修士論文

Master Thesis

様々な曲面のクラスへの Bloch-Ros principle の応用

Applications of the Bloch-Ros principle
to various classes of surfaces

笠尾俊輔 (Shunsuke Kasao)

金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻

Division of Mathematical and Physical Sciences
Graduate School of Natural Science and Technology,
Kanazawa University

目次

1 序

複素関数論における正規族とは，連続写像の集合にコンパクト開位相を入れたときの相対コンパクト集合のことを指す（詳しい定義は本稿 2.2 節を参照せよ）．正規族の概念は，1907 年に Paul Montel が記載した博士論文 “Sur les suites infines de fonctions” にまで遡ることができるが，その理論は複素関数論で重要な結果である Riemann の写像定理（[藤本, 定理 4.32]）や Picard の小定理（[Ber06, Section 1.7]，本稿の定理 3.9），Picard の大定理（[藤本, 定理 5.26]）の証明で使われる他，近年では複素力学系（[Ber98]，[Ber00]）や極小曲面のガウス写像の値分布論（[LP]，[Ros]）など広く応用されている．

正規族の理論における研究の 1 つの指針として，Bloch heuristic principle（直訳をすると Bloch の発見的原理）が挙げられる．ここで，Bloch heuristic principle とは，ある性質 P をもつ $\mathbb{C}$ 上全体で定義された非定数有理型関数（または正則関数）が存在しないとき，ある領域において性質 P をもつ有理型関数（または正則関数）の族が正規族である可能性を示唆する原理をいう．その代表例を 2 つ紹介する：

例 1.1. $L > 0$ として，性質 P_L を正則関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| < L$ $({}^\forall z \in D)$ をみたすことと定める．Liouville の定理から性質 P_L をみたす非定数整関数 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ は存在しない．このことから P_L をみたす正則関数の族は正規族になる可能性がある，ということが Bloch heuristic principle である．実際 Montel の定理（定理 2.23）から，$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D 上の正則関数族

$$\mathscr{F} := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : |f(z)| < L \ ({}^\forall z \in D)\}$$

は D 上の（古典的な）正規族になる．

例 1.2. X を $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の 3 つ以上の元を含む集合とし，性質 P_X を有理型関数 $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して f が X を除外値にもつことと定める．このとき，Picard の小定理から X を除外値にもつ $\mathbb{C}$ 上全体で定義された非定数有理型関数は存在しない．Bloch heuristic principle から X を除外値にもつ有理型関数の族は正規族をなすと予想される．実際 Carathéodory–Montel の定理（本稿の定理 3.9）から，$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D 上の有理型関数族

$$\mathscr{F} := \{f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f(D) \subset \widehat{\mathbb{C}} - X\}$$

は D 上の（球面）正規族になる．

この原理は，André Bloch の記した [Bloch, p.84] での言葉 “Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito”（[Sch, p.101] はこれを，有限個の円板上でなされなかったものは，無限に広がる平面上には存在しない，と解釈を与えている）に由来し，実際に Bloch は，Ahlfors の five islands の定理（[Ber98]，[Ber00]）や超曲面を除く正則曲線上の Cartan の定理などいくつも重要な結果を予想した．その一方で，Bloch heuristic principle は必ずしも成り立つとは限らず，反例が存在する（[Ber06, Section 1.6]，[Zal98, p.224 Examples 7,8,9,10]，本稿の例 4.8）．そうした

中，Abraham Robinson（[Rob73]）や Lawrence Zalcman（[Zal75]）は，どのような性質に対して Bloch heuristic principle が成り立つのかを定式化した（定理 4.1，定理 4.10）．

Zalcman による Bloch heuristic principle の定式化をもとに，Antonio Ros は極小曲面論において類似の定式化をした．それを説明する前に，極小曲面論の大域的な結果として知られる Bernstein の定理と藤本の定理について復習する．Bernstein の定理とは，平面 $\mathbb{R}^2$ 全体を定義域とする $\mathbb{R}^3$ 内のグラフ極小曲面は平面に限るという主張である．Erhard Heinz（[Heinz]）は，開円板上で定義された $\mathbb{R}^3$ 内のグラフ極小曲面に対する curvature estimate を導くことで，Bernstein の定理を証明した．また，藤本坦孝氏（[Fuji]）は Gauss 写像の除外値数が 5 点以上である $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面に対して curvature estimate が成り立つことを示した．さらに，藤本氏はこの curvature estimate の不等式を用いることで，Gauss 写像の除外値数が 5 点以上である $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面は平面に限ることを証明した．ここで，Scherk の第 1 極小曲面（[川上・藤森, 例 1.60 例 2.27], [宮岡 22, p.64 6]）など，Gauss 写像の除外値数が 4 である（平面とは異なる）完備極小曲面が存在するため，$\mathbb{R}^3$ 内の平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の最大個数は 4 であることがわかり，これを藤本の定理と呼ぶ．これらの結果からわかるように，極小曲面の Gauss 写像がある性質 P をみたすとき，curvature estimate，つまりある $C > 0$ が存在して，性質 P をみたす Gauss 写像を伴う任意の極小曲面 $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して，

$$|K(p)|\, d(p)^2 \leq C \quad ({}^{\forall} p \in \Sigma) \tag{1.1}$$

（但し，K は ψ の Gauss 曲率，$d(p)$ は p から Σ の境界への測地的距離である）が成り立つ．そして，この不等式 (1.1) から Gauss 写像がその性質 P をみたす $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面は平面のみであることが導かれる．そのため，Ros は $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面を調べる目的に合った property を定式化し（[Ros, p.3]，本稿の定義 3.2），極小曲面の Gauss 写像のどの property が curvature estimate を生じるのかを判定する主張（[Ros, Theorem 3]，本稿の定理 3.37）を導いた．この判定法により，正規族理論における諸結果は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の値分布論に加え，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面論へ応用することが可能になり，実際 Ros はこの判定法から藤本の定理の別証明（[Ros, Theorem 4]，本稿の定理 3.33，系 3.34，定理 3.40）を得た．本稿では正規族理論，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数の値分布論，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面論におけるこのような現象を **Bloch–Ros principle** と呼ぶことにする．

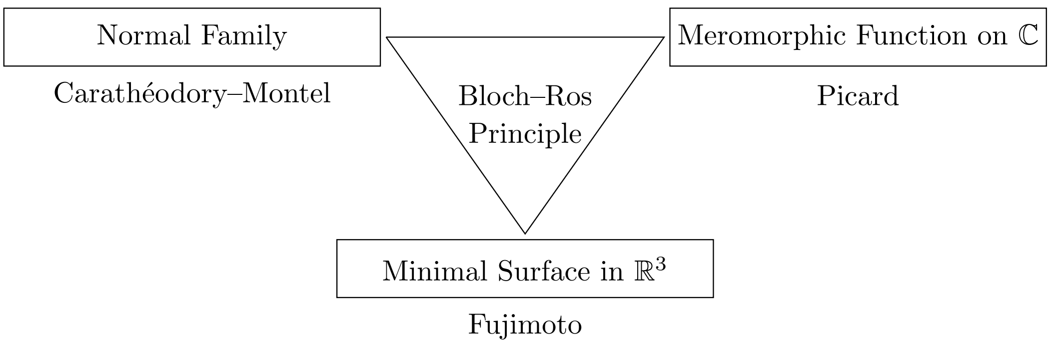

FIGURE 1. Bloch–Ros Principle

また，曲面の Gauss 写像の値分布論，とりわけ除外値問題は $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面に限った話ではない．川上裕氏は特異点付きのいくつかの曲面の Gauss 写像の値分布論的性質を調べた．例えば，川上氏は中條大介氏との共同研究 [KN] において，3 次元アファイン空間内の弱完備な非固有アファイン波面の Lagrangian Gauss 写像の除外値数の最大個数は 3 であることや，3 次元双曲型空間内の弱完備な平坦波面の標準形式の比の除外値数の最大個数は 3 であることを導いた．さらにその翌年，川上氏は [Kawa] でこれらの曲面の Gauss 写像の除外値数の最大個数を統一的に調べられる手法を確立した．より正確に述べれば，「完備な共形計量 $ds^2 = (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$（但し，$f\,dz$ は Σ 上の正則 1 形式，g は Σ 上の有理型関数，m は正の整数）を伴う開 Riemann 面 Σ 上の非定数有理型関数 g の除外値数の最大個数は $m+2$ であること（本論文の系 3.34)」を導いた．これは裏を返せば，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面をはじめとする様々な曲面のクラスの Gauss 写像の除外値問題に必要となる本質的な情報は，計量付き開 Riemann 面 $(\Sigma,\, f\,dz,\, g)$ のみであることを示している．本稿（の定義 3.25）では，このような 3 つ組 $(\Sigma,\, f\,dz,\, g)$ を m-Riemann 面と呼んでいる．

本論文における目的は，Ros による判定法の一般化，つまり $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面をはじめとする様々な曲面のクラスを対象に，g のどのような性質が m-Riemann 面 $(\Sigma,\, f\,dz,\, g)$ 上に curvature estimate をみたすのかを判定する主張（定理 3.30）を導くこと，さらにその判定法を用いて Bernstein 型の定理（系 3.32）や川上氏による藤本の定理の一般化（系 3.34）を得ることである．

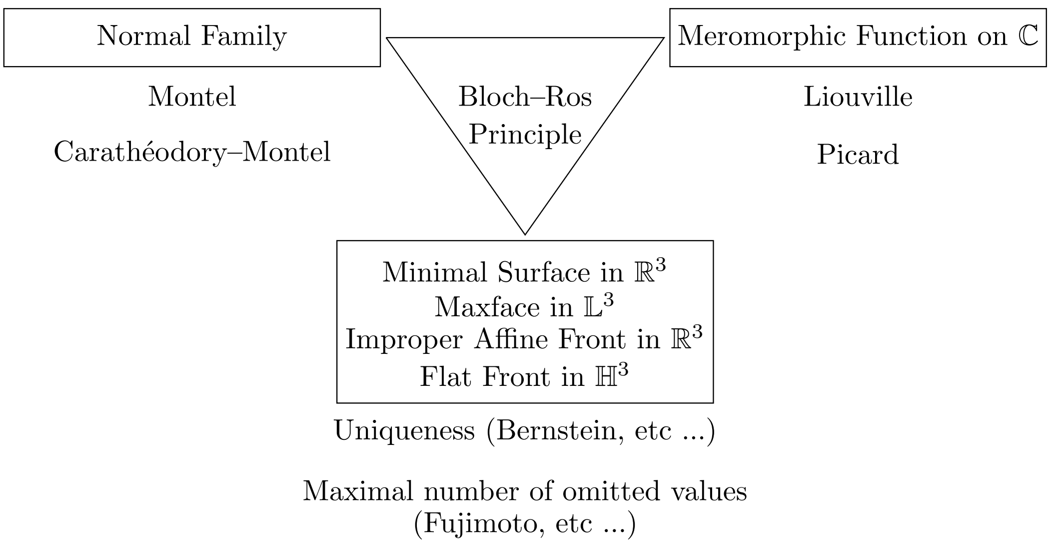

FIGURE 2. Generalization of Bloch–Ros Principle

本論文の構成と特徴は以下の通りである：2.1 節では本論文で用いる記号をまとめる．2.2 節では [藤本]，[CTC]，[Sch] などにある 3 章の理解に必要となる正規族の理論をまとめる．続いて 3.1 節では Ros による [Ros, Chapter 1] の内容を再構成する．特に，Zalcman が述べた property と，Ros が表現し直した property との関係を考察する（注意 3.5)．また，Ros による Zalcman の補題を用いた Picard の小定理や Carathéodory–Montel の定理の証明を一部リファインする（定理 3.9)．3.2 節では 3.3 節で必要になるいくつかの補題（補題 3.17，定理 3.19，定理 3.24 など）を準

備する．3.3 節では，m-Riemann 面 $(\Sigma,\ f\,dz,\ g)$ における g の性質が curvature estimate をみたさないための必要条件（定理 3.30）を与え，その系として Bernstein 型の定理（系 3.32）や藤本–川上の定理（系 3.34）を証明する．3.4 節では，3.3 節で得られたいくつかの結果（定理 3.30，系 3.32，系 3.34 など）を $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面，$\mathbb{L}^3$ 内の極大面，$\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面へ適用する．4.1 節では，3 章の内容から少し逸れるために除いていた $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の値分布論と正規族の理論を結んだ Zalcman の補題（定理 4.1）や有理型関数の族が正規族であるための十分条件（定理 4.10）について述べる．また，Bloch principle の反例（例 4.8）についても紹介する．4.2 節では藤本氏の導いた補題 3.23 を用いて Picard の小定理の証明を与える．

謝辞． お忙しい中でもいつも親身に議論の場を設け，著者が納得するまで時間を割いて下さった川上裕准教授に心より感謝申し上げます．川上裕准教授のアドバイスや研究のビジョンなしには本論文の完成に至りませんでした．また，およそ 1 年間に渡り関数論の自主ゼミをさせて頂いた東京工業大学博士課程所属の松本洵氏に深く感謝致します．特に本論文の 3.2 節では自主ゼミの内容を，3.3 節の非固有アファイン波面への応用では修士論文 [EMJ] を活用させて頂きました．最後に，森淟博氏をはじめとする同研究室の皆様，並びにお世話になった全ての方々に感謝致します．

2 準備

2.1 記号の設定

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合．但し，本稿では自然数を 1 以上の整数として扱う．
$\mathbb{Z}$：整数全体の集合.
$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合.
$\mathbb{R}$：実数全体の集合.
$\mathbb{C}$：複素数全体の集合.
$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$：全複素平面.
$\mathbb{Z}_{\geq n}$：整数 n 以上の整数全体の集合．特に，$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
$\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$：中心を $a \in \mathbb{C}$，半径を $r > 0$ とする開円板.
$\mathbb{D} := \Delta_1(0)$：単位開円板.
$\Delta_R^r(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$：アニュラス．特に，$\Delta_R^0(a) = \Delta_R(a) - \{a\}$ は穴あき円板.
$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$：$n$ 次元球面．但し， ここでのノルム $\|\cdot\|$ は Euclid ノルム.
$\pi_N : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$：北極への立体射影．詳しくは 2.2 節や 3.1 節を参照.
$\chi(z_1, z_2)$：球面弦距離の半分（但し $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$）．詳しくは 2.2 節を参照.
$f_n \rightrightarrows f$ on D：f_n は D 上 f に一様収束する.
$f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D：f_n は D 上 f に局所一様収束する.
$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on D：f_n は D 上 f に球面的一様収束する．詳しくは 2.2 節の定義 2.2 を参照.
$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D：f_n は D 上 f に球面的局所一様収束する．詳しくは 2.2 節の注意 2.3 を参照.
$f^\#$：f の球面導関数．詳しくは命題 2.7 及び定義 2.9 を参照.
$\mathscr{M}(\Sigma)$：Riemann 面 Σ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像全体の集合．詳しくは 3.1 節を参照.
$\widehat{f}$：$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ に対して，立体射影 π_N を介して誘導される写像 $\widehat{f} := \pi_N \circ f : \Sigma \longrightarrow S^2$. 詳しくは 3.1 節を参照.
$|\nabla \widehat{f}|_e$：$\widehat{f}$ の Euclid gradient の長さ．詳しくは 3.1 節を参照.
証明の途中で $(*)$ と付けているところは，証明の概略を分かりやすくするために後ろに証明を付けている．また，注意の終わりでは◆を付けることとする.

2.2 正規族

ここでは，[藤本]，[CTC]，[Sch] などをもとに 3 章の理解に必要となる正規族の概念をまとめる.

2.2.1　球面弦距離とその性質

まず，球面弦距離 $\chi(\cdot,\cdot)$ について [藤本, 5.2 節] をもとに定義をする．全複素平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は立体射影 $\pi_N : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$；

$$
\begin{aligned}
\pi_N(z) &:= \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), \\
\pi_N(\infty) &:= (0,0,1)\ (=: N)
\end{aligned}
$$

によって，S^2 と同一視をすることができる．ここで，S^2 の距離は $\mathbb{R}^3$ の Euclid 距離から定まる部分距離として定めていた．そこで，$\widehat{\mathbb{C}}$ における z_1 と z_2 の距離を，この距離の半分として定め，$\chi(z_1,z_2)$ と表し，**球面弦距離の半分**，または単に**弦距離**と呼ぶ．弦距離 $\chi(z_1,z_2)$ は，$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して以下のように表される：

$$
\chi(z_1,z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \tag{2.2.1}
$$

$$
\chi(z_1,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}. \tag{2.2.2}
$$

(2.2.1) 及び (2.2.2) の証明

まず，(2.2.2) について，$(\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2 = |z_1|^2$ が成り立つことに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\chi(z_1,\infty) &= \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{2\ \operatorname{Re} z_1}{|z_1|^2+1} - 0 \right)^2 + \left(\frac{2\ \operatorname{Im} z_1}{|z_1|^2+1} - 0 \right)^2 + \left(\frac{|z_1|^2-1}{|z_1|^2+1} - 1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \frac{4(\operatorname{Re} z_1)^2 + 4(\operatorname{Im} z_1)^2 + 4}{(|z_1|^2+1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2(|z_1|^2+1)^{\frac{1}{2}}}{|z_1|^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}
\end{aligned}
$$

と得られる．次に，(2.2.1) を示す．

$$
\begin{aligned}
&\chi(z_1,z_2) \\
=&\frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{2\ \operatorname{Re} z_1}{|z_1|^2+1} - \frac{2\ \operatorname{Re} z_2}{|z_2|^2+1} \right)^2 + \left(\frac{2\ \operatorname{Im} z_1}{|z_1|^2+1} - \frac{2\ \operatorname{Im} z_2}{|z_2|^2+1} \right)^2 + \left(\frac{|z_1|^2-1}{|z_1|^2+1} - \frac{|z_2|^2-1}{|z_2|^2+1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.2.3}
$$

となる．(2.2.3) の第 1 項は（ここでは故意に文字を太さやフォントを変えている）

$$
2^2\,\frac{\mathbf{(|z_2|^2+1)^2\,(Re\,z_1)^2} - 2\,(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)\ \operatorname{Re} z_1\ \operatorname{Re} z_2 + (|z_1|^2+\mathit{1})^2\,(\operatorname{Re} z_2)^2}{(|z_1|^2+1)^2\,(|z_2|^2+1)^2},
$$

(2.2.3) の第 2 項は（ここでも故意に文字を太さやフォントを変えている）

$$2^2\,\frac{\mathbf{(|z_2|^2+1)^2\,(Im\,z_1)^2}-2\,(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)\ \mathrm{Im}\,z_1\ \mathrm{Im}\,z_2+(|z_1|^2+1)^2\,(\mathrm{Im}\,z_2)^2}{(|z_1|^2+1)^2\,(|z_2|^2+1)^2},$$

(2.2.3) の第 3 項は（ここでも故意にフォントを変えている）

$$\frac{\{(|z_2|^2+1)\,(|z_1|^2-1)-(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2-1)\}^2}{(|z_1|^2+1)^2\,(|z_2|^2+1)^2}=\frac{2^2\,(|\mathrm{z}_1|^2-|\mathrm{z}_2|^2)^2}{(|z_1|^2+1)^2\,(|z_2|^2+1)^2}$$

となる．さらに，$z\in\mathbb{C}$ に対して，$(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2=|z|^2$ となることを用いれば

$$\begin{aligned}&(2.2.3)\\ =&\frac{1}{(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)}\,\{\mathbf{|z_1|^2\,(|z_2|^2+1)^2}+|z_2|^2\,(|z_1|^2+1)^2+|\mathrm{z}_1|^4-2\,|\mathrm{z}_1|^2\,|\mathrm{z}_2|^2+|\mathrm{z}_2|^4\\ &-2\,(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)\,(\mathrm{Re}\,z_1\ \mathrm{Re}\,z_2+\mathrm{Im}\,z_1\ \mathrm{Im}\,z_2)\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

となる．いま，

$$\begin{aligned}&\mathbf{|z_1|^2\,(|z_2|^2+1)^2}+|z_2|^2\,(|z_1|^2+1)^2+|\mathrm{z}_1|^4-2\,|\mathrm{z}_1|^2\,|\mathrm{z}_2|^2+|\mathrm{z}_2|^4\\ =&|z_1|^2\,|z_2|^2\,(|z_1|^2+|z_2|^2)+(|z_1|^2+|z_2|^2)^2+(|z_1|^2+|z_2|^2)\\ =&(|z_1|^2+|z_2|^2)\,(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}&(2.2.4)\\ =&\frac{1}{(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)}\,\{(|z_1|^2+1)\,(|z_2|^2+1)\,(|z_1|^2+|z_2|^2-2\,(\mathrm{Re}\,z_1\,\mathrm{Re}\,z_2+\mathrm{Im}\,z_1\ \mathrm{Im}\,z_2))\}^{\frac{1}{2}}\\ =&\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}.\end{aligned}$$

但し，最後の変形に関しては $z_1=x_1+i\,y_1,\ z_2=x_2+i\,y_2\in\mathbb{C}$ に対して，次の等式を利用した：

$$\begin{aligned}&|z_1|^2+|z_2|^2-2\,(\mathrm{Re}\,z_1\,\mathrm{Re}\,z_2+\mathrm{Im}\,z_1\ \mathrm{Im}\,z_2)\\ =&(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2\,(x_1\,x_2+y_1\,y_2)\\ =&(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\ =&|z_1-z_2|^2.\end{aligned}$$

□

$\widehat{\mathbb{C}}$ の距離 χ は S^2 の距離を半分に割ったものなので，距離の 3 つの公理（正定値性，対称性，三角不等式）が成り立つ．さらに，(S^2,d_{S^2}) はコンパクトなので，$(\widehat{\mathbb{C}},\chi)$ もコンパクト，特に完備である．以下では，弦距離特有の性質を列挙する：

命題 2.1. 球面弦距離 χ に対して，次が成り立つ：

(1) 任意の $z_1,z_2\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$\chi(z_1,z_2)\le 1$.

(2) 任意の $z_1,z_2\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$\chi\left(\dfrac{1}{z_1},\dfrac{1}{z_2}\right)=\chi(z_1,z_2)$.

(3) $|z_1|\le|z_2|\le\infty$ に対して，$\chi(0,z_1)\le\chi(0,z_2)$.

証明. (1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\chi(z_1, z_2) \leq 1 &\iff |z_1 - z_2| \leq \sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2} \\ &\iff |z_1 - z_2|^2 \leq (1+|z_1|^2)\,(1+|z_2|^2) \qquad (2.2.5)\end{aligned}$$

より (2.2.5) を示せばよい．そして (2.2.5) は

$$\begin{aligned}(1+|z_1|^2)\,(1+|z_2|^2) - |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2\,|z_2|^2 + z_1\,\overline{z_2} + \overline{z_1}\,z_2 + 1 \\ &= (z_1\,\overline{z_2} + 1)\,(\overline{z_1}\,z_2 + 1) \\ &= |z_1\,\overline{z_2} + 1|^2 \geq 0\end{aligned}$$

より示される．また，$z_2 = \infty$ のときは,

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \leq \frac{\sqrt{1+|z_1|^2}}{\sqrt{1+|z_1|^2}} = 1.$$

より示される．

(2) 弦距離の正定値性と対称性から次の 3 つの場合 (A)，(B)，(C) で (2) の等式が成り立つことを示せばよい：

$z_2 \diagdown z_1$	0	∞	その他
0	ok	ok	(C)
∞	ok	ok	(B)
その他	(C)	(B)	(A)

(A) $z_1 \neq 0, \infty$ かつ $z_2 \neq 0, \infty$ のとき,

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \frac{\left|\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{|z_1|^2}}\,\sqrt{1+\dfrac{1}{|z_2|^2}}} = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}} = \chi(z_1, z_2).$$

(B) $z_1 \neq 0, \infty$ かつ $z_2 = \infty$ のときを示せば十分で,

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, 0\right) = \frac{\left|\dfrac{1}{z_1}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{|z_1|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{|z_1|^2+1}} = \chi(z_1, \infty).$$

(C) $z_1 \neq 0, \infty$ かつ $z_2 = 0$ のときを示せば十分で,

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, \infty\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{|z_1|^2}}} = \frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2+1}} = \chi(z_1, 0).$$

(3) まず $z_2 = \infty$ の場合は，(1) より

$$\chi(0, z_1) \leq 1 = \frac{1}{\sqrt{1+|0|^2}} = \chi(0, \infty) = \chi(0, z_2)$$

となるため，示される．次に，$z_2 \neq \infty$ のときは，$\chi(0, z_1) \geq 0$，$\chi(0, z_2) \geq 0$ なので，$\chi(0, z_2)^2 - \chi(0, z_1)^2 \geq 0$ を示せばよく，それは

$$\chi(0, z_2)^2 - \chi(0, z_1)^2 = \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} = \frac{(|z_2| - |z_1|)(|z_2| + |z_1|)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} \geq 0$$

より示される．

$\square$

次に，S^2 上の Fubini–Study 計量から定まる距離と弦距離の関係について言及する．まず，S^2 上の Fubini–Study 計量（[宮岡 19, 命題 16.1]）は

$$ds^2 = \left(\frac{2}{(1+|z|^2)}\right)^2 |dz|^2$$

で与えられる．従って，S^2 上の曲線 γ に対して，その曲線の長さの半分を $L(\gamma)$ と書くと，

$$L(\gamma) = \frac{1}{2}\int_\gamma ds = \int_\gamma \frac{|dz|}{1+|z|^2}$$

となる．さらに，$z_1, z_2 \in S^2$ に対して，

$$\sigma(z_1, z_2) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ は } z_1, z_2 \text{ を結ぶ曲線 }\}$$

と定めると，$\sigma(z_1, z_2)$ は S^2 上の 2 点 z_1, z_2 を結ぶ大円の最短弧の Euclid 距離に関する長さの半分であり，球面上の距離を与えている．さらに，任意の z_1, $z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\chi(z_1, z_2) \leq \sigma(z_1, z_2) \leq \frac{\pi}{2}\chi(z_1, z_2) \tag{2.2.6}$$

が成り立つ．これは距離として $\chi(\cdot,\cdot)$ と $\sigma(\cdot,\cdot)$ は同値であることを意味する．

(2.2.6) の証明

まず，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，

$$\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \leq \theta \tag{2.2.7}$$

が成り立つことに注意する．

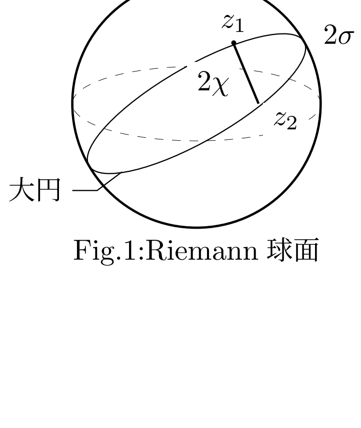

Fig.1:Riemann 球面

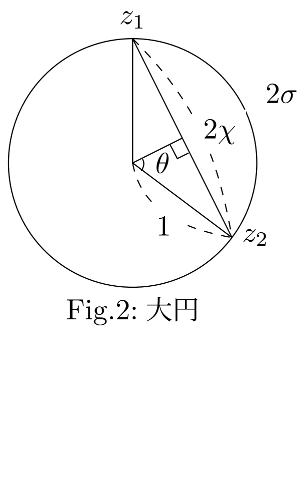

Fig.2: 大円

$2\,\chi(z_1, z_2)$ は z_1, z_2 を結ぶ線分の Euclid 距離に関する長さを表し，$2\,\sigma(z_1, z_2)$ は z_1, z_2 を結ぶ大円の最短弧の Euclid 距離に関する長さを表すため，Fig.1 のように表せる．さらに，大円に着目した図が Fig.2 である．Fig.2 のように，$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定めると，

$$\sin\theta = \chi(z_1, z_2), \quad \theta = \sigma(z_1, z_2)$$

と表せる．これを不等式 (2.2.7) にそれぞれ代入し，整理すれば (2.2.6) が得られる．

□

2.2.2　球面的一様収束

次に，終域 $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ の位相に合わせた関数列の収束について定義する：

定義 2.2. $E \subset \mathbb{C}$，E 上の関数列 $\left\{f_n : E \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\right\}_{n=1}^{\infty}$，$f : E \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に E 上で**球面的一様収束**するとは

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon \ \ (^{\forall}n \geq N,\ ^{\forall}z \in E)$$

をみたすことをいう．このとき，$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on E と書くことにする．

注意 2.3. 本稿では通常の一様収束のときと同様に，領域 $D(\subset \mathbb{C})$ に対して，D 内の任意のコンパクト集合 K 上で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に K 上で球面的一様収束することを $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に D 上で**球面的局所一様収束**すると呼び $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D と書くことにする．◆

球面的一様収束と一様収束の関係について考察する．その定義から，$E \subset \mathbb{C}$ に対して

$$f_n \rightrightarrows f \text{ on } E \implies f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } E \tag{2.2.8}$$

が成り立つことがわかる．

(2.2.8) の証明

ここでは，(2.2.8) が成り立つことを $f \not\equiv \infty$ のときと，$f \equiv \infty$ のときで場合分けて示す．

(case 1) $f \not\equiv \infty$ のとき

任意に $\varepsilon > 0$ を取り固定する．このとき，$f_n \rightrightarrows f$ on E なので，十分大きい $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば，$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $(^{\forall}z \in E)$ が成り立つ．よって，$n \geq N$ ならば，任意の $z \in E$ に対して，

$$\chi(f_n(z), f(z)) = \frac{|f_n(z) - f(z)|}{\sqrt{1 + |f_n(z)|^2}\,\sqrt{1 + |f(z)|^2}} \leq |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ．故に $f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on E が成り立つ．

(case 2) $f \equiv \infty$ のとき

任意に $\varepsilon > 0$ を取り固定する．ここで，$f_n \rightrightarrows \infty$ on E であるとは $\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows 0$ on E をみたす（定義 2.24 を参照）ことなので，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，$\dfrac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$ $(^{\forall}z \in E)$

が成り立つ．よって，$n \geq N$ ならば，任意の $z \in E$ に対して，

$$\chi(f_n(z), f(z)) = \chi(f_n(z), \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} < \frac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$$

が成り立つ．故に $f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f(=\infty)$ on E が成り立つ．

□

一方で，(2.2.8) の逆が成り立つとは限らない．反例としては次の例が考えられる：

球面的一様収束するが，一様収束しない関数列の例について

$\mathbb{H}_R := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ とおき，関数列 $f_n(z) : \mathbb{H}_R \longrightarrow \mathbb{C}\,; f_n(z) := e^{z+\frac{1}{n}}$ 及び関数 $f(z) : \mathbb{H}_R \longrightarrow \mathbb{C}\,; f(z) := e^z$ を定める．このとき，明らかに f は f_n の極限関数である．

まず，$f_n \not\rightrightarrows f$ on $\mathbb{H}_R$ であること（つまり，f_n は $\mathbb{H}_R$ 上 f に一様収束しないこと）を示す．$\varepsilon_0 := 1 > 0$ を取る．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n = \log n \in \mathbb{H}_R$ を取ると

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = |e^{z_n}|\,|e^{\frac{1}{n}} - 1| = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\dfrac{1}{n}} \geq 1 = \varepsilon_0$$

