rangle_X$ を

$$\langle\psi,\mu\rangle_X = \mathrm{Re}\int_X \psi\mu = \mathrm{Re}\iint_X \psi(z)\mu(z)\,dx\,dy$$

で定める．この積により $Q(X)^* \cong M(X)/Q(X)^{\perp}$ となる．

任意の $\psi \in Q(X)$ に対して，$\mu = \overline{\psi}/|\psi| \in M(X)$ は $\langle \psi, \mu \rangle_X = 1$ かつ $\|\mu\|_\infty = 1$ を満たすような唯一つの元である．このことを図形的にいうと，$Q(X)$ の単位球は‘とんがった’所も‘へこんだ’所もないことを意味している．そこで，$\langle \phi, \mu \rangle_X$ が 1 に近いような $\phi \in Q(X)$, $\|\phi\| = 1$, は ψ に近いということが予想されるが，実は一般には，これは成立しない．(例は McMullen の原論文を見よ.) しかしながら，$X = \Delta$ かつ $\psi = dz^2/\pi$ の場合には正しいことが示される．

定理 4.1. $\psi = dz^2/\pi \in Q(\Delta)$, $\mu = \overline{\psi}/|\psi| \in M(\Delta)$ とおく．この時，ある絶対定数 C が存在して，$\phi \in Q(\Delta)$, $\|\phi\| = 1$, が

$$\varepsilon = 1 - \langle \phi, \mu \rangle_\Delta < 1/2$$

を満たすならば

$$\|\phi - \psi\| \leq C\varepsilon^{1/6} \log \frac{1}{\varepsilon}$$

となる．

証明: 示すべき式を書き直すと，

$$\int_\Delta |\phi(z)|\, dm = 1 \quad \text{かつ} \quad \int_\Delta \mathrm{Re}\, \phi(z)\, dm = 1 - \varepsilon > 1/2$$
$$\text{ならば} \quad \int_\Delta |1 - \phi(z)|\, dm \leq C\varepsilon^{1/6} \log \frac{1}{\varepsilon}$$

となる．ただし dm は正規化された Lebesgue 測度 $dx\,dy/\pi$ である．以下 C_1, $C_2, \ldots$ はある絶対定数を表すものとする．

先ず Cauchy-Schwarz の不等式と仮定の式より

$$\begin{aligned}
\int_\Delta |\mathrm{Im}\, \phi|\, dm &= \int_\Delta (|\phi| + \mathrm{Re}\, \phi)^{1/2} (|\phi| - \mathrm{Re}\, \phi)^{1/2}\, dm \\
&\leq \Big(\int_\Delta |\phi| + \mathrm{Re}\, \phi\, dm \Big)^{1/2} \Big(\int_\Delta |\phi| - \mathrm{Re}\, \phi\, dm \Big)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} \Big(\int_\Delta |\phi|\, dm \Big)^{1/2} \Big(\int_\Delta |\phi| - \mathrm{Re}\, \phi\, dm \Big)^{1/2} \\
&= C_1 \varepsilon^{1/2}
\end{aligned}$$

を得る．次に $|\mathrm{Im}\, \phi|$ は劣調和であるから，

$$|\mathrm{Im}\, \phi(a)| \leq \frac{1}{(1 - |a|)^2} \int_{\Delta(a; 1-|a|)} |\mathrm{Im}\, \phi|\, dm \leq \frac{C_1 \varepsilon^{1/2}}{(1 - |a|)^2}$$

となる．ただし $\Delta(c; r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - c| < r\}$ である．よって任意の d $(0 < d < 1)$ に対して

$$\phi(\Delta(1 - d)) \subset S\Big(\frac{C_1 \varepsilon^{1/2}}{d^2} \Big)$$

となる，ここに $\Delta(r) := \Delta(0;r)$ 及び $S(h) := \{w \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} w| < h\}$ である．特に

$$|\operatorname{Im}\phi(0)| < C_1\varepsilon^{1/2}$$

であるから，$\tilde{\phi} := \phi - \phi(0)$ とすると，

$$\tilde{\phi}(\Delta(1-d)) \subset S\Big(C_1\varepsilon^{1/2}\Big(1+\frac{1}{d^2}\Big)\Big) \subset S(C_2\varepsilon^{1/2}d^{-2})$$

が解る．

さて，$\Delta(r)$ における双曲計量は $\dfrac{r\,|dz|}{r^2-|z|^2}$ であるから，$\Delta\Big(1-\dfrac{d}{2}\Big)$ における $\Delta(1-d)$ の双曲半径は $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{4}{d}$ より小さい．正則写像 $\tilde{\phi}\colon \Delta\Big(1-\dfrac{d}{2}\Big) \to S(C_3\varepsilon^{1/2}d^{-2})$ $(C_3 := 4C_2)$ の双曲距離に関する距離非増加性より，$\tilde{\phi}(\Delta(1-d))$ は $S(C_3\varepsilon^{1/2}d^{-2})$ における中心 $w=0$ 半径 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{4}{d}$ の双曲円板内にある．$S(h)$ における双曲計量は $\dfrac{\pi\,|dw|}{4h\cos\dfrac{\pi y}{2h}}$ であるから，上の双曲円板は Euclid 円板 $\Delta\Big(C_4\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\dfrac{4}{d}\Big)$ に含まれる．即ち

$$|\phi(z)-\phi(0)| < C_4\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\frac{4}{d} \qquad (|z|<1-d)$$

が成立する．また $\operatorname{Re}\phi$ は調和であるから，

$$1-\operatorname{Re}\phi(0) = 1-\int_\Delta \operatorname{Re}\phi\, dm = \varepsilon.$$

故に $|z|<1-d$ において

$$\begin{aligned}|1-\phi(z)| &\le |1-\operatorname{Re}\phi(0)| + |\operatorname{Im}\phi(0)| + |\phi(0)-\phi(z)|\\ &< \varepsilon + C_1\varepsilon^{1/2} + C_4\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\frac{4}{d}\\ &\le C_5\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\frac{4}{d}\end{aligned}$$

となることが解る．

一方，$|\phi(z)|$ は劣調和性であるから，

$$\frac{1}{(1-d)^2}\int_{\Delta(1-d)}|\phi|\,dm \ge |\phi(0)| \ge \operatorname{Re}\phi(0) = 1-\varepsilon.$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{1-d\le|z|<1}|\phi|\,dm &= 1-\int_{\Delta(1-d)}|\phi|\,dm\\ &\le 1-(1-\varepsilon)(1-d)^2\\ &\le C_6(\varepsilon+d).\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}\int_\Delta |1-\phi|\,dm &\le \int_{\Delta(1-d)} |1-\phi|\,dm + \int_{1-d\le|z|<1} 1+|\phi|\,dm \\ &\le C_5\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\frac{4}{d} + 1-(1-d)^2 + C_6(\varepsilon+d) \\ &\le C_7(\varepsilon^{1/2}d^{-2}\log\frac{4}{d}+d).\end{aligned}$$

ここで特に $d=\varepsilon^{1/6}$ とおくと, 上の評価から

$$\int_\Delta |1-\phi|\,dm \le C_8\varepsilon^{1/6}\log\frac{1}{\varepsilon}$$

を得る.

§.5 主定理 (b) の証明 (その 1)

この節及び次の節において, 主定理 (b) の証明を行う. 以下 2 節では, 双曲的な Riemann 面 R, nonamenable な被覆 $\pi\colon S\to R$ 及び $\psi\in Q(R)$, $\|\psi\|=1$, を固定して考える.

ψ の零点以外の各点 q のある近傍において,

$$\zeta(p)=\zeta(p;q):=\int_q^p \psi^{1/2}$$

は局所座標を定める. この局所座標 ζ を用いると, ψ は $c\,d\zeta^2$ (c は定数) と表現される. そこで, この局所座標は ψ についての自然座標とか ψ-座標とか呼ばれている. (詳しくは Lehto [4] を, さらに詳しくは Strebel [11] を参照せよ.) この局所座標 $\zeta(\cdot;q)$ により $\Delta(r)$ に 1 対 1 等角に写像される q の近傍を中心 q 半径 r の ψ-円板という. 中心 q の ψ-円板の半径の最大値を $r(q)$ で表し, q における ψ の単射半径と呼ぶ. もちろん $r(q)$ は q について連続である.

主定理 (b) の証明のためには, ある $r>0$ に対して, 次の (1), (2), (3) が成立するような R 上の有限個の局所円板の族 $\mathcal{D}$ が必要である.

(1) $\mathcal{D}$ は第 3 節にある要請を満たす.
(2) $\mathcal{D}$ の各元は同じ半径 r の ψ-円板になっている.
(3) $\pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフは nonamenable である.