となるためである．

次に，$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on $\mathbb{H}_R$ となることを示す．これは，

$$\begin{aligned}
\chi(f_n(z), f(z)) &= \frac{|e^{z+\frac{1}{n}} - e^z|}{\sqrt{1+|e^{z+\frac{1}{n}}|^2}\,\sqrt{1+|e^z|^2}} \\
&= \frac{|e^z|\,|e^{\frac{1}{n}} - 1|}{|e^{z+\frac{1}{n}}|\,|e^z|\sqrt{1+\dfrac{1}{|e^{z+\frac{1}{n}}|^2}}\,\sqrt{1+\dfrac{1}{|e^z|^2}}} \\
&\leq \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{|e^{z+\frac{1}{n}}|} \\
&< \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{e^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

と評価され，最右辺は $n \to \infty$ としたときに z に依らずに 0 に収束することから示される．なお，上式の最後の不等式では

$$\left|e^{z+\frac{1}{n}}\right| = e^{\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{n}\right)} = e^{\operatorname{Re} z}\, e^{\frac{1}{n}} > e^{\frac{1}{n}}$$

を用いている．

□

しかし，極限関数が有界であれば，(2.2.8) の逆も成り立つ．

命題 2.4. $E \subset \mathbb{C}, \left\{f_n : E \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ を E 上の関数列，$f : E \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を有界とする．このとき，

$$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } E \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ on } E$$

が成り立つ．つまり，極限関数が E 上で有界であれば球面的一様収束することと一様収束することは同値である．

証明. 極限関数 f は E 上有界なので，ある $M>0$ が存在して，$|f(z)|<M$ ($^\forall z\in E$) が成り立つ．命題 2.1 (3) から，任意の $z\in E$ に対して

$$\chi(0,f(z))\leq\chi(0,M)=\frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \tag{2.2.9}$$

が成り立つ．次に，$\varepsilon:=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{M}{\sqrt{1+M^2}}\right)(>0)$ とおく．$f_n\overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on E なので，十分大きな $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$\chi(f_n(z),f(z))<\varepsilon$ ($^\forall z\in E$) が成り立つ．(2.2.9) 及び $\dfrac{M}{\sqrt{1+M^2}}=1-2\varepsilon$ を用いれば，任意の $n\geq N$ 及び任意の $z\in E$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}}=\chi(f_n(z),0)&\leq\chi(f_n(z),f(z))+\chi(f(z),0)\\&<\varepsilon+\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}\\&=\varepsilon+(1-2\varepsilon)=1-\varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}}<1-\varepsilon$$

をみたす．$m:=1-\varepsilon\in(0,1)$ とおく．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}}<m&\iff\frac{|f_n(z)|^2}{1+|f_n(z)|^2}<m^2\\&\iff(1-m^2)\,|f_n(z)|^2<m^2\\&\iff|f_n(z)|^2<\frac{m^2}{1-m^2}\\&\iff|f_n(z)|<\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．よって，$\widetilde{M}:=\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ とおけば，任意の $n\geq N$ 及び任意の $z\in E$ に対して，

$$\begin{aligned}|f(z)-f_n(z)|&=\sqrt{1+|f_n(z)|^2}\,\sqrt{1+|f(z)|^2}\,\chi(f_n(z),f(z))\\&<\sqrt{1+\widetilde{M}}\,\sqrt{1+M^2}\,\chi(f_n(z),f(z))\end{aligned}$$

が成り立つ．この不等式と $f_n\overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on E から，$f_n\rightrightarrows f$ on E が導かれる．

□

2.2.3　球面的連続性

定義 2.5. $f : E \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が $a \in E$ で**球面的連続**であるとは

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \chi(f(z), f(a)) < \varepsilon\ (^\forall z \in \Delta_\delta(a))$$

をみたすことである．また f が E の各点で球面的連続であるとき，f を E 上の**球面的連続関数**と呼ぶ．

命題 2.6. $D \subset \mathbb{C}$ を領域，$f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を有理型関数とすると，f は D 上の球面的連続関数である．

証明. 任意に $a \in D$ を取り固定する．
(case 1) a が f の極でないとき．
　このとき，f は $a \in D$ で連続なので

$$\chi(f(z), f(a)) = \frac{|f(z) - f(a)|}{\sqrt{1 + |f(z)|^2}\sqrt{1 + |f(a)|^2}} \leq |f(z) - f(a)| \to 0 \quad (\text{as } z \to a)$$

が成り立つ．よって，f は $a \in D$ で球面的連続．
(case 2) a が f の極のとき．
　このとき，$\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = \infty$，つまり $\displaystyle\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ をみたすため，命題 2.1 (2) を用いれば

$$\chi(f(z), f(a)) = \chi(f(z), \infty) = \chi\left(\frac{1}{f(z)}, 0\right) \leq \left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| \to 0 \quad (\text{as } z \to a)$$

が成り立つため，f は $a \in D$ で球面的連続．

□

2.2.4　球面導関数

　次に，球面導関数について定義する．

命題 2.7. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$a \in D$，$f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を有理型関数とする．このとき，極限

$$\lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z - a|}$$

は有限の値（実数値）として存在する．これを**球面微分係数**と呼び，$f^\#(a)$ で表す．さらに，$f(a) \neq \infty$ のとき

$$f^\#(a) = \frac{|f'(a)|}{1 + |f(a)|^2}$$

で与えられ，$f(a) = \infty$ のとき

$$f^\#(a) = \lim_{z \to a} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

で与えられる．

証明. (case 1) $f(a) \neq \infty$ のとき

f の（球面的な）連続性から，$\Delta_r(a) \subset D$ かつ $\Delta_r(a) \cap f^{-1}(\infty) = \emptyset$ をみたす $r > 0$ が取れる（cf. 命題 2.27(case 1) の証明を参照）．このとき，$\Delta_r^0(a)(= \Delta_r(a) - \{a\})$ 上で

$$\frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} \frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}\sqrt{1+|f(a)|^2}}$$

と表せる．さらに，f は a で複素微分可能なので，

$$\lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = \frac{|f'(a)|}{1+|f(a)|^2} \ (\in \mathbb{R})$$

が成り立つ．よって，$\displaystyle\lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|}$ が実数値として存在し，かつそれが $\displaystyle\frac{|f'(a)|}{1+|f(a)|^2}$ に等しいことが示された．

(case 2) $f(a) = \infty$ のとき

有理型関数 f は a を孤立した極としてもつために，

$$\Delta_r(a) \subset D, \ \Delta_r(a) \cap f^{-1}(\infty) = \{a\}, \ \Delta_r(a) \cap f^{-1}(0) = \emptyset$$

をみたす $r > 0$ を取ることができる（cf. 命題 2.27(case 2) の証明を参照）．そして，$g : \Delta_r(a) \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ g := \dfrac{1}{f}$ を定めると，$g(a) = 0$ をみたす $\Delta_r(a)$ 上の正則関数になる．球面弦距離の性質（命題 2.1 (2)）から $\Delta_r^0(a)$ 上で

$$\frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = \frac{\chi\left(\dfrac{1}{g(z)}, \dfrac{1}{g(a)}\right)}{|z-a|} = \frac{\chi(g(z), g(a))}{|z-a|}$$

と表せる．g は $\Delta_r(a)$ 上で正則なので，(case 1) を利用することで，

$$\lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = \lim_{z \to a} \frac{\chi(g(z), g(a))}{|z-a|} = \frac{|g'(a)|}{1+|g(a)|^2} \ (\in \mathbb{R}) \tag{2.2.10}$$

と，$\displaystyle\lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|}$ が実数値として存在することが示された．また，$\Delta_r^0(a)$ 上で

$$\frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} = \frac{\dfrac{|f'(z)|}{|f(z)|^2}}{1+\dfrac{1}{|f(z)|^2}} = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

が成り立つため，(2.2.10) と合わせれば

$$\lim_{z \to a} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \lim_{z \to a} \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} = \frac{|g'(a)|}{1+|g(a)|^2} = \lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = f^{\#}(a)$$

が成り立つ． $\square$

注意 2.8. 等式 $\dfrac{\left|\left(\dfrac{1}{f}\right)'\right|}{1+\dfrac{1}{|f|^2}} = \dfrac{|f'|}{1+|f|^2}$ により $a \in D$ に対して $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{\#}(a) = f^{\#}(a)$ が導ける．◆

定義 2.9. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を有理型関数とする．このとき，D の各点 z に，その点での球面微分係数 $f^{\#}(z)$ を対応させる関数

$$f^{\#} : D \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad ; \, z \longmapsto f^{\#}(z)$$

を**球面導関数**と呼ぶ.

上の命題 2.7 から有理型関数 $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，球面導関数 $f^{\#} : D \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続関数であることがすぐにわかる.

2.2.5 局所有界性

次に，関数族に対する局所有界性について定義する：

定義 2.10. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ は D 上**局所有界**であるとは

$$^{\forall}a \in D, \, ^{\exists}M = M(a) > 0, \, ^{\exists}r > 0 \text{ s.t. } \Delta_r(a) \subset D \text{ and } |f(z)| \leq M \; (^{\forall}z \in \Delta_r(a), \, ^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

をみたすことをいう.

注意 2.11. 関数列の局所一様収束とコンパクト一様収束が同値である議論と同様に，上で定めた関数族に対する局所有界性は**局所一様有界性**

$$^{\forall}K \subset D : \text{コンパクト}, \, ^{\exists}M = M(K) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(z)| \leq M \;\; (^{\forall}z \in K, \, ^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

と同値である．また，領域 D 上の関数族 $\mathscr{F}$ が

$$^{\exists}M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(z)| \leq M \;\; (^{\forall}z \in D, \, ^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

をみたすとき，$\mathscr{F}$ は D 上で**一様有界**であるという．◆

局所有界性と局所一様有界性について

D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の関数族とする.

$\mathscr{F}$: D 上で局所有界 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$: D 上で局所一様有界について

K を D 内の任意のコンパクト部分集合とする．$\mathscr{F}$ は D 上で局所有界なので，K の任意の点 a に対して,

$$^{\exists}M_a > 0, \, ^{\exists}r_a > 0 \quad \text{s.t.} \quad \Delta_{r_a}(a) \subset D \text{ and } |f(z)| \leq M_a \;\; (^{\forall}z \in \Delta_{r_a}(a), \, ^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

が成り立つ．ここで，$K \subset \bigcup_{a \in K} \Delta_{r_a}(a)$ 及び K はコンパクトなので，ある $a_1, \cdots, a_m \in K$ が存在して，

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_{r_{a_i}}(a_i)$$

をみたす．よって，$M := \max_{1 \le i \le m} \{M_{a_i}\} \, (> 0)$ と定めると，$|f(z)| \le M \ ({}^\forall z \in K, {}^\forall f \in \mathscr{F})$ が成り立つため，$\mathscr{F}$ は D 上局所一様有界である．

<u>$\mathscr{F}$: D 上で局所一様有界 $\Longrightarrow \mathscr{F}$: D 上で局所有界について</u>

任意の D の点 a を取る．D は $\mathbb{C}$ 内の開集合なので，$\overline{\Delta_r(a)} \subset D$ なる $r > 0$ が取れる．$\overline{\Delta_r(a)}$ はコンパクトなので，局所一様有界性より

$${}^\exists M = M(\overline{\Delta_r(a)}) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(z)| \le M \ \ ({}^\forall z \in \overline{\Delta_r(a)}, {}^\forall f \in \mathscr{F})$$

が成り立つ．特に，$|f(z)| \le M \ ({}^\forall z \in \Delta_r(a), {}^\forall f \in \mathscr{F})$ をみたすため，$\mathscr{F}$ は D 上局所有界である．

$\square$

ここで，局所有界性の遺伝性について記しておく．この主張の証明には正則関数特有の性質である Cauchy の積分公式が用いられる．

命題 2.12. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上局所有界である正則関数族とする．このとき，

$$\mathscr{F}' := \{f' : f \in \mathscr{F}\}$$

は D 上局所有界である正則関数族になる．

証明. 任意に $a \in D$ を取る．$\mathscr{F}$ は D 上局所有界なので，

$${}^\exists r > 0, {}^\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad \overline{\Delta_r(a)} \subset D \text{ and } |f(z)| \le M \ \ ({}^\forall z \in \Delta_r(a), {}^\forall f \in \mathscr{F})$$

が成り立つ．Cauchy の積分公式から，任意の $z \in \Delta_{\frac{r}{2}}(a)$ 及び任意の $f' \in \mathscr{F}'$ に対して，

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{\frac{r}{2}}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Delta_{\frac{r}{2}}(a)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} \, |d\zeta| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \frac{4}{r^2} M \int_{\partial \Delta_{\frac{r}{2}}(a)} |d\zeta| \\
&= \frac{2M}{r}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，D 内の任意の点 a に対して $\Delta_{\frac{r}{2}}(a)$ 上で $\mathscr{F}'$ が一様に上から抑えられるため，$\mathscr{F}'$ は D 上局所有界である．$\square$

一方で上の命題の逆については成り立つとは限らない．例えば $\mathbb{C}$ 内の適当な領域 D 上で関数族

$$\mathscr{F} := \{n : n = 1, 2, \cdots\}, \quad \mathscr{F}' := \{0\}$$

を考えればよい．しかし，$\mathscr{F}$ に一点での一様有界性が成り立てば成立する：

命題 2.13. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の正則関数族で

(1)　$\mathscr{F}'$ は D 上局所有界

(2)　$^\exists a \in D$, $^\exists M > 0$ s.t. $|f(a)| \leq M \quad (^\forall f \in \mathscr{F})$

をみたすとき，$\mathscr{F}$ は D 上局所有界である．

証明. 任意に $z_\infty \in D$ を取る．$\mathscr{F}'$ の局所有界性から，

$$^\exists \widetilde{M} > 0, {}^\exists r_\infty > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f'(z)| \leq \widetilde{M} \ ({}^\forall z \in \Delta_{r_\infty}(z_\infty), {}^\forall f' \in \mathscr{F}')$$

が成り立つ．また，D は領域なので，a と z_∞ を結ぶ曲線 C が取れる．ここで，C は D 内のコンパクト部分集合なので，$\mathscr{F}'$ の局所一様有界性から

$$^\exists M' = M'(C) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f'(z)| \leq M' \ ({}^\forall z \in C, {}^\forall f' \in \mathscr{F}')$$

が成り立つ．ここで，記法として 2 点 α, β に対して，α から β へ向かう線分を $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と書くことにする．任意の $z \in \Delta_{r_\infty}(z_\infty)$ 及び任意の $f \in \mathscr{F}$ に対して，微分積分学の基本定理から

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \int_{C+\overrightarrow{z_\infty z}} f'(\zeta)\, d\zeta + f(a) \right| \\
&= \left| \int_C f'(\zeta)\, d\zeta + \int_{\overrightarrow{z_\infty z}} f'(\zeta)\, d\zeta + f(a) \right| \\
&\leq \int_C |f'(\zeta)|\, |d\zeta| + \int_{\overrightarrow{z_\infty z}} |f'(\zeta)|\, |d\zeta| + |f(a)| \\
&< M'\, l(C) + \widetilde{M}\, r_\infty + M
\end{aligned}$$

（但し，$l(C) := (C$ の曲線の長さ$)$）をみたすため，$\mathscr{F}$ は D 上局所有界である．　□

2.2.6　同程度連続性と球面的同程度連続性

次に，関数族に対する球面的同程度連続性について定義する：

定義 2.14. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が $a \in D$ で**球面的同程度連続**であるとは，

$$^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \chi(f(z), f(a)) < \varepsilon \ ({}^\forall z \in \Delta_\delta(a), {}^\forall f \in \mathscr{F}) \tag{2.2.11}$$

をみたすことをいう．また，D 上の各点で $\mathscr{F}$ が球面的同程度連続であるとき，$\mathscr{F}$ は D 上**球面的同程度連続**であるという．

注意 2.15. 領域 D 上の関数族 $\mathscr{F}$ が $a \in D$ で**同程度連続**とは, (2.2.11) における $\chi(f(z), f(a)) < \varepsilon$ を $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ に変えたものである．また，一様収束と球面的一様収束の関係のときと同様に，領域 D 上の関数族 $\mathscr{F}$ が $a \in D$ で同程度連続ならば，球面的同程度連続であることに注意する．◆

命題 2.16. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上球面的連続な関数列で $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたすとする．このとき,

f は D 上の球面的連続関数で，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 上球面的同程度連続である．

注意 2.17. 証明を見れば分かるように，命題 2.16 は球面弦距離特有の性質を用いていないので，上の主張の「球面的」をすべて外したものに対しても成立する．つまり，連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上局所一様収束すれば，極限関数は D 上の連続関数であり，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ も D 上同程度連続である．◆

証明. 任意に $\varepsilon > 0$ 及び $a \in D$ を取り固定する．また，$\overline{\Delta_r(a)} \subset D$ をみたすように $r > 0$ が取れる．$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたすため，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ 及び任意の $z \in \overline{\Delta_r(a)}$ に対して,

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.12}$$

が成り立つ．また，f_{n_0} は D 上球面的連続なので，ある $0 < \delta < r$ が存在して，$|z - a| < \delta$ ならば

$$\chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.13}$$

をみたす．従って，$|z - a| < \delta$ ならば，(2.2.12)，(2.2.13) より

$$\chi(f(z), f(a)) \leq \chi(f(z), f_{n_0}(z)) + \chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(a)) + \chi(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon \tag{2.2.14}$$

をみたす．a は D の任意の点なので，f は D 上の球面的連続関数である．

次に，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in D$ で球面的同程度連続であることを示す．(2.2.12) 及び (2.2.14) より $n \geq n_0$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ については，$|z - a| < \delta$ ならば,

$$\begin{aligned}\chi(f_n(z), f_n(a)) &\leq \chi(f_n(z), f(z)) + \chi(f(z), f(a)) + \chi(f(a), f_n(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{5}{3}\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．また，各 f_n $(1 \leq n \leq n_0 - 1)$ は $a \in D$ で球面的連続なので，ある $\delta_n > 0$ が存在して，$|z - a| < \delta_n$ ならば,

$$\chi(f_n(z), f_n(a)) < \varepsilon$$

をみたす．よって，$\widetilde{\delta} := \min\{\delta_1, \cdots, \delta_{n_0-1}, \delta\}\,(> 0)$ と定めると，$|z-a| < \widetilde{\delta}$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\chi(f_n(z), f_n(a)) < \frac{5}{3}\,\varepsilon$$

が成り立つ．a は D の任意の点なので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 上球面的同程度連続である． □

次に紹介するのは，Montel の定理（定理 2.23）の原型である．証明には命題 2.12（従って，正則関数の性質である Cauchy の積分公式）が用いられていることに注意する．

命題 2.18. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上局所有界である正則関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ は D 上同程度連続である．

注意 2.19. 上の命題の逆については成り立つとは限らない．反例としては $\mathbb{C}$ 内の適当な領域 D 上で $\mathscr{F} := \{n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えればよい．◆

命題 2.18 の証明

D の任意の点 a を取り固定する．また，$K := \overline{\Delta_r(a)} \subset D$ をみたすように $r > 0$ を取ることができる．命題 2.12 より，$\mathscr{F}'$ は D 上局所一様有界，つまり

$$^{\exists}M = M(K) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f'(z)| \leq M \ ({}^{\forall}z \in K, {}^{\forall}f' \in \mathscr{F}')$$

をみたす．微分積分学の基本定理より，任意の $f \in \mathscr{F}$ 及び任意の $z \in K$ に対して，

$$|f(z) - f(a)| = \left| \int_{\overrightarrow{az}} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \int_{\overrightarrow{az}} |f'(\zeta)|\, |d\zeta| \leq M\, |z-a|$$

が成り立つ．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta := \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{M}, r\right\}$ を取ると，$|z-a| < \delta$ ならば，

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \ ({}^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

となるため，$\mathscr{F}$ は a で同程度連続．a は D の任意の点なので，$\mathscr{F}$ は D 上同程度連続である．

□

2.2.7 古典的な正規族

次に，[藤本] や [吉田] に基づき，一般の関数族に対して古典的な正規族という概念を導入する（後に再度述べるが，[Sch, Definition 2.1.1] にある正則関数族の正規族は，本稿では [藤本, 定義 5.21] に基づき広義正規族と呼んでいる）．

定義 2.20. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の**古典的な正規族**であるとは，$\mathscr{F}$ に含まれる任意の関数列が D 上局所一様収束する部分列をもつことである．すなわち，次をみたす関数族 $\mathscr{F}$ のことである：

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},\ {}^{\exists}\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{の部分列},\ {}^{\exists}f : D \longrightarrow \mathbb{C} : \text{連続関数} \\ &\text{s.t.} \quad f_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D. \end{aligned}$$

注意 2.21. 領域 D 上の正則関数族 $\mathscr{F}$ が古典的な正規族であるとき，上に現れる極限関数 f は Weierstrass の 2 重級数定理から D 上の正則関数になることに注意する．◆

次の主張は Ascoli–Arzelà の定理と呼ばれる定理である．

定理 2.22. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の連続関数族で，D の任意の点 a に対して，次の 2 条件が成り立つとする：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \mathscr{F} \text{ が } a \in D \text{ で一様有界,} \quad \text{i.e.,} \quad \sup\{|f(a)| : f \in \mathscr{F}\} < +\infty,\\
&(2)\ \mathscr{F} \text{ が } a \in D \text{ で同程度連続,} \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{z \to a} \sup\{|f(z) - f(a)| : f \in \mathscr{F}\} = 0.
\end{aligned}
$$

このとき，$\mathscr{F}$ は D 上の古典的な正規族である．

証明. Step 1：部分列の構成

$\mathbb{C}(= \mathbb{R}^2)$ は可分（稠密かつ高々可算な部分集合をもつ位相空間）なので，その領域も可分である．従って，

$$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$$

を満たす $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} = \{z \in D : z \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}\}$ が存在する．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を取る．

$m = 1$ に対して，$\mathscr{F}$ は $z_1 \in D$ で一様有界なので，$\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ 内の有界列．Bolzano–Weierstrass の定理から $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{f_{n_k^{(1)}}(z_1)\right\}_{k=1}^{\infty}$ で極限

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k^{(1)}}(z_1)$$

が存在するものが取れる．

同様に，$m = s\,(\geq 2)$ に対して，$\mathscr{F}$ は $z_s \in D$ で一様有界なので，$\left\{f_{n_k^{(s-1)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の有界列．再び Bolzano–Weierstrass の定理から $\left\{f_{n_k^{(s-1)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{f_{n_k^{(s)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k^{(s)}}(z_s)$$

が存在するものが取れる．

$$
\begin{array}{ll}
 & f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s, f_{s+1}, \cdots \\
\text{（上の部分列）} & \boldsymbol{f_{n_1^{(1)}}}, f_{n_2^{(1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(1)}}, f_{n_{s+1}^{(1)}}, \cdots \ \text{s.t.}\ {}^{\exists}\lim_{k \to \infty} f_{n_k^{(1)}}(z_1) \\
 & \vdots \\
\text{（上の部分列）} & f_{n_1^{(s)}}, f_{n_2^{(s)}}, \cdots\cdots, \boldsymbol{f_{n_s^{(s)}}}, f_{n_{s+1}^{(s)}}, \cdots \ \text{s.t.}\ {}^{\exists}\lim_{k \to \infty} f_{n_k^{(s)}}(z_s) \\
\text{（上の部分列）} & f_{n_1^{(s+1)}}, f_{n_2^{(s+1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(s+1)}}, \boldsymbol{f_{n_{s+1}^{(s+1)}}}, \cdots \ \text{s.t.}\ {}^{\exists}\lim_{k \to \infty} f_{n_k^{(s+1)}}(z_{s+1})
\end{array}
$$

そこで，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列として，$\{f_{n'_s} := f_{n_s^{(s)}}\}_{s=1}^{\infty}$ を考える．構成法から，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\lim_{s \to \infty} f_{n'_s}(z_m)$$

が存在することに注意する．

Step 2 : Step 1 で構成した関数列 $\{f_{n'_s}\}_{s=1}^{\infty}$ が D 上局所一様収束することの証明

D の任意の点 a 及び任意の $\varepsilon > 0$ を取る．$\mathscr{F}$ は $a \in D$ で同程度連続なので，$\delta_a > 0$ が存在して，$|z - a| \leq \delta_a$ ならば任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|f_{n'_s}(z) - f_{n'_s}(a)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

が成り立つ．さらに，D は $\mathbb{C}$ 内の領域なので，必要があれば δ_a を小さくすることにより $\overline{\Delta_{\delta_a}(a)} \subset D$ とできる．また，$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$ なので，$z_{m_a} \in \overline{\Delta_{\delta_a}}(a)$ をみたす $m_a \in \mathbb{N}$ が存在する．Step 1 で述べたように $f_{n'_s}(z_m)$ は収束列，特に Cauchy 列なので，ある $N_a \in \mathbb{N}$ が存在して，$s, t \geq N_a$ ならば

$$|f_{n'_t}(z_{m_a}) - f_{n'_s}(z_{m_a})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

をみたす．以上より $s, t \geq N_a$ ならば任意の $z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&|f_{n'_t}(z) - f_{n'_s}(z)| \\
&\leq |f_{n'_t}(z) - f_{n'_s}(a)| + |f_{n'_t}(a) - f_{n'_t}(z_{m_a})| + |f_{n'_t}(z_{m_a}) - f_{n'_s}(z_{m_a})| \\
&\qquad\qquad + |f_{n'_s}(z_{m_a}) - f_{n'_s}(a)| + |f_{n'_s}(a) - f_{n'_s}(z)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．Cauchy の判定法から，これは $\{f_{n'_s}\}_{s=1}^{\infty}$ が $\overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ 上一様収束すること，つまり D 上局所一様収束することを意味する．

□

Ascoli–Arzelà の定理と命題 2.18 から，次の Montel の定理を導くことができる：

定理 2.23. $\mathscr{F}$ を領域 D 上の正則関数族とする．このとき，

$$\mathscr{F} \text{ は } D \text{ 上の古典的な正規族} \iff \mathscr{F} \text{ は } D \text{ 上局所有界.}$$

証明. $\mathscr{F}$: D 上古典的な正規族 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$: D 上局所有界について

古典的な正規族 $\mathscr{F}$ が D 上局所有界でないと仮定して矛盾を導く．このとき，

$$^{\exists}K \subset D \ : \ \text{コンパクト部分集合}, {}^{\exists}\{z_n\}_{n=1} \subset K, {}^{\exists}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \quad \text{s.t.} \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(z_n)| = \infty$$

をみたす．K は D 内のコンパクト部分集合なので，

$$^{\exists}\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列}, {}^{\exists}z_0 \in K \quad \text{s.t.} \quad z_{n_k} \to z_0 \ (\text{as } k \to \infty)$$

をみたす．また，$\mathscr{F}$ は D 上の古典的な正規族なので，

$$^{\exists}\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty} : \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{の部分列}, {}^{\exists}f : D \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad f_{n_{k_l}} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D$$

をみたす．ここで，Weierstrass の 2 重級数定理から極限関数 f は D 上の正則関数であることに注意する．$\{z_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$，$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ の取り方と，$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ の連続性から

$$\lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = f(z_0)$$

が成り立つ $(*)$ ため，

$$\mathbb{R} \ni |f(z_0)| = \lim_{l\to\infty} |f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})| = +\infty$$

となり矛盾する．

[$(*)$ **の証明始**] 任意に $\varepsilon > 0$ を取り固定する．$f_{n_{k_l}} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D より $f_{n_{k_l}}(z_0) \to f(z_0)$，つまり

$$^{\exists}l_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |f_{n_{k_l}}(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (^{\forall}l \geq l_0) \tag{2.2.15}$$

が成り立つ．また $f_{n_{k_l}}$ は D 上連続なので，

$$^{\exists}\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f_{n_{k_l}}(z) - f_{n_{k_l}}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (^{\forall}z \in \Delta_\delta(z_0))$$

をみたす．$z_{n_{k_l}} \to z_0$ (as $l \to \infty$) より

$$^{\exists}l_0' \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad z_{n_{k_l}} \in \Delta_\delta(z_0) \ \ (^{\forall}l \geq l_0'),$$

特に $l \geq l_0'$ ならば

$$|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) - f_{n_{k_l}}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2.16}$$

をみたす．(2.2.15)，(2.2.16) より，$l \geq \max\{l_0, l_0'\}$ ならば，

$$|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) - f(z_0)| \leq |f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) - f_{n_{k_l}}(z_0)| + |f_{n_{k_l}}(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

をみたすため，$\lim\limits_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = f(z_0)$ が成り立つ．[$(*)$ **の証明終**]

<u>$\mathscr{F}$: D 上局所有界 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$: D 上古典的な正規族について</u>

正則関数族 $\mathscr{F}$ が D 上局所有界ならば，命題 2.18 より D 上同程度連続である．これは $\mathscr{F}$ が Ascoli–Arzelà の定理（定理 2.22）の 2 条件をみたす D 上の連続関数族であることを意味するため，$\mathscr{F}$ は D 上の古典的な正規族である．

□

2.2.8 広義正規族と球面正規族

次に，正則関数族に対する広義正規族と，有理型関数族に対する球面正規族を定義する．これらの言葉の関係性については命題 2.32 や注意 2.33 で述べる．

定義 2.24. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の正則関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の**広義正規族**であるとは，$\mathscr{F}$ に含まれる任意の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の (1) または (2) の一方を満たす部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在するときをいう：

$$\begin{aligned}&(1)\ {}^{\exists}f : D \longrightarrow \mathbb{C} : \text{正則関数} \quad \text{s.t.} \quad f_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D,\\ &(2)\ f_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} \infty \text{ on } D.\end{aligned}$$

ここで，領域 D 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} \infty \text{ on } D \overset{\text{def}}{\iff} \frac{1}{f_n} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} 0 \text{ on } D$$

と定める．

定義 2.25. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の有理型関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の**球面正規族**であるとは，$\mathscr{F}$ に含まれる任意の関数列が D 上球面的局所一様収束する部分列をもつときをいう．すなわち，次をみたす関数族 $\mathscr{F}$ のことである：

$${}^{\forall}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},\ {}^{\exists}\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{の部分列} \quad \text{s.t.} \quad f_{n_k} \text{ は } D \text{ 上球面的局所一様収束する}.$$

注意 2.26. 定義 2.25 の $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限関数は D 上の有理型関数，もしくは ∞ になることが命題 2.28 で示される．◆

次に，有理型関数列が球面的局所一様収束することを通常の一様収束を用いて表現する．これにより，技術的な面では球面的局所一様収束が扱いやすくなると著者は考える．

命題 2.27. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$a \in D$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の有理型関数列で $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたすとする．
(case 1) $f(a) \neq \infty$ のとき，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}r > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \overline{\Delta_r(a)} \subset D \text{ かつ}\\ &\qquad f_n\ (n \geq N) \text{ 及び } f \text{ は } \Delta_r(a) \text{ 上有界有理型，特に正則で } f_n \rightrightarrows f \text{ on } \Delta_r(a).\end{aligned}$$

(case 2) $f(a) = \infty$ のとき，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}r > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \overline{\Delta_r(a)} \subset D \text{ かつ}\\ &\qquad \frac{1}{f_n}\ (n \geq N) \text{ 及び } \frac{1}{f} \text{ は } \Delta_r(a) \text{ 上有界有理型，特に正則で } \frac{1}{f_n} \rightrightarrows \frac{1}{f} \text{ on } \Delta_r(a).\end{aligned}$$

証明. (case 1) $f(a) \neq \infty$ の場合

正定値性から，$d := \chi(f(a), \infty) > 0$ である．$\varepsilon_0 := \dfrac{d}{6}\,(> 0)$ とおく．$\rho > 0$ を $\overline{\Delta_\rho(a)} \subset D$ をみたすように取る．$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on $\overline{\Delta_\rho(a)}$ からある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ 及び任意の $z \in \overline{\Delta_\rho(a)}$ に対して，

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon_0 \tag{2.2.17}$$

が成り立つ．命題 2.6 より有理型関数 f_{n_0} は D 上の球面的連続関数なので，ある $0<r<\rho$ が存在して，$z\in\Delta_r(a)$ ならば

$$\chi(f_{n_0}(z),f_{n_0}(a))<\varepsilon_0 \tag{2.2.18}$$

が成り立つ．(2.2.17),(2.2.18) より，任意の $z\in\Delta_r(a)$ に対して，

$$\begin{aligned} d&=\chi(f(a),\infty)\\ &\le\chi(f(a),f_{n_0}(a))+\chi(f_{n_0}(a),f_{n_0}(z))+\chi(f_{n_0}(z),f(z))+\chi(f(z),\infty)\\ &<3\,\varepsilon_0+\chi(f(z),\infty)\\ &=\frac{d}{2}+\chi(f(z),\infty), \end{aligned}$$

つまり $\chi(f(z),\infty)>\dfrac{d}{2}$ ($^\forall z\in\Delta_r(a)$) が成り立つ．特に，$f(z)\neq\infty$ ($^\forall z\in\Delta_r(a)$) がわかる．また任意の $z\in\Delta_r(a)$ に対して，

$$\frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}}=\chi(f(z),\infty)>\frac{d}{2},\quad \text{i.e.,}\quad |f(z)|<\sqrt{1+|f(z)|^2}<\frac{2}{d}$$

をみたすため，f は $\Delta_r(a)$ 上で有界な有理型関数，つまり正則関数である．$f_n\overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows}f$ on $\Delta_r(a)$ 及び f の $\Delta_r(a)$ 上での有界性が示されたため，命題 2.4 を用いれば，

$$f_n\rightrightarrows f\ \text{on}\ \Delta_r(a)$$

をみたす．よって，十分大きな番号 $N\in\mathbb{N}$ を取れば任意の $n\ge N$ 及び任意の $z\in\Delta_r(a)$ に対して $|f_n(z)-f(z)|<1$ をみたす．従って，任意の $n\ge N$ 及び任意の $z\in\Delta_r(a)$ に対して，

$$|f_n(z)|=|f_n(z)-f(z)+f(z)|\le|f_n(z)-f(z)|+|f(z)|<1+\frac{2}{d}$$

が成り立つため，f_n ($n\ge N$) も $\Delta_r(a)$ 上有界有理型，つまり正則である．
(case 2) $f(a)=\infty$ の場合
(case 1) 同様に $\dfrac{1}{f}$ が有界になるような a の十分小さい近傍が存在することを示す．正定値性から，$d:=\chi(f(a),0)>0$ である．$\varepsilon_0:=\dfrac{d}{6}\,(>0)$ とおく．$\rho>0$ を $\overline{\Delta_\rho(a)}\subset D$ をみたすように取れば，$f_n\overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows}f$ on $\overline{\Delta_\rho(a)}$ からある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $n\ge n_0$ 及び任意の $z\in\overline{\Delta_\rho(a)}$ に対して，

$$\chi(f_n(z),f(z))<\varepsilon_0 \tag{2.2.19}$$

が成り立つ．命題 2.6 より有理型関数 f_{n_0} は D 上の球面的連続関数なので，ある $0<r<\rho$ が存在して，$z\in\Delta_r(a)$ ならば，

$$\chi(f_{n_0}(z),f_{n_0}(a))<\varepsilon_0 \tag{2.2.20}$$

が成り立つ．(2.2.19)，(2.2.20) より任意の $z \in \Delta_r(a)$ に対して，

$$\begin{aligned} d &= \chi(f(a), 0) \\ &\leq \chi(f(a), f_{n_0}(a)) + \chi(f_{n_0}(a), f_{n_0}(z)) + \chi(f_{n_0}(z), f(z)) + \chi(f(z), 0) \\ &< 3\,\varepsilon_0 + \chi(f(z), 0) \\ &= \frac{d}{2} + \chi(f(z), 0), \end{aligned}$$

つまり $\chi(f(z), 0) > \dfrac{d}{2}$ $({}^{\forall}z \in \Delta_r(a))$ が成り立つ．特に，$f(z) \neq 0$ $({}^{\forall}z \in \Delta_r(a))$ がわかる．また任意の $z \in \Delta_r(a)$ に対して，

$$\frac{d}{2} < \chi(f(z), 0) = \chi\left(\frac{1}{f(z)}, \infty\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{|f(z)|^2}}}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{|f(z)|} < \sqrt{1 + \frac{1}{|f(z)|^2}} < \frac{2}{d}$$

をみたすため，$\dfrac{1}{f}$ は $\Delta_r(a)$ 上で有界な有理型関数，特に正則関数である．さらに，

$$\begin{aligned} f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } \Delta_r(a) &\iff \chi(f_n, f) \rightrightarrows 0 \text{ on } \Delta_r(a) \\ &\iff \chi\left(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}\right) \rightrightarrows 0 \text{ on } \Delta_r(a) \\ &\iff \frac{1}{f_n} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} \frac{1}{f} \text{ on } \Delta_r(a) \end{aligned}$$

より，$\dfrac{1}{f_n} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} \dfrac{1}{f}$ on $\Delta_r(a)$ が成り立つことに注意する．よって，命題 2.4 を用いれば，

$$\frac{1}{f_n} \rightrightarrows \frac{1}{f} \text{ on } \Delta_r(a)$$

をみたす．また，(case 1) と同様に議論することで，$\dfrac{1}{f_n}$ $(n \geq N)$ が $\Delta_r(a)$ 上有界な有理型，つまり正則となるような十分大きな番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在することが示される．

$\square$

命題 2.28. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の有理型関数列で $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたすとする．このとき，極限関数 f は D 上の有理型関数または ∞ である．

証明. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 f が $f \not\equiv \infty$ のとき，f は D 上の有理型関数であることを示す．そこで，D 上 $f \not\equiv \infty$ とする．命題 2.27 の (case 1) から，$D - f^{-1}(\infty)$ の各点 z に対して，極限関数 f が正則となる近傍が取れる．従って，以下では $f^{-1}(\infty)$ が集積点を持たない集合であることを背理法を用いて証明する．そこで，$f^{-1}(\infty)$ が集積点 $z_0 \in D$ をもつ，つまり $z_0 \in \overline{f^{-1}(\infty) - \{z_0\}}$ と仮定する．このとき，

$${}^{\exists}\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \quad \text{s.t.} \quad z_n \neq z_0\ ({}^{\forall}n \in \mathbb{N}),\ f(z_n) = \infty\ ({}^{\forall}n \in \mathbb{N}),\ z_n \to z_0\ (\text{as } n \to \infty)$$

をみたす．

ここで，$f(z_0)=\infty$ であることに注意する．なぜならば，仮に $f(z_0)\neq\infty$ とすると，命題 2.27 の (case 1) から f は $\Delta_r(z_0)$ 上正則となるような $r>0$ が存在する．しかし，$z_n\to z_0\in\Delta_r(z_0)$ より十分大きな番号 $n_0\in\mathbb{N}$ が在って $z_{n_0}\in\Delta_r(z_0)$ をみたすが，z_{n_0} は f の極なので矛盾する．よって，$f(z_0)=\infty$ である．再び命題 2.27 の (case 2) を用いると，十分小さな $r>0$ が存在して，$\dfrac{1}{f}$ は $\Delta_r(z_0)$ 上正則．ここで，$f^{-1}(\infty)\cap\Delta_r(z_0)$ の点が $\dfrac{1}{f}$ の零点に当たることに注意する．

$$E:=\left\{z\in\Delta_r(z_0):\frac{1}{f(z)}=0\right\}$$

と定めると，$z_0\in E$ 及び十分大きな $n_0\in\mathbb{N}$ が在って，$\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty}\subset E$ をみたす．特に E は集積点 z_0 をもつため，一致の定理から $\Delta_r(z_0)$ 上 $\dfrac{1}{f}\equiv 0$，つまり $f\equiv\infty$ をみたす．

次に，z_0 と異なる D の任意の点 z_1 を取る．D は弧状連結なので，$\gamma(0)=z_0$，$\gamma(1)=z_1$ をみたす連続写像 $\gamma:[0,1]\longrightarrow D$ が存在する．そこで，

$$T:=\{t'\in(0,1):f(\gamma(t))=\infty\ (0\leq t\leq t')\}$$

と定める．$\gamma((0,1))\cap\Delta_r(z_0)\neq\emptyset$ より $T\neq\emptyset$ となる．そこで，

$$\widetilde{t}:=\sup\{t':t'\in T\}$$

と定める．このとき，$\widetilde{t}=1$ であり，$f(z_1)=\infty$ となる $(*)$．z_1 は D の任意の点なので，D 上 $f\equiv\infty$ となるが，これは不合理である．よって，$f^{-1}(\infty)$ は集積点を持たない集合であり，f は D 上の有理型関数となる．

[$(*)$ **の証明始**] いま

$$f(\gamma(t))=\infty\quad({}^{\forall}t\in[0,\widetilde{t}))$$

が成り立つ．すると，$\gamma(\widetilde{t})$ は $f^{-1}(\infty)$ の集積点となるため，先の z_0 に対してと同様の議論を繰り返すことにより

$${}^{\exists}r_*>0\quad\text{s.t.}\quad\Delta_{r_*}(\gamma(\widetilde{t}))\subset D\text{ and }f\equiv\infty\text{ on }\Delta_{r_*}(\gamma(\widetilde{t}))$$

をみたす．よって，$\widetilde{t}$ は $0<\widetilde{t}<1$ ではありえず，$\widetilde{t}=1$ かつ $f(z_1)=\infty$ となる．[$(*)$ **の証明終**]

$\square$

次に，Hurwitz の定理と呼ばれる次の主張を準備する：

命題 2.29. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則関数列で，

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}f:D\longrightarrow\mathbb{C}:\text{非定数正則関数}\quad\text{s.t.}\quad f_n\overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}f\text{ on }D\\&{}^{\exists}a\in D\quad\text{s.t.}\quad f(a)=0\end{aligned}$$

をみたすとする．このとき，十分小さい $r > 0$ 及び十分大きい番号 $N = N(r) \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq N$ に対して

$$(f \text{ の } \Delta_r(a) \text{ における零点の位数}) = (f_n \text{ の } \Delta_r(a) \text{ における零点の位数})$$

が成り立つ．

証明. $f \not\equiv 0$ なので，一致の定理から f の零点は孤立している．よって，$r > 0$ を

$$\overline{\Delta_r(a)} \subset D \quad \text{and} \quad \overline{\Delta_r(a)} \cap f^{-1}(0) = \{a\}$$

をみたすように取れる．特に，f は $\partial\Delta_r(a)$ 上で零点をもたない連続関数なので,

$$^{\exists}m > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f| > m \quad \text{on } \partial\Delta_r(a).$$

$f_n \rightrightarrows f$ on $\partial\Delta_r(a)$ なので,

$$^{\exists}N = N(r) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |f_n(z) - f(z)| < m < |f(z)| \quad (^{\forall}n \geq N, {}^{\forall}z \in \partial\Delta_r(a))$$

をみたす．$g_n(z) := f_n(z) - f(z)$ とおくと，f と g_n は $\overline{\Delta_r(a)}$ 上の正則関数で，$n \geq N$ ならば $|f(z)| > |g_n(z)|$ ($^{\forall}z \in \partial\Delta_r(a)$) をみたす．よって，Rouché の定理（[藤本, 定理 3.19]）を用いれば，$n \geq N$ に対して,

$$\begin{aligned}(f \text{ の } \Delta_r(a) \text{ における零点の位数}) &= (f + g_n \text{ の } \Delta_r(a) \text{ における零点の位数}) \\ &= (f_n \text{ の } \Delta_r(a) \text{ における零点の位数}).\end{aligned}$$

□

正則関数は有理型関数であるため，正則関数列が球面的局所一様収束するときにも命題 2.27 や命題 2.28 を適用することができる．さらに Hurwitz の定理（命題 2.29 ）により，その極限関数が極をもたないことが示されるため，次の主張が成り立つ：

命題 2.30. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則関数列で $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたすとする．このとき，極限関数 f は D 上の正則関数または ∞ である．

証明. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 f が D 上 $f \not\equiv \infty$ であるとする．このとき，命題 2.28 から f は D 上の有理型関数となる．そこで，以下では f が極を持たないこと，つまり $f^{-1}(\infty) = \emptyset$ であることを示すために $f(a) = \infty$ となる $a \in D$ が存在すると仮定して矛盾を導く．このとき，命題 2.27 の (case 2) より

$$\begin{aligned}&^{\exists}r > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \overline{\Delta_r(a)} \subset D \text{ かつ} \\ &\qquad \frac{1}{f_n}\ (n \geq N) \text{ 及び } \frac{1}{f} \text{ は } \Delta_r(a) \text{ 上正則で } \frac{1}{f_n} \rightrightarrows \frac{1}{f} \text{ on } \Delta_r(a).\end{aligned}$$

が成立する．ここで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は正則なので，$\dfrac{1}{f_n}$ は $\Delta_r(a)$ 上零点をもたないことに注意する．一方で，$\dfrac{1}{f}$ は $a \in \Delta_r(a)$ で零点をもつ．また，$f(a) = \infty$，$f \not\equiv \infty$ から f は $\Delta_r(a)$ 上

非定数，特に $\dfrac{1}{f}$ は $\Delta_r(a)$ 上非定数である．以上より Hurwitz の定理（命題 2.29）を用いれば，ある $r_0 > 0$ 及びある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$1 \leq \left(\frac{1}{f} \text{ の } \Delta_{r_0}(a) \text{ における零点の位数} \right) = \left(\frac{1}{f_{N_0}} \text{ の } \Delta_{r_0}(a) \text{ における零点の位数} \right) = 0$$

が成り立つが，これは明らかに矛盾している．よって，f は D 上極を持たない有理型関数，つまり正則関数である．

□

さらに，命題 2.30 と命題 2.4 を用いれば，正則関数列に対して以下の主張が示される：

命題 2.31. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則関数列とする．このとき，

$$f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \iff f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D$$

である．

証明. $\underline{f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \Longrightarrow f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \text{ について}}$

K を D 内の任意のコンパクト集合とする．このとき，$f_n \rightrightarrows f$ on K が成り立つため，(2.2.8) と合わせると，$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on K をみたす．故に，$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D が成立する．

$\underline{f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \Longrightarrow f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \text{ について}}$

このとき，命題 2.30 より f は D 上の正則関数もしくは D 上 $f \equiv \infty$ である．

f が D 上の正則関数の場合，D 内の任意のコンパクト集合 K に対して，$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on K かつ f は K 上有界なので，命題 2.4 より $f_n \rightrightarrows f$ on K が成り立つ．よって，$f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ on D をみたす．

D 上 $f \equiv \infty$ の場合，D 内の任意のコンパクト集合 K に対して，$\dfrac{1}{f_n} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} 0$ on K が成り立つので，再び命題 2.4 を用いれば，$\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows 0$ on K，つまり $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} \infty$ on D が成り立つ．

□

正則関数の族は有理型関数の族と見なせるため，（定義 2.25 の意味での）球面正規族という言葉は正則関数族に対しても意味をもつ．そこで正則関数族に対して（定義 2.24 の意味での）広義正規族と（定義 2.25 の意味での）球面正規族の関係について考察をする．命題 2.31 及び命題 2.30 により

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F} \text{ は } D \text{ 上の広義正規族} \\
\iff& {}^{\forall}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},\ {}^{\exists}\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列},\ {}^{\exists}f : D \text{ 上の正則関数 or } f \equiv \infty \\
&\text{s.t.} \quad f_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \\
\iff& {}^{\forall}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},\ {}^{\exists}\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列},\ {}^{\exists}f : D \text{ 上の正則関数 or } f \equiv \infty \\
&\text{s.t.} \quad f_{n_k} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D \\
\iff& \mathscr{F} \text{ は } D \text{ 上の球面正規族}
\end{aligned}$$

となる．すなわち，次が成り立つ：

命題 2.32. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の正則関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の広義正規族であることと，D 上の球面正規族であることは同値である．

注意 2.33. まず，この命題 2.32 のメリットについて 2 つ記す．1 つ目のメリットは今後展開していく有理型関数族の正規性に関する様々な命題・性質（定理 2.36 や Marty の判定法（定理 2.35），Carathéodory–Montel の定理（定理 3.9），定理 4.7 など）は正則関数の広義正規族に対しても成り立つため，基本的には対称範囲が広い有理型関数族の球面正規族について議論をすればよいことである．2 つ目のメリットは正則関数族が球面正規族であるというときには，それよりも扱いが簡単だと思われる広義正規族の条件を用いてもよいことである．

1 章で述べたように，正規性はコンパクト性と密接な関係がある．すなわち，領域 D 上の有理型関数族 $\mathscr{F}$ が球面正規族であることは $\mathscr{F}$ が D 内のコンパクト部分集合上の球面的一様収束位相における相対コンパクト集合であることと同値である．そしてこのことは一般に Riemann 面からコンパクトな Riemann 面への正則写像の族に対しても同様に成り立つ．詳しくは [Mil, Chapter 3 p.32]，[Zal98, Chapter 1 p.216] を参照せよ．◆

次に，Ostrowski の定理と呼ばれる有理型関数族への Ascoli–Arzelà の定理（定理 2.22）に相当する定理を述べる．Ascoli–Arzelà の定理との違いは各点での一様有界性がないことであるが，これは $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ のコンパクト性がその代わりを果たすためである．

定理 2.34. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の有理型関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の球面正規族であることと D 上球面的同程度連続であることは同値である．

証明. $\underline{\mathscr{F} : D \text{ 上の球面正規族} \Longrightarrow \mathscr{F} : D \text{ 上球面的同程度連続}}$

D 上の球面正規族 $\mathscr{F}$ が D 上球面的同程度連続でないと仮定をして矛盾を導く．このとき，

$$^{\exists}a \in D,\ ^{\exists}\varepsilon_0 > 0,\ ^{\exists}\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ ^{\exists}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \quad \text{s.t.} \quad z_n \to a \text{ and } \chi(f_n(z_n), f_n(a)) \geq \varepsilon_0 \tag{2.2.21}$$

をみたす．$\mathscr{F}$ は D 上球面正規族なので，

$$^{\exists}\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列},\ ^{\exists}f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{s.t.} \quad f_{n_k} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D$$

をみたす．命題 2.6 より有理型関数の列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は D 上球面的連続な関数列であることに注意する．故に命題 2.16 を用いれば，$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は D 上球面的同程度連続，つまりある $\delta > 0$ が存在して任意の $k \in \mathbb{N}$ 及び任意の $z \in \Delta_\delta(a)$ に対して，

$$\chi(f_{n_k}(z), f_{n_k}(a)) < \varepsilon_0$$

をみたす．特に，$z_{n_k} \to a$ より十分大きい $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $z_{n_{k_0}} \in \Delta_\delta(a)$ をみたすため，

$$\chi(f_{n_{k_0}}(z_{n_{k_0}}), f_{n_{k_0}}(a)) < \varepsilon_0$$

が成り立つ．一方，(2.2.21) より

$$\varepsilon_0 \leq \chi(f_{n_{k_0}}(z_{n_{k_0}}), f_{n_{k_0}}(a))$$

をみたすため，矛盾する．

$\mathscr{F}$: D 上の球面的同程度連続 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$: D 上球面正規族

Step 1 : 部分列の構成

$\mathbb{C}\,(=\mathbb{R}^2)$ は可分なので，その領域 D も可分である．そこで，

$$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$$

をみたす $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} = \{z \in D : z \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}\}$ が存在する．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を取る．

$m=1$ に対して，$\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の点列なので，$\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{f_{n_k^{(1)}}(z_1)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 及びある $w_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \chi\left(f_{n_k^{(1)}}(z_1), w_1\right) = 0$$

をみたす．

同様に $m = s\,(\geq 2)$ に対して，$\left\{f_{n_k^{(s-1)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の点列なので，$\left\{f_{n_k^{(s-1)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{f_{n_k^{(s)}}(z_s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 及びある $w_s \in \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \chi\left(f_{n_k^{(s)}}(z_s), w_s\right) = 0$$

をみたす．

$$\begin{array}{ll}
 & f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s, f_{s+1}, \cdots \\
\text{(上の部分列)} & \boldsymbol{f_{n_1^{(1)}}}, f_{n_2^{(1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(1)}}, f_{n_{s+1}^{(1)}}, \cdots \ \text{s.t.}\ \lim\limits_{k\to\infty} \chi\left(f_{n_k^{(1)}}(z_1), w_1\right) = 0 \\
 & \vdots \\
\text{(上の部分列)} & f_{n_1^{(s)}}, f_{n_2^{(s)}}, \cdots\cdots, \boldsymbol{f_{n_s^{(s)}}}, f_{n_{s+1}^{(s)}}, \cdots \ \text{s.t.}\ \lim\limits_{k\to\infty} \chi\left(f_{n_k^{(s)}}(z_s), w_s\right) = 0 \\
\text{(上の部分列)} & f_{n_1^{(s+1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(s+1)}}, \boldsymbol{f_{n_{s+1}^{(s+1)}}}, \cdots \ \text{s.t.}\ \lim\limits_{k\to\infty} \chi\left(f_{n_k^{(s+1)}}(z_{s+1}), w_{s+1}\right) = 0
\end{array}$$

そこで，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列として，$\left\{f_{n'_s} := f_{n_s^{(s)}}\right\}_{s=1}^{\infty}$ を考える．構成法から，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\lim_{s\to\infty} \chi\left(f_{n'_s}(z_m), w_m\right) = 0$$

をみたす．

Step 2 : Step 1 で構成した関数列 $\{f_{n'_s}\}_{s=1}^{\infty}$ が D 上球面的局所一様収束することの証明

D 内の任意の点 a 及び任意の $\varepsilon > 0$ を取る．$\mathscr{F}$ は D 上で球面的同程度連続なので，ある $\delta_a > 0$ が存在して，$\overline{\Delta_{\delta_a}(a)} \subset D$ 及び $|z-a| \leq \delta_a$ ならば任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\chi\left(f_{n'_s}(z), f_{n'_s}(a)\right) < \frac{\varepsilon}{5}$$

をみたす．また，$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$ よりある $m_a \in \mathbb{N}$ が在って，$z_{m_a} \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ をみたす．Step 1 より弦距離 χ に関して，$\left\{f_{n'_s}(z_{m_a})\right\}_{s=1}^{\infty}$ は Cauchy 列でもあるので，ある $N_a \in \mathbb{N}$ が存在して，$s, t \geq N_a$ ならば

$$\chi\left(f_{n'_t}(z_{m_a}), f_{n'_s}(z_{m_a})\right) < \frac{\varepsilon}{5}$$

をみたす．以上より，$s, t \geq N_a$ ならば，任意の $z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\chi\left(f_{n'_t}(z), f_{n'_s}(z)\right) \\
&\leq |f_{n'_t}(z) - f_{n'_s}(a)| \ + |f_{n'_t}(a) - f_{n'_t}(z_{m_a})| + |f_{n'_t}(z_{m_a}) - f_{n'_s}(z_{m_a})| \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + |f_{n'_s}(z_{m_a}) - f_{n'_s}(a)| + |f_{n'_s}(a) - f_{n'_s}(z)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

が成り立つ．$(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ は完備なので，定理 2.22 の証明の場合と同様に Cauchy の判定法が成り立つ $(*)$．従って，$\{f_{n'_s}\}_{s=1}^{\infty}$ は $\overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ 上球面的一様収束すること，つまり D 上球面的局所一様収束することを意味する．

[$(*)$ **の証明始**] ここでは，確認のため $\{f_{n'_s}\}_{s=1}^{\infty}$ が $\overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ 上球面的一様収束することを証明する．(2.2.22) から，特に $\overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ 上の各点 z で $\{f_{n'_s}(z)\}_{s=1}^{\infty}$ $(\subset \widehat{\mathbb{C}})$ が Cauchy 列であることを意味する．$(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ は完備なので，$\{f_{n'_s}(z)\}_{s=1}^{\infty}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の収束列でもある．そこで，極限関数を f と記すと，その定義から任意の $z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ に対して，

$$\lim_{s \to \infty} \chi\left(f_{n'_s}(z), f(z)\right) = 0 \tag{2.2.23}$$

をみたす．三角不等式及び (2.2.23) を用いれば，任意の $z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}$ 及び任意の $s \geq N_a$ に対して，

$$\left|\chi\left(f_{n'_t}(z), f_{n'_s}(z)\right) - \chi\left(f(z), f_{n'_s}(z)\right)\right| \leq \chi\left(f_{n'_t}(z), f(z)\right) \to 0 \quad (\text{as } t \to \infty),$$

つまり $\chi\left(f_{n'_t}(z), f_{n'_s}(z)\right) \to \chi\left(f(z), f_{n'_s}(z)\right)$ (as $t \to \infty$) を得る．いま，(2.2.22) から $s, t \geq N_a$ ならば

$$\chi\left(f_{n'_t}(z), f_{n'_s}(z)\right) < \varepsilon \quad ({}^{\forall} z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)})$$

が成り立つので，両辺 $t \to \infty$ とすると，

$$\chi\left(f(z), f_{n'_s}(z)\right) \leq \varepsilon \quad ({}^{\forall} s \geq N_a, {}^{\forall} z \in \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}), \quad \text{i.e.,} \quad f_{n'_s} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } \overline{\Delta_{\delta_a}(a)}.$$

[$(*)$ **の証明終**]

□

次に第 3 節で用いる Marty の判定法について記す．証明は命題 2.27，(2.2.6) 及び定理 2.34 を用いて示される．

定理 2.35. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F}$ を D 上の有理型関数族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が D 上の球面正規族であることと $\mathscr{F}^{\#} := \{f^{\#} : f \in \mathscr{F}\}$ が D 上局所有界であることは同値である．

証明. $\underline{\mathscr{F} : D \text{ 上の球面正規族} \Longrightarrow \mathscr{F}^\# : D \text{ 上局所有界}}$

D 上の球面正規族 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}^\# = \{f^\# : f \in \mathscr{F}\}$ が D 上局所有界でないと仮定をして矛盾を導く．このとき，

$$^\exists K_0 \subset D : \text{コンパクト部分集合}, \ ^\exists\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset K_0, \ ^\exists\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F} \ \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} f_n^\#(z_n) = +\infty$$

が成り立つ．K_0 は点列コンパクトなので，

$$^\exists\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \{z_n\}_{n=1}^\infty \text{の部分列}, \ ^\exists z_0 \in K_0 \quad \text{s.t.} \quad \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$$

をみたす．また，$\mathscr{F}$ は D 上の球面正規族なので，

$$^\exists\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty : \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \text{の部分列}, \ ^\exists f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{s.t.} \quad f_{n_{k_l}} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \text{ on } D$$

をみたす．

(case 1) $f(z_0) \neq \infty$ のとき

命題 2.27 の (case 1) より

$$\begin{aligned} &^\exists r > 0, \ ^\exists L \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \overline{\Delta_r(z_0)} \subset D \text{ かつ} \\ &\qquad f_{n_{k_l}} \ (l \geq L) \text{ 及び } f \text{ は } \Delta_r(z_0) \text{ 上正則で } f_{n_{k_l}} \rightrightarrows f \text{ on } \Delta_r(z_0). \end{aligned}$$

をみたす．特に，$f(z_0), f'(z_0) \in \mathbb{C}$ に注意する．また，$z_{n_{k_l}} \to z_0$ (as $l \to \infty$) 及び $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ が $\Delta_r(z_0)$ 上連続なので，Montel の定理（定理 2.23）の $(*)$ と同様に議論をすることにより，$\lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = f(z_0)$ 及び $\lim_{l\to\infty} f'_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = f'(z_0)$ が得られる．以上より，

$$+\infty = \lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}^\#(z_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} \frac{|f'_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})|}{1 + |f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})|^2} = \frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2} \in \mathbb{R}$$

となり，矛盾する．

(case 2) $f(z_0) = \infty$ のとき

命題 2.27 の (case 2) より

$$\begin{aligned} &^\exists r > 0, \ ^\exists L \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \overline{\Delta_r(z_0)} \subset D \text{ かつ} \\ &\qquad \frac{1}{f_{n_{k_l}}} \ (l \geq L) \text{ 及び } \frac{1}{f} \text{ は } \Delta_r(z_0) \text{ 上正則で } \frac{1}{f_{n_{k_l}}} \rightrightarrows \frac{1}{f} \text{ on } \Delta_r(z_0). \end{aligned}$$

をみたす．そこで，正則関数列 $g_{n_{k_l}} : \Delta_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ $(l \geq L)$ 及び正則関数 $g : \Delta_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$g_{n_{k_l}} := \frac{1}{f_{n_{k_l}}}, \quad g := \frac{1}{f}$$

と定める．特に，$g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \in \mathbb{C}$ に注意する．また，Montel の定理（定理 2.23）の $(*)$ と同様に議論をすることにより，$\lim_{l\to\infty} g_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = g(z_0)(= 0)$ 及び $\lim_{l\to\infty} g'_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = g'(z_0)(= 0)$ が得られる．さらに，命題 2.7 の証明，もしくは注意 2.8 で述べたように各 l に対して

$$f_{n_{k_l}}^\#(z_{n_{k_l}}) = g_{n_{k_l}}^\#(z_{n_{k_l}})$$

が成り立つことに注意すれば,

$$+\infty = \lim_{l\to\infty} f^{\#}_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} g^{\#}_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} \frac{|g'_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})|}{1+|g_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})|^2} = \frac{|g'(z_0)|}{1+|g(z_0)|^2} = |g'(z_0)| \in \mathbb{R}$$

となり, 矛盾する.