このような族 $\mathcal{D}$ は, 例えば以下のようにして得られる. 被覆 : $S\to R$ が nonamenable であるから, 定義より, $\pi_1(R)\cong\pi_1(R,p)$ のある有限生成部分群 G があって, 被覆は G に関して nonamenable である. 基点 $p\in R$ を ψ の零点以外の

点とし, G を生成するような有限個の閉曲線の組 $C=\{C_1,\dots,C_m\}$ をとる. ここで, これらの閉曲線は ψ の零点を通っていないとして良い. すると, $C:=\bigcup_{j=1}^m C_j$ はコンパクトであるから, $s:=\min_{q\in C} r(q)>0$ となる. $r:=s/2$ とおいて, ψ についての有限個の半径 r の ψ-円板の族 $\mathcal{D}=\{D_0,D_1,\dots,D_n\}$ を, $\bigcup_{j=0}^n D_j$ が連結でありかつ $\mathcal{D}$ が C の開被覆になるように選ぶ. このようにして選んだ局所円板の族 $\mathcal{D}$ が求めるものであることを示そう.

先ず第一に, D, $D'\in\mathcal{D}$ を交わりが空でないような 2 つの元とすると, $D\cup D'$ は半径 s のひとつの ψ-円板に含まれる. これらの円板は自然座標でみると Euclid 平面における円板にうつるから, 交わりは連結である. よって上の要請 (1) が満たされる. (2) は作り方から明らかである. 最後に, 仮定から C に関する被覆 : $S\to R$ の組み合せモデルは nonamenable である. そこで $\pi_1(\bigcup_{\mathcal{D}} D)$ の生成元の組を C', C' に関する被覆の組み合せモデルを $\mathcal{G}'$ とし, C' が生成する $\pi_1(R)$ の部分群を G' とすると, $G<G'$ となるから, $\mathcal{G}'$ は命題 3.1 より nonamenable である. これより命題 3.2 を用いて, $\pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフは nonamenable であるのが解る.

上で存在を示した族 $\mathcal{D}$ を用いて, 次の節で $\|\Theta_{S/R}\|$ の評価を行うが, その評価は次の 4 つの量のみに依るものであることを, ここで注意しておく.

(1) $\mathcal{F}:=\pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフの展開定数 γ.
(2) このグラフの次数 (これは高々 $|\mathcal{D}|$ である).
(3) $\bigcup_{\mathcal{D}} D$ の ψ に関する面積: $A_\psi(\bigcup_{\mathcal{D}} D)$.
ここに, $A_\psi(X):=\int_X|\psi|$.
(4) $\mathcal{D}$ の空でない交わりを持つ 2 元 D,D' の交わり $D\cap D'$ の ψ に関する面積の最小値: $m_o:=\min\{A_\psi(D\cap D') : D,D'\in\mathcal{D},\quad D\cap D'\neq\emptyset\}$.

§6. 主定理 (b) の証明 (その 2)

$\psi\in Q(R)$, $\|\psi\|=1$, を任意にとり, 固定する. また $\mu=\overline{\psi}/|\psi|$ とおく. 以下この節では前節の状況の下に, かってな $\phi\in Q_\psi(S)$, $\|\phi\|=1$, に対して, $\|\Theta\phi\|$ が前節最後の 4 つの量のみに依り (即ち, ϕ に依らずに) 一様に 1 より小さいことを示そう.

仮定より $\Theta\phi=t\psi$ $(t\in\mathbb{C})$ であるが, ϕ を $e^{i\theta}\phi$ $(\theta\in\mathbb{R})$ に置き換えることにより, $t\geq 0$ として良い.

S の可測部分集合 F に対して

$$m(F):=\int_F|\phi|,$$
$$i(F):=1-\frac{1}{m(F)}\langle\phi,\pi^*\mu\rangle_F$$

とおく. $m(S)=1$ より

$$1-i(S)=\langle\phi,\pi^*\mu\rangle_S=\langle\Theta\phi,\mu\rangle_R=\langle t\psi,\mu\rangle_R=t=\|\Theta\phi\|$$

となるから, $\|\Theta\phi\|$ を評価するには, $i(S)$ が ϕ に依らず一様に 0 より大きいことを示せば良い.

$m(\cdot)$ 及び $i(\cdot)$ は共に非負であり, 互いに素な $F_j \subset S$ に対して

$$m\Big(\sum_j F_j\Big)i\Big(\sum_j F_j\Big) = \sum_j m(F_j)i(F_j) \tag{6-1}$$

が成立する. 特に,

$$i(S) = m(F)i(F) + m(S-F)i(S-F) \geq m(F)i(F)$$

であるから, 積 $m(F)i(F)$ が ϕ に依らず一様に 0 より大きくなるような $F \subset S$ を見つければ, 良いことになる.

以下 α は $0 < \alpha < 1/6$ なる実数であり, $C_1, C_2, \ldots$ 等は α 及び前節の 4 つの量 γ, $|\mathcal{D}|$, $A_\psi(\bigcup_{\mathcal{D}} D)$, m_o のみに依り, ϕ に依らない正の定数を表す.

補題 6.1. 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して, $c = c(F) := \dfrac{\pi r^2}{m(F)}$ とおくと, $i(F) \leq 1/2$ ならば,

$$\int_F |c\phi - \pi^*\psi| \leq C_1\, i(F)^\alpha.$$

ここに r は前節にあるように $|\psi|$-計量に関する F の半径である.

証明: F に関する仮定より, 自然座標 ζ によって F は $\Delta(r)$ に等角に写像されるから, F の局所座標を $z := \zeta/r$ とすると,

$$\pi^*\psi = r^2\, dz^2, \qquad \pi^*\mu = \overline{\pi^*\psi}/|\pi^*\psi| = d\bar{z}/dz$$

となる. ここで $\phi/m(F) \in Q(F)$ はノルム 1 の元であり, $\Big\langle \dfrac{\phi}{m(F)}, \pi^*\mu \Big\rangle_F = 1 - i(F)$ であるから, 定理 4.1 を用いると,

$$\int_F \Big| \frac{\phi}{m(F)} - \frac{dz^2}{\pi} \Big| \leq C\, i(F)^\alpha.$$

両辺を πr^2 倍すると, $\pi r^2 = A_{\pi^*\psi}(F) \leq A_\psi(\bigcup_{\mathcal{D}} D)$ であるから, 主張を得る.

系 6.2. $i_0 := \min\Big\{\dfrac{1}{2}, \Big(\dfrac{m_o}{2C_1}\Big)^{1/\alpha}\Big\}$ とする. この時, 任意の i $(0 < i \leq i_0)$ 及び任意の $F, F' \in \mathcal{F}$, $F \cap F' \neq \emptyset$, に対して, 以下のことが成立する.

(a) $i(F) \leq i$ ならば, $m(F') \geq C_2\, m(F)$.

(b) $i(F), i(F') \leq i$ ならば, $m(F') \geq (1 - C_3 i^\alpha)m(F)$.

証明: $i(F) \le i$ なる $F \in \mathcal{F}$ に対して前補題を適用すると,

$$|cm(F \cap F') - A_{\pi^*\psi}(F \cap F')| \le \int_{F \cap F'} |c\phi - \pi^*\psi| \\ \le \int_F |c\phi - \pi^*\psi| \le C_1 i^\alpha$$

が解る. そこで $C_1 i^\alpha \le m_o/2$ を用いると,

$$cm(F \cap F') \ge A_{\pi^*\psi}(F \cap F') - C_1 i^\alpha \ge m_o - C_1 i^\alpha \ge \frac{m_o}{2}$$

となるから,

$$m(F') \ge m(F \cap F') \ge \frac{m_o}{2c} = C_2 m(F).$$

よって (a) が成立する.

次に F' に対しても $i(F') \le i$ とすると, 同様にして

$$c(F')m(F \cap F') \le A_{\pi^*\psi}(F \cap F') + C_1 i^\alpha$$

を得るから

$$\frac{m(F')}{m(F)} = \frac{c(F)m(F \cap F')}{c(F')m(F \cap F')} \ge \frac{A_{\pi^*\psi}(F \cap F') - C_1 i^\alpha}{A_{\pi^*\psi}(F \cap F') + C_1 i^\alpha} \\ \ge 1 - \frac{C_1 i^\alpha}{A_{\pi^*\psi}(F \cap F')} \ge 1 - C_3 i^\alpha.$$

証明終

補題 6.3. $\mathcal{F}$ の空でない任意の部分集合 $\mathcal{F}'$ に対して, 以下の評価が成立する.