<u>$\mathscr{F}^{\#}$: D 上局所有界 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$: D 上の球面正規族</u>

$\mathscr{F}^{\#}$ が D 上局所有界であるとする. このとき, 定理 2.34 から $\mathscr{F}$ が D 上球面的同程度連続であることを示せば十分である. 任意に $\varepsilon > 0$ 及び $a \in D$ を取り固定する. さらに $\overline{\Delta_r(a)} \subset D$ をみたすような $r > 0$ が取れる. $\mathscr{F}^{\#}$ の局所有界性から

$$^{\exists}M > 0 \quad \text{s.t.} \quad f^{\#}(z) \le M \quad ({}^{\forall}z \in \overline{\Delta_r(a)},\ {}^{\forall}f \in \mathscr{F})$$

をみたす. そこで, $\delta > 0$ を $\delta < r$ 及び $M\,\delta < \varepsilon$ をみたすように取る. 一般に, (2.2.6) から w_1 と w_2 を結ぶ任意の曲線 γ に対して

$$\chi(w_1, w_2) \le \sigma(w_1, w_2) \le \int_{\gamma} \frac{|dw|}{1+|w|^2}$$

が成り立つことを思い出す. 任意の $z \in \Delta_\delta(a)$ 及び任意の $f \in \mathscr{F}$ に対して, $f\,(\overrightarrow{az})$ が $f(z)$ と $f(a)$ を結ぶ曲線の 1 つであることから

$$\chi(f(z), f(a)) \le \int_{f(\overrightarrow{az})} \frac{|dw|}{1+|w|^2} = \int_{\overrightarrow{az}} \frac{|f'(\zeta)|}{1+|f(\zeta)|^2}\,|d\zeta| = \int_{\overrightarrow{az}} f^{\#}(\zeta)\,|d\zeta| \le M\,|z-a| < M\,\delta < \varepsilon$$

が成り立つ. これは $\mathscr{F}$ が D の任意の点 a で球面的同程度連続であることを意味するため, 定理 2.34 から $\mathscr{F}$ は D 上の球面正規族である.

□

第 3 節で用いるもう 1 つの性質として正規性は局所的な性質であるということである. 定理 2.22 や定理 2.34 の証明方法と類似した手法（対角線論法）で示すことができる：

定理 2.36. D を $\mathbb{C}$ 内の領域, $\mathscr{F}$ を D 上の有理型関数族とする. このとき, $\mathscr{F}$ が D 上の球面正規族であることと $\mathscr{F}$ が

$$^{\forall}a \in D,\ ^{\exists}U_a : a \text{ の連結開近傍} \quad \text{s.t.} \quad \mathscr{F} \text{ は } U_a \text{ 上の球面正規族}$$

をみたすことは同値である.

証明. $\mathscr{F}$ が D 上球面正規族ならば, D の各点のある近傍上で球面正規族であることは明らかなので逆を示す.

Ascoli–Arzelà の定理の証明と同様に, 領域 D は可分なので

$$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$$

をみたす $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} = \{z \in D : z \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}\}$ が存在する．仮定から各 $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Delta_{r_m}(z_m) \subset D \quad \text{and} \quad \mathscr{F} \ : \text{normal on } \Delta_{r_m}(z_m)$$

をみたす $r_m > 0$ が取れるので，

$$R_m := \sup \left\{ r_m > 0 : \Delta_{r_m}(z_m) \subset D \text{ and } \mathscr{F} \ : \text{normal on } \Delta_{r_m}(z_m) \right\} \ (> 0),$$

$$U_m := \begin{cases} \Delta_{\frac{R_m}{2}}(z_m) & (\text{if } R_m < +\infty), \\ \Delta_1(z_m) & (\text{if } R_m = +\infty) \end{cases}$$

と定める．このとき，

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \tag{2.2.24}$$

が成り立つ $(*)$．

[$(*)$ **の証明始**] 任意に $z' \in D$ を取り固定する．仮定より，ある $\rho \in (0, 1)$ が存在して，

$$\Delta_{\rho}(z') \subset D \quad \text{and} \quad \mathscr{F} \ : \text{normal on } \Delta_{\rho}(z')$$

をみたす．$\overline{\{z_m\}_{m=1}^{\infty}} = D$ なので, $z_m \in \Delta_{\frac{\rho}{4}}(z')$ なる点 z_m が取れる．このとき, $\Delta_{\frac{\rho}{2}}(z_m) \subset \Delta_{\rho}(z')$ である．実際，$z \in \Delta_{\frac{\rho}{2}}(z_m)$ に対して，

$$|z - z'| \leq |z - z_m| + |z_m - z'| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{4} < \rho, \quad \text{i.e.,} \quad z \in \Delta_{\rho}(z')$$

をみたすため $\Delta_{\frac{\rho}{2}}(z_m) \subset \Delta_{\rho}(z')$ が示される．従って，$\mathscr{F}$ は $\Delta_{\frac{\rho}{2}}(z_m)$ 上球面正規族である．$R_m < +\infty$ のとき，R_m の定義から

$$\frac{\rho}{2} \leq R_m, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{\rho}{4} \leq \frac{R_m}{2}$$

であり，$\Delta_{\frac{\rho}{4}}(z_m) \subset U_m$ が従う．また，$R_m = +\infty$ のとき，$\dfrac{\rho}{4} < \dfrac{1}{4} < 1$ より $\Delta_{\frac{\rho}{4}}(z_m) \subset U_m$ が従う．そして $z' \in \Delta_{\frac{\rho}{4}}(z_m)$ なので，$z' \in U_m$．[$(*)$ **の証明終**]

任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を取る．R_1 の定義から，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{ f_{n_k^{(1)}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$f_{n_k^{(1)}}$ は U_1 上球面的一様収束する．

同様に，$m = s\,(\geq 2)$ に対して，R_s の定義から，$\left\{ f_{n_k^{(s-1)}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{ f_{n_k^{(s)}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$f_{n_k^{(s)}}$ は U_s 上球面的一様収束する．

$$
\begin{array}{lll}
 & f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s, f_{s+1}, \cdots & \\
\text{（上の部分列）} & \boldsymbol{f_{n_1^{(1)}}}, f_{n_2^{(1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(1)}}, f_{n_{s+1}^{(1)}}, \cdots \text{ s.t. } f_{n_k^{(1)}} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} & \text{on } U_1 \\
 & \vdots & \\
\text{（上の部分列）} & f_{n_1^{(s)}}, f_{n_2^{(s)}}, \cdots\cdots, \boldsymbol{f_{n_s^{(s)}}}, f_{n_{s+1}^{(s)}}, \cdots \text{ s.t. } f_{n_k^{(s)}} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} & \text{on } U_m \ (1 \leq m \leq s) \\
\text{（上の部分列）} & f_{n_1^{(s+1)}}, \cdots\cdots, f_{n_s^{(s+1)}}, \boldsymbol{f_{n_{s+1}^{(s+1)}}}, \cdots \text{ s.t. } f_{n_k^{(s+1)}} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} & \text{on } U_m \ (1 \leq m \leq s+1)
\end{array}
$$

以上より，各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，関数列 $\left\{f_{n_k^{(k)}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は U_m 上で球面的一様収束する．よって，(2.2.24) と合わせると，D の任意の点 z に対して，ある近傍 U_m が取れて，$\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ は U_m 上球面的一様収束する．これは，$\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ が D 上球面的局所一様収束することを意味するため，$\mathscr{F}$ は D 上の球面正規族である．

□

3 主結果

3.1 有理型関数に対する compact property

この節では [Ros, Chapter 1] の内容を改めて表現し直しまとめた．特に，この章で用いる [LP] や [Ros] をもとにした property と [Ber06]，[Minda]，[Sch]，[Zal98] に現れる property との関係についての考察を注意 3.5 に記した．

Σ を Riemann 面とし，$(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ を全複素平面とする．このとき，

$$\mathscr{M}(\Sigma) := \{f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : \text{正則写像}\} = \{f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : \text{有理型関数}\} \cup \{f \equiv \infty \text{ on } \Sigma\}$$

と定める．$\mathscr{M}(\Sigma)$ の位相として，Σ 内のコンパクト部分集合上の一様収束位相を用いる：

$$\begin{aligned} f_n\text{が } f \text{ に収束する} &\iff {}^{\forall}K \subset \Sigma : \text{コンパクト部分集合}, \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K}\{\chi(f_n(z), f(z))\} = 0 \\ &\iff f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f \quad \text{on } \Sigma. \end{aligned}$$

注意 3.1. 終域が距離空間の場合，コンパクト収束位相はコンパクト開位相と同値である．終域での分離公理はコンパクト開位相にも遺伝することから，特に $\mathscr{M}(\Sigma)$ はハウスドルフであることに注意する．◆

P を Σ 上の $\widehat{\mathbb{C}}$ 値正則写像のある性質とするとき，

$$\mathscr{P}(\Sigma) := \{f \in \mathscr{M}(\Sigma) : f \text{ は } \Sigma \text{ 上性質 } P \text{ を満たす}\}$$

と定める．[Ros, p.3] をもとに，property に対する closed 性と compact 性を定める．

定義 3.2. $\widehat{\mathbb{C}}$ 値正則写像の性質 P に対して，次の条件を考える：
(P1) 任意の 2 つの Riemann 面 Σ, Σ'，分岐点のない任意の正則写像 $\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ に対して，$f \in \mathscr{P}(\Sigma')$ ならば，$f \circ \phi \in \mathscr{P}(\Sigma)$.
(P2) Σ を Riemann 面，$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ とする．Σ 内の任意の相対コンパクト領域 Ω に対し $f|_\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$ ならば，$f \in \mathscr{P}(\Sigma)$.
(P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$\mathscr{P}(\Sigma)$ の元からなる収束列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数が $\mathscr{P}(\Sigma)$ の元になる．
(P4) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$\mathscr{P}(\Sigma)$ は Σ 上の球面正規族である．
性質 P が条件 (P1),(P2),(P3) をみたすとき，P を **closed property** という．また，性質 P が条件 (P1),(P2),(P3),(P4) をみたすとき，P を **compact property** という．

Riemann 面 Σ 上の正則写像 $f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，立体射影 $\pi_N : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$；

$$\begin{aligned} &\pi_N(z) := \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \\ &\pi_N(\infty) := (0,0,1)\ (=: N) \end{aligned}$$

を通して誘導（同一視）される写像を $\widehat{f}:\Sigma \longrightarrow S^2$;

$$\widehat{f} := \pi_N \circ f = \begin{cases} \left(\dfrac{2\,\mathrm{Re}\, f}{|f|^2+1}, \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, f}{|f|^2+1}, \dfrac{|f|^2-1}{|f|^2+1} \right) & \text{on} \quad \Sigma - f^{-1}(\{\infty\}), \\ (0,0,1) & \text{on } \ f^{-1}(\{\infty\}). \end{cases}$$

と定める．

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\widehat{f}"'] & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[d, "\pi_N"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．D 上の $\widehat{f}$ の Euclid gradient の長さを $|\nabla \widehat{f}|_e$ と記す．ここで，D 上の有理型関数 f に対して

$$|\nabla \widehat{f}|_e^2 = \frac{8\,|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}, \quad \text{i.e.,} \quad |\nabla \widehat{f}|_e = \frac{2\sqrt{2}\,|f'|}{1+|f|^2}, \tag{3.1.1}$$

$f \equiv \infty$ on D に対して $|\nabla \widehat{f}|_e \equiv 0$ と表せる．

(3.1.1) の証明

まず，$z = x + y\,i$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{f}}{\partial z}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \overline{z}} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x} - i\, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x} + i\, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\langle \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \left\langle \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \right) \\ &= \frac{1}{4}\, |\nabla \widehat{f}|_e^2, \end{aligned}$$

つまり，$|\nabla \widehat{f}|_e^2 = 4 \left\langle \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial z}, \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial \overline{z}} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$ である．次に，

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\,\mathrm{Re}\, f}{|f|^2+1} \\ \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, f}{|f|^2+1} \\ \dfrac{|f|^2-1}{|f|^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f+\overline{f}}{|f|^2+1} \\ \dfrac{f-\overline{f}}{i\,(|f|^2+1)} \\ \dfrac{|f|^2-1}{|f|^2+1} \end{pmatrix}$$

を $z, \overline{z}$ に関してそれぞれ偏微分をすれば

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial z} = \frac{1}{(|f|^2+1)^2} \begin{pmatrix} f_z\,(|f|^2+1) - (f+\overline{f})\, f_z\, \overline{f} \\ -\{ f_z\,(i\,|f|^2+i) - (f-\overline{f})\, i\, f_z\, \overline{f} \} \\ f_z\, \overline{f}\,(|f|^2+1) - (|f|^2-1)\, f_z\, \overline{f} \end{pmatrix} = \frac{f'}{(|f|^2+1)^2} \begin{pmatrix} 1-\overline{f}^{\,2} \\ -i\,(1+\overline{f}^{\,2}) \\ 2\,\overline{f} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{(|f|^2+1)^2} \begin{pmatrix} \overline{f_z}\,(|f|^2+1) - (f+\overline{f})\,f\,\overline{f_z} \\ -\{-\overline{f_z}\,(i\,|f|^2+i) - (f-\overline{f})\,i\,f\,\overline{f_z}\} \\ f\,\overline{f_z}\,(|f|^2+1) - (|f|^2-1)\,f\,\overline{f_z} \end{pmatrix} = \frac{\overline{f'}}{(|f|^2+1)^2} \begin{pmatrix} 1-f^{\,2} \\ i\,(1+f^{\,2}) \\ 2\,f \end{pmatrix}$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{f}}{\partial z}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \overline{z}} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \frac{|f'|^2}{(|f|^2+1)^4} \left\{ (1-\overline{f}^{\,2})(1-f^{\,2}) + (1+\overline{f}^{\,2})(1+f^{\,2}) + 4\,|f|^2 \right\} \\ &= \frac{2\,|f'|^2}{(|f|^2+1)^2} \end{aligned}$$

となるため，

$$|\nabla \widehat{f}|_e^2 = \frac{8\,|f'|^2}{(|f|^2+1)^2}.$$

□

ここで，有理型関数 $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$|\nabla \widehat{f}|_e = 2\sqrt{2}\,f^{\#}$ であることに注意する．特に，Marty の判定法（定理 2.35）から次の主張が得られる：

定理 3.3. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$\mathscr{F} \subset \mathscr{M}(D)$ とするとき，

$$\mathscr{F} : D \text{ 上の球面正規族} \iff |\nabla \mathscr{F}|_e := \left\{ |\nabla \widehat{f}|_e : f \in \mathscr{F} \right\} : D \text{ 上局所有界}.$$

Riemann 面 Σ に対して，一意化定理を用いることにより Σ 上には Riemann 面と適合する完備な計量で，Gauss 曲率が 1, 0, -1 のいずれかに等しくなるものがある．その計量を Σ の**自然な計量**と呼び，ds_c^2 で表すことにする．ここで，複素平面 $\mathbb{C}$ に対しては $ds_c^2 = |dz|^2$，Poincaré 円板 $\mathbb{D}$ に対しては

$$ds_c^2 = \left(\frac{2}{1-|z|^2} \right)^2 |dz|^2 \tag{3.1.2}$$

で与えられる．また，$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ に対して，ds_c^2 に関する $\widehat{f}$ の gradient の長さを $|\nabla \widehat{f}|_c$ と書くことにする．このとき，円板 $\mathbb{D}$ における Poincaré 計量 (3.1.2) に関する $|\nabla \widehat{f}|_c$ は次で与えられる：

$$|\nabla \widehat{f}|_c = \frac{1-|z|^2}{2}\,|\nabla \widehat{f}|_e. \tag{3.1.3}$$

証明. $|\nabla \widehat{f}|_c = \sqrt{ds_c^2 \left(\nabla \widehat{f}, \nabla \widehat{f} \right)}$ なので，まず $ds_c^2 \left(\nabla \widehat{f}, \nabla \widehat{f} \right)$ を計算する．$\lambda(z) := \dfrac{2}{1-|z|^2}$ とおくと，勾配ベクトル場（[河野, p.177 (8.6.29)]）$\nabla \widehat{f}$ は

$$\nabla \widehat{f} = \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

で与えられる．故に

$$
\begin{aligned}
ds_c^2\left(\nabla\widehat{f},\,\nabla\widehat{f}\right) &= \lambda^2\,dx\otimes dx\left(\nabla\widehat{f},\,\nabla\widehat{f}\right)+\lambda^2\,dy\otimes dy\left(\nabla\widehat{f},\,\nabla\widehat{f}\right)\\
&= \lambda^2\,dx\left(\nabla\widehat{f}\right)\,dx\left(\nabla\widehat{f}\right)+\lambda^2\,dy\left(\nabla\widehat{f}\right)\,dy\left(\nabla\widehat{f}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left\langle\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x},\,\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x}\right\rangle_{\mathbb{R}^3}+\frac{1}{\lambda^2}\left\langle\frac{\partial\widehat{f}}{\partial y},\,\frac{\partial\widehat{f}}{\partial y}\right\rangle_{\mathbb{R}^3}\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\,|\nabla\widehat{f}|_e^2.
\end{aligned}
$$

よって，$|\nabla\widehat{f}|_c=\dfrac{1}{\lambda}\,|\nabla\widehat{f}|_e=\dfrac{1-|z|^2}{2}\,|\nabla\widehat{f}|_e$. □

補題 3.4. P を compact property とするとき，$\mathscr{P}(\mathbb{C})$ は定値写像しか含まない．

証明. $\mathscr{P}(\mathbb{C})$ の任意の元 f 及び，$\mathbb{C}$ の任意の点 z を取る．ここで $\mathbb{C}$ 上で $f\equiv\infty$ のときは明らかに定値なので，f は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数としてよい．このとき，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $\phi_n:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ 及び $f_n:\mathbb{C}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ をそれぞれ

$$\phi_n(w):=z+n\,w,\quad f_n:=f\circ\phi_n$$

と定める．ここで，

$$
\begin{aligned}
&|\nabla\widehat{f_n}|_e(w)=\frac{2\sqrt{2}\,|f_n'(w)|}{1+|f_n(w)|^2}=\frac{2\sqrt{2}\,|f'(\phi_n(w))|}{1+|f(\phi_n(w))|^2}\,|\phi_n'(w)|=n\,|\nabla\widehat{f}|_e(\phi_n(w)),\\
\text{i.e.,}\quad &|\nabla\widehat{f_n}|_e(0)=n\,|\nabla\widehat{f}|_e(z)
\end{aligned}
\tag{3.1.4}
$$

であることに注意する．各 $\phi_n:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ は分岐点をもたない正則写像なので (P1) より $f_n=f\circ\phi_n\in\mathscr{P}(\mathbb{C})$ である．P は compact property なので (P4) より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ 上の球面正規族．定理 3.3 より $|\nabla\{f_n\}_{n=1}^{\infty}|_e$ は $\mathbb{C}$ 上局所有界，特に $w=0$ で一様に有界なので (3.1.4) と合わせれば

$$^{\exists}M>0\quad\text{s.t.}\quad n\,|\nabla\widehat{f}|_e(z)=|\nabla\widehat{f_n}|_e(0)<M\ \ (^{\forall}n\in\mathbb{N})$$

が成り立つ．M は n に依らないので，$|\nabla\widehat{f}|_e(z)=0$, つまり $f'(z)=0$．z は $\mathbb{C}$ の任意の点なので，$\mathbb{C}$ 上 $f'\equiv 0$，すなわち f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である． □

注意 3.5. ここで，[LP] や [Ros] で用いられている property と，複素関数論で取り扱われる property（定理 4.10）の関係を考察する．有理型関数に対する性質 P が normal property であるとは以下の 4 つの条件をみたすことであった：

(i) $f\in\mathscr{P}(D)$ ならば，D の任意の部分領域 D' に対して $f|_{D'}\in\mathscr{P}(D')$.

(ii) $f\in\mathscr{P}(D)$ かつ $\varphi(z)=\rho\,z+c$ $(\rho\in\mathbb{C}-\{0\},\,c\in\mathbb{C})$ ならば，$f\circ\varphi\in\mathscr{P}(\varphi^{-1}(D))$.

(iii) $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\mathbb{C}$ をみたす $\mathbb{C}$ 内の領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$f_n \in \mathscr{P}(D_n)$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ 及び $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on $\mathbb{C}$ をみたすならば，$f \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$.

(iv) $f \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$ ならば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である．

このとき，closed property は上で定めた条件 (i), (ii), (iii) をみたし，compact property は normal property になる．まず，closed property が (i), (ii), (iii) をみたすことを示す．(i) について，$\mathbb{C}$ 内の領域 D とその部分領域 D'，そして包含写像 $\iota_{D'} : D' \longrightarrow D$; $\iota_{D'}(z) = z$ を用意して，$f \in \mathscr{P}(D)$ とする．このとき，$\iota_{D'}$ は分岐点のない正則写像なので (P1) より $f|_{D'} = f \circ \iota_{D'} \in \mathscr{P}(D')$. (ii) は (P1) より明らかである．(iii) について，$D_n \nearrow \mathbb{C}$, $f_n \in \mathscr{P}(D_n)$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$, $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{C}$ 内の任意の相対コンパクト領域を Ω とすると，$\overline{\Omega}$ のコンパクト性と D_n の単調増加性から $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset D_N$ となる番号 $N \in \mathbb{N}$ が在る．性質 P は (i) をみたすので，$\{f_n|_\Omega\}_{n=N}^\infty \subset \mathscr{P}(\Omega)$ をみたす．さらに，$f_n|_\Omega \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f|_\Omega$ on Ω をみたすので，(P3) を用いれば $f|_\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$．よって，(P2) から $f \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$．次に P が compact property であるときは，補題 3.4 から (iv) が成り立つことがわかるため，compact property は normal property である．

一方でその逆については期待できず，compact property は normal property よりも真に強いと考えられる．なぜならば P が compact property であるとき，(P1) より

$$f \in \mathscr{P}(\mathbb{C} - \{0\}) \text{ ならば } f \circ \exp \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$$

といった条件も成り立つが，normal property ではその条件が課されていないためである．特にこの条件は, Minda principle において重要な条件になることに注意する．詳しくは, [Ber06, Section 1.8] や [Minda] を参照.

以上より compact property と normal property は異なる概念であるとわかるが，Ros がこのように定式化し直した理由について著者の考察を 2 つ述べておく．1 つ目は，今後調べていく正則写像の定義域がただの領域ではなく，計量の付いた Riemann 面になることである．このことは補題 3.6 や定理 3.7 の証明から読み取れる．2 つ目は，Robinson や Zalcman の目的意識と Ros の目的意識が異なることにあると考える．Robinson や Zalcman はある性質をもつ有理型関数の族が正規族であるためにはどのような条件をもつ性質であればよいのかを定式化した．一方で Ros の場合は Picard の小定理や藤本の定理といった消滅型の定理を導くことに重きを置いたため，property を定義 3.2 のように定式化したと著者は考えている．◆

補題 3.6. P を closed property とする．このとき，次は同値である：

(1) P は compact property である．

(2) $\mathscr{P}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族である．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) については，(P4) の定義から明らかである．従って，以下では (2) $\Longrightarrow$ (1) を示す．任意の Riemann 面 Σ 及び任意に $p \in \Sigma$ を取り固定する．このとき，点 p のチャート (U_p, ϕ_p) で U_p が ϕ_p を介して $\mathbb{D}$ と同相になるものを取る．ここで，$\phi_p^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow U_p$ は分岐点のない正則写像であることに注意する．

そこで，$\mathscr{P}(\Sigma)$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を取ると，注意 3.5 より $\{f_n|_{U_p}\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{P}(U_p)$ を満たす．

さらに，(P1) から $\{g_n := f_n|_{U_p} \circ \phi_p^{-1}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(\mathbb{D})$ を満たす．仮定の (2) より $\mathscr{P}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族なので，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 及び $g : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が在って，

$$g_{n_k} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g \quad \text{on } \mathbb{D}$$

をみたす．よって，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $f_{n_k} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g \circ \phi_p$ on U_p をみたす．これは $\mathscr{P}(\Sigma)$ が Σ の各点（の近傍）で球面正規族であることを意味し，正規性は局所的な性質（定理 2.36）なので $\mathscr{P}(\Sigma)$ は Σ 上の球面正規族，つまり (1) が成り立つ． □

次に用意する主張は，Zalcman の補題（定理 4.1）を本節で定めた compact property の形に当てはまるように Ros が手を加えたものである．より正確に言えば，closed property が compact property でないための必要条件の定式化である．

定理 3.7. P を closed property とする．このとき，次の (1) または (2) が成立する：

(1) P は compact property である．

(2) $f \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$ が在って，$|\nabla \widehat{f}|_e(0) = 1$ かつ $\mathbb{C}$ 上で $|\nabla \widehat{f}|_e \leq 1$ をみたす．

証明. P を compact property でない closed property とする．このとき，(2) が成立することを示す．補題 3.6 から $\mathscr{P}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でない．定理 3.3 を用いれば，族 $|\nabla \mathscr{P}(\mathbb{D})|_e = \left\{ |\nabla \widehat{f}|_e : f \in \mathscr{P}(\mathbb{D}) \right\}$ は $\mathbb{D}$ 上局所有界でない，つまり

$$^{\exists}r_0 \in (0,1),\ ^{\exists}z_n \in \overline{\Delta_{r_0}},\ ^{\exists}g_n \in \mathscr{P}(\mathbb{D}) \ \text{ s.t. } |\nabla \widehat{g_n}|_e(z_n) \to \infty \text{ and } |\nabla \widehat{g_n}|_e(z_n) > 0 \ \ (^{\forall}n \in \mathbb{N})$$

をみたす．$\overline{\Delta_{r_0}}$ はコンパクトなので，必要があれば部分列を取ることで，ある $z_0 \in \overline{\Delta_{r_0}}$ が在って，$z_n \to z_0$ とできる．ds_c^2 を Poincaré 計量 (3.1.2) とすると，

$$|\nabla \widehat{g_n}|_c(z_n) = \frac{1 - |z_n|^2}{2} |\nabla \widehat{g_n}|_e(z_n) \to \infty$$

をみたす．$\mathbb{D}$ は等質的なので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して 0 を z_n へ写す $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ の元 $\phi_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$;

$$\phi_n(z) := \frac{z - z_n}{z\,\overline{z_n} - 1}$$

が取れる．従って，(P1) より $g_n \circ \phi_n \in \mathscr{P}(\mathbb{D})$．次に，非定数有理型関数 $h_n : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$;

$$h_n(z) := g_n\left(\phi_n\left(\frac{z}{2}\right)\right)$$

を定めると，再び (P1) から $h_n \in \mathscr{P}(\mathbb{D})$ であり，

$$\begin{aligned} |\nabla \widehat{h_n}|_c(0) &= \frac{1 - 0^2}{2} |\nabla \widehat{h_n}|_e(0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{2}\,|g_n'(z_n)|}{1 + |g_n(z_n)|^2} |\phi_n'(0)| \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - |z_n|^2}{2} |\nabla \widehat{g_n}|_e(z_n) \\ &= \frac{1}{2} |\nabla \widehat{g_n}|_c(z_n) \to \infty \end{aligned}$$

をみたす．また，$|\nabla\widehat{h_n}|_c(z)=\dfrac{1-|z|^2}{2}\,|\nabla\widehat{h_n}|_e(z)$ に対して，

$$|\nabla\widehat{h_n}|_e(z)=\frac{2\sqrt{2}\left|g_n'\left(\phi_n\left(\frac{z}{2}\right)\right)\right|}{1+\left|g_n\left(\phi_n\left(\frac{z}{2}\right)\right)\right|^2}\left|\phi_n'\left(\frac{z}{2}\right)\right|\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,|\nabla\widehat{g_n}|_e\left(\phi_n\left(\frac{z}{2}\right)\right)\frac{1-|z_n|^2}{\left|\overline{z_n}\,\frac{z}{2}-1\right|^2}$$

が $\mathbb{D}$ の境界上でも（実数）値として存在するため，$\partial\mathbb{D}$ 上 $|\nabla\widehat{h_n}|_c\equiv 0$ をみたす．$|\nabla\widehat{h_n}|_c$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上の非定数連続関数なので，$\overline{\mathbb{D}}$ 上に最大値が存在するが，上の計算により $|\nabla\widehat{h_n}|_c$ の最大値を与える点は $\mathbb{D}$ の（内）点であることがわかる．従って，必要があれば（先ほどと同様に）双正則写像で座標変換をすることにより各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\max_{z\in\mathbb{D}}|\nabla\widehat{h_n}|_c(z)=|\nabla\widehat{h_n}|_c(0)$$

とできる．次に，$R_n:=2\,|\nabla\widehat{h_n}|_c(0)$ と定める．このとき，

$$|\nabla\widehat{h_n}|_e(0)=\frac{2}{1-0^2}\,|\nabla\widehat{h_n}|_c(0)=R_n\to\infty,\tag{3.1.5}$$

$$|\nabla\widehat{h_n}|_e(z)=\frac{2}{1-|z|^2}\,|\nabla\widehat{h_n}|_c(z)\leq\frac{2}{1-|z|^2}\,|\nabla\widehat{h_n}|_c(0)=\frac{R_n}{1-|z|^2}\quad({}^\forall z\in\mathbb{D},\ {}^\forall n\in\mathbb{N})\tag{3.1.6}$$

が成り立つ．さらに，非定数有理型関数 $f_n:\Delta_{R_n}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$;

$$f_n(z):=h_n\left(\frac{z}{R_n}\right)$$

を定める．(P1) より，$f_n\in\mathscr{P}(\Delta_{R_n})$ である．さらに，(3.1.5), (3.1.6) を用いれば，

$$|\nabla\widehat{f_n}|_e(0)=\frac{2\sqrt{2}\,|h_n'(0)|}{1+|h_n(0)|^2}\,\frac{1}{R_n}=\frac{1}{R_n}\,|\nabla\widehat{h_n}|_e(0)=1\quad({}^\forall n\in\mathbb{N}),\tag{3.1.7}$$

$$|\nabla\widehat{f_n}|_e(z)=\frac{2\sqrt{2}\left|h_n'\left(\frac{z}{R_n}\right)\right|}{1+\left|h_n\left(\frac{z}{R_n}\right)\right|^2}\,\frac{1}{R_n}=\frac{1}{R_n}\,|\nabla\widehat{h_n}|_e\left(\frac{z}{R_n}\right)\leq\frac{1}{1-\left(\frac{|z|}{R_n}\right)^2}\quad({}^\forall n\in\mathbb{N},\ {}^\forall z\in\Delta_{R_n})\tag{3.1.8}$$

をみたす．そこで，任意に $R>0$ を取り固定すると，$R_n\to\infty$ より，十分大きな番号 $n_0\in\mathbb{N}$ が在って，$R_n>2\,R\,(n\geq n_0)$ をみたす．特に $f_n\,(n\geq n_0)$ は $\overline{\Delta_{2R}}(\subset\Delta_{R_n})$ 上定義される．このとき，(3.1.8) から任意の $z\in\Delta_{2R},\,n\geq n_0$ に対して，

$$|\nabla\widehat{f_n}|_e(z)\leq\frac{1}{1-\left(\frac{|z|}{R_n}\right)^2}<\frac{1}{1-\left(\frac{2\,R}{R_n}\right)^2}$$

が成り立つ．最右辺の式は $n \to \infty$ のときに $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2R}{R_n}\right)^2} \to 1$ となるため，族 $\left\{|\nabla \widehat{f_n}|_e : n \geq n_0\right\}$ は Δ_{2R} 上一様有界である $(*1)$.

[$(*1)$ **の証明始**] $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2\,R}{R_n}\right)^2} \to 1$ より，十分大きい $N \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ が在って，$n \geq N$ ならば

$$\left|\frac{1}{1-\left(\dfrac{2\,R}{R_n}\right)^2} - 1\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad |\nabla \widehat{f_n}|_e \leq \frac{1}{1-\left(\dfrac{2\,R}{R_n}\right)^2} < \frac{3}{2} \quad \text{on } \Delta_{2R}$$

をみたす．従って

$$M := \left\{\max_{|z|\leq 2R} |\nabla \widehat{f_{n_0}}|_e(z), \cdots, \max_{|z|\leq 2R} |\nabla \widehat{f_{N-1}}|_e(z), \frac{3}{2}\right\}$$

と定めれば，$|\nabla \widehat{f_n}|_e(z) \leq M$ $({}^\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, {}^\forall z \in \Delta_{2R})$ をみたすため，族 $\left\{|\nabla \widehat{f_n}|_e : n \geq n_0\right\}$ は Δ_{2R} 上一様有界である．[$(*1)$ **の証明終**]

従って，定理 3.3 を用いれば，$\{f_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ は Δ_{2R} 上の球面正規族である．必要があれば部分列を取ることにより，$f : \overline{\Delta_R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が在って，

$$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f \quad \text{on } \overline{\Delta_R}$$

となる．R は任意の正の数なので，これは $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on $\mathbb{C}$ を意味する．また，(3.1.7) から f は $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数であることがわかる $(*2)$.

[$(*2)$ **の証明始**] まず，$f(0) \neq \infty$ であることを背理法で示す．そこで，$f(0) = \infty$ であると仮定すると，命題 2.27 の (case 2) より $z = 0$ の十分小さな近傍 Δ_r と十分大きな番号 $\widetilde{N}$ が在って，Δ_r 上で $\dfrac{1}{f_n}$ $(n \geq \widetilde{N})$ が正則で $\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{f} = 0$ on Δ_r をみたす．Weierstrass の 2 重級数定理から

$$-\frac{f_n'}{f_n^2} \rightrightarrows 0 \quad \text{on } \Delta_r$$

となるため，(3.1.7) と合わせると

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\nabla \widehat{f_n}|_e(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+|f_n(0)|^2}{2\sqrt{2}\,|f_n'(0)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{|f_n(0)|^2}+1}{2\sqrt{2}\,\dfrac{|f_n'(0)|}{|f_n(0)|^2}} = +\infty$$

となり矛盾する．故に $f(0) \neq \infty$，特に $f \not\equiv \infty$ である．次に f が Δ_R 上で非定数であることを示す．$f(0) \neq \infty$ なので，命題 2.27 の (case 1) より $z = 0$ の周りで $f_n \rightrightarrows f$，特に $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = f(0)$, $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = f'(0)$ が成り立つため (3.3.7) と合わせて

$$\frac{2\sqrt{2}\,|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{2}\,|f_n'(0)|}{1+|f_n(0)|^2} = \lim_{n\to\infty} |\nabla \widehat{f_n}|_e(0) = 1 \neq 0,$$

つまり $f'(0) \neq 0$ が分かり，f が非定数であることも示される．[$(*2)$ **の証明終**]

注意 3.5 より $f_n|_{\Delta_R} \in \mathscr{P}(\Delta_R)$ $(n \geq n_0)$ が成り立つ．$\{f_n|_{\Delta_R}\}_{n=n_0}^{\infty} \subset \mathscr{P}(\Delta_R)$ に対して (P3) を用いれば，極限関数 f は $f|_{\Delta_R} \in \mathscr{P}(\Delta_R)$．これは任意の正の数 R に対して成り立つので，(P2) より $f \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$．さらに，$\lim_{n\to\infty} |\nabla\widehat{f_n}|_e(z) = |\nabla\widehat{f}|_e(z)$ $({}^{\forall}z \in \mathbb{C})$ なので，(3.1.7), (3.1.8) から

$$|\nabla\widehat{f}|_e(0) = 1, \quad |\nabla\widehat{f}|_e(z) \leq 1 \quad ({}^{\forall}z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ． $\square$

compact property の例を 2 つ紹介する．但し，そのどちらも例 1.1 や例 1.2 で述べた property と形が異なることに注意する（このように以下の property の中に定値性が加えられている理由の 1 つとして，(P3) の閉的性質をみたすようにしたことが挙げられる）．1 つ目は，Liouville 型の property である：

命題 3.8. $L > 0$ とする．このとき，任意の Riemann 面 Σ 及び正則写像 $f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，性質 P_L を

$$|f| < L \quad \text{on } \Sigma \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定めると，P_L は compact property である．

証明. まず，性質 P_L が closed property であることを示す．

(P1) Σ, Σ' を任意の Riemann 面，$\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ を分岐点のない正則写像とし，$f \in \mathscr{P}_L(\Sigma')$ とする．$|f(q)| < L$ $({}^{\forall}q \in \Sigma')$ のときは

$$|f(\phi(p))| < L \ ({}^{\forall}p \in \Sigma)$$

をみたし，f が Σ' 上の定値のときは $f \circ \phi$ も Σ 上の定値となるため，$f \circ \phi \in \mathscr{P}_L(\Sigma)$．

(P2) Σ を Riemann 面，$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ とする．ここで，対偶命題

$f \notin \mathscr{P}_L(\Sigma)$ ならば，ある Σ 内の相対コンパクト領域 Ω 及びある $p \in \Sigma$ が在って，
$|f|_{\Omega}(p)| \geq L$ かつ $f|_{\Omega}$ が Ω 上の非定値である

ことを示す．$f \notin \mathscr{P}_L(\Sigma)$ とすると，f は Σ 上非定値で $|f(p)| \geq L$ をみたす $p \in \Sigma$ が取れる．そこで Ω_p を，$\overline{\Omega_p}$ が Σ 内のコンパクト部分集合になる p の開近傍として取ると，$|f|_{\Omega_p}(p)| \geq L$ であり，さらに一致の定理から $f|_{\Omega_p}$ は Ω_p 上で非定値である．故に，対偶命題が示される．

(P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on Σ をみたす $\mathscr{P}_L(\Sigma)$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．このとき，極限関数 f が $f \in \mathscr{P}_L(\Sigma)$，つまり Σ 上で定値か Σ 上 $|f| < L$ をみたすことを示せばよい．そこで，極限関数 f を Σ 上非定値であるとする．このとき，f は Σ 上 L で抑えられることが示される．実際，$|f(p)| \geq L$ をみたす点 $p \in \Sigma$ があると仮定する．$q = f(p)$ とおくと，命題 2.27 及び Hurwitz の定理（命題 2.29）より，十分小さな p の近傍 Ω_p 及び十分大きい番号 $N \in \mathbb{N}$ が在って，

$$q \in f_n(\Omega_p) \quad (n \geq N)$$

とできる．$f_n \in \mathscr{P}_L(\Sigma)$ $(n \geq N)$ と合わせると，f_n $(n \geq N)$ は Σ 上定値．さらに $f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on Σ より f も Σ 上定値となり矛盾する．故に $f \in \mathscr{P}_L(\Sigma)$.

以上より P_L は closed property であることが示された．次に P_L が compact property であることを定理 3.7 と Liouville の定理を用いて示す．仮に P_L が compact property でないと仮定すると，定理 3.7 より $|\nabla \widehat{f}|_e(0) = 1$ をみたす有理型関数 $f \in \mathscr{P}_L(\mathbb{C})$ が取れる．特に，f は非定値なので，$\mathbb{C}$ 上 $|f| < L$ をみたす．Liouville の定理を用いれば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数となるため，これは不合理である． □

次に，本稿で最も重要な compact property の例を与える．これは条件 (P4) と補題 3.4 から Carathéodory–Montel の定理や Picard の小定理を含む結果である．

定理 3.9. $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ とする．このとき，任意の Riemann 面 Σ 及び正則写像 $f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，性質 P_X を

$$f(\Sigma) \subset \widehat{\mathbb{C}} - X \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定める．つまり，

$$\mathscr{P}_X(\Sigma) := \{f \in \mathscr{M}(\Sigma) : f(\Sigma) \cap X = \emptyset\} \cup \{f \equiv (\text{constant}) \text{ on } \Sigma\}$$

とすると，性質 P_X は closed property である．さらに，X が 3 つ以上元を含めば，P_X は compact property である．

注意 3.10. 証明を行う前に，その証明の概略やもとにした論文について記す．まず，命題 3.8 と同様に，P_X が closed property であることを示す．次に，P_X が compact property であることを次の 3 つの Step で示す：

Step 1　$X = \{0, 1, \infty\}$ のとき，P_X が compact property

Step 2　$\widehat{\mathbb{C}}$ 内の 3 点を除外値にもつ $\mathbb{C}$ 上全体で定義される有理型関数は定数関数に限る
(Picard の小定理)

Step 3　$X = \{a, b, c\}$（$a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ は相異なる 3 点）のとき，P_X が compact property

この証明のアイデアは，[Ros, Theorem 2] から来ている．さらに，[Zal98, Chapter 3 p.218] や [Ber06, Section 1.7] ではこの議論をリファインしている．本稿でもこれらの論文をもとにして，${}^{\#}X \geq 3$ ならば P_X が compact property であることを証明する．◆

証明. まず，性質 P_X が closed property であることを示す．

(P1) Σ, Σ' を任意の Riemann 面，$\phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ を分岐点のない正則写像とし，$f \in \mathscr{P}_X(\Sigma')$ とする．$f(\Sigma') \subset \widehat{\mathbb{C}} - X$ のとき，

$$(f \circ \phi)(\Sigma) = f(\phi(\Sigma)) \subset f(\Sigma') = \widehat{\mathbb{C}} - X$$

をみたし，f が Σ' 上の定値のとき，$f \circ \phi$ も Σ 上の定値となるため，$f \circ \phi \in \mathscr{P}_X(\Sigma)$.

(P2) Σ を Riemann 面，$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ とする．ここで，対偶命題

$$f \notin \mathscr{P}_X(\Sigma) \text{ ならば，ある } \Sigma \text{ 内の相対コンパクト領域 } \Omega \text{ が在って，}$$
$$f|_\Omega(\Omega) \cap X \neq \emptyset \text{ かつ } f|_\Omega \text{ が } \Omega \text{ 上の非定値である}$$

ことを示す．$f \notin \mathscr{P}_X(\Sigma)$ とすると，f は Σ 上非定値で $f(\Sigma) \cap X$ の点 q が取れる．特に $q \in f(\Sigma)$ より

$$f(p) = q$$

なる $p \in \Sigma$ が在る．そこで Ω_p を $\overline{\Omega_p}$ が Σ 内のコンパクト部分集合になる p の開近傍として取ると

$$q = f(p) \in f(\Omega_p) \cap X, \quad \text{i.e.,} \quad f|_{\Omega_p}(\Omega_p) \cap X \neq \emptyset$$

であり，さらに一致の定理から $f|_{\Omega_p}$ は Ω_p 上で非定値である．

(P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on Σ をみたす $\mathscr{P}_X(\Sigma)$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．このとき，極限関数 f が Σ 上非定値であるならば，$f(\Sigma) \cap X = \emptyset$ となることを示せば十分である．そこで，Σ 上の非定数有理型関数 f に対して，$q = f(p) \in f(\Sigma) \cap X$ が存在すると仮定する．有理型関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して命題 2.27 及び Hurwitz の定理（命題 2.29）を用いれば

$$^\exists\Omega_p : p \text{ の近傍}, \, ^\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad q \in f_n(\Omega_p) \cap X \neq \emptyset \ (n \geq N)$$

を満たす．さらに，$f_n \in \mathscr{P}_X(\Sigma)$ なので，f_n $(n \geq N)$ は Σ 上定値．しかし，$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on Σ なので，f も Σ 上定値となり矛盾する．よって，f が Σ 上非定値であるならば，$f(\Sigma) \cap X = \emptyset$ となることが示された．

次に，$^\# X = 3$ ならば P_X は compact property であることを示す．

まず，$X = \{0, 1, \infty\}$ のときに P_X が compact property でないと仮定をして矛盾を導く．既に P_X が closed property であることが示されている為，補題 3.6 より $\mathscr{P}_X(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でない．ここで，X を除外値集合にもつ正則写像 f は単連結領域 $\mathbb{D}$ 上で零点をもたない正則関数なので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{D}$ 上 $g^{2^n} = f$ をみたす正則関数 $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$（つまり f の 2^n 乗根）が存在する．そこで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して関数族

$$\mathscr{F}_n := \left\{ g : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \,:\, ^\exists f \in \mathscr{M}(\mathbb{D}) \text{ s.t. } f(\mathbb{D}) \subset \widehat{\mathbb{C}} - X \text{ and } g^{2^n} = f \text{ on } \mathbb{D} \right\}$$

を定める．このとき，$\mathbb{D}$ 上で $g^{2^n} = f$ をみたす f, g に対して，$|g'(z)| = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{|g(z)|}{|g^{2^n}(z)|} |f'(z)| = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{|f(z)|^{\frac{1}{2^n}}}{|f(z)|} |f'(z)|$ が成り立つことと，不等式 $a^x + a^{-x} \leq a + a^{-1}$ $(a > 0, \, 0 < x < 1)$ を用い

れば

$$
\begin{aligned}
|\nabla\widehat{g}|_e(z) &= 2\sqrt{2}\,\frac{\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|f(z)|^{\frac{1}{2^n}}}{|f(z)|}\,|f'(z)|}{1+|f(z)|^{\frac{2}{2^n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2^n}\,\frac{|f(z)|^{\frac{1}{2^n}}}{1+|f(z)|^{\frac{2}{2^n}}}\,\frac{|f'(z)|}{|f(z)|}\,\frac{1+|f(z)|^2}{1+|f(z)|^2} \\
&= \frac{1}{2^n}\,\frac{2\sqrt{2}\,|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,\frac{|f(z)|+|f(z)|^{-1}}{|f(z)|^{\frac{1}{2^n}}+(|f(z)|^{\frac{1}{2^n}})^{-1}} \\
&\geq \frac{|\nabla\widehat{f}|_e(z)}{2^n},
\end{aligned}
$$

つまり $\mathbb{D}$ 上 $|\nabla\widehat{g}|_e \geq \dfrac{|\nabla\widehat{f}|_e}{2^n}$ が成り立つ．Marty の判定法（定理 3.3）から族 $|\nabla\mathscr{P}_X(\mathbb{D})|_e$ は $\mathbb{D}$ 上局所有界でないため，上の不等式と合わせると各 $n\in\mathbb{N}$ に対して族 $|\nabla\mathscr{F}_n|_e$ も $\mathbb{D}$ 上局所有界でない．再び Marty の判定法（定理 3.3）を用いると，各 $\mathscr{F}_n$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でない．また，$n\in\mathbb{N}$ に対して $X_n := \left\{0,\,\infty,\,1,\,e^{\frac{2\pi i}{2^n}},\,\cdots,\,e^{\frac{2(2^n-1)\pi i}{2^n}}\right\}$ と定めると，$\mathscr{F}_n$ の定義と $\mathscr{P}_X(\mathbb{D})$ の元が $0,\,1,\,\infty$ を除外値にもつことから $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{P}_{X_n}(\mathbb{D})$ をみたす．以上より，各 P_{X_n} は compact property でない closed property なので，定理 3.7 を用いれば，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$|\nabla\widehat{g_n}|_e(0)=1 \quad \text{and} \quad |\nabla\widehat{g_n}|_e(z)\leq 1 \ ({}^\forall z\in\mathbb{C})$$

をみたす $g_n\in\mathscr{P}_{X_n}(\mathbb{C})$ が存在する．さらに，$\mathscr{G}:=\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$|\nabla\mathscr{G}|_e$ が $\mathbb{C}$ 上一様有界である有理型関数列なので，Marty の判定法（定理 3.3）から $\mathscr{G}$ は $\mathbb{C}$ 上の球面正規族．ここで $|\nabla\widehat{g_n}|_e(0)=1$ なので，定理 3.7 の $(*2)$ と同様に議論することで，ある非定数有理型関数（後に見るように ∞ を除外値にもつため，実際は非定数整関数）$h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ が在って

$$g_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} h \quad \text{on } \mathbb{C}$$

をみたす．そして，X_n の単調増加性と (P3) から h は $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ を除外値集合にもつ．ここで，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n-\{0,\infty\}$ は S^1 において稠密である．さらに，開写像定理から $h(\mathbb{C})$ が連結開集合であることも合わせれば

$$h(\mathbb{C})\subset\mathbb{D} \quad \text{or} \quad h(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}.$$

このどちらの場合でも，Liouville の定理を用いれば，h は定値となるが，これは上の帰結と矛盾する．よって，$X=\{0,\,1,\,\infty\}$ のとき，P_X は compact property.

次に，$X=\{a,\,b,\,c\}$（但し，$a,\,b,\,c\in\widehat{\mathbb{C}}$ は相異なる 3 点）を除外値集合にもつ有理型関数 $f\colon\mathbb{C}_z\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}_w$ を考える．このとき，$a,\,b,\,c$ をそれぞれ $0,\,1,\,\infty$ に写す 1 次変換 $T\colon\widehat{\mathbb{C}}_w\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}_u$ が存在する．この T と f を合成した $T\circ f\colon\mathbb{C}_z\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}_u$ は $Y=\{0,\,1,\,\infty\}$ を除外値にもつ有理型関数なので，$T\circ f\in\mathscr{P}_Y(\mathbb{C})$ となる．さらに，補題 3.4 を用いれば $T\circ f$ は定数関数になる．よって，f も定数関数であるため，Picard の小定理が得られる．

最後に，$X = \{a, b, c\}$（$a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ は相異なる 3 点）と一般の場合に，P_X が compact property であることを定理 3.7 と Step 2 の帰結である Picard の小定理を用いて示す．仮に, P_X が compact property でないと仮定すると，定理 3.7 より $|\nabla \widehat{f}|_e(0) = 1$ をみたす有理型関数 $f \in \mathscr{P}_X(\mathbb{C})$ が取れる．特に，f は非定値なので，X を除外値集合にもつ．Picard の小定理を用いれば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数となるため，これは不合理である．

$\square$

3.2　円板上の計量と藤本の補題

この節では，本稿の主結果を証明する際に必要な補題を幾つか準備する．[藤本]，[OR]，[KL]，[川上・藤森] の必要な部分を順にまとめる．

3.2.1　単位円板上の Poincaré 距離

まず初めに，[藤本, 4.3 節 (b)] に沿って単位円板上の Poincaré 距離について簡単にまとめておく．単位円板 $\mathbb{D}$ 上の Poincaré 計量は (3.1.2) で与えたように

$$ds_c^2 = \lambda_c(z)^2\,|dz|^2 \quad \lambda_c(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$$

であり，その Gauss 曲率は $K_{ds_c^2} = -1$ である（[藤本, 定義 4.21] では計量の係数が $\dfrac{\lambda_c(z)}{2}$ であることに注意）．

定義 3.11. 単位円板 $\mathbb{D}$ 内の区分的に滑らかな曲線（以下 **PS 曲線**という）$\Gamma : z = z(t)$ $(\sigma \leq t \leq \tau)$ に対して，Γ の**双曲的長さ**を

$$l(\Gamma) := \int_\Gamma ds_c = \int_\Gamma \frac{2\,|dz|}{1-|z|^2}$$

と定める．

Schwarz の補題を用いることにより，正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad ({}^\forall z \in \mathbb{D}) \tag{3.2.1}$$

が成り立つことが示される（[藤本, 補題 4.23] を参照）．

命題 3.12. $\mathbb{D}$ 内の PS 曲線 Γ 及び正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，

$$l(f(\Gamma)) \leq l(\Gamma)$$

が成り立つ．特に，$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ のとき，$l(f(\Gamma)) = l(\Gamma)$．

証明. $\mathbb{D}_z$ 内の PS 曲線 $\Gamma : z = z(t)$ $(\sigma \leq t \leq \tau)$ に対して，$\mathbb{D}_w$ 内の PS 曲線 $f(\Gamma) : w = f(z(t))$ $(\sigma \leq t \leq \tau)$ の双曲的長さ $l(f(\Gamma))$ について考える．(3.2.1) を用いれば，

$$l(f(\Gamma)) = \int_\sigma^\tau \frac{2\,|w'(t)|}{1-|w(t)|^2}\,dt = \int_\sigma^\tau \frac{2\,|f'(z(t))|}{1-|f(z(t))|^2}\,|z'(t)|\,dt \leq \int_\sigma^\tau \frac{2}{1-|z(t)|^2}\,|z'(t)|\,dt = l(\Gamma)$$

と前半の不等式が得られる．後半の主張は正則写像 $f^{-1} : \mathbb{D}_w \longrightarrow \mathbb{D}_z$ に対して，先の不等式を用いれば

$$l(\Gamma) = l(f^{-1}(f(\Gamma))) \leq l(f(\Gamma))$$

が得られるため，示される． □

定義 3.13. 任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 に対して，

$$d_h(z_1, z_2) := \inf\,\{l(\Gamma) : \Gamma \text{ は } z_1 \text{ と } z_2 \text{ を結ぶ } \mathbb{D} \text{ 内の PS 曲線 }\}$$

を z_1 と z_2 の **Poincaré 距離**または**双曲距離**という．

命題 3.12 より，任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 及び任意の正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，

$$\begin{aligned} d_h(f(z_1), f(z_2)) &= \inf\,\{l(\Gamma') : \Gamma' \text{ は } f(z_1) \text{ と } f(z_2) \text{ を結ぶ } \mathbb{D} \text{ 内の PS 曲線 }\} \\ &\leq \inf\,\{l(f(\Gamma)) : \Gamma \text{ は } z_1 \text{ と } z_2 \text{ を結ぶ } \mathbb{D} \text{ 内の PS 曲線 }\} \quad (*1) \\ &\leq \inf\,\{l(\Gamma) : \Gamma \text{ は } z_1 \text{ と } z_2 \text{ を結ぶ } \mathbb{D} \text{ 内の PS 曲線 }\} \quad (*2) \\ &= d_h(z_1, z_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$(*1)$ 及び $(*2)$ における不等式は以下の理由から成立する：

$(*1)$ z_1 と z_2 を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の任意の PS 曲線 Γ に対して，$f(\Gamma)$ は $f(z_1)$ と $f(z_2)$ を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の PS 曲線となるため，$\inf\,\{l(\Gamma')\} \leq l(f(\Gamma))$ が成り立つ．さらにこれは $\inf\,\{l(\Gamma')\}$ が $\{l(f(\Gamma)) : \Gamma$ は z_1 と z_2 を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の PS 曲線 $\}$ の下界の 1 つであることを意味するため，$\inf\,\{l(\Gamma')\} \leq \inf\,\{l(f(\Gamma))\}$ となる．

$(*2)$ z_1 と z_2 を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の任意の PS 曲線 Γ に対して，命題 3.12 から $\inf\,\{l(f(\Gamma))\} \leq l(f(\Gamma)) \leq l(\Gamma)$ が成り立つ．さらにこれは $\inf\,\{l(f(\Gamma))\}$ が $\{l(\Gamma) : \Gamma$ は z_1 と z_2 を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の PS 曲線 $\}$ の下界の 1 つであることを意味するため，$\inf\,\{l(f(\Gamma))\} \leq \inf\,\{l(\Gamma)\}$ となる．

また，$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ のときは任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 に対して，上の不等式を用いれば

$$d_h(z_1, z_2) = d_h(f^{-1}(f(z_1)), f^{-1}(f(z_2))) \leq d_h(f(z_1), f(z_2))$$

となるため，次の帰結が得られる：

定理 3.14. 任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 及び任意の正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \leq d_h(z_1, z_2).$$

特に $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ に対しては，$d_h(f(z_1), f(z_2)) = d_h(z_1, z_2)$ が成り立つ．

また，Poincaré 距離は，次のように明示的に記すことができる（[藤本, 定理 4.27] を参照）：

定理 3.15. 任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 に対して，

$$d_h(z_1, z_2) = \log \frac{1+s}{1-s} \quad 但し，s := \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right|$$

が成立する．

定理 3.14 と定理 3.15，そして $F(X) := \log \dfrac{1+X}{1-X}$ $(-1 < X < 1)$ の逆関数

$$F^{-1}(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1} \quad (X \in \mathbb{R})$$

が単調増加関数であることを合わせれば，Schwarz–Pick の不等式が得られる．実際，定理 3.14 より任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ 及び任意の正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \leq d_h(z_1, z_2)$$

が成り立つ．定理 3.15 より上式の左辺は $F\left(\left| \dfrac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)} \right| \right)$，上式の右辺は $F\left(\left| \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right| \right)$ と書けるので

$$F\left(\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)} \right| \right) \leq F\left(\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right| \right)$$

が成り立つ．両辺を単調増加関数 F^{-1} で写すと

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right|.$$

定理 3.16. 任意の $\mathbb{D}$ の点 z_1, z_2 及び任意の正則写像 $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ に対して，以下の不等式が成り立つ：

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right|.$$

上式の不等式を $z_1 \neq z_2$ のもとで，

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \left| \frac{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)}{1 - \overline{z_1}\, z_2} \right|$$

と直し，$z_2 \to z_1$ とすると，

$$|f'(z_1)| \leq \frac{1 - |f(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2}$$

が成り立つ．特に，$z_1 = 0$ のとき，

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2 \leq 1 \tag{3.2.2}$$

が成り立つことに注意する．

3.2.2　Osserman–Ru の補題

次に，[OR, Lemma 2.1] について記す：

補題 3.17. $0 < r < 1$ とする．R を $\mathbb{D}$ における Δ_r の双曲半径，つまり

$$R := d_h(0, \partial\Delta_r) = \log \frac{1+r}{1-r}$$

とする．また，$ds^2 = \lambda(z)^2 |dz|^2$ を $z = 0$ から $|z| = r$ までの測地的距離が R 以上になる Δ_r の任意の共形計量で

$$-1 \leq K_{ds^2} \leq 0$$

をみたすとする．このとき，任意の $|z| \leq r$ に対して

$$(ds^2 \text{ における } 0 \text{ と } z \text{ の距離}) \geq (0 \text{ と } z \text{ の Poincaré 距離}) = d_h(0, z)$$

が成り立つ．

証明. ここでは，ds^2 における 0 と z の測地的距離を $\rho(z)$，0 と z の Poincaré 距離を $\rho_c(z) \left(:= d_h(0, z) = \log \dfrac{1+|z|}{1-|z|} \right)$ で表す．

$R = \log \dfrac{1+r}{1-r}$ を r について解くと

$$r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1} \tag{3.2.3}$$

が得られる．同様に $\rho_c(z) = \log \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$ についても $|z|$ について解くと

$$|z| = \frac{e^{\rho_c(z)} - 1}{e^{\rho_c(z)} + 1}. \tag{3.2.4}$$

次に，仮定から $-1 \leq K_{ds^2} \leq 0$，つまり $K_{ds_c^2} \leq K_{ds^2} \leq 0$ が成り立つため，比較原理（[GW, Proposition 2.15] を参照）を用いれば，任意の滑らかな単調増加関数 f に対して，不等式

$$\Delta (f \circ \rho) \leq \Delta_c (f \circ \rho_c) \tag{3.2.5}$$

が成り立つ．ここで Δ 及び Δ_c は ds^2 ないし ds_c^2 におけるラプラシアンであり，両辺は 2 つの距離が同じ点に関する評価，つまり $\rho = d = \rho_c$ における評価である．そこで滑らかな単調増加関数 $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$f(t) := \log \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$$

を定める．(3.2.4) の両辺を対数にとった関数

$$\log |z| = \log \frac{e^{\rho_c(z)} - 1}{e^{\rho_c(z)} + 1} = (f \circ \rho_c)(z)$$

は左辺から $z \neq 0$ で調和的，つまり

$$\Delta_c\,(f\circ\rho_c) \equiv 0 \quad (0<|z|<1)$$

が成り立つ．これと (3.2.5) を合わせれば

$$\Delta\,(f\circ\rho) \leq 0 \quad (0<|z|<r),$$

すなわち $f\circ\rho$ は $\Delta_r^0 (= \Delta_r - \{0\})$ 上で優調和となる．さらに関数 $g : \Delta_r^0 \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$g(z) := (f\circ\rho)(z) - \log|z| = \log\,\frac{1}{|z|}\,\frac{e^{\rho(z)}-1}{e^{\rho(z)}+1}$$

を定めると，Δ_r^0 上で

$$\Delta\,g(z) = \Delta\,(f\circ\rho)(z) - \Delta\,\log|z| \leq 0\,,$$

すなわち g は Δ_r^0 上で優調和である．また原点に十分近い z に対して，$\rho(z) \sim \int_{\overrightarrow{0z}} \lambda(0)\,|dz| = \lambda(0)\,|z|$（但し，$\overrightarrow{0z}$ は 0 と z を結ぶ線分）が成り立つため，原点の近くでは

$$g(z) = \log\,\frac{1}{|z|}\,\frac{e^{\rho(z)}-1}{e^{\rho(z)}+1} \sim \log\,\frac{1}{e^{\lambda(0)|z|}+1}\,\frac{e^{\lambda(0)|z|}-1}{|z|} \to \log\,\frac{\lambda(0)}{2} \quad (\text{as } z\to 0),$$

つまり g は原点の周りで有界である．以上より g に対して最小値原理を用いれば, g は $z_r \in \partial\Delta_r = \{|z|=r\}$ で最小値を取る．さらに，仮定：$\rho(z) \geq R$ ($^\forall z \in \partial\Delta_r$) より

$$\rho(z_r) \geq R \tag{3.2.6}$$

が成り立つ．従って z_r の定義，(3.2.6) と $\dfrac{e^t-1}{e^t+1}$ ($t\in\mathbb{R}$) の単調増加性，そして (3.2.3) を順に用いれば，任意の $z \in \overline{\Delta_r}$ に対して

$$\log\,\frac{1}{|z|}\,\frac{e^{\rho(z)}-1}{e^{\rho(z)}+1} = g(z) \geq g(z_r) = \log\,\frac{1}{|z_r|}\,\frac{e^{\rho(z_r)}-1}{e^{\rho(z_r)}+1} \geq \log\,\frac{1}{r}\,\frac{e^R-1}{e^R+1} = 0$$

が成り立つ．上式を (3.2.4) を用いて整理すると

$$\frac{e^{\rho(z)}-1}{e^{\rho(z)}+1} \geq |z| = \frac{e^{\rho_c(z)}-1}{e^{\rho_c(z)}+1} \quad (^\forall z \in \partial\Delta_r).$$

両辺を単調増加関数 $Y = \log\,\dfrac{1+X}{1-X}$ に合成すると $\overline{\Delta_r}$ 上の各点 z で $\rho(z) \geq \rho_c(z)$ が得られる． □

3.2.3 Schwarz 型の不等式と藤本の補題

次に，藤本の補題（定理 3.24）を示すために，Ahlfors–Schwarz の補題を示すことから始める：

定理 3.18. $v : \Delta_R \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非負な実数値連続関数で，開集合 $v^{-1}((0,\infty)) = \{z \in \Delta_R : v(z) > 0\}$ 上で C^2 級かつ $\Delta\log v \geq v^2$ をみたすとする．このとき，Δ_R 上で不等式

$$v(z) \leq \frac{2\,R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ．

証明. 任意に $r \in (0, R)$ を取る．このとき，$w_r : \Delta_r \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を

$$w_r(z) := \frac{2\,r}{r^2 - |z|^2}$$

と定めると，Δ_r 上で

$$\Delta \log w_r = w_r^2 \tag{3.2.7}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,(\log w_r(z)) &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,(\log\, 2\,r - \log\,(r^2 - |z|^2)) = \frac{z}{r^2 - |z|^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\,(\log w_r(z)) &= \frac{(r^2 - |z|^2) - z\,(-\overline{z})}{(r^2 - |z|^2)^2} = \frac{r^2}{(r^2 - |z|^2)^2}
\end{aligned}$$