(6-2) $$m\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\Big) \ge \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{F \in \mathcal{F}'} m(F)$$

(6-3) $$i\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F\Big) \ge \frac{1}{|\mathcal{D}|} \inf_{F \in \mathcal{F}'} i(F)$$

証明: 先ず, $\mathcal{F}$ の Čech グラフの次数は高々 $|\mathcal{D}| - 1$ であるから, $\bigcup_{\mathcal{F}} F$ は S を高々 $|\mathcal{D}|$ 葉に覆っている. よって, $\sum_{\mathcal{F}} m(F) \le |\mathcal{D}| m(S) < \infty$ である. 特に, $\mathcal{F}'$ の Čech グラフの次数も高々 $|\mathcal{D}| - 1$ であり, $\sum_{\mathcal{F}'} m(F) < \infty$ である. そこで, 写像 $m \colon \mathcal{F}' \to \mathbf{R}^+$ に命題 2.2 を適用すると, 独立集合 $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$ が存在して,

(6-4) $$\sum_{\mathcal{F}''} m(F) \ge \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{F}'} m(F) \ge \frac{1}{|\mathcal{D}|} m\Big(\bigcup_{\mathcal{F}'} F\Big)$$

となることが解る. $\mathcal{F}''$ が独立集合であるということは, $\mathcal{F}''$ の各元が互いに素であることを意味するから,

$$m\Big(\bigcup_{\mathcal{F}'} F\Big) \geq m\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) = \sum_{\mathcal{F}''} m(F).$$

以上より (6-2) が従う.

次に, 再び独立性と (6-1) より

$$\begin{aligned} m\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) i\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) &= \sum_{\mathcal{F}''} m(F) i(F) \\ &\geq \inf_{\mathcal{F}'} i(F) \cdot \sum_{\mathcal{F}''} m(F) = \inf_{\mathcal{F}'} i(F) \cdot m\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big), \end{aligned}$$

即ち,

$$i\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) \geq \inf_{\mathcal{F}'} i(F)$$

が解る. そこでこの評価式と (6-4) より

$$\begin{aligned} m\Big(\bigcup_{\mathcal{F}'} F\Big) i\Big(\bigcup_{\mathcal{F}'} F\Big) &\geq m\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) i\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) \\ &\geq \inf_{\mathcal{F}'} i(F) \cdot m\Big(\sum_{\mathcal{F}''} F\Big) \\ &\geq \frac{\inf_{\mathcal{F}'} i(F) \cdot m\Big(\bigcup_{\mathcal{F}'} F\Big)}{|\mathcal{D}|}. \end{aligned}$$

故に, (6-3) が成立する.

以上で主定理 (b) を証明するための準備がようやく終わった. 早速証明を始めよう.

$\mathcal{F}$ の Čech グラフの展開定数 $\gamma > 0$ に対して, i_1 $(0 < i_1 \leq i_0)$ を十分小さく選び, $\lambda := 1 - C_3 i_1^{\alpha}$ が $\lambda\gamma + \lambda - 1 \geq \gamma/2$ を満たすようにする. この i_1 に対して

$$\begin{aligned} &\mathcal{V} := \{F \in \mathcal{F} \colon i(F) < i_1\}, & &\mathcal{W} := \mathcal{F} - \mathcal{V}, \\ &V := \bigcup_{F \in \mathcal{V}} F, & &W := \bigcup_{F \in \mathcal{W}} F \end{aligned}$$

とおくと, 補題 6.3 より

$$i(W) \geq \frac{1}{|\mathcal{D}|} \inf_{F \in \mathcal{W}} i(F) \geq \frac{i_1}{|\mathcal{D}|}$$

であるから

$$1 - \|\Theta\phi\| = i(S) \geq m(W) i(W) \geq \frac{i_1 m(W)}{|\mathcal{D}|} \tag{6-5}$$

を得る. 故に, $m(W)$ を ϕ に依らずに下から正の値で評価すれば良いことが解る. さて, 定理の主張を得るためには $\|\Theta\phi\|$ が 1 に近いような ϕ についてのみ $m(W)$ を評価すれば良いのであるから, $\|\Theta\phi\| \geq 1/2$ と仮定してもかまわない. この時, $\Theta\phi = \|\Theta\phi\|\psi$ に注意すれば,

$$
\begin{aligned}
m(W) + M(V) &\geq m\Big(\bigcup_{\mathcal{F}} F\Big) = \int_{\pi^{-1}\left(\bigcup_{\mathcal{D}} D\right)} |\phi| \\
&\geq \int_{\bigcup_{\mathcal{D}} D} |\Theta\phi| \geq \frac{1}{2}\int_{\bigcup_{\mathcal{D}} D} |\psi| = C_4
\end{aligned}
\tag{6-6}
$$

を得るから, $m(W)/m(V)$ が ϕ に依らずに下から正の値で評価できたら, 証明は完結することになる.

可積分な函数 $m\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^+$ に対して, 函数 $M\colon b(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}^+$ を定理 2.1 にあるように定める. 即ち, $F \in \mathcal{V}$ に対して,

$$M(F) := \sup\{m(F')\colon F' \in \mathcal{V} \text{ は } F \text{ に隣接している}\}$$

と定義する. すると, 系 6.2 の (a) より, $m(F) \geq C_2\, m(F')$ であるから

$$m(F) \geq C_2\, M(F), \qquad F \in b(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$$

となる. そこで補題 7.3 (6-2) を用いると

$$m(W) \geq \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{\mathcal{W}} m(F) \geq \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{b(\mathcal{V})} m(F) \geq \frac{C_2}{|\mathcal{D}|}\sum_{b(\mathcal{V})} M(F)$$

を得る

一方, 系 7.2 (b) によって, m に定理 2.1 を適用することができるから,

$$\sum_{b(\mathcal{V}} M(F) \geq (\lambda\gamma + \lambda - 1)\sum_{\mathcal{V}} m(F) \geq \frac{\gamma}{2}\, m(V). \tag{6-7}$$

以上 (6-4) から (6-7) までの 4 つの不等式から $1 - \|\Theta\phi\|$ は前節の 4 つの量のみに依る正の定数で下から評価できることがわかった.

§7. 主定理 (a) の証明

$p\colon Y \to X$ を被覆とする. $y \in Y$ 及び $p(y)$ を始点とする X 上の曲線 C に対して, y を始点とする C の持ち上げの終点を $C \cdot y$ で表す.

$\pi\colon S \to R$ を amenable な被覆とする. $\pi_1(R,a)$ の生成系 $\{C_1, C_2, \dots\}$ を固定し, $\mathcal{C}_n := \{C_1, \dots, C_n\}$ とする. ただし, $\pi_1(R,a)$ が N 元生成ならば, $\pi_1(R,a) = \langle C_1, \dots, C_n\rangle$ かつ $C_k = C_N$ $(k > N)$ となるようにしておく. $\mathcal{C}_n$ に関する被覆の組み合せモデルを $\mathcal{G}_n$ とする. $\mathcal{G}_n$ の頂点は $\pi^{-1}(a)$ の部分集合であることを注意しておく.

補題 7.1. $\mathcal{G}_n$ の頂点の有限部分集合 $V_n \neq \emptyset$ から成る列 $\{V_n\}$ で, $\pi_1(R,a)$ の任意の有限部分集合 $F \neq \emptyset$ に対して,

$$\frac{|\{v \in \pi^{-1}(a)\colon F \cdot v \subset V_n\}|}{|V_n|} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

なるものが存在する. ここで, $F \cdot v := \{C \cdot v\colon C \in F\}$ である.

証明: 被覆が amenable であることの定義から, グラフ $\mathcal{G}_n$ は amenable であり, グラフが amenable であることの定義から, $\mathcal{G}_n$ の頂点の有限部分集合 $V_n \neq \emptyset$ で

$$|b_n(V_n)| \leq \frac{|V_n|}{n}$$

なるものが存在する. ただしここで, $b_n(\cdot)$ は $\mathcal{G}_n$ における縁を表す.

さて, F の各元を表現するような $\{C_j\}$ による語をそれぞれひとつずつ固定し, これらの語の最大長を L とする. また $F \subset \langle \mathcal{C}_M \rangle$ なる M をひとつとる. すると, $F \subset \langle \mathcal{C}_n \rangle$ $(n \geq M)$ であり, 第 3 節と同様の議論により

$$|\{v\colon F \cdot v \subset V_n\}| \leq |V_n| + (2M-1)^{L-1}|b_n(V_n)|.$$

ここから補題の主張が従う.

説明をより簡明にするため, Fuchs 群を用いて主定理 (a) を証明する. 先ず, 基本群と被覆変換群の対応から確認しておこう.

$p\colon \Delta \to R$ $(p(0) = a)$ を普遍被覆とし, Γ をその被覆変換群とする. 写像 $\pi_1(R,a) \ni C \mapsto \gamma_C \in \Gamma$ を

$$C \cdot 0 = \gamma_C^{-1}(0)$$

により定める. この写像は群の同型写像であり,

$$\gamma_{CC'} = \gamma_C \gamma_{C'} \qquad (C, C' \in \pi_1(R,a))$$

が成立する.