より，(3.2.7)

$$\Delta \log w_r(z) = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\,(\log w_r(z)) = \frac{4\,r^2}{(r^2 - |z|^2)^2} = w_r(z)^2$$

が得られる．次に，$v_r : \overline{\Delta_r} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$v_r(z) := \frac{r^2 - |z|^2}{2\,r}\,v(z)$$

と定める．これは有界閉集合 $\overline{\Delta_r}$ 上の非負値連続関数なので，$\overline{\Delta_r}$ 上で最大値を取る．また $\partial\Delta_r$ 上で $v_r \equiv 0$ をみたすため，

$$v_r(z_0) = \max\{v_r(z) : z \in \overline{\Delta_r}\}$$

をみたす点 $z_0 \in \Delta_r$ がとれる．ここで，$v_r(z_0) \leq 1$ $(*)$ であることが示されるため，Δ_r 上で $v_r(z) \leq v_r(z_0) \leq 1$，つまり

$$v(z) \leq \frac{2\,r}{r^2 - |z|^2} \quad \text{on } \Delta_r.$$

r は $(0,\,R)$ 内の任意の実数なので，$r \to R$ とすれば

$$v(z) \leq \frac{2\,R}{R^2 - |z|^2} \quad \text{on } \Delta_R.$$

[$(*)$ **の証明始**] $v_r(z_0) \leq 1$ を背理法で示す．そこで，$v_r(z_0) > 1$ であると仮定する．まず，

$$v(z_0) = \frac{2\,r}{r^2 - |z_0|^2}\,v_r(z_0) = w_r(z_0)\,v_r(z_0) > 0$$

より，$z_0 \in v^{-1}((0,\infty))$ が成り立つ．よって，仮定から $\Delta \log v(z_0) \geq v(z_0)^2$ をみたす．Δ_r 上では $v_r = \dfrac{v}{w_r}$ であること，(3.2.7)，$\Delta \log v(z_0) \geq v(z_0)^2$，並びに $v_r(z_0) > 1$ を順に用いると

$$\begin{aligned}\Delta \log v_r(z_0) &= \Delta \log v(z_0) - \Delta \log w_r(z_0)\\ &= \Delta \log v(z_0) - \Delta w_r(z_0)^2\\ &\geq v(z_0)^2 - \Delta w_r(z_0)^2\\ &= w_r(z_0)^2\,(v_r(z_0)^2 - 1)\\ &> 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

が得られる．一方で，$Y = \log X$ $(X > 0)$ は単調増加関数なので，関数 $\log v_r(z)$ は $z = z_0 \in \Delta_r$ で最大値，特に極大値を取る．これは

$$\Delta \log v_r(z_0) \leq 0 \tag{3.2.9}$$

を意味する．実際，$z_0 := x_0 + iy_0, f(x,y) := \log v_r(x,y), g(x) := \log v_r(x,y_0), h(y) := \log v_r(x_0,y)$ と定めると，g は $x = x_0$ で，h は $y = y_0$ でそれぞれ極大値を取る，特に x_0, y_0 の近くでは一定か，極小値を取らないことから

$$\frac{d^2g}{dx^2}(x_0) \leq 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2h}{dy^2}(y_0) \leq 0,$$

つまり $\Delta f(z_0) = f_{xx}(x_0,y_0) + f_{yy}(x_0,y_0) = g_{xx}(x_0) + h_{yy}(y_0) \leq 0$ をみたす．(3.2.8) と (3.2.9) に明らかに不合理である．よって，$v_r(z_0) \leq 1$ である．[$(*)$ **の証明終**] $\square$

また，藤本–川上の定理（定理 3.33）を証明するために必要となる次の定理も準備する．

定理 3.19. $ds^2 = \lambda(z)^2\,|dz|^2$ を $\mathbb{D}$ 上の完備な Hermitian 計量で，$K_{ds^2} \geq -1$ をみたすならば，$\mathbb{D}$ 上で不等式

$$\lambda(z) \geq \frac{2}{1-|z|^2}$$

が成り立つ．

この定理は Yau–Schwarz の補題と呼ばれる次の主張を用いて示される．ここで，Yau–Schwarz の補題とは，Ahlfors–Schwarz の補題の対に相当することに注意する．

事実 3.20. [KL, Theorem 7.1],[Yau, Theorem 2] (M,g) を Ricci 曲率が負の定数 $-k$ によって下から抑えられる完備な Kähler 多様体，(N,h) を正則断面曲率が負の定数 $-K$ によって上から抑えられる Hermitian 多様体とする．このとき，全ての正則写像 $f : M \longrightarrow N$ に対して，

$$f^*h \leq \frac{k}{K} g$$

が成り立つ．

定理 3.19 の証明． $(M, g) = (\mathbb{D}, ds^2)$, $(N, h) = (\mathbb{D}, ds_c^2)$, $f = \mathrm{id} : M \longrightarrow N$ に対して，事実 3.20 を用いる．事実 3.20 において $k = 1$, $K = 1$ なので，

$$\mathrm{id}^*(ds_c^2) \leq ds^2, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{2}{1 - |z|^2} \leq \lambda(z) \quad \text{on } \mathbb{D}$$

が成り立つ．

□

以下では [藤本, 5.2 節], [川上・藤森, 3.1.1 項] をもとに，藤本の補題（定理 3.24）を証明を始める．但し，藤本–川上の定理（定理 3.33）から逆算して幾つか主張を表現し直した点があるため，注意をする．

補題 3.21. 任意の $\rho > 0$ に対して，ある $a_0 > 1$ が存在して，$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D，任意の非定数正則関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ 及び任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $D' := \{z \in D : f(z) \neq \alpha\}$ 上で

$$\Delta \log \frac{1}{\log \dfrac{a_0}{\chi(f, \alpha)^2}} \geq \frac{4\,|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \left(\frac{1}{\chi(f, \alpha)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f, \alpha)^2} \right)^2} - \rho \right)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\rho > 0$ に対して $a_0 > 1$ を

$$\frac{1}{(\log a_0)^2} + \frac{1}{\log a_0} < \rho$$

をみたすように十分大きく取る．$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D，任意の非定数正則関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ を取り，さらに

$$\varphi := \chi(f, \alpha)^2 = \frac{|f - \alpha|^2}{(1 + |f|^2)\,(1 + |\alpha|^2)} \ : \ D' \longrightarrow (0, 1] (\subset \mathbb{R}_{>0})$$

と定める．以下 D' 上で不等式

$$\frac{1}{4}\,\Delta \log \frac{1}{\log \dfrac{a_0}{\varphi}} \geq \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \left(\frac{1}{\varphi \left(\log \dfrac{a_0}{\varphi} \right)^2} - \rho \right)$$

が成り立つことを確認する．

一般に，零点をもたない正則関数 h に対して $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |h| = \dfrac{1}{4}\,\Delta \log |h| = 0$ をみたすことに注意すれば，D' 上で

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log (1 + |f|^2) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \{\varphi\,(1 + |f|^2)\} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |f - \alpha|^2 - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log (1 + |\alpha|^2) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log \varphi = -\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log (1 + |f|^2) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f\,\overline{f'}}{1 + |f|^2} \right) = -\frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \quad \text{on } D' \tag{3.2.10}$$

が成り立つ．また，以下の計算 $(*)$ により D' 上で次の等式が成立する：

$$\varphi_z \, \overline{\varphi_z} = \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \, \varphi \, (1 - \varphi) \tag{3.2.11}$$

[$(*)$ **の証明始**] φ の両辺の対数を取り z で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_z}{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \log \varphi \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \{\log |f - \alpha|^2 - \log (1 + |f|^2) - \log (1 + |\alpha|^2)\} \\
&= \frac{\{(f - \alpha)\,(\overline{f} - \overline{\alpha})\}_z}{|f - \alpha|^2} - \frac{\{1 + f\,\overline{f}\}_z}{1 + |f|^2} \\
&= \frac{f'\,(\overline{f - \alpha})}{(f - \alpha)\,(\overline{f - \alpha})} - \frac{f'\,\overline{f}}{1 + |f|^2} \\
&= \frac{f'\,(1 + |f|^2) - f'\,\overline{f}\,(f - \alpha)}{(f - \alpha)\,(1 + |f|^2)} \\
&= \frac{f'\,(1 + \alpha\,\overline{f})}{(f - \alpha)\,(1 + |f|^2)},
\end{aligned}$$

$$\varphi_z = \frac{f'\,(1 + \alpha\,\overline{f})}{(f - \alpha)\,(1 + |f|^2)} \, \frac{|f - \alpha|^2}{(1 + |f|^2)\,(1 + |\alpha|^2)} = \frac{f'\,(1 + \alpha\,\overline{f})\,(\overline{f} - \overline{\alpha})}{(1 + |f|^2)^2\,(1 + |\alpha|^2)}.$$

ところで，

$$1 - \varphi = \frac{(1 + |f|^2)\,(1 + |\alpha|^2) - |f - \alpha|^2}{(1 + |f|^2)\,(1 + |\alpha|^2)} = \frac{|\alpha\,\overline{f} + 1|^2}{(1 + |f|^2)\,(1 + |\alpha|^2)}$$

となるため，

$$\begin{aligned}
\varphi_z \, \overline{\varphi_z} &= \frac{f'\,(1 + \alpha\overline{f})\,(\overline{f} - \overline{\alpha})}{(1 + |f|^2)^2\,(1 + |\alpha|^2)} \, \frac{\overline{f'}\,(\overline{1 + \alpha\overline{f}})\,(\overline{\overline{f} - \overline{\alpha}})}{(1 + |f|^2)^2\,(1 + |\alpha|^2)} \\
&= \frac{|f'|^2\,|1 + \alpha\overline{f}|^2\,|\overline{f} - \overline{\alpha}|^2}{(1 + |f|^2)^4\,(1 + |\alpha|^2)^2} \\
&= \frac{|f'|^2\,|f - \alpha|^2}{(1 + |f|^2)^3\,(1 + |\alpha|^2)} \, (1 - \varphi) \\
&= \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \, \varphi \, (1 - \varphi)
\end{aligned}$$

となる．[$(*)$ **の証明終**]

φ は実数値，つまり $\varphi = \overline{\varphi}$ であることと偏微分の性質から，

$$\varphi_{\overline{z}} = \overline{\varphi}_{\overline{z}} = \overline{\varphi_z}\,, \quad \text{i.e.,} \quad \varphi_z \, \varphi_{\overline{z}} = \varphi_z \, \overline{\varphi_z}$$

となる．従って，(3.2.11) と合わせれば D' 上で等式

$$\varphi_z\,\varphi_{\overline{z}} = \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,\varphi\,(1-\varphi) \tag{3.2.12}$$

が得られる．以上より (3.2.10)，(3.2.12) 及び $\log\dfrac{a_0}{\varphi} \geq \log a_0$ であることを順に用いると D' 上で

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\,\Delta\log\frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}} &= -\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\log\left(\log\left(\frac{a_0}{\varphi}\right)\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\log\frac{a_0}{\varphi}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\,(\log\varphi)\right) \\
&= \left\{-\frac{1}{\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\log\frac{a_0}{\varphi}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\,(\log\varphi) + \frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}(\log\varphi) \\
&= \frac{1}{\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2}\,\frac{\partial}{\partial z}(\log\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\,(\log\varphi) - \frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2}\,\frac{\varphi_z\,\varphi_{\overline{z}}}{\varphi^2} - \frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \\
&= \frac{1-\varphi}{\varphi\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2}\,\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} - \frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\,\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \\
&= \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\left\{\frac{1}{\varphi\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2} - \left(\frac{1}{\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2} + \frac{1}{\log\dfrac{a_0}{\varphi}}\right)\right\} \\
&\geq \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\left\{\frac{1}{\varphi\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2} - \left(\frac{1}{(\log a_0)^2} + \frac{1}{\log a_0}\right)\right\} \\
&> \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\left\{\frac{1}{\varphi\left(\log\dfrac{a_0}{\varphi}\right)^2} - \rho\right\}
\end{aligned}$$

□

補題 3.22. q を 3 以上の整数とし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{q-1}$ を相異なる $\mathbb{C}$ の点，$\alpha_q = \infty$ とする．このとき，任意の $\rho > 0$ に対して，$a_0 > 1$ 及び $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ にしか依らない $C_1 = C_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_q) > 0$ が存在して，$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D 及び任意の非定数有理型関数 $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $D' := \{z \in D : f(z) \neq \alpha_j \ (j = 1, \cdots, q)\}$ 上で不等式

$$\Delta \log \frac{(1+|f|^2)^\rho}{\prod_{j=1}^{q} \log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} > C_1^2 \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2} \tag{3.2.13}$$

が成り立つ．

証明. 任意に $\rho > 0$ を取り固定する．このとき，$a_0 > 1$ を

$$\frac{1}{(\log a_0)^2} + \frac{1}{\log a_0} < \frac{\rho}{q} \quad \text{and} \quad a_0 > e^2$$

をみたすよう十分大きく取る．(3.2.10) 及び補題 3.21 より $\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D と任意の非定数有理型関数 $f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$D' = \{z \in D : f(z) \neq \alpha_j \ (j = 1, \cdots, q)\}$ 上で

$$\begin{aligned}
\Delta \log \frac{(1+|f|^2)^\rho}{\prod_{j=1}^{q} \log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \rho \log(1+|f|^2) + \sum_{j=1}^{q} \Delta \log \left(\frac{1}{\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \right) \\
&\geq \frac{4\rho |f'|^2}{(1+|f|^2)^2} + \sum_{j=1}^{q} \frac{4|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \left(\frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2} - \frac{\rho}{q} \right) \\
&= \frac{4|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，

$$L := \frac{1}{2} \min_{1 \leq j < k \leq q} \{\chi(\alpha_j, \alpha_k)\} \, (\in (0,1)), \ M := 2L^2(1 - \log L) \, (> 0), \ C_1 := 2\sqrt{M^{q-1}} \, (> 0)$$

と定めると，その定義から C_1 は $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ にしか依らない正の数である．以下では D' 上で

$$4 \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2} > 4M^{q-1} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}$$

が成り立つことを示せばよい．まず，D' 上で次のことが成り立つことに注意する：

1 から q までの全ての番号 j，またはある 1 つの番号 j_0 以外の全ての番号 j で，
$L \leq \chi(f, \alpha_j) (\leq 1)$ が成り立つ．(#)

なぜならば，もし $\chi(f,\alpha_j)<L$, $\chi(f,\alpha_k)<L$ $(1\leq j<k\leq q)$ が成り立つと仮定すると，

$$2L=\min_{1\leq j<k\leq q}\{\chi(\alpha_j,\alpha_k)\}\leq \chi(\alpha_j,\alpha_k)\leq \chi(\alpha_j,f)+\chi(f,\alpha_k)<2L$$

となり矛盾するためである．よって，$\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}>\log\dfrac{e^2}{1}>1$，(#) の事実と $F(X):=X^2\log\dfrac{a_0}{X^2}$ $(0<X\leq 1)$ が (狭義) 単調増加であること，そして $a_0>e^2$ であることを用いれば，j_0 を除く全ての番号 j に対して D' 上で

$$\begin{aligned}\chi(f,\alpha_j)^2\left(\log\frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2&>\chi(f,\alpha_j)^2\,\log\frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\\&\geq L^2\log\frac{a_0}{L^2}\\&>2L^2\,(1-\log L)\\&=M\end{aligned}$$

が成立する．(#) において全ての番号 j で $L\leq\chi(f,\alpha_j)$ が成り立つときは $j_0=1$ として考えることにすると，上の不等式から D' 上で

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}\geq\frac{1}{\chi(f,\alpha_{j_0})^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_{j_0})^2}\right)^2}\\&=\frac{1}{\chi(f,\alpha_{j_0})^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_{j_0})^2}\right)^2}\,\frac{\prod_{j=1}^{q}\chi(f,\alpha_j)^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}{\prod_{j=1}^{q}\chi(f,\alpha_j)^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}\\&>M^{q-1}\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2\left(\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2}\end{aligned}$$

が成り立ち，求める不等式を得る． □

次に補題 3.22 と Ahlfors–Schwarz の補題（定理 3.18）を用いて次の命題を証明する．実はこの命題 3.23 からも，Picard の小定理を導くことができる．詳しくは本稿の 4.2 節を参照せよ．

命題 3.23. q を 3 以上の整数とし，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1}$ を相異なる $\mathbb{C}$ の点，$\alpha_q=\infty$ とする．このとき，q にしか依らないある $a_0>1$ 及び $\alpha_1,\cdots,\alpha_q$ にしか依らないある $C_2=C_2(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)>0$ が存在して，$\alpha_1,\cdots,\alpha_q$ を除外値にもつ任意の非定数正則関数 $f:\Delta_R\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ に対して Δ_R 上で不等式

$$\frac{|f'|}{1+|f|^2}\,\frac{1}{\prod_{j=1}^{q}\chi(f,\alpha_j)\,\log\dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}}\leq C_2\,\frac{2\,R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ．

証明. $\rho := \dfrac{q-2}{2}\ (>0)$ と定める．この ρ に対して補題 3.22 で述べた性質をもつ a_0 及び C_1 を取ることができる．そこで，$\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ を除外値にもつ任意の非定数正則関数 $f : \Delta_R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$v_f : \Delta_R \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$v_f := C_1 \frac{|f'|}{1+|f|^2} \frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j) \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}}$$

と定める．この v_f が $v_f^{-1}((0,\infty))$ 上で $\Delta \log v_f \geq v_f^2$ をみたすことが示されれば，Ahlfors–Schwarz の補題（定理 3.18）より Δ_R 上で

$$v_f \leq \frac{2\,R}{R^2 - |z|^2}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{|f'|}{1+|f|^2} \frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j) \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \leq \frac{1}{C_1} \frac{2\,R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立ち，求める不等式を得る．従って，以下では $v_f^{-1}((0,\infty))$ 上で $\Delta \log v_f \geq v_f^2$ をみたすことを示す．まず，

$$\begin{aligned}
v_f &= C_1 |f'| \frac{1}{1+|f|^2} \frac{1}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} \frac{|f-\alpha_j|}{(1+|\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}} (1+|f|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \dfrac{1}{(1+|f|^2)^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\prod_{j=1}^{q} \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \\
&= C_1 |f'| (1+|f|^2)^{-1} \frac{\left\{\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} (1+|\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}}\right\} (1+|f|^2)^{\frac{q}{2}}}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} |f-\alpha_j|\right) \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)} \\
&= \frac{C_1 |f'| \left\{\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} (1+|\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}}\right\} (1+|f|^2)^{\rho}}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} |f-\alpha_j|\right) \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)}
\end{aligned}$$

となる．次に，零点をもたない正則関数 h に対して $\Delta \log |h| = 0$ が成り立つことを用いれば，$v_f^{-1}((0,\infty))$ 上で

$$\begin{aligned}
\Delta \log v_f &= \Delta \left(\log \frac{C_1 |f'| \displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} (1+|\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q-1} |f-\alpha_j|} \right) + \Delta \left(\log \frac{(1+|f|^2)^{\rho}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \right) \\
&= \Delta \left(\log \frac{(1+|f|^2)^{\rho}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q} \log \frac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \right)
\end{aligned}$$

となり，さらに不等式 (3.2.13) を用いれば，

$$> C_1^2 \, \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\chi(f,\alpha_j)^2 \left(\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}\right)^2} = v_f^2$$

が得られる．よって，$v_f^{-1}((0,\infty))$ 上で $\Delta \log v_f \geq v_f^2$ をみたすことが示された． □

定理 3.24. q を 3 以上の整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{q-1}$ を相異なる $\mathbb{C}$ の点，$\alpha_q = \infty$，$f : \Delta_R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ を除外値にもつ任意の非定数正則関数とする．このとき，$0 < \eta < \dfrac{q-2}{q}$ なる任意の η に対して，ある $C > 0$ が在って，Δ_R 上で

$$\frac{|f'|}{(1+|f|^2) \prod\limits_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j)^{1-\eta}} \leq C \, \frac{R}{R^2 - |z|^2}$$

が成り立つ．

証明. 命題 3.23 より，ある $a_0 = a_0(q) > 1$ 及びある $C_2 = C_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_q) > 0$ が在って，Δ_R 上で

$$\frac{|f'|}{1+|f|^2} \, \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j) \log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \leq C_2 \, \frac{2\,R}{R^2 - |z|^2}$$

が成り立つ．そこで，$0 < \eta < \dfrac{q-2}{q}$ なる任意の η に対して，関数 $\varphi : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を

$$\varphi(x) := \frac{\log(a_0\, x^2)}{x^\eta}$$

と定めると，$\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ より φ は有界である．従って，ある $M > 0$ が存在して，任意の $x \in [1,\infty)$ に対して

$$\varphi(x) \leq M, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{M} \frac{1}{x^\eta} \leq \frac{1}{\log(a_0\, x^2)}$$

が成り立つ．特に Δ_R 上で $\dfrac{1}{\chi(f,\alpha_j)} \geq 1$ $(j = 1, \cdots, q)$ となるため，上の x に $\dfrac{1}{\chi(f,\alpha_j)}$ を代入して整理すると，$j = 1, \cdots, q$ に対して

$$\frac{1}{\left(\dfrac{M}{\chi(f,\alpha_j)^\eta}\right)} \leq \frac{1}{\log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}}$$

が成り立つ．故に Δ_R 上で

$$\begin{aligned}
C_2 \frac{2R}{R^2 - |z|^2} &\geq \frac{|f'|}{1+|f|^2} \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j) \log \dfrac{a_0}{\chi(f,\alpha_j)^2}} \\
&\geq \frac{|f'|}{1+|f|^2} \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j) \left(\dfrac{M}{\chi(f,\alpha_j)^{\eta}} \right)} \\
&= \frac{|f'|}{1+|f|^2} \frac{1}{M^q \prod_{j=1}^{q} \chi(f,\alpha_j)^{1-\eta}}
\end{aligned}$$

が成立するため，$C := 2\,C_2\,M^q\,(>0)$ とおけば，求める不等式を得る． □

3.3 m-Riemann 面における curvature estimate

この節では，幾つかの言葉や補題を準備をした後に，[Ros, Theorem 3] の一般化にあたる compact property が m-curvature estimate をみたさないための必要条件（定理 3.30）を定式化する．次に応用として，この主結果を 3.1 節で述べた Liouville 型 property P_L や Picard 型 property P_X に適用することで，Bernstein の定理の一般化（定理 3.31，系 3.32）や，藤本の定理の一般化（定理 3.33，系 3.34）を証明する．

定義 3.25. Σ を共形計量

$$ds^2 = (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$$

（但し，$f\,dz$ を Σ 上の正則 1 形式，g は Σ 上の有理型関数，$m \in \mathbb{N}$）が付随した開 Riemann 面とする．このとき，組 $(f\,dz,\,g)$ を **Weierstrass の m-pair** または単に **m-pair** と呼ぶ．また，m-pair $(f\,dz,\,g)$ を伴う開 Riemann 面 $(\Sigma,\,f\,dz,\,g)$ を **m-Riemann 面**と呼ぶ．

注意 3.26. [Oss, Lemma 8.2] で行われた極小曲面の正則性についての議論と同様にして，次のことが示される：

$$\begin{aligned}
&0 < (1+|g|^2)^m\,|f|^2 < +\infty \\
\Longleftrightarrow\ &\{f=0\} = \{g=\infty\} (=: A) \quad \text{and} \quad \mathrm{ord}_{\frac{1}{g}}(p) : \mathrm{ord}_f(p) = 1 : m \quad (p \in A).
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

また，一般に共形計量 $ds^2 = \lambda(z)^2\,|dz|^2$ に対して，$K_{ds^2} = -\dfrac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$ で与えられる．よって，m-Riemann 面 $(\Sigma,\,f\,dz,\,g)$ の Gauss 曲率 K_{ds^2} は

$$K_{ds^2} = -\frac{2\,m\,|g'|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}\,|f|^2}. \ \blacklozenge \tag{3.3.2}$$

次の補題は [宮岡 22, 補題 6.21 定理 10.3] や [Oss, Lemma 8.5 Theorem 11.1] を参考に定式化した：

補題 3.27. 任意の $L > 0$, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, L と m にしか依らないある $C = C(L, m) > 0$ が在って，Δ_R 上 $|g| < L$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Delta_R,\, f\,dz,\, g)$ に対して,

$$|K_{ds^2}(0)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d(0)}$$

が成り立つ．ここで，$K_{ds^2}(0)$ は点 $0 \in \Delta_R$ での Gauss 曲率，$d(0)$ は点 0 から $\partial\Delta_R$ までの測地的距離である.

証明. 任意の $L > 0$，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$C := \sqrt{2\,m}\,L\,(1 + L^2)^{\frac{m}{2}}\,(> 0)$ とおく．このとき，Δ_R 上 $|g| < L$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Delta_R, f dz, g)$ に対して,

$$|K_{ds^2}(0)|^{\frac{1}{2}}\, d(0) \leq C$$

となることを示せばよい．そこで，Δ_R 上 $|g| < L$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Delta_R,\, f\,dz,\, g)$ を取り固定する．Δ_R 内の任意の原点からの発散路 γ に対して,

$$d(0) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} ds \leq \int_{\gamma} (1 + |g|^2)^{\frac{m}{2}}\; |f|\,|dz| \leq (1 + L^2)^{\frac{m}{2}} \int_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \tag{3.3.3}$$

が成り立つ.

次に，発散路を構成する．Δ_R は単連結なので，Cauchy の積分定理から $0, z \in \Delta_R$ を結ぶ f の線積分は経路に依存しない．そこで，$F : \Delta_R(\subset \mathbb{C}_z) \longrightarrow \mathbb{C}_w$;

$$w = F(z) := \int_0^z f(\zeta)\,d\zeta$$

を定めると，$F(0) = 0 \in \mathbb{C}_w$ をみたす f の原始関数（特に正則関数）である．g が Δ_R 上有界（特に極がない）なので (3.3.1) から f は零点をもたない．これは $F'(z) = f(z) \neq 0$ $({}^\forall z \in \Delta_R)$ を意味するため，F は Δ_R 上局所単葉，つまり

$$(\#) \quad {}^\forall z \in \Delta_R,\ {}^\exists U : z \text{ の開近傍} \quad \text{s.t.} \quad F|_U : U \longrightarrow F(U) : \text{双正則}$$

が成り立つ．F の定義域が有界領域 Δ_R であることから Liouville の定理を用いれば, ある $\rho > 0$ が存在して $V_0 = \{w \in \mathbb{C}_w : |w| < \rho\}$ は条件 $(\#)$ をみたす最大円板となる．そして，$U_0 := F^{-1}(V_0)$ とし, F の逆写像を $G : V_0(\subset \mathbb{C}_w) \longrightarrow U_0(\subset \mathbb{C}_z)$; $z = G(w)$ とする．また, $w_0 \in \mathbb{C}_w$ を $|w_0| = \rho$ で G がその周りに拡張できない点とする．さらに，曲線

$$\begin{aligned} l &: [0, 1) \longrightarrow V_0(\subset \mathbb{C}_w)\ ;\ \gamma(t) = t\,w_0\,, \\ C &: [0, 1) \longrightarrow U_0(\subset \mathbb{C}_z)\ ;\ G \circ \gamma(t) = G(t\,w_0) \end{aligned}$$

を定める．このとき，C は Δ_R 内の発散路である $(*)$.

[$(*)$ **の証明始**] 仮に，C が Δ_R 内の発散路でない，つまり Δ_R 内のあるコンパクト部分集合 K_0 が在って，$(G \circ \gamma)([0, 1)) \subset K_0$ であると仮定する．$\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1)$ で $t_n \to 1$ $(n \to \infty)$ となるものを取り，さらに $\{(G \circ \gamma)(t_n)\}_{n=1}^{\infty}(\subset (G \circ \gamma)([0, 1)) \subset K_0)$ を考える．K_0 は点列コンパクトな

ので，必要があれば部分列を取ることにより $z_0 \in \Delta_R$ が在って，$(G\circ\gamma)(t_n) \to z_0$ をみたす．ここで，F は $z_0 \in \Delta_R$ で連続関数なので，

$$\lim_{n\to\infty} F((G\circ\gamma)(t_n)) = F(\lim_{n\to\infty}(G\circ\gamma)(t_n)) = F(z_0).$$

一方，$F\circ G = \mathrm{id}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} F((G\circ\gamma)(t_n)) = \lim_{n\to\infty}\gamma(t_n) = w_0.$$

よって，$F(z_0) = w_0$ である．また，$F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ が開写像であり，$\overline{U_0}$ は収束列 $\{(G\circ\gamma)(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を含む閉集合なので，$\overline{U_0} \cap F^{-1}(w_0) = \{z_0\}$ が示される．これは w_0 の定義に矛盾するため，C は Δ_R 内の発散路である．[$(*)$ **の証明終**]

$G' = \dfrac{1}{F'} = \dfrac{1}{f}$ 及び $|\gamma'(t)| = |w_0| = \rho$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int_C |f(z)|\,|dz| &= \int_0^1 |f((G\circ\gamma)(t))| \left|\frac{d(G\circ\gamma)}{dt}(t)\right| dt \\ &= \int_0^1 |f((G\circ\gamma)(t))| \left|\frac{dG}{dw}(\gamma(t))\right| \left|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right| dt \\ &= \int_0^1 \rho\, dt = \rho\end{aligned}$$

となる．C は Δ_R 内の原点からの発散路なので，(3.3.3) と合わせると

$$d(0) \le (1+L^2)^{\frac{m}{2}}\,\rho. \tag{3.3.4}$$

次に，$G : \Delta_\rho \longrightarrow \Delta_R$ に対して，Schwarz の補題を用いれば（適用の仕方は 4 行下を参照），

$$|G'(0)| \le \frac{R}{\rho}. \tag{3.3.5}$$

$f(0) = \dfrac{1}{G'(0)}$, (3.3.5), (3.3.4) を順に用いると，

$$(1+L^2)^{\frac{m}{2}}\,|f(0)| = (1+L^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{|G'(0)|} \ge (1+L^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{\rho}{R} \ge \frac{d(0)}{R}. \tag{3.3.6}$$

$g : \Delta_R \longrightarrow \Delta_L$ に対して，$\widetilde{g} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$; $\widetilde{g}(z) := \dfrac{g(R\,z)}{L}$ を定め，これに Schwarz–Pick の補題（定理 3.16，特に (3.2.2)）を用いれば，

$$\frac{R}{L}\,|g'(0)| = |\widetilde{g}\,'(0)| \le 1, \quad \text{i.e.,} \quad |g'(0)|\,R \le L. \tag{3.3.7}$$

以上より，(3.3.2), (3.3.6), (3.3.7) 及び $1 \leq (1+|g(0)|^2)^{\frac{m}{2}+1}$ を順に用いれば

$$
\begin{aligned}
|K_{ds^2}(0)|^{\frac{1}{2}}\, d(0) &= \frac{\sqrt{2\,m}\,|g'(0)|}{(1+|g(0)|^2)^{\frac{m}{2}+1}\,|f(0)|}\, d(0) \\
&\leq \frac{\sqrt{2\,m}\,|g'(0)|}{(1+|g(0)|^2)^{\frac{m}{2}+1}}\, R\,(1+L^2)^{\frac{m}{2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{2\,m}\,L\,(1+L^2)^{\frac{m}{2}}}{(1+|g(0)|^2)^{\frac{m}{2}+1}} \\
&\leq \sqrt{2\,m}\,L\,(1+L^2)^{\frac{m}{2}} \\
&= C.
\end{aligned}
$$

□

次の補題は [Ros, Lemma 6] を m-Riemann 面へ一般化したものである．

補題 3.28. $\{(\Sigma,\, f_n\, dz,\, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を m-Riemann 面の列とし，その Gauss 曲率を $K_{ds_n^2}$ と表す．ここで，ある非定数有理型関数 $g \in \mathscr{M}(\Sigma)$ が在って $g_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g$ on Σ をみたし，さらに $\{K_{ds_n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ が Σ 上一様有界であるとき，以下の (1), (2) のどちらか一方が成立する：

(1) $\{K_{ds_n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{K_{ds_{n_k}^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が在って，$K_{ds_{n_k}^2} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} 0$ on Σ

(2) $\{ds_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{ds_{n_k}^2\}_{k=1}^{\infty}$ 及びある Σ 上の正則 1 形式 $f\,dz$ が在って，$ds^2 := (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ は Σ 上の共形計量であり，$ds_{n_k}^2 \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} ds^2$ on Σ をみたす．

証明. (3.3.2) より $K_{ds_n^2}$ は Σ 上非正で，また Σ 上一様有界なので，必要があれば相似変換を行うことにより

$$-1 \leq K_{ds_n^2}(p) \leq 0 \quad ({}^{\forall}n \in \mathbb{N},\, {}^{\forall}p \in \Sigma)$$

としてもよい．$p \in \Sigma$ に対して (Ω_p, z) を p を中心とする局所座標系とする．そこで，g の不分岐点かつ極でない点 p を任意に取る．命題 2.27 より十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p 及び十分大きな番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，g_n $(n \geq N)$, g は Ω_p 上分岐点をもたない有界有理型（特に正則）で，$g_n \rightrightarrows g$ on Ω_p をみたす．このとき，Ω_p 上で $\dfrac{2\,m\,|g'|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}} > 0$ なので，ある $\varepsilon > 0$ が在って，Ω_p 上で

$$\frac{2\,m\,|g'|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}} \geq 2\,\varepsilon^2$$

をみたす．また，$\dfrac{2\,m\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^{m+2}} \rightrightarrows \dfrac{2\,m\,|g'|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}}$ on Ω_p が成り立つため，ある番号 $N^{'} \in \mathbb{N}_{\geq N}$ が在って，$n \geq N^{'}$ ならば，Ω_p 上で

$$\frac{2\,m\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^{m+2}} \geq \varepsilon^2$$

が成り立つ．さらに，(3.3.1) より f_n $(n \geq N')$ は Ω_p 上零点をもたない．故に，$n \geq N'$ ならば

$$\frac{\varepsilon^2}{|f_n|^2} \leq \frac{2\,m\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^{m+2}\,|f_n|^2} = |K_{ds_n^2}| \leq 1, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{|f_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \text{ on } \Omega_p \tag{3.3.8}$$

をみたす．ここで，(3.3.8)，Montel の定理（定理 2.23）及び Hurwitz の定理（命題 2.29）を用いれば，正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，Ω_p 上の広義正規族，より正確には，Ω_p 上で零点をもたない正則関数，もしくは ∞ に局所一様収束する部分列をもつ $(*1)$．

[$(*1)$ **の証明始**](3.3.8) から $\left\{h_n := \dfrac{1}{f_n}\right\}_{n=N'}^{\infty}$ は Ω_p 上一様有界な正則関数列である．Montel の定理 (定理 2.23) を用いれば，$\{h_n\}_{n=N'}^{\infty}$ のある部分列 $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 及びある正則関数 $h : \Omega_p \longrightarrow \mathbb{C}$ が在って，$h_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} h$ on Ω_p をみたす．ここで，極限関数 h は (a) 定数 0，(b) 0 でない定数，(c) 非定数正則関数のいずれかであり，h が (c) の場合は，Ω_p 上で零点をもたないことが示される．実際，h が Ω_p 上で零点 p_0 をもつ非定数正則関数と仮定すれば，Hurwitz の定理（命題 2.29）から十分小さい p_0 の近傍 $\Omega_{p_0}(\subset \Omega_p)$ 及び十分大きい番号 $K \in \mathbb{N}$ が在って，

$$(h_{n_K} \text{ の } \Omega_{p_0} \text{ での零点の位数})=(h \text{ の } \Omega_{p_0} \text{ での零点の位数}) \geq 1$$

となるため，f_{n_K} は Ω_p 内に極をもつ．これは $\{f_{n_k}\,dz\}_{k=1}^{\infty}$ が Σ 上の正則 1 形式の列であることに反する．よって，h_{n_k} は Ω_p 上で零点をもたない正則関数 h（先の場合の (b) または (c)），もしくは定数 0（先の場合の (a)）に局所一様収束する．前者の場合 f_{n_k} は Ω_p 上で零点をもたない正則関数 $\dfrac{1}{h}$ に，後者の場合 f_{n_k} は Ω_p 上で ∞ に局所一様収束する．[$(*1)$ **の証明終**]

そこで，

$$\Sigma_1 := \{p \in \Sigma : g(p) \neq \infty \text{ and } p \text{ は } g \text{ の不分岐点 }\} \subset \Sigma$$

と定めると，Σ 上大域的に定義される正則 1 形式の列 $\{f_n\,dz\}_{n=1}^{\infty}$ は Σ_1 上の広義正規族となる．ここで，

$$\Sigma - \Sigma_1 = \{p \in \Sigma : g(p) = \infty\} \cup \{p \in \Sigma : p \text{ は } g \text{ の分岐点 }\}$$

は離散集合であることに注意する．必要があれば部分列を取ることにより，Hurwitz の定理を用いて示した上の主張と合わせると，次の 2 つの場合に分けられる：

(2) Σ_1 上で零点をもたないある正則 1 形式 $f\,dz$ が在って，$f_n\,dz \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f\,dz$ on Σ_1.

(1) $f_n\,dz \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} \infty$ on Σ_1.

(2) の場合に，$f\,dz$ が Σ 上の正則 1 形式で，$ds^2 := (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ は Σ 上の共形計量となり，$ds_n^2 \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} ds^2$ on Σ をみたすことを示す．$\Sigma - \Sigma_1$ の任意の点 p をとる．$\Sigma - \Sigma_1$ の各点は孤立しているので，$\overline{\Omega_p}$ には p 以外に g の極や分岐点を含まない（つまり，$\overline{\Omega_p} - \{p\} \subset \Sigma_1$ となる）p の相対コンパクトな近傍 Ω_p を取ることができる．ここで，f は $\overline{\Omega_p} - \{p\}$ 上では零点をもたない正則関数であることに注意する．また，$\partial\Omega_p \subset \Sigma_1$ かつ $\partial\Omega_p$ はコンパクトなので，$f_n \rightrightarrows f$ on $\partial\Omega_p$ となる．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\partial\Omega_p$ 上一様有界である．実際，f は $\partial\Omega_p$ 上で有界なので，ある

$M > 0$ が在って，

$$|f| \leq M \quad \text{on } \partial\Omega_p$$

をみたし，また $f_n \rightrightarrows f$ on $\partial\Omega_p$ より十分大きな番号 $N \in \mathbb{N}$ が在って，$n \geq N$ ならば $|f_n| \leq |f| + 1 \leq M+1$ on $\partial\Omega_p$ をみたすので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\widetilde{M} := \max\left\{\max_{\partial\Omega_p}|f_1|, \cdots, \max_{\partial\Omega_p}|f_{N-1}|, M+1\right\}$ (> 0) に $\partial\Omega_p$ 上一様に抑えられる．よって，各 f_n に対して，最大値原理を用いれば $\overline{\Omega_p}$ 上で

$$|f_n| \leq \widetilde{M} \quad ({}^{\forall}n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．Montel の定理（定理 2.23）より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω_p 上の古典的な正規族．p は $\Sigma - \Sigma_1$ の任意の点なので，$\{f_n\, dz\}_{n=1}^{\infty}$ は Σ 上の古典的な正規族，より正確には

$$f_n\, dz \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f\, dz \text{ on } \Sigma \text{ かつ } f\, dz \text{ は } \Sigma \text{ 上の正則 1 形式で } \Sigma_1 \text{ 上零点をもたない}$$

となる．ここで Hurwitz の定理（命題 2.29）や命題 2.27 を用いれば，次のことが示される $(*2)$：

(A)　f は g の極でのみ零点を取る．

(B)　p が g の k 位の極ならば，p は f の $k\,m$ 位の零点となる．

[$(*2)$ **の証明始**] まず，(A) を示す．既に $f\,dz$ が零点をもつとすれば，$\Sigma - \Sigma_1$ の点であることを示したので，$f\,dz$ の零点が g の（極を除く）分岐点集合に属さないことを示せばよい．そこで，$f\,dz$ の零点 p が g の極でない分岐点であると仮定する．$\Sigma - \Sigma_1$ の離散性と命題 2.27 の (case 1) より十分小さな p の近傍 Ω_p と十分大きな番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$\overline{\Omega_p} \cap (\Sigma - \Sigma_1) = \{p\}$ 及び g_n $(n \geq N)$, g は Ω_p 上正則となる．一方で，Hurwitz の定理（命題 2.29）より十分大きな番号 $N' \in \mathbb{N}_{\geq N}$ を取ると，

$$（f_n \text{ の } \Omega_p \text{ における零点の位数}）=（f \text{ の } \Omega_p \text{ における零点の位数}）\geq 1 \quad (n \geq N')$$

が成り立つ．よって，(3.3.1) より g_n $(n \geq N')$ は Ω_p 内に極をもつため，先の主張と矛盾する．

次に，(B) を示す．p を g の k 位の極とする．$\Sigma - \Sigma_1$ が離散集合であることと命題 2.27 の (case 2) から，十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p と十分大きな $N \in \mathbb{N}$ が在って，$\overline{\Omega_p} \cap (\Sigma - \Sigma_1) = \{p\}$，$\dfrac{1}{g_n}$ $(n \geq N)$, $\dfrac{1}{g}$ は Ω_p 上正則で $\dfrac{1}{g_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{g}$ on Ω_p をみたす．Hurwitz の定理（命題 2.29）より，$\widetilde{N} \in \mathbb{N}_{\geq N}$ を十分大きく取ると $n \geq \widetilde{N}$ ならば

$$\left(\frac{1}{g_n} \text{ の } \Omega_p \text{ における零点の位数}\right) = \left(\frac{1}{g} \text{ の } \Omega_p \text{ における零点の位数}\right) = \operatorname{ord}_{\frac{1}{g}}(p) = k$$

となる．(3.3.1) から f_n $(n \geq \widetilde{N})$ は Ω_p 内で $k\,m$ 位の零点をもつ．このとき，p が f の零点であることを背理法を用いて示す．そこで，p は f の零点でないと仮定する．$f_n \rightrightarrows f$ on $\overline{\Omega_p}$ 及び (2.2.8) より，$f_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} f$ on $\overline{\Omega_p}$ となる．さらに，命題 2.27 の (case 2) の証明を思い出すと，$\dfrac{1}{f_n} \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} \dfrac{1}{f}$ on $\overline{\Omega_p}$ が成り立つ．また，$\dfrac{1}{f}$ が $\overline{\Omega_p}$ 上有界であること，つまりある $M > 0$ が存在して，

$\dfrac{1}{|f|} < M$ on $\overline{\Omega_p}$ が成立することに注意する．よって，命題 2.4 を用いれば，$\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{f}$ on $\overline{\Omega_p}$，すなわち十分大きな番号 $N^{'} \geq \widetilde{N}$ が存在して，

$$\frac{1}{|f_{N'}|} \leq \frac{1}{|f|} + 1 < M + 1 \quad \text{on } \overline{\Omega_p}$$

が成り立つ．これは，f_n $(n \geq \widetilde{N})$ が Ω_p 上零点をもつことに矛盾するため，p は f の零点である．さらに，Hurwitz の定理（命題 2.29）を用いれば，十分大きい $\widehat{N} \in \mathbb{N}_{\geq \widetilde{N}}$ が存在して，

$$\mathrm{ord}_f(p) = (f \text{ の } \Omega_p \text{ 内の零点の位数}) = (f_{\widehat{N}} \text{ の } \Omega_p \text{ 内の零点の位数}) = k\,m.$$

[$(*2)$ **の証明終**]

従って，(3.3.1) から $ds^2 := (1 + |g|^2)^m \, |f|^2 \, |dz|^2$ は Σ 上の共形計量である．さらに，各 $0 \leq l \leq m$ に対して，$g_n^l \, f_n \, dz \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} g^l \, f \, dz$ on Σ となることが示される $(*3)$．そこで，任意に $p \in \Sigma$ を取ると，ある p の近傍 Ω_p が存在して，

$$g_n^l \, f_n \rightrightarrows g^l \, f \ \text{ on } \Omega_p, \quad \text{i.e.,} \quad |g_n|^{2l} \, |f_n|^2 \rightrightarrows |g|^{2l} \, |f|^2 \ \text{ on } \Omega_p$$

をみたすため，$ds_n^2 \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} ds^2$ on Σ.

[$(*3)$ **の証明始**] 各 $1 \leq l \leq m$ に対して，Σ 内の各点 p のある近傍 Ω_p 上で $g_n^l \, f_n \rightrightarrows g^l \, f$ on Ω_p となることを示す．そこで，任意に $p \in \Sigma$ を取る．

(case $2-1$) $g(p) \neq \infty$ のとき

命題 2.27 の (case 1) より十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p が存在して，$g_n^l \rightrightarrows g^l$ on Ω_p が成り立つ．よって，$g_n^l \, f_n \rightrightarrows g^l \, f$ on Ω_p が成立する．

(case $2-2$) $g(p) = \infty$ のとき

$\Sigma - \Sigma_1$ は離散集合なので, 十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p が存在して, $\overline{\Omega_p} \cap (\Sigma - \Sigma_1) = \{p\}$ となる．ここで, g は $\partial\Omega_p$ 上の正則関数, 特に有界なので命題 2.4 より $g_n^l \rightrightarrows g^l$ on $\partial\Omega_p$．従って，$g_n^l \, f_n \rightrightarrows g^l \, f$ on $\partial\Omega_p$ が成り立つため，(2) の冒頭と同様の議論を繰り返せば，$\{g_n^l \, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\partial\Omega_p$ 上一様有界であることが示される．再び最大値原理を用いれば，$\{g_n^l \, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{\Omega_p}$ 上一様有界となる．$\{h_n := g_n^l \, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び $h := g^l \, f$ とおく．ここで，$h_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} h$ on Ω_p でない，すなわち

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}K_0 \subset \Omega_p: \text{ コンパクト部分集合},\ {}^{\exists}\varepsilon_0 > 0,\ {}^{\exists}z_k \in K_0,\ {}^{\exists}\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の部分列} \\ &\text{s.t. } |h_{n_k}(z_k) - h(z_k)| \geq \varepsilon_0 \quad ({}^{\forall}k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

と仮定をして矛盾を導く．$\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は Ω_p 上一様有界，特に古典的な正規族なので，必要があれば部分列を取ることにより，ある正則関数 $H : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在して，$h_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} H$ on Ω_p．ここで，Ω_p 上 $H \not\equiv h$ である．実際，$H \equiv h$ on Ω_p とすると，$h_{n_k} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} h$ on Ω_p なので，$k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|h_{n_k}(z) - h(z)| < \varepsilon_0 \quad ({}^{\forall}z \in K_0,\, k \geq k_0),$$

特に，$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \varepsilon_0$ $(k \geq k_0)$ となり先の不等式に矛盾する．一方，任意の $z \in \Omega_p - \{p\}$ に対して，(case $2-1$) から

$$H(z) = \lim_{k\to\infty} h_{n_k}(z) = \lim_{k\to\infty} g^l_{n_k} f_{n_k}(z) = g^l f(z) = h(z)$$

となる．一致の定理を用いれば，$H \equiv h$ on Ω_p が成り立つが，これは明らかに不合理である．よって，$h_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} h$ on Ω_p，つまり $g^l_n f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} g^l f$ on Ω_p が成立する．必要があれば Ω_p を小さくすることにより $g^l_n f_n \rightrightarrows g^l f$ on Ω_p.

以上より，$g^l_n f_n\, dz \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} g^l f\, dz$ on Σ が示される．[(∗3) の証明終]

次に (1) の場合を考える．$\Sigma - \Sigma_1$ から任意に点 p をとる．このとき，さらに次の 2 つの場合に分けられる（このいずれの場合も $K_{ds^2_n} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} 0$ on Σ となることを示す.）：

$(1-1)$ $g(p) \neq \infty$（つまり p は g の分岐点）のとき

$(1-2)$ $g(p) = \infty$ のとき

$(1-1)$ のとき，$\Sigma - \Sigma_1$ の離散性と命題 2.27 の (case 1) から，十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p と十分大きな $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$\overline{\Omega_p} \cap (\Sigma - \Sigma_1) = \{p\}$ 及び g_n $(n \geq N)$, g は Ω_p 上正則である．よって，(3.3.1) から f_n $(n \geq N)$ は Ω_p 上零点をもたない正則関数となる．次に $\overline{N_p} \subset \Omega_p$ なる p の近傍 N_p をとる．$\partial N_p \subset \Sigma_1$ であり，∂N_p はコンパクトなので

$$f_n \rightrightarrows \infty \ \text{ on } \partial N_p, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{\partial N_p} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\} = 0.$$

$\dfrac{1}{f_n}$ $(n \geq N)$ は Ω_p 上零点をもたない正則関数なので，最大値原理を用いれば

$$\sup_{\overline{N_p}} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\} = \max_{\overline{N_p}} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\} = \max_{\partial N_p} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\} = \sup_{\partial N_p} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\}.$$

両辺 $n \to \infty$ とすれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{N_p}} \left\{ \frac{1}{|f_n|} \right\} = 0$，つまり $f_n \rightrightarrows \infty$ on $\overline{N_p}$.

$(1-2)$ のとき，$\Sigma - \Sigma_1$ の離散性と命題 2.27 の (case 2) から，十分小さな p の相対コンパクトな近傍 Ω_p と十分大きな $N \in \mathbb{N}$ が在って，$\overline{\Omega_p} \cap (\Sigma - \Sigma_1) = \{p\}$, $\dfrac{1}{g_n}$ $(n \geq N)$, $\dfrac{1}{g}$ は Ω_p 上有界有理型（特に正則）で $\dfrac{1}{g_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{g}$ on Ω_p が成り立つ．特に，$\dfrac{1}{g_n}$ $(n \geq N)$ の有界性から g_n $(n \geq N)$ は Ω_p 内に零点をもたないことに注意する．また，(3.3.1) から f_n が零点をもつのは g_n が極をもつとき（Ω_p 内では p のみ）であり，位数の比は $\mathrm{ord}_{f_n} : \mathrm{ord}_{\frac{1}{g_n}} = m : 1$ なので，$g^m_n f_n$ $(n \geq N)$ も Ω_p 内で零点をもたない正則関数である．そこで，$\overline{N_p} \subset \Omega_p$ なる p の近傍を取ると，$\partial N_p \subset \Sigma_1$ であり，∂N_p はコンパクトなので

$$g^m_n f_n \rightrightarrows \infty \quad \text{on } \partial N_p.$$

$(1-1)$ と同様に，Ω_p 上零点をもたない正則関数 $\dfrac{1}{g^m_n f_n}$ $(n \geq N)$ に対して最大値原理を用いれば，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{N_p}} \left\{ \frac{1}{|g^m_n f_n|} \right\} = 0, \quad \text{i.e.,} \quad g^m_n f_n \rightrightarrows \infty \quad \text{on } \overline{N_p}$$

が成り立つ．

以上 $(1-1)$, $(1-2)$ より，任意の $p \in \Sigma$ に対して，ある近傍 Ω_p が在って，（関係式 $(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2 \geq |f_n|^2$, $(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2 \geq |f_n|^2\,|g_n|^{2m}$ から）

$$(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2 \rightrightarrows \infty \quad \text{on } \Omega_p$$

をみたす．また，必要があれば p の近傍 Ω_p を縮めることにより，$|\nabla\{g_n\}_{n=1}^{\infty}|_e$ は Ω_p 上一様有界となる．従って，ある $M>0$ が在って，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{8\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^2} = |\nabla\widehat{g_n}|_e^2 \leq M \quad \text{on } \Omega_p$$

が成り立つ．故に，

$$\begin{aligned}
|K_{ds_n^2}| &= \frac{2\,m\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^{m+2}\,|f_n|^2} \\
&= \frac{1}{(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2}\,\frac{8\,|g_n'|^2}{(1+|g_n|^2)^2}\,\frac{m}{4} \\
&\leq \frac{m\,M}{4}\,\frac{1}{(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2} \rightrightarrows 0 \quad \text{on } \Omega_p.
\end{aligned}$$

p は Σ の任意の点なので，

$$K_{ds_n^2} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

□

定義 3.29. P を compact property，$m \in \mathbb{N}$ とする．このとき，P が ***m*-curvature estimate** をみたすとはある $C = C(P,m) > 0$ が在って，$g \in \mathscr{P}(\Sigma)$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Sigma,\, f\,dz,\, g)$ に対して，以下の不等式が成り立つことである：

$$|K_{ds^2}|\,d^2 \leq C \quad \text{on } \Sigma.$$

ここで，K_{ds^2} は計量 $ds^2 = (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ に関する Gauss 曲率，d は Σ の境界への測地的距離である．

次に，本稿の主結果にあたる compact property が m-curvature estimate をみたさないための必要条件を与える．

定理 3.30. P を compact property，$m \in \mathbb{N}$ とする．このとき，次の (1) または (2) が成立する：
(1) P は m-curvature estimate をみたす．
(2) ある $\mathbb{D}$ 上の正則 1 形式 $f\,dz$ 及びある $\mathbb{D}$ 上の非定数有理型関数 g が在って，

(A) $ds^2 = (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ が $\mathbb{D}$ 上の完備な共計計量，
(B) $g \in \mathscr{P}(\mathbb{D})$ であり，$|K_{ds^2}(0)| = \dfrac{1}{4}$, $|K_{ds^2}| \leq 1 \quad \text{on } \mathbb{D}$.

証明. P を m-curvature をみたさない compact property とする．このとき，ある m-Riemann 面の列 $\{(\Sigma_n,\, f_n\, dz,\, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 及びある $p_n \in \Sigma_n$ が在って，

$$g_n \in \mathscr{P}(\Sigma_n)\,, \quad |K_{ds_n^2}(p_n)|\, d_n(p_n)^2 \to \infty$$

をみたす．ここで，m-Riemann 面の列 $\{(\Sigma_n,\, f_n\, dz,\, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は条件

$$K_{ds_n^2}(p_n) = -\frac{1}{4} \;\; ({}^{\forall}n \in \mathbb{N})\,, \quad -1 \le K_{ds_n^2} \le 0 \text{ on } \Sigma_n \;\; ({}^{\forall}n \in \mathbb{N}), \quad d_n(p_n) \to \infty \tag{3.3.9}$$

をみたすように取ることができる $(*1)$.

[$(*1)$ **の証明始**] まず初めに，Σ_n を p_n 中心の測地的円板にしても一般性を失わない．さらに，$\Sigma'_n := \left\{p \in \Sigma_n : d_n(p, p_n) \le \dfrac{d_n(p_n)}{2}\right\}$ とおき，$d'_n(p)$ を $p \in \Sigma'_n$ と Σ'_n の境界までの距離と定める．ここで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して Gauss 曲率 $K_{ds_n^2}$ は Σ'_n 上で有界であることと $d'_n(p) \to 0$ (as $p \to \partial\Sigma'_n$) となることに注意する．このとき，必要があれば番号を付け替えることにより，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|K_{ds_n^2}(p)|\, d'_n(p)^2$ は Σ'_n の内点 p'_n で最大値を取るとして良い．よって，

$$|K_{ds_n^2}(p'_n)|\, d'_n(p'_n)^2 \ge |K_{ds_n^2}(p_n)|\, d'_n(p_n)^2 = \frac{1}{4}\, |K_{ds_n^2}(p_n)|\, d_n(p_n)^2 \to \infty$$

が成り立つ．そこで，$|K_{ds_n^2}(p'_n)|\, d'_n(p'_n)^2 \to \infty$ を保ったまま，Σ_n を Σ'_n に取りかえることができる．また，Σ'_n を $K_{ds_n^2}(p'_n) = -\dfrac{1}{4}$ をみたすように相似変換する（ここで混乱を防ぐため，取り直した計量に関する測地的距離をそのまま d'_n を用いて表すことにする）．この取りかえのもとでは $K(p)\, d(p)^2$ は不変量であることから，$d'_n(p'_n) = 2\, |K_{ds_n^2}(p'_n)|^{\frac{1}{2}}\, d'_n(p'_n) \to \infty$ となる．再び Σ'_n を p'_n 中心の測地的円板とし，

$$\Sigma''_n := \left\{p \in \Sigma'_n : d'_n(p, p'_n) \le \frac{d'_n(p'_n)}{2}\right\}$$

と定める．このとき $p \in \Sigma''_n$ ならば $d'_n(p) \ge \dfrac{d'_n(p'_n)}{2}$ をみたすことに注意すると，任意の $p \in \Sigma''_n$ に対して

$$|K_{ds_n^2}(p)|\, \frac{d'_n(p'_n)^2}{4} \le |K_{ds_n^2}(p)|\, d'_n(p)^2 \le |K_{ds_n^2}(p'_n)|\, d'_n(p'_n)^2 = \frac{d'_n(p'_n)^2}{4},$$

つまり Σ''_n 上 $|K_{ds_n^2}| \le 1$ が成り立つ．さらに，$d''_n(p)$ を $p \in \Sigma''_n$ と Σ''_n の境界までの距離としたとき

$$d''_n(p'_n) = \frac{1}{2}\, d'_n(p'_n) \to \infty$$

となるため，求める主張を得る．[$(*1)$ **の証明終**]

次に，必要があれば普遍被覆を取ることにより，各 Σ_n に単連結性を課すことができる．一意化定理により各 Σ_n は $\mathbb{D}$ か $\mathbb{C}$ と等角同型であり，また，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_n = 0$ としてよい．

ここで，各 Σ_n は $\mathbb{D}$ と等角同型である．なぜならば，仮にある Σ_n が $\mathbb{C}$ と等角同型であると仮定すると，補題 3.4 より g_n は定値となり，(3.3.2) から $K_{ds_n^2} \equiv 0$ となる．しかしこれは

(3.3.9) の $K_{ds_n^2}(0)=-\dfrac{1}{4}$ に矛盾する．従って，$\{(\mathbb{D},\, f_n\, dz,\, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は m-Riemann 面の列であり，$g_n\in\mathscr{P}(\mathbb{D})$ 及び

$$K_{ds_n^2}(0)=-\frac{1}{4}\ \ (^\forall n\in\mathbb{N}),\quad -1\leq K_{ds_n^2}\leq 0 \text{ on } \mathbb{D}\ \ (^\forall n\in\mathbb{N}),\quad d_n(0)\to\infty \tag{3.3.9'}$$

（但し，$d_n(0)$ は計量 $ds_n^2=(1+|g_n|^2)^m\,|f_n|^2\,|dz|^2$ に関する原点から境界 $\partial\mathbb{D}$ までの測地的距離を表す）をみたす．ここで，P は compact property なので，必要があれば部分列を取ることにより，ある $g\in\mathscr{P}(\mathbb{D})$ が存在して，$g_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g$ on $\mathbb{D}$．ここで，補題 3.27 及び補題 3.17 を用いれば，g が $\mathbb{D}$ 上の非定数有理型関数であることが示される $(*2)$．これにより，補題 3.28 の (1) または (2) が成り立つ．さらに各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$|K_{ds_n^2}(0)|=\dfrac{1}{4}$ が成り立つので，補題 3.28 の (1)：$K_{ds_n^2}\overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} 0$ on $\mathbb{D}$ はおこりえない．従って，補題 3.28 の (2) が成り立つ．つまり，（必要ならば部分列を取ることにより）ある $\mathbb{D}$ 上の正則 1 形式 $f\,dz$ が在って，$ds^2=(1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ は $\mathbb{D}$ 上の共形計量で，$ds_n^2\overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} ds^2$ on $\mathbb{D}$ をみたす．また，(3.3.9$'$) から

$$|K_{ds^2}(0)|=\frac{1}{4},\quad -1\leq K_{ds^2}\leq 0 \text{ on } \mathbb{D}.$$

ここで，共形計量 ds^2 は $\mathbb{D}$ 上で完備であることが示される．実際，原点を始点とする $\mathbb{D}$ 内の任意の発散路 C の計量 ds^2 に関する長さが $+\infty$ であることを示せば十分である．この C は境界へ向かう曲線なので，

$$\int_C ds_n\geq\inf\left\{\int_\gamma ds_n\ :\ \gamma \text{ は } z=0 \text{ から } |z|=1 \text{ へ向かう曲線}\right\}=d_n(0)$$

をみたす．$ds_n^2\overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} ds^2$ on $\mathbb{D}$ なので，上式の両辺を $n\to\infty$ とすると，

$$\int_C ds=+\infty.$$

[$(*2)$ **の証明始**] g が $\mathbb{D}$ 上の定値写像であると仮定して矛盾を導く．（$g\equiv\infty$ on $\mathbb{D}$ の場合は各 $(f_n\,dz,\, g_n)$ に適切な 1 次変換を施すことで）ある $\alpha\in\mathbb{C}$ が在って，$\mathbb{D}$ 上 $g\equiv\alpha$ と表せる．$L:=|\alpha|+1$ 及び $m\in\mathbb{N}$ に対して，補題 3.27 を用いれば，ある L と m にしか依らない $C=C(L,m)>0$ が在って，Δ_ρ 上 $|G|<L$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Delta_\rho,\, F\,dz,\, G)$ に対して，

$$|K_{ds^2}(0)|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C}{d(\rho)} \tag{3.3.10}$$

（但し，$d(\rho)$ は計量 $ds^2=(1+|G|^2)^m\,|F|^2\,|dz|^2$ に関する原点から $\partial\Delta_\rho$ までの測地的距離）が成り立つ．この $C=C(L,m)>0$ に対して $0<r<1$ を $2C<\log\dfrac{1+r}{1-r}$ をみたすよう取り，$R:=\log\dfrac{1+r}{1-r}$ と定める．ここで，R は Δ_r の双曲半径であることに注意する．