被覆 $\pi\colon S \to R$ $(\pi(b) = a)$ に対する単射 $\pi_*\colon \pi_1(S,b) \hookrightarrow \pi_1(R,a)$ の像に対応する $\Gamma \cong \pi_1(R,a)$ の部分群を G とする. 射影 $\bar{p}\colon \Delta \to G\backslash\Delta$ は, 自然に $\bar{p}\colon \Delta \to S$ かつ $\bar{p}(0) = b$ と見なせる.

各 $v \in \pi^{-1}(a)$ に対して, $z_v \in \bar{p}^{-1}(v)$ をひとつずつとって固定し, $\gamma_v(z_v) = 0$ を満たすような Γ の元を γ_v とする. $\{\gamma_v\colon v \in \pi^{-1}(a)\}$ は剰余類の集合 Γ/G の完全代表系である.

補題 7.2. $C \in \pi_1(R,a)$ 及び $v, v' \in \pi^{-1}(a)$ に対して, 次の (a), (b) は同値である.

(a) $C \cdot v = v'$.
(b) $\gamma_{v'}^{-1} \gamma_C \gamma_v \in G$.

証明: 射影 $p\colon \Delta \to R$, $\bar{p}\colon \Delta \to S$ による有向線分 $[0, z_v]$ の像をそれぞれ $C(v)$, $\bar{C}(v)$ とする. すると, $C(v) \in \pi_1(R, a)$ であり,

$$\gamma_{C(v)} = \gamma_v$$

が成立する. また, v を始点とする C の S への持ち上げを $\tilde{C}$ とすると,

$$\bar{C}(v')^{-1}\tilde{C}\bar{C}(v) \in \pi_1(S, b)$$

である. 以上より,

$$\gamma_{v'}^{-1}\gamma_C\gamma_v = \gamma_{C(v')^{-1}CC(v)} \in G.$$

即ち, (a) $\Rightarrow$ (b) が解る. 以上の議論を逆にたどれば, (b) $\Rightarrow$ (a) がでる.

$L(\Delta;\Gamma)$ を Δ 上の Γ 関して不変な重さ -4 の可積分な可測保型形式の成す Banach 空間とする. 即ち, $\xi \in L(\Delta;\Gamma)$ は (1-1) を満たす Δ 上の可測函数である. $Q(\Delta;\Gamma)$ を $L(\Delta;\Gamma)$ の正則な元から成る閉部分空間とする. $p^*\colon Q(R) \to Q(\Delta;\Gamma)$ は等距離同型写像である. 第1節でも述べたように, $\Theta_{S/R}\colon Q(S) \to Q(R)$ は (相対) Poincaré 級数による作用素

$$\Theta_{G\backslash\Gamma} = \Theta_\Gamma \circ \Theta_G^{-1}\colon Q(\Delta; G) \to Q(\Delta;\Gamma)$$

に対応している. この $\Theta_{G\backslash\Gamma}$ は自然に $L(\Delta; G)$ から $L(\Delta;\Gamma)$ への写像と考えることができる. このように考えた場合のノルムは丁度 1 である.

さて, 補題 7.1 にある V_n に対して, 平均化作用素 $A_n\colon L(\Delta) \to L(\Delta; G)$ ($L(\Delta) := L(\Delta; 1)$) を

$$A_n(\xi) := \frac{1}{|V_n|}\sum_{v\in V_n}\Theta_G(\gamma_v^*\xi) \qquad (\xi \in L(\Delta))$$

で定義する. この A_n について, 以下の (a), (b), (c) が成立することは容易に解る.

(a) $\|A_n\| \le 1$.
(b) $A_n(Q(\Delta)) \subset Q(\Delta; G)$.
(c) $\Theta_{G\backslash\Gamma}(A_n(\xi)) = \Theta_\Gamma(\xi) \qquad (\xi \in L(\Delta))$.

次の定理は主定理 (a) の証明の本質的部分である.

定理 7.3. 任意の $\xi \in L(\Delta)$ に対して,

$$\|A_n(\xi)\|_G \to \|\Theta_\Gamma(\xi)\|_\Gamma \qquad (n \to \infty).$$

証明: ω を Γ に関する Ford 基本領域として, $\gamma^*\omega := \gamma^{-1}(\omega)$ $(\gamma \in \gamma)$ とおく. $\xi \in L(\Delta)$ として, ある有限部分集合 $F \subset \pi_1(R, a)$ があって,

$$\xi = \sum_{C \in F} \gamma_C^* \xi_C \qquad (\xi_C \in L(\omega))$$

と表されているもののみを考えれば良い. というのは, このような ξ は $L(\Delta)$ で稠密であり, A_n 及び Θ_Γ のノルムが共に 1 以下であるからである.

$\psi := \Theta_\Gamma \xi$ とおく. すると, $F^{-1} \cdot v \subset V_n$ ならば $G(\gamma_v^*\omega)$ 上で

$$A_n(\xi) = \frac{1}{|V_n|}\psi$$

が成立することを示そう.

両辺の線型性から, F がひとつの元 C のみから成っている場合のみを示せば十分である. $v' := C^{-1} \cdot v \in V_n$ とすると, 補題 7.2 より, $\gamma_C = \gamma_v g_0 \gamma_{v'}^{-1}$ $(g_0 \in G)$ と書くことができる. よって

$$|V_n| A_n(\xi) = \sum_{u \in V_n} \sum_{g \in G} (\gamma_v g_0 \gamma_{v'}^{-1} \gamma_u g)^* \xi_C$$

となるが, $(\gamma_v g_0 \gamma_{v'}^{-1} \gamma_u g)^* \xi_C$ は $(\gamma_v g_0 \gamma_{v'}^{-1} \gamma_u g)^* \omega$ の外で零であるから, $u \neq v'$ に対して, $(\gamma_v g_0 \gamma_{v'}^{-1} \gamma_u g)^* \xi_C$ は $G(\gamma_v^*\omega)$ 上で零となる. 故に

$$|V_n| A_n(\xi) = \sum_{g \in G} (\gamma_v g)^* \xi_C$$

である, これは $G(\gamma_v^*\omega)$ 上では $\Theta_\Gamma \xi_C = \psi$ に等しい.

以上より, $\Omega' := \bigcup_v \gamma_v^*\omega$ (和は $F^{-1} \cdot v \subset V_n$ となるような $v \in \pi^{-1}(a)$ についてとる) に対して,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega'} |A_n(\xi)|\, dx\, dy &= \frac{1}{|V_n|} \iint_{\Omega'} |\psi|\, dx, dy \\ &= \frac{|\{v \colon F^{-1} \cdot v \subset V_n\}|}{|V_n|} \|\psi\|_\Gamma \to \|\psi\|_\Gamma.\end{aligned}$$

が成立する.

次に $F^{-1} \cdot v \cap V_n = \emptyset$ となるような v についてであるが, これは補題 7.2 より $G(\gamma_v^*\omega)$ 上で $A_n(\xi) = 0$ であるから $\|A_n(\xi)\|_G$ には何も関与していない.

最後に,

$(*)$ $F^{-1} \cdot v \cap V_n \neq \emptyset$ かつ $F^{-1} \cdot v \not\subset V_n$

となるような v について考察する. このような v については, ある $C_i, C_o \in F$ があって, $v_i := C_i^{-1} \cdot v \in V_n$ かつ $v_o := C_o^{-1} \cdot v \notin V_n$ となる. 即ち, $C_o^{-1} C_i$ の v_i を始点とする持ち上げは V_n 内の点 v_i から始まり v を通って V_n 外の点 v_o へ至る.

故に, 必ず途中 $b_n(V_n)$ のある点 v_b を通る. そこで, 補題 7.1 の証明にあるような M, L をとると, v は v_b と高々長さ L の道で結ばれる. よって, $(*)$ を満たす v の個数は高々 $(2M-1)^L|b_n(V_n)|$ である. また, このような v に対しても, $\gamma_v^*\omega$ 上での $|A_n(\xi)|$ の積分の値は高々 $\|\xi\|/|V_n|$ であるから, $(*)$ を満たす v についての積分の和について

$$\sum_v \iint_{\gamma_v^*\omega} |A_n(\xi)|\, dx\, dy \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる. 証明終

主定理 (a) の証明: $\psi \in Q(\Delta;\Gamma) - \{0\}$ とする. $\Theta_\Gamma\colon Q(\Delta) \to Q(\Delta;\Gamma)$ は全射だから, ある $\xi \in Q(\Delta)$ があって, $\Theta_\Gamma\xi = \psi$ を満たす. $\phi_n := A_n(\xi)$ とおくと, $\Theta_{G\backslash\Gamma}\phi_n = \Theta_\gamma\xi = \psi$ となる. 定理 7.3 より $\|\phi_n\|_G \to \|\psi\|_\Gamma$. 即ち, $N(\psi) = 1$ となる. 証明終

§1. 展開定数の評価

この節では,

(1) $\pi_1(S)$ 及び $\pi_1(R)$ は共に有限生成であり,

(2) $\pi_1(R) \neq \{1\}$,

という仮定をおく. そして, $\pi_1(R)$ に関する被覆 : $S \to R$ の組み合せモデル $\mathcal{G}$ の展開定数 $\gamma(\mathcal{G})$ を Euler 標数 $\chi(S)$ 及び $\chi(R)$ を用いて下から評価しよう. ここで (2) の仮定は自明の場合を除くためのものであるが, ここから $\chi(R) \leq 0$ となることを注意しておく.

ところで, 被覆の組み合せモデルは (従って展開定数も) $\pi_1(R)$ の生成元の選び方に依っている. そこでここでは, 標準生成系 $\mathcal{C}$ についてのみ考察する. 即ち,

(1) R が開曲面ならば, $\mathcal{C} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ として, $\langle a_1 \rangle, \ldots, \langle a_n \rangle$ の自由積が $\pi_1(R)$ になるようなものをとる.

(2) R が閉曲面ならば, $\mathcal{C} = \{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g\}$. ここに, g は R の種数で, $\prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] = 1$.

補題 1.1. 上にあるような $\pi_1(R)$ の標準生成系 $\mathcal{C}$ に関する被覆 : $S \to R$ の組み合せモデルを $\mathcal{G}$ とする. この時, $\mathcal{G}$ の頂点の任意の部分集合 $V \neq \emptyset$ に対して,

$$3|b(V)| \geq 2(\chi(S) - |V|\chi(R)).$$

証明: $\mathcal{C}$ 各元は, $p \in R$ を基点とする閉曲線で p 以外に共有点を持たないものである, として良い. そして, 次のような胞複体 K を考えよう.

(1) R が開曲面ならば, K の次元は 1 で, その 0-骨格は点 p のみであり, 1-骨格は a_j $(j = 1, \ldots, n)$.

(2) R が閉曲面ならば, $K = R$ で, その 0-骨格は点 p のみであり, 1-骨格は a_j, b_j $(j = 1, \ldots, g)$.

被覆 : $S \to R$ により K を S 上に持ち上げてできる図形を $\widetilde{K}$ とする. K の 1-骨格が $\mathcal{C}$ であるから, $\widetilde{K}$ の 1-骨格は $\mathcal{G}$ と同一視できる.

$V \neq \emptyset$ を $\mathcal{G}$ の頂点の有限部分集合とし, L をその 0-骨格が $B(V) = V \cup b(V)$ であるような $\widetilde{K}$ の最大の部分複体とする. さて, 主張の評価式を導くにあたって, $\widetilde{K} - L$ のどの成分も位相的円板でないと仮定して良い. (もちろん R が開曲面ならば, $\widetilde{K}$ は 2-胞体を含まないから, このようなことを仮定する必要はない.) というのは, そのような円板があったなら, それらを L に加え, その後で, 次数が $4g$ の頂点はすべて V の点と考え直すことにより, $|V|$ を増加させ, $|b(V)|$ を減少させることができるので, より強い評価式を示すことができるからである. この時,

$$\chi(L) \geq \chi(S) \tag{1-1}$$

となる.

さて, k_j, l_j ($j=0,1,2$) をそれぞれ K, L に含まれる j-胞体の個数とする. 明らかに, $k_0=1$, $l_0=|V|+|b(V)|$ であるから,

$$l_0 = k_0|V| + |b(V)|. \tag{1-2}$$

次に, $\mathcal{G}$ の各頂点における次数は定数 $2k_1$ であるから, L の 1-骨格をグラフと見なした時の次数 $\deg_L$ について,

$$\begin{aligned} \deg_L(v) &= 2k_1 & v \in V \\ 1 \le \deg_L(v) &< 2k_1 & v \in b(V) \\ l_1 &= \frac{1}{2}\sum_{v \in B(V)} \deg_L(v) \end{aligned}$$

が成立する. よって

$$k_1|V| + \frac{1}{2}|b(V)| \le l_1 \le k_1(|V| + |b(V)|). \tag{1-3}$$

最後に, R が閉曲面の時, L のひとつの 2-胞体はのべ $2k_1$ 個の 1-胞体を境界に持ち, ひとつの 1-胞体は高々 2 つ 2-胞体の境界となるから, $2k_1l_2 \le 2l_1$ である. そこで, (1-3) と $k_2=1$ より

$$l_2 \le k_2(|V| + |b(V)|). \tag{1-4}$$

一方, R が開曲面であるなら, $l_2 = k_2 = 0$ であり, (1-4) は自明である.

以上, (1-1) から (1-4) までの 4 式によって

$$\begin{aligned} 2(\chi(S) - |V|\chi(R)) &\le 2\{l_0 - l_1 + l_2 - |V|(k_0 - k_1 + k_2)\} \\ &\le (2k_2+1)|b(V)| \le 3|b(V)| \end{aligned}$$

証明終

系 1.2. 被覆 : $S \to R$ が無限葉とすると, $\mathcal{G}$ の展開定数 $\gamma(\mathcal{G})$ について

(a) $\chi(S) \ge 0$ ならば, $\gamma(\mathcal{G}) \ge \dfrac{2}{3}|\chi(R)|$.

(b) $\chi(S) < 0$ ならば, $\gamma(\mathcal{G}) \ge \dfrac{2}{5}\left|\dfrac{\chi(R)}{\chi(S)}\right|$.

証明: (a) は補題 1.1 から直ちに解る.

(b): $\mathcal{G}$ が連結で, 頂点の個数は無限であるから, $|b(V)| \ge 1$ である. 一方, Euler 標数は整数だから, $\chi(S) \le -1$. そこで, 補題 1.1 を用いると,

$$\begin{aligned} 5|b(V)||\chi(S)| - 2|V||\chi(R)| &\ge 5|b(V)||\chi(S)| - 3|b(V)| - 2|\chi(S)| \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

故に, (b) が成立する.

注: McMullen の原論文では上の2つより強い結果を示している. ここでは証明における説明を簡単にするため, 以上の主張にしておいた. これらの弱い結果でも以後の応用には影響は無い.

§.2 $\|\Theta_{S/R}\|$ と R のモデュライとの関係

被覆 $\pi_0 \colon S_0 \to R_0$ をひとつ固定する. $\tau \in T(R_0)$ に対応する被覆を $\pi_\tau \colon S_\tau \to R_\tau$ とする. この節では τ を変化させたときの$\Theta_\tau := \Theta_{S_\tau/R_\tau}$ のノルム $\|\Theta_\tau\|$ の挙動について考察する.

定理 2.1. $\|\Theta_\tau\|$ は $T(R_0)$ 上の Teichmüller 距離に関して一様連続である.

この定理の証明はこの節の最後で与えるとして, 先にこの定理を用いて得られる結果をいくつか示そう.

定理 2.2. (展開定数による評価) $\pi \colon S \to R$ を nonamenable な被覆とし, R は有限型とする. $\pi_1(R)$ の生成系 C をひとつ固定する. この時, C に関する被覆の組み合せモデルの展開定数 γ 及び R のみに依る函数 f が存在して

$$\|\Theta_{S/R}\| \leq f(R, \gamma) < 1.$$

証明: 主定理 (b) の証明を振り返ってみよう. $N(R;\psi)$ ($\psi \in Q(R) - \{0\}$) を評価するに際して用いた4つの量の内 S に依存したのは $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{D}$ の Čech グラフの展開定数のみであった. しかしこの量は第1章の命題 3.2 を用いると, S に依らないで一様に γ の定数倍で下から評価することができる. よって各 ψ に対しては $N(R;\psi)$ を R と γ のみの函数で評価することができる. ところで第1章第1節で $N(R;\psi)$ の ψ についての連続性を示したが, 実際さらに連続性が S に依らないで一様であることまで示した. そこで $N(R;\psi)$ の評価を各点ごとでなく, $PQ(R)$ 上局所的なものにすることができるが, 仮定から $PQ(R)$ がコンパクトであるから評価は大域的なものになる.

補題 2.3. $\pi \colon S \to R$ をかってな被覆とする. ある正の絶対定数 l_0 及び C があって, R 上に長さ l ($0 < l \leq l_0$) の閉測地線 α が存在するならば,

$$\|\Theta_{S/R}\| \geq 1 - CL$$

が成立する.

証明: α を分割することにより, α は単純であるとして良い. R を一意化するような上半平面 $\mathbf{H}$ に作用する Fuchs 群 Γ で α が $\eta \colon z \mapsto kz$ ($k = e^l$) に対応するよ

うなものをひとつとる．この時 collar lemma によって，ある正の絶対定数 l_0 と C_1 及び函数 $\theta\colon (0, l_0] \to (0, \pi/2)$ で $\theta(t) \le C_1 t$ となるようなものがあり，

$$S_l := \{z \in \mathbf{H}\colon \theta(l) < \arg z < \pi - \theta(l)\}$$

について，

$$\eta S_l = S_l \qquad \text{かつ} \qquad \gamma S_l \cap S_l = \emptyset \quad (\gamma \in \Gamma - \langle\eta\rangle)$$

が成立する．そこで

$$\Omega := \{z \in \mathbf{H}\colon 1 < |z| < k\} \qquad \text{及び} \qquad \omega := \Omega \cap S_l$$

とおくと，Ω は $\langle\eta\rangle$ の基本領域であり，ω は Γ の基本領域の部分集合になる．

さて $\phi(z) = z^{-2}$ とおくと，$\phi \in Q(\mathbf{H}; \langle\eta\rangle)$ かつ $\|\phi\|_{\langle\eta\rangle} = \pi \log k$ となり，

$$\begin{aligned}
\|\Theta_{\langle\eta\rangle\backslash\Gamma}\phi\|_\Gamma &\ge \iint_\omega \Big|\sum_{\gamma\in\langle\eta\rangle\backslash\Gamma} \gamma^*\phi\Big|\, dx\, dy \\
&\ge \iint_\omega |\phi| - \sum_{\gamma\in\langle\eta\rangle\backslash(\Gamma-\langle\eta\rangle)} |\gamma^*\phi|\, dx\, dy \\
&\ge \iint_\omega |\phi|\, dx\, dy - \iint_{\Omega-\omega} |\phi|\, dx\, dy \\
&= (\pi - 4\theta(l))\log k \\
&\ge (1 - CL)\|\phi\|_{\langle\eta\rangle}.
\end{aligned}$$

故に $\|\Theta_{\langle\eta\rangle\backslash\Gamma}\| \ge 1 - CL$.

ところで，被覆 $\langle\eta\rangle\backslash\mathbf{H} \to R = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ は2つの被覆 $\langle\eta\rangle\backslash\mathbf{H} \to S$ と $S \to R$ に分解できるから，$\|\Theta_{\langle\eta\rangle\backslash\Gamma}\| \le \|\Theta_{S/R}\|$ が成り立つ．以上より，$\|\Theta_{S/R}\| \ge 1 - CL$ が解る．

さて，R_0 を双曲的有限型 Riemann 面で種数を g，尖点の個数を n とする．また被覆 $\pi_0\colon S_0 \to R_0$ は nonamenable かつ無限葉であり，$\pi_1(S_0)$ が有限生成であるとする．Θ_τ $(\tau \in T(R_0))$ は R_τ の標識 (marking) には依らないから，$\|\Theta_\tau\|$ はモデュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ からの函数と考えることができる．このように見なした $\|\Theta_\tau\|$ を $N([\tau])$ とおく．

定理 2.4. $N\colon \mathcal{M}_{g,n} \to [0, 1)$ は一様連続な固有 (proper) 写像である．さらに $\mathcal{M}_{g,n}$ の任意のコンパクト集合 K 上で N は K 及び $\chi(S_0)$ のみに依る量に依って上から評価できる．

注: N が固有写像であるから，$\|\Theta_\tau\|$ を $T(R_0)$ 上で一様に 1 より小さな量で上から評価することはできない．

証明: N が $[0,1)$ への写像であることは明らかであり，一様連続であることは定理 2.1 より解る．また連続性からコンパクト集合 K 上での評価はある点 $[\tau]\in K$ における評価に帰着できるが，さらに定理 2.2 及び系 1.2 を用いると，$[\tau]$ 及び $\chi(S_0)$ のみに依る量を用いて評価できることが解る．

次に R_τ 上の単純閉曲線の長さの最小値を l_τ とおくと，モデュライ空間において $[\tau]\to\infty$ の時 $l_\tau\to 0$ となる．よって補題 2.3 より $[\tau]\to\infty$ ならば $\|\Theta_\tau\|\to 1$ となる．即ち N は固有写像である．

次の系は定理 2.4 より直ちに解る．

系 2.5. 被覆 : $S_0\to R_0$ は無限葉で，R_0 は双曲的で有限型，さらに $\pi_1(S_0)$ は有限生成であるとする．この時，連続函数 $c(\cdot,\cdot)$ が存在して

$$\|\Theta_\tau\|\le c(\chi(S_0),l_\tau)<1.$$

定理 2.1 の証明: 被覆 : $S_0\to R_0$ に対応する Teichmüller 空間の包含写像 : $T(R_0)\to T(S_0)$ を ι で表す．また

$$N(\tau,r):=\frac{1}{r}\sup\{d_{T(S_0)}(\iota(\tau),\iota(\tau')) \colon d_{T(R_0)}(\tau,\tau')<r,\tau'\in T(R_0)\}$$

と定義する．

この時，次の 2 式が成立する．これらの 2 式の証明は後で行う．

$$\text{(2-1)}\qquad \Big|N(\tau,r)-\|\Theta_\tau\|\Big|\le\frac{r}{2}+O(r^2)$$

ここで $O(\tau)$ の項は τ に依らない．

$$\text{(2-2)}\qquad |N(\tau,r)-N(\tau',r)|\le\frac{2}{r}\,d_{T(R_0)}(\tau,\tau')$$

これらの 2 式において $r=\Big(d_{T(R_0)}(\tau,\tau')\Big)^{1/2}$ とすることにより，$d_{T(R_0)}(\tau,\tau')<s$ ならば

$$\Big|\|\Theta_\tau\|-\|\Theta_{\tau'}\|\Big|\le 3\sqrt{s}+O(s)$$

を得る．故に $\|\Theta_\tau\|$ は τ について一様連続である．

(2-1) の証明: $f\colon R\to R'$ ($R:=R_\tau$, $R':=R_{\tau'}$) を擬等角写像とし，$F\colon S\to S'$ ($S:=S_\tau$, $S':=S_{\tau'}$) を f の持ち上げとする．さらに

$$\mu:=\mu(F),\qquad k:=\|\mu\|_\infty,$$
$$k_0:=\inf\{\|\mu(g)\|_\infty\colon \text{擬等角写像 } g\colon S\to S' \text{ は } F \text{ と同値 }\}$$

とおく．この時，

$$\left|\frac{k_0}{1-k_0^2}-\sup_{\phi\in B_S}\left|\int_S\frac{\mu\phi}{1-|\mu|^2}\right|\right|\leq\frac{k^2}{1-k^2}$$

が知られている (Reich–Strebel [8] 定理9, Gardinar [1] §.6.4 参照)．先ず

$$\begin{aligned}\sup_{\phi\in B_S}\left|\int_S\frac{\mu\phi}{1-|u|^2}\right|&=\sup_{\phi\in B_S}\left|\int_R\frac{\mu(f)\Theta\phi}{1-|\mu(f)|^2}\right|\\&\leq\frac{k}{1-k^2}\|\Theta\|\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\|\Theta\|&\geq\frac{1-k^2}{k}\left(\frac{k_0}{1-k_0^2}-\frac{k^2}{1-k^2}\right)\\&\geq\frac{k_0}{k}-k\end{aligned}$$

が解る．ここで特に f を極値的とすると

$$\log\frac{1+k}{1-k}=d(\tau,\tau')<r$$

即ち, $k<\tanh(r/2)\leq r/2$ であるから

$$\begin{aligned}\|\Theta\|&\geq\frac{2k_0}{r}-\frac{r}{2}\\&=\frac{d(\iota(\tau),\iota(\tau'))}{r}-\frac{r}{2}+O(r^2).\end{aligned}$$

故に

$$N(\tau,r)-\|\Theta\|\leq\frac{r}{2}+O(r^2)$$

を得る．

次に逆の向きの評価を示そう．列 $\{k_n\}$ 及び $\{\phi_n\}\subset B_S$ を

$$\lim_{n\to\infty}k_n=k:=\tanh\frac{r}{2}\qquad\text{及び}$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_S=1,\qquad\lim_{n\to\infty}\|\Theta\phi_n\|=\|\Theta\|$$

となるよう選び

$$\mu_n:=\pi^*\left(k_n\frac{\overline{\Theta\phi_n}}{|\Theta\phi_n|}\right)$$

とおく．S 上の μ_n-等角写像と同値な極値的擬等角写像をひとつとり，その Beltrami 係数のノルムを k_{n0} とする．また

$$k^*:=\tanh\frac{rN(\tau,r)}{2}$$

とおく. $k_{n0} \leq k^* \leq k$ である. この時

$$\sup_{\phi \in B_S} \left| \int_S \frac{\mu_n \phi}{1-|\mu_n|^2} \right| \geq \left| \int_S \frac{\mu_n \phi_n}{1-k_n^2} \right| = \frac{k_n}{1-k_n^2} \|\Theta \phi_n\|_R$$

であるから, 前と同様にして

$$\|\Theta \phi_n\|_R \leq \frac{1-k_n^2}{k_n} \left(\frac{k_n^2}{1-k_n^2} + \frac{k^*}{1-k^{*2}} \right)$$

を得る. ここで $n \to \infty$ とすれば

$$\|\Theta\| \leq k + \frac{k^*}{k} \leq \frac{r}{2} + N(\tau, r).$$

証明終

(2-2) の証明: 任意の ε に対して, $T(R_0)$ 内の点 τ_ε で

$$d(\tau, \tau_\varepsilon) < r \qquad \text{かつ} \qquad d(\iota(\tau), \iota(\tau_\varepsilon)) > rN(\tau, r) - \varepsilon$$

を満たすものが存在する. $s := d(\tau, \tau')$, $l := d(\tau', \tau_\varepsilon)$ とおく. 三角不等式より $l < r + s$ である. τ' から τ_ε へ至る測地線をひとつとり, これを $r : s$ に内分する点を τ'_ε とすると,

$$d(\tau', \tau'_\varepsilon) < r, \qquad d(\tau_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) < s$$

となる (Lehto [4] 第5章 2.3 参照). この時

$$\begin{aligned} r(N(\tau, r) - N(\tau', r)) &\leq d(\iota(\tau), \iota(\tau_\varepsilon)) + \varepsilon - d(\iota(\tau'), \iota(\tau'_\varepsilon)) \\ &\leq d(\iota(\tau), \iota(\tau')) + d(\iota(\tau_\varepsilon), \iota(\tau'_\varepsilon)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ι は距離を増加させないから

$$N(\tau, r) - N(\tau', r) \leq \frac{2s + \varepsilon}{r}.$$

$\varepsilon \to 0$ とし, τ と τ' の役割を交換することにより主張が導かれる.

§.3 細論

この節では $N(\psi; R) \to 1$ となる場合についてより詳しく考察する．前節と同じように R は (g,n) 型の双曲的 Riemann 面とし，被覆 $\pi_0\colon S_0 \to R_0$ は無限葉でありかつ，$\pi_1(S_0)$ は有限生成を仮定するが，この節ではさらに被覆は幾何的 **(geometric) である**を仮定する．ここで被覆が幾何的であるとは，
(1) 被覆は普遍被覆であるか又は，
(2) R_0 の非圧縮な (incompressible) ある部分領域 D_0 が存在し，$\pi_0^{-1}(D_0)$ の連結成分の中に D_0 と等角同値なものが唯一つだけあり，これを $\widetilde{D}_0$ とおくと，包含写像 $\iota\colon \widetilde{D}_0 \hookrightarrow S_0$ から定められる中への同型写像 $\iota_*\colon \pi_1(\widetilde{D}_0, a) \hookrightarrow \pi_1(S_0, a)$ が全射であるときに言う．
以下 $S_0 \to R_0$ が普遍被覆の場合には便宜的に $D_0 = \emptyset$ とする．

次の事実が知られている (谷口・志賀・大竹 [12] 第4節参照)

定理 3.1. ある絶対定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の ε $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ 及び任意の双曲的 Riemann 面 X に対して，

$$X_{\mathrm{thin}}(\varepsilon) := \{x \in X\colon\ x \text{ における単射半径が } \varepsilon \text{ より小さい}\}$$

の各連結成分は (1): X の尖点の尖点近傍であるか又は，(2): X 内の単純閉測地線のカラー近傍のどちらかである．

以下 ε $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ を任意にとり，固定する．

任意の $\tau \in T(R_0)$ に対して，幾何的被覆の仮定から，$R = R_\tau$ の部分領域 $D = D_\tau$ で D_0 に対応するようなものがある．$R_{\mathrm{thin}} = R_{\mathrm{thin}}(\varepsilon)$ 及び $R - R_{\mathrm{thin}}$ の連結成分の和から成る R の連結部分集合 Y で，Y から D の中へのアイソトピーが存在するようなもののうち最大のものを R_{lift} とする．また $R_{\mathrm{am}} := R_{\mathrm{thin}} \cup R_{\mathrm{lift}}$ とおく．幾何的被覆の定義より，D は一意的に $S = S_\tau$ の部分領域で D と等角同値なものに持ち上げることができる．よって R_{lift} についても一意的かつ自然な持ち上げがある．この持ち上げと $\pi = \pi_\tau$ による R_{thin} の逆像全体との和集合を S_{am} と定める．$S_{\mathrm{am}} \subset \pi^{-1}(R_{\mathrm{am}})$ であることを注意しておく．

定理 3.2. 被覆 : $S_k \to R_k$ 及び $\phi_k \in Q(S_k)$ $(\|\phi_k\|_{S_k} = 1)$ について，

$$\|\Theta_{S_k/R_k}\phi_k\|_{R_k} \to 1 \qquad (k \to \infty)$$

となるならば，

$$\int_{(S_k)_{\mathrm{am}}} |\phi_k| \to 1 \qquad (k \to \infty).$$

即ち，$\phi \in Q(S)$ について $\|\Theta_{S/R}\phi\|_R \doteqdot \|\phi\|_S$ ならば S_{am} 上での積分が $\|\phi\|_S$ のほぼ全体を占める．

系 3.3. $\psi_k \in Q(R_k)$ $(\|\psi_k\|_{R_k} = 1)$ について,

$$N(\psi_k; R_k) \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

となるならば,

$$\int_{(R_k)_{\mathrm{am}}} |\psi_k| \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

証明: $N(\cdot,\cdot)$ の定義から, $\phi_k \in Q(S_k)$ $(\|\phi_k\| = 1)$ 及び $c_k > 0$ で

$$\Theta_{S_k/R_k}(c_k\phi_k) = \psi_k \qquad \text{かつ} \qquad c_k \to 1$$

となるものが存在する. $\pi_k^{-1}(R_k - (R_k)_{\mathrm{am}}) \subset S_k - (S_k)_{\mathrm{am}}$ を考慮して, 上の定理を適用すると,

$$\begin{aligned} 1 - \int_{(R_k)_{\mathrm{am}}} |\psi_k| &= \int_{R_k - (R_k)_{\mathrm{am}}} |\psi_k| \\ &\le c_k \int_{R_k - (R_k)_{\mathrm{am}}} |\Theta_{S_K/R_k}\phi_k| \\ &\le c_k \int_{\pi^{-1}(R_k - (R_k)_{\mathrm{am}})} |\phi_k| \\ &\le c_k(1 - \int_{(S_k)_{\mathrm{am}}} |\phi_k|) \to 0. \end{aligned}$$

証明終

系 3.4. 上の系で被覆が普遍被覆の時, 同じ仮定のもとで

$$\int_{(R_k)_{\mathrm{thin}}} |\psi_k| \to 1 \qquad (k \to \infty).$$

証明: この場合, $R_{\mathrm{lift}} = \emptyset$ であるから, $R_{\mathrm{thin}} = R_{\mathrm{am}}$ である.

補題 3.5. X を (g,n) 型の双曲的 Riemann 面とすると, $X - X_{\mathrm{thin}}$ の連結成分の個数は $2g + n - 2$ 以下である.

証明: 定理 3.1 より $X - X_{\mathrm{thin}}$ の各連結成分は位相的には (0,0), (0,1), (0,2), (1,0) のどの型でもない. 故に, $X - X_{\mathrm{thin}}$ の連結成分の個数は X を半ズボン分解した時の半ズボンの個数 M 以下である. $M = 2g + n - 2$ であるから, 主張は正しい.

定理 3.2 の証明の概略: $\psi_k = \Theta_{S_k/R_k}\phi_k$ とおく. $\|\psi_k\| \to 1$ であると仮定する. 定義より,

$$S_k - (S_k)_{\mathrm{am}} \subset \pi^{-1}(R_k - (R_k)_{\mathrm{thin}})$$

である. $R_k - (R_k)_{\mathrm{thin}}$ の連結成分 X のうちで, $\pi^{-1}(X) - (S_k)_{\mathrm{am}}$ 上の $|\phi_k|$ の積分の値を最大にするもののひとつを Z_k とする. 以下では任意の $\delta > 0$ に対して

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{\pi_k^{-1}(Z_k)-(S_k)_{\mathrm{am}}} |\phi_k| \leq \delta \tag{3-1}$$

を示す. 但し, 部分列を選ぶことにより, この上極限は極限に取り替えて良い. 定理の主張はこの式と補題 3.5 より導かれる. さて任意の $E_k \subset R_k$ に対して

$$\int_{\pi_k^{-1}(R_k-E_k)} |\phi_k| - \int_{R_k-E_k} |\psi_k| \geq 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\pi^{-1}(E_k)} |\phi_k| - \int_{E_k} |\psi_k| \\ &\leq \int_{\pi^{-1}(R_k)} |\phi_k| - \int_{R_k} |\psi_k| \\ &= 1 - \|\psi_k\| \to 0 \end{aligned} \tag{3-2}$$

が解る. よって $\int_{Z_k} |\psi_k| \to 0$ ならば, (3-1) は直ちに従う. 故に, ある正数 m が存在して

$$\int_{Z_k} |\psi_k| \geq m \tag{3-3}$$

となっている場合のみを考える. ここで再度部分列を選ぶことにより, R_k はモデュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ のコンパクト化 $\widehat{\mathcal{M}}_{g,n}$ の中である点 R に収束していると仮定して良い. この時, Z_k は $R - R_{\mathrm{thin}}$ (これは $R - R_{\mathrm{node}}$ の連結成分の各 Riemann 面ごとに考える) のどれかひとつの連結成分 Z に収束し, ψ_k は Z を含むような $R - R_{\mathrm{node}}$ の連結成分上の正則2次微分 $\psi \neq 0$ に収束してゆく. (詳しくは須川氏の解説を参照せよ. また擬 Fuchs 群を用いても説明できるが, ここでは省略する.) この ψ に対して Z 上に, 第1章第5節にあるような, 半径 $r > 0$ の ψ-円板 D の族 $\mathcal{D}$ を作る. さらにこの時,
(1) $\mathcal{D}$ 内のどの2つの円も接していないようにし,
(2) 準同型 : $\pi_1(\cup_{\mathcal{D}} D) \to \pi_1(Z)$ が全射でありかつ,

$$\int_Z |\psi| < \int_{\cup_{\mathcal{D}} D} |\psi| + \delta \tag{3}$$

となるように作ることができる. $\psi_k \to \psi$ であるから, 十分大きな k に対して R_k 内にも半径 r の円板の族 $\mathcal{D}_k$ で, $\mathcal{D}_k$ の Čech グラフは $\mathcal{D}$ の Čech グラフと同型で,

$\mathcal{D}_k$ の各円板がこの同型で対応する $\mathcal{D}$ の円板に収束するようなものが作れる. このような状況においては, 主定理 (b) の証明の中で基本となった 4 つの量は (必要なら部分列を選ぶことにより) それぞれ収束するのが解る.

さてここでもし, $\pi_k^*\mathcal{D}_k$ の Čech グラフの展開定数 γ_k が $\lim \gamma_k > 0$ を満たすなら, 主定理 (b) の証明の論法により k に依らない一様な評価

(3-4)
$$\int_{Z_k} |\psi_k| \leq c \int_{\pi^{-1}(Z_k)} |\phi_k| \qquad (c < 1)$$

が成立する. そこで (3-3) と $\|\phi_k\| = 1$ より

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\pi_k^{-1}(Z_k)} |\phi_k| + \int_{\pi_k^{-1}(R_k - Z_k)} |\phi_k| \\
&\geq \frac{1}{c} \int_{Z_k} |\psi_k| + \int_{R_k - Z_k} |\psi_k| \\
&= \|\psi_k\| + \left(1 - \frac{1}{c}\right) \int_{Z_k} |\psi_k| \\
&\geq \|\psi_k\| + \left(1 - \frac{1}{c}\right) m
\end{aligned}$$

となり, 即ち $\limsup \|\psi_k\| < 1$ が起きる. これは仮定に反するから,

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_k = 0$$

である.

また, もし $Z_k \not\subset (R_k)_{\mathrm{lift}}$ となるようないくらでも大きい k があったとすると, そのような k に対して $Z_k - (R_k)_{\mathrm{lift}}$ の基本群は巡回群でなくなる. 一方, 幾何的被覆の定義より $Z_k - (R_k)_{\mathrm{lift}}$ の上にある S_k 内の連結成分は全て単連結か又は 2 重連結であるから, 被覆 $\pi_k\colon S_k \to R_k$ を Z_k に制限した被覆の展開定数は, 系 1.2 を用いると一様に下から正の値で評価でき, ここから命題 3.2 を用いて $\pi_k^*\mathcal{D}_k$ の Čech グラフの展開定数が一様に下から正の値で評価できることがでる. しかしこれは $\lim \gamma_k = 0$ に反する. 故に, 十分大きな k に対して必ず $Z_k \subset (R_k)_{\mathrm{lift}}$ となる. 特に, これまでの仮定のもとでは, 被覆は普遍被覆ではないことになる.

$Z_k \subset (R_k)_{\mathrm{lift}}$ であるから, Z_k から, 幾何的被覆を定めている R_k のある部分領域の中へのアイソトピーがある. そこで $\pi^{-1}(Z_k)$ は, Z_k と等角同値な $(S_k)_{\mathrm{am}}$ 内のひとつの部分領域と, $(S_k)_{\mathrm{am}}$ 外にある可算無限個の単連結領域の和になる. この内前者は (3-1) には影響を与えない. 一方, 後者については系 1.2 によって一様に展開定数を下から評価できるから, $\pi^*\mathcal{D}_k$ のうち後者に含まれる部分 $Y_k := \bigcup_{\pi^*\mathcal{D}_k} D - (S_k)_{\mathrm{am}}$ の Čech グラフの展開定数も一様に下から評価できる. よってこの部分 Y_k においても (3-4) と同様のことがおき, ここから

(3-5)
$$\lim_{k \to \infty} \int_{Y_k} |\phi_k| = 0$$

が解る.

最後に $\mathcal{D}_k$ の作り方より，$|\psi_k|$ の $Z_k - \bigcup_{\mathcal{D}_k} D$ 上での積分の値 I_k は $|\psi|$ の $Z - \bigcup_{\mathcal{D}} D$ 上での積分の値に収束するから，十分大きな k について $I_k < \delta$ となる．よって (3-2) から

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{\pi^{-1}(Z_k - \bigcup_{\mathcal{D}_k} D)} |\phi_k| < \delta \tag{3-6}$$

が従い，示したい式 (3-1) は (3-5) と (3-6) より解る．

補足

第1章で見たように，被覆 : $S \to R$ 及び $\psi \in Q(R) - \{0\}$ があった時，$N(\psi; R)$ が 1 に等しいか又は真に小さいかのどちらが起きるかは，組み合せ幾何的な条件“被覆が amenable か否か” に依って決定されるものであった．またさらに，R が有限型の場合にはノルム $\|\Theta_{S/R}\|$ についてもこの条件により決定された．

しかしながら (当然と言うべきか)，R が有限型であるという仮定を外した場合には，もはや組み合せ幾何的な条件のみによっては $\|\Theta_{S/R}\| = 1$ か否かは決定できなくなる．実際，次のことが解っている．

定理. ([7]) 普遍被覆 : $\Delta \to R$ に対して，$\|\Theta_{\Delta/R}\| = 1$ となるための必要十分条件は以下の (1), (2) のどちらかが成立することである．

(1) 任意の $\rho > 0$ に対して R 内の点 p で，p における単射半径が ρ より大きくなるようなものが存在する．
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，R 内に長さが ε 以下の閉測地線が存在する．

普遍被覆が amenable になるのは，被覆変換群が巡回群の時であるから，普遍被覆の場合に $\|\Theta_{\Delta/R}\| = 1$ か否かを決定する条件はむしろ幾何的であることが解る．

なお上の定理にある必要十分条件は，Teichmüller 空間の外半径が 6 に等しいための必要十分条件でもあることが知られている (中西・山本 [5])．

最後に，この McMullen の論文は精読する価値のある論文であると筆者は考える．ぜひとも一読して頂きたい．その際，この小論が理解の一助となるならば幸いである．

参考文献

[1] F. P. Gardiner : Teichmüller Theory and Quadratic Differentials, Wiley, 1987.

[2] 今吉洋一, 谷口雅彦 : タイヒミュラー空間論, 日本評論社, 1989.

[3] I. Kra : Automorphic Forms and Kleinian Groups, W. A. Benjamin, 1972.

[4] O. Lehto : Univalent Functions and Teichmüller Spaces, Springer-Verlag, 1987.

[5] T. Nakanishi, H. Yamamoto : On the outradius of the Teichmüller space, Comment. Math. Helv. 64 (1989), 288–299.

[6] H. Ohtake : Lifts of extremal quasiconformal mappings of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982), 191–200.

[7] H. Ohtake : On the norm of the Poincaré series operator for a universal covering group, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[8] E. Reich, K. Strebel : Extremal quasiconformal mappings with given boundary values, in "Contributions to Analysis" (L. V. Ahlfors et al. eds.), pp.375–392, Academic Press, 1974.

[9] K. Strebel : On lifts of extremal quasiconformal mappings, J. Anal. Math. 31 (1977), 191–203.

[10] K. Strebel : On quasiconformal mappings of open Riemann surfaces, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 301–321.

[11] K. Strebel : Quadratic Differentials, Springer-Verlag, 1984.

[12] 谷口雅彦, 志賀啓成, 大竹博巳 : クライン群と双曲的三次元多様体, 昭和59年度科学研究費研究集会資料.