いま g は $\mathbb{D}$ 上有界なので，命題 2.4 から $g_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} g$ on $\mathbb{D}$，特に $g_n \rightrightarrows g$ on $\overline{\Delta_r}$ をみたす．よって，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が在って，$n \geq n_0$ ならば $\overline{\Delta_r}$ 上で

$$|g_n| \leq |g| + 1 = |\alpha| + 1 = L$$

をみたす．故に，$(\Delta_r,\, f_n\, dz,\, g_n)$ $(n \geq n_0)$ に対して curvature estimate の不等式 (3.3.10) を適用すると，$n \geq n_0$ ならば

$$|K_{ds_n^2}(0)|^{\frac{1}{2}}\, d_n(r) \leq C$$

（但し，$d_n(r)$ は $ds_n^2 = (1 + |g_n|^2)^m\, |f_n|^2\, |dz|^2$ に関する原点から $\partial\Delta_r$ までの測地的距離）をみたす．(3.3.9$'$) と合わせると，上式は

$$d_n(r) \leq 2\,C \quad (n \geq n_0) \tag{3.3.11}$$

となる．次に共形計量 ds_n^2 に関する原点から境界 $\partial\mathbb{D}$ までの測地的距離 $d_n(0)$ を改めて R_n とおく．さらに R_n を双曲半径にもつ $\mathbb{D}$ 内の円周を $\partial\Delta_{r_n}$，つまり

$$r_n := \frac{e^{R_n} - 1}{e^{R_n} + 1}\,(< 1), \quad R_n = \log\, \frac{1 + r_n}{1 - r_n}$$

とする．$\mathbb{D}$ に対してパラメータ変換 $\phi_n : \Delta_{r_n} \longrightarrow \mathbb{D}\,;\ \phi_n(w) := \dfrac{w}{r_n}$ を施す．$(\Delta_{r_n},\, \phi_n^*(ds_n^2))$ において補題 3.17 を適用すれば，任意の $w \in \partial\Delta_{r_n r} (\subset \Delta_{r_n})$ に対して

$$(\phi_n^*(ds_n^2)\ \text{に関する}\ 0\ \text{と}\ w\ \text{の距離}) \geq (0\ \text{と}\ w\ \text{の Poincaré 距離}),$$

つまり

$$(\phi_n^*(ds_n^2)\ \text{に関する}\ 0\ \text{から}\ \partial\Delta_{r_n r}\ \text{までの測地的距離}) \geq \log\, \frac{1 + r_n\, r}{1 - r_n\, r}. \tag{3.3.12}$$

ここで，$n \to \infty$ とすると，$r_n \to 1$ より (3.3.12) の右辺は $\log\, \dfrac{1 + r_n\, r}{1 - r_n\, r} \to \log\, \dfrac{1 + r}{1 - r} = R > 2\,C$ となるため，十分大きな $N \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ が在って，$n \geq N$ ならば

$$(\phi_n^*(ds_n^2)\ \text{に関する}\ 0\ \text{から}\ \partial\Delta_{r_n r}\ \text{までの測地的距離}) > 2\,C.$$

故に，$n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d_n(r) &= (ds_n^2\ \text{に関する}\ 0\ \text{から}\ \partial\Delta_r\ \text{までの測地的距離}) \\ &= (\phi_n^*(ds_n^2)\ \text{に関する}\ 0\ \text{から}\ \partial\Delta_{r_n r}\ \text{までの測地的距離}) \\ &> 2\,C. \end{aligned}$$

これは (3.3.11) に矛盾する．[(∗2) **の証明終**] □

この主結果（定理 3.30）は，否定的な形であるが，compact property が m-curvature estimate をみたすことを判定する主張となっており，この定理を Liouville 型 property P_L と Picard 型 property P_X に対して適用すると，どちらの性質も m-curvature estimate をみたすことが示される．そこで，まずは定理 3.30 を用いて P_L が m-curvature estimate をみたすことを示す．

定理 3.31. L を任意の正の数とし，性質 P_L を命題 3.8 で与えた性質とする．このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，性質 P_L は m-curvature estimate をみたす compact property である．特に任意の $L > 0$，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある $C = C(L, m) > 0$ が在って，Σ 上で $|g| < L$ をみたす任意の m-Riemann 面 $(\Sigma, f\,dz, g)$ に対して，以下の不等式が成り立つ：

$$|K_{ds^2}(p)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d(p)} \quad ({}^\forall p \in \Sigma).$$

証明. 任意に $m \in \mathbb{N}$ を取り固定する．このとき，P_L は m-curvature estimate をみたさない compact property であると仮定すると，定理 3.30 より $\mathbb{D}$ 上の正則 1 形式 fdz 及び $\mathbb{D}$ 上の非定数有理型関数 g が在って，

(A) $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ は $\mathbb{D}$ 上の完備な共計計量，
(B) $|g| < L \quad \text{on } \mathbb{D}$

をみたす．$ds_0^2 := (1 + L^2)^m |f|^2 |dz|^2$ とおくと，$\mathbb{D}$ 上で

$$(1 + |g|^2)^{\frac{m}{2}} |f| < (1 + L^2)^{\frac{m}{2}} |f|$$

をみたすため，ds_0^2 は $\mathbb{D}$ 上の完備計量である．また (3.3.1) より f は $\mathbb{D}$ 上に零点をもたないため

$$\Delta \log \left\{(1 + L^2)^{\frac{m}{2}} |f|\right\} = 0\,, \quad \text{i.e.,} \quad K_{ds_0^2} \equiv 0 \quad \text{on } \mathbb{D}\,,$$

つまり ds_0^2 は $\mathbb{D}$ 上の平坦計量である．ここで，完備かつ平坦な 2 次元 Riemann 多様体の普遍被覆多様体は平面であること（[佐々木, 定理 3.5]）を用いれば，$(\mathbb{D}, ds_0^2)$ の普遍被覆多様体は $\mathbb{C}$ となるが，これは明らかに矛盾する． □

この定理から，次の系が成り立つ：

系 3.32. $(\Sigma, f\,dz, g)$ を m-Riemann 面とする．$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ が Σ 上の完備計量で，ある $L > 0$ が存在して，Σ 上 $|g| < L$ をみたすならば，Σ 上 $K_{ds^2} \equiv 0$，特に Σ 上 g は定数となる．

この主張は 3.4 節で確認するように，(parametric) Bernstein の定理の一般化である．本稿の証明により，この Bernstein の定理の一般化も m-Riemann 面のレベルで成り立つことが記される．すなわち，Bernstein 型の定理に必要となる本質的な情報は計量付き開 Riemann 面のみであることが導かれる．

証明. 定理 3.31 より

$$|K_{ds^2}(p)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d(p)} \quad ({}^\forall p \in \Sigma)$$

をみたす $C = C(L, m) > 0$ が存在する．ds^2 は Σ 上の完備計量なので，$d(p) = \infty$ $({}^\forall p \in \Sigma)$ と合わせると，

$$K_{ds^2} \equiv 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

特に (3.3.2) から g は Σ 上定数となる． $\square$

次に，定理 3.30 を用いて，P_X ($^{\#}X \geq m+3$) が m-curvature estimate をみたす compact property であることを導く．ここで，以下の証明で用いられる藤本の補題（定理 3.24）と，もとにした論文（[Ros, Theorem 4]）で用いられている藤本の補題が異なることに注意をする．

定理 3.33. $m \in \mathbb{N}$，$X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ とし，性質 P_X を定理 3.9 で与えた性質とする．X が $m+3$ 点以上の元をもつ集合であれば，性質 P_X は m-curvature estimate をみたす compact property である．特に，X が $m+3$ 点以上の元をもつ集合であれば，ある $C = C(m, X) > 0$ が在って，g が X を除外値集合にもつ任意の m-Riemann 面 $(\Sigma, f\,dz, g)$ に対して，以下の不等式が成り立つ：

$$|K_{ds^2}(p)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d(p)} \quad (^{\forall}p \in \Sigma).$$

証明. X の元が $m+3\,(\geq 3)$ 個のとき，つまり $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m+3}\}$ のとき P_X が m-curvature estimate をみたす compact property であることを背理法で示す．すなわち，P_X が m-curvature estimate をみたさない compact property であると仮定する．定理 3.30 より $\mathbb{D}$ 上の正則 1 形式 $f\,dz$ 及び $\mathbb{D}$ 上の非定数有理型関数 g が在って，

(A) $ds^2 = (1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ は $\mathbb{D}$ 上の完備な共計計量，

(B) g は X を除外値集合にもち，$-1 \leq K_{ds^2} \leq 0 \quad \text{on } \mathbb{D}$

をみたす．また，必要があれば 1 次変換を施すことにより，$\alpha_{m+3} = \infty$ とできる．

そこで，正の数 η を $0 < \eta < \dfrac{1}{m+3}\left(\leq \dfrac{(m+3)-2}{m+3}\right)$ をみたすものとして取り固定する．このとき，藤本の補題（定理 3.24）を用いれば $C > 0$ が在って，

$$\frac{|g'|}{(1+|g|^2)\prod_{j=1}^{m+3}\chi(g,\alpha_j)^{1-\eta}} \leq \frac{C}{1-|z|^2} \quad \text{on } \mathbb{D} \tag{3.3.13}$$

が成立する．ここで，

$$\chi(g,\alpha_j) = \frac{|g-\alpha_j|}{\sqrt{1+|g|^2}\sqrt{1+|\alpha_j|^2}} \leq \frac{|g-\alpha_j|}{\sqrt{1+|g|^2}} \quad (j = 1, 2, \cdots, m+2),$$
$$\chi(g,\alpha_{m+3}) = \chi(g,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|g|^2}}$$

なので，

$$\begin{aligned}(1+|g|^2)\prod_{j=1}^{m+3}\chi(g,\alpha_j)^{1-\eta} &\leq (1+|g|^2)\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|g|^2}}\right)^{(m+3)(1-\eta)} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}(1+|g|^2)^{1-\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)}.\end{aligned}$$

故に，(3.3.13) の左辺は

$$\frac{|g'|}{(1+|g|^2)\prod_{j=1}^{m+3}\chi(g,\alpha_j)^{1-\eta}} \geq \frac{|g'|}{\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}(1+|g|^2)^{1-\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)}}$$
$$= \frac{(1+|g|^2)^{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1}|g'|}{\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}}$$

と下から評価される．(3.3.13) と合わせると，

$$\frac{(1+|g|^2)^{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1}|g'|}{\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}} \leq \frac{C}{1-|z|^2} \quad \text{on } \mathbb{D}. \tag{3.3.14}$$

次に Yau–Schwarz 型の不等式（定理 3.19）を用いれば，$\mathbb{D}$ 上で

$$\frac{1}{1-|z|^2} < \frac{2}{1-|z|^2} \leq (1+|g|^2)^{\frac{m}{2}}|f| \tag{3.3.15}$$

が成り立つ．いま g は $\mathbb{D}$ 上極をもたないため，(3.3.1) から f は $\mathbb{D}$ 上零点をもたない．よって (3.3.15) から

$$\frac{1}{|f|}\frac{1}{1-|z|^2} \leq (1+|g|^2)^{\frac{m}{2}} \quad \text{on } \mathbb{D}.$$

両辺を $\dfrac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1(>0)$ 乗し，$\dfrac{2}{m}$ 乗すると，

$$\left(\frac{1}{|f|}\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}} \leq (1+|g|^2)^{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1} \quad \text{on } \mathbb{D}.$$

これと (3.3.14) を合わせると，$\mathbb{D}$ 上で，

$$\left(\frac{1}{|f|}\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}} \frac{|g'|}{\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}} \leq \frac{C}{1-|z|^2}$$

が成り立つ．従って，$D' := \{z\in\mathbb{D} : g'(z)\neq 0\}(\subset\mathbb{D})$ 上で

$$\frac{1}{C}\frac{1}{(1-|z|^2)^{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}-1}} \leq \frac{|f|^{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}}\left(\prod_{j=1}^{m+2}|g-\alpha_j|\right)^{1-\eta}}{|g'|}$$

が成り立つ．さらに，両辺 $r := \dfrac{1}{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}-1}$ (>0) 乗すると，D' 上で

$$\frac{C^{-r}}{1-|z|^2} \leq \left(\frac{|f|^{\left\{\frac{1}{2}(m+3)(1-\eta)-1\right\}\frac{2}{m}} \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{m+2} |g-\alpha_j| \right)^{1-\eta}}{|g'|} \right)^r . \tag{3.3.16}$$

ここで，(3.3.16) の右辺を λ とおき，D' 上の正定値計量 $ds_0^2 = \lambda^2 |dz|^2$ を考える．一般に，零点をもたない正則関数 h に対して $\Delta \log |h| = 0$ をみたすことに注意すれば，D' 上では $\Delta \log \lambda \equiv 0$, 特に

$$K_{ds_0^2} = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \equiv 0 \quad \text{on } D'$$

となるため，ds_0^2 は D' 上の平坦計量である．また，(3.3.16) 及び Poincaré 計量が完備であること，そして $(g')^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{D} : g'(z) = 0\} = \mathbb{D} - D'$ の各点で λ が発散するため，(D', ds_0^2) は完備である．ここで，完備かつ平坦な 2 次元 Riemann 多様体の普遍被覆多様体は平面である（[佐々木, 定理 3.5]）ため，D' の普遍被覆を取ると $\mathbb{C}$ になる．一方で，$\mathbb{C}$ を普遍被覆空間にもつ $\mathbb{C}$ 内の領域は $\mathbb{C}$ か $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ $(^\exists \alpha \in \mathbb{C})$ のみなのでこれは矛盾する． $\square$

この定理から，藤本の定理の一般化に当たる藤本–川上の定理が得られる：

系 3.34. m-Riemann 面 $(\Sigma, f\,dz, g)$ に対して，$ds^2 = (1+|g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ が Σ 上の完備計量で，g が Σ 上非定数有理型関数ならば，g の除外値数は高々 $m+2$ である．さらに，この結果は最良である．

証明. 非定数有理型関数 g が $m+3$ 点以上除外値をもつと仮定する．定理 3.33 より m と除外値にしか依らない $C > 0$ が在って，

$$|K_{ds^2}(p)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{d(p)} \quad (^\forall p \in \Sigma)$$

をみたす．ds^2 は Σ 上の完備計量なので，$d(p) = \infty$ $(^\forall p \in \Sigma)$ と合わせると

$$K_{ds^2} \equiv 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

特に (3.3.2) から g は Σ 上定値となるが，これは元の仮定に矛盾するため前半の主張が得られる．

次に，最良性を示す．Σ を $\mathbb{C} - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1}\}$ または $\mathbb{C} - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1}\}$ の普遍被覆空間とし，m-pair を

$$f\,dz := \frac{dz}{\displaystyle\prod_{j=1}^{m+1} (z-\alpha_j)}, \quad g := z$$

と定める．このとき，g は Σ 上 $m+2$ 個の値 $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_{m+1},\,\infty$ を除外値にもつ．さらに，その計量 $ds^2=(1+|g|^2)^m\,|f|^2\,|dz|^2$ は完備計量である．なぜならば，

$$(1+|g|^2)^{\frac{m}{2}}\,|f|=\frac{(1+|z|^2)^{\frac{m}{2}}}{\prod_{j=1}^{m+1}|z-\alpha_j|}\left(\sim\frac{|z|^m}{\prod_{j=1}^{m+1}|z-\alpha_j|}\quad(z\to\infty)\right)$$

より，Σ 内の $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_{m+1},\,\infty$ のいずれかに向かう曲線（Σ 内の発散路）γ に対して $\int_\gamma ds=+\infty$ をみたすためである． □

3.4 Bloch–Ros principle の一般化

この節では，定理 3.30，系 3.32 及び系 3.34 などの結果を，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面や $\mathbb{L}^3$ 内の極大面，$\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面に対してそれぞれ具体的に適用する．

3.4.1 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面への応用

[川上・藤森]，[宮岡 22]，[Kawa, Section 4.1]，[Oss] をもとに，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面に関する基本的な内容について簡単にまとめる．Σ を連結かつ向きづけられた（実）2 次元 C^∞ 級多様体，$\psi:\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}^3$ を正則極小曲面とする．局所複素座標系 $z=u+iv$ 及び局所等温座標系 (u,v) に対して，

$$z=u+iv\ \longleftrightarrow\ (u,v)$$

と対応させることで，Σ は共形計量が $\mathbb{R}^3$ からの誘導計量 ds^2 である Riemann 面とみなすことができる．ψ は $H\equiv 0$ をみたすはめ込みなので，[川上・藤森, 命題 1.47] または [Oss, Lemma 4.1] より

$$\Delta_{ds^2}\,\psi=0,$$

つまり ψ の各成分関数は Σ 上の調和関数になる．また，調和関数に対する最大値原理を用いると，境界のないコンパクトな正則極小曲面が存在しないこと，つまり Σ は開 Riemann 面になることが示される．

正則極小曲面に対しては，Enneper–Weierstrass の表現公式と呼ばれる次の主張が成り立つ：

事実 3.35. [宮岡 22, 命題 6.8],[Oss, Lemma 8.2] Σ を開 Riemann 面，(fdz,g) を Σ 上の正則 1 形式と有理型関数の組で，

- $(1+|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ が Σ 上の正定値計量 [正則条件],
- Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して，$\mathrm{Re}\int_\gamma(1-g^2,\,i\,(1+g^2),\,2\,g)\,f\,dz=0$ [周期条件]

をみたすとする．このとき，基点 $z_0 \in \Sigma$ に対して，$\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$;

$$\psi := \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} ((1-g^2),\, i\,(1+g^2),\, 2\,g)\, f\, dz \tag{3.3.17}$$

は well-defined で，$\mathbb{R}^3$ 内の正則極小曲面を与える．逆に，任意の正則極小曲面は組 $(f\,dz,\, g)$ を用いて (3.3.17) のように表現することができ，その誘導計量 ds^2 は

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2\, |f|^2\, |dz|^2$$

で与えられる．このとき，組 $(f\,dz,\, g)$ を **Weierstrass data (W-data)** と呼ぶ.

注意 3.36. W-data $(f\,dz,\, g)$ で与えられる正則極小曲面 $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して，その Gauss 写像 $G : \Sigma \longrightarrow S^2$ と有理型関数 $g : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ には次の関係がある：

$$G = \pi_N \circ g = \widehat{g}.$$

つまり，正則極小曲面の Gauss 写像は立体射影を通じて W-data $(f\,dz,\, g)$ の g と同一視される.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "G=\widehat{g}"'] & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[d, "\pi_N"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"'] \\
 & S^2
\end{tikzcd}$$

◆

$m=2$ のときの定理 3.30 を考える．ここで，定理 3.30 (2) の $\mathbb{D}$ が単連結，つまり周期条件が成り立つことに注意して，Enneper–Weierstrass の表現公式（事実 3.35）を用いると，[Ros, Theorem 3] が得られる：

定理 3.37. P を compact property とする．このとき，次の (1) または (2) が成立する：

(1) P は 2-curvature estimate をみたす.

(2) ある完備な正則極小曲面 $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して，その Gauss 写像は $\mathbb{D}$ 上 P をみたし，Gauss 曲率は $|K_{ds^2}(0)| = \dfrac{1}{4}$ 及び $\mathbb{D}$ 上 $|K_{ds^2}| \leq 1$ をみたす.

この定理から，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面を対象とした定理 3.31 及び定理 3.33 と同様の主張を得ることができるが，ここではそれを省略する.

次に，完備な正則極小曲面に対して，系 3.32 を適用すると，Bernstein の定理が得られる.

定理 3.38. $\mathbb{R}^3$ 内の完備正則極小曲面で，その Gauss 写像の像が S^2 において稠密でなければ平面である．特に，平面全体で定義されるグラフ極小曲面は平面になる.

証明. $\mathbb{R}^3$ 内の完備な正則極小曲面 $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の W-data を $(f\,dz,\, g)$ とおく．ψ の Gauss 写像 $\widehat{g} : \Sigma \longrightarrow S^2$ は $\overline{\widehat{g}(\Sigma)} \subsetneq S^2$ をみたすので，必要があれば適当な回転を施すことにより

$N = (0,0,1) \in \left(\overline{\widehat{g}(\Sigma)}\right)^c = (\widehat{g}(\Sigma)^c)^\circ$，つまりある $L > 0$ が存在して

$$|g| < L \quad \text{on } \Sigma$$

が成り立つ．また，誘導計量 $ds^2 = (1+|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ は Σ 上の完備計量なので，系 3.32 より g は定数，つまり $S = \psi(\Sigma)$ は平面になる． □

注意 3.39. 一般に，$\psi(x,y) = {}^t(x,\,y,\,f(x,y))$ とパラメータ表示されるグラフ極小曲面は，楕円型偏微分方程式

$$(1+f_y^2)\,f_{xx} - 2f_x\,f_y\,f_{xy} + (1+f_x^2)\,f_{yy} = 0 \tag{3.3.18}$$

の解である．従って，Bernstein の定理は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された (3.3.18) の解 f は自明な解（x と y の高々 1 次の多項式）のみであることを意味する．◆

完備な正則極小曲面に対して，系 3.34 を適用することにより藤本の定理を得る．

定理 3.40. $\mathbb{R}^3$ 内の平面でない完備な正則極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 $4\,(=2+2)$ である．さらに，この結果は最良である．

3.4.2 $\mathbb{L}^3$ 内の極大面への応用

[Kawa, Section 4.2]，[UY] をもとに，$\mathbb{L}^3$ 内の極大面に関する基本的な内容について簡単にまとめる．3 次元 Lorentz–Minkowski 空間 $\mathbb{L}^3$ は，3 次元アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ に内積

$$\langle\,,\,\rangle := -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

（但し，$(x^1,\,x^2,\,x^3)$ は $\mathbb{R}^3$ の座標系）を入れたものである．

定義 3.41. Σ を（実）2 次元 C^∞ 級多様体，$\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ を C^∞ 級のはめ込みとする．このとき，$\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ が**空間的**であるとは，$ds^2 = \psi^*\langle\,,\,\rangle = \langle d\psi, d\psi\rangle$ が Σ 上の正定値計量であることと定める．

定義 3.42. Σ を（実）2 次元 C^∞ 級多様体，$\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ を C^∞ 級とする．このとき，$p \in \Sigma$ が ψ の**特異点**であるとは，ψ は p ではめこみでない，つまり

$$\operatorname{rank}(d\psi)_p = 0 \text{ or } 1$$

をみたすことである．

定義 3.43. C^∞ 級写像 $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ が**極大面**であるとは，

1. ある開かつ稠密な $W \subset \Sigma$ が存在して，$\psi|_W : W \longrightarrow \mathbb{L}^3$ が正則極大曲面,
2. $d\psi(p) = 0$ なる $p \in \Sigma$ が存在しない，つまり Σ の全ての特異点 p に対して $\operatorname{rank}(d\psi)_p = 1$

をみたすことである．

小林治氏 [KobO, Chapter 1] により，極大面に対しても次の表現公式が導かれた：

事実 3.44. [Kawa, Theorem 4.2],[UY, Theorem 2.6] Σ を開 Riemann 面，$(f dz, g)$ を Σ 上の正則 1 形式の組で

- $d\sigma^2 := (1+|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ が Σ 上の正定値計量,
- Σ 上で $|g| \not\equiv 1$,
- Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して，$\mathrm{Re}\int_\gamma (-2\,g, 1+g^2,\, i\,(1-g^2))\, f\, dz = 0$

をみたすとする．このとき，基点 $z_0 \in \Sigma$ に対して,

$$\psi := \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} (-2\,g, 1+g^2,\, i\,(1-g^2))\, f\, dz \tag{3.3.19}$$

は well-defined で，$\mathbb{L}^3$ 内の極大面を与える．逆に，任意の極大面は組 $(f\,dz,\, g)$ を用いて (3.3.19) のように表現することができ，その誘導計量 $ds^2 = \psi^*\langle\,,\,\rangle$ は

$$ds^2 = (1-|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$$

で与えられる．このとき，組 $(f\,dz,\, g)$ を **Weierstrass data (W-data)** と呼ぶ．また，$p \in \Sigma$ が ψ の特異点であることと，$|g(p)| = 1$ であることは同値である．

注意 3.45. 上で現れた g を ψ の **Lorentzian Gauss 写像**という．極大面が**弱完備**であるとは，$d\sigma^2 = (1+|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ が Σ 上の完備計量であることと定める．◆

$m = 2$ のときの定理 3.30 に対して，表現公式（事実 3.44）を用いると次の主張が成り立つ：

定理 3.46. P を compact property とする．このとき，次の (1) または (2) が成立する：

(1) P は 2-curvature estimate をみたす．

(2) ある弱完備な極大面 $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{L}^3$ が存在して，その Lorentzian Gauss 写像は $\mathbb{D}$ 上 P をみたし，Gauss 曲率は $|K_{d\sigma^2}(0)| = \dfrac{1}{4}$ 及び $\mathbb{D}$ 上 $|K_{d\sigma^2}| \leq 1$ をみたす．

この定理から，$\mathbb{L}^3$ 内の極大面を対象とした定理 3.31 及び定理 3.33 と同様の主張を得られるが，ここではそれを省略する．

完備な空間的極大曲面に対して，系 3.32 を適用することで，次の Calabi–Bernstein の定理を得る：

定理 3.47. $\mathbb{L}^3$ 内の完備な空間的極大曲面は平面に限る．

証明. $\mathbb{L}^3$ 内の完備な空間的極大曲面 $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ の W-data を $(f\,dz,\, g)$ とおく．ここで，$ds^2 = (1-|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ は正定値計量なので，Lorentzian Gauss 写像 g の除外値集合は（少なくとも）$\{p \in \Sigma : |g(p)| = 1\}$ を含む．必要があれば $\dfrac{1}{g}$ を考えることにより，Σ 上 $|g| < 1$ が成り立つと仮定してもよい．また，$ds^2 = (1-|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2$ は Σ 上の完備計量であり，

$$ds^2 = (1-|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2 \leq (1+|g|^2)^2\,|f|^2\,|dz|^2 = d\sigma^2$$

をみたすため，$d\sigma^2$ も Σ 上の完備計量である．よって，系 3.32 から Lorentzian Gauss 写像 g は定数，つまり $S=\psi(\Sigma)$ は平面になる． $\square$

系 3.34 を適用することにより，弱完備な極大面に対して次の藤本型の主張を得る：

定理 3.48. 平面でない弱完備な極大面の Lorentzian Gauss 写像の除外値数の上限は $4\,(=2+2)$．さらに，この結果は最良である．

3.4.3 $\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面への応用

3 次元アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン球面も 3 次元 Euclid 空間内の極小曲面と類似の性質をもつことが知られている．ここでは，[KN]，[Kawa, Section 4.3]，[Mar]，[EMJ] を参考にして簡単にまとめる．

Martínez は [Mar] において，非固有アファイン球面となめらかな $\mathbb{C}^2$ への特殊 Lagrangian はめ込みの間の対応を見つけ，さらに非固有アファイン球面に特異点を許した非固有アファイン写像の概念を導入した．ここで，非固有アファイン写像は波面と呼ばれる特異点を許したクラスの曲面になることがわかるため，[KN]，[Kawa, Section 4.3]，[EMJ] では非固有アファイン波面と呼んでいる．また，非固有アファイン波面には以下の表現公式がある：

事実 3.49. [Kawa, Theorem 4.5] Σ を開 Riemann 面，(F,G) を Σ 上の正則関数の組で，

- $|dF|^2+|dG|^2$ が Σ 上の正定値計量，
- Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して，$\mathrm{Re}\int_\gamma F\,dG=0$

をみたすとする．このとき，$\psi:\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$;

$$\psi:=\left(G+\overline{F},\ \frac{|G|^2-|F|^2}{2}+\mathrm{Re}\left(G\,F-2\int F\,dG\right)\right) \tag{3.3.20}$$

は well-defined で，$\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面になる．逆に，任意の非固有アファイン波面 $\psi:\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ は (3.3.20) のように表せる．さらに，$x:=G+\overline{F}$ 及び $n:=\overline{F}-G$ とおいたとき，$L_\psi:=x+i\,n:\Sigma\longrightarrow\mathbb{C}^2$ は特殊 Lagrangian はめ込みで，$\mathbb{C}^2$ からの誘導計量は

$$d\tau^2=2\,(|dF|^2+|dG|^2)$$

で与えられる．また，ψ のアファイン計量 h は $|dG|^2-|dF|^2$ で与えられ，ψ の特異点は $|dF|=|dG|$ をみたす点に対応し，その点で h は退化する．

注意 3.50. $L_\psi:\Sigma\longrightarrow\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ の Gauss 写像の非自明な部分は有理型関数

$$\nu:\Sigma\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}\ ;\ \nu=\frac{dF}{dG}$$

で与えられる．これを **Lagrangian Gauss 写像**と呼ぶ．特に，L_ψ による $\mathbb{C}^2$ からの誘導計量

$d\tau^2\,(=2\,(|dF|^2+|dG|^2))$ が

$$d\tau^2 = 2\,(1+|\nu|^2)\,|dG|^2$$

と表せることに注意する．非固有アファイン波面が**弱完備**であるとは，$d\tau^2$ が Σ 上の完備計量であることと定める．◆

$m=1$ のときの定理 3.30 に対して，表現公式（事実 3.49）を用いると次の主張が成り立つ：

定理 3.51. P を compact property とする．このとき，次の (1) または (2) が成り立つ：

(1) P は 1-curvature estimate をみたす．

(2) ある弱完備な非固有アファイン波面 $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して，その Lagrangian Gauss 写像は $\mathbb{D}$ 上 P をみたし，Gauss 曲率は $|K_{d\tau^2}(0)| = \dfrac{1}{8}$ 及び $\mathbb{D}$ 上 $|K_{d\tau^2}| \leq \dfrac{1}{2}$ をみたす．

この定理から，$\mathbb{R}^3$ 内の非固有アファイン波面を対象とした定理 3.31 及び定理 3.33 と同様の主張が得られるが，ここではそれを省略する．

アファイン計量 h に関して完備（以下，**アファイン完備**という）な非固有アファイン球面に対して，次の Bernstein 型の定理が成り立つ：

定理 3.52. 3 次元アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ 内のアファイン完備な非固有アファイン球面は楕円放物面に限る．

この主張を示すために，次の主張を用いる：

事実 3.53. [KN, Proposition 3.1] $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を弱完備な非固有アファイン波面とする．その Lagangian Gauss 写像 ν が定値写像であれば，ψ は楕円放物面になる．

証明. アファイン完備な非固有アファイン球面を (F, G) を用いて，(3.3.20) のように表す．非固有アファイン球面は特異点を持たないので $|dF| \neq |dG|$，つまり $|\nu| \neq 1$ である．従って，Lagrangian Gauss 写像の除外値集合は（少なくとも）$\{p \in \Sigma \,:\, |\nu(p)| = 1\}$ を含む．必要があれば F と G を入れ替えることにより，Σ 上 $|\nu| < 1$，すなわち $|dF| < |dG|$ が成り立つ．さらに，アファイン計量 h が Σ 上の完備計量であり，

$$h = |dG|^2 - |dF|^2 < 2\,(|dG|^2 + |dF|^2) = d\tau^2$$

をみたすため，$d\tau^2$ も Σ 上の完備計量である．m-pair $(\sqrt{2}\,dG,\, \nu)$ に対して系 3.32 を用いれば，ν は定数となる．事実 3.53 よりアファイン完備な非固有アファイン球面は楕円放物面に限る．□

また，系 3.34 から以下の藤本型の主張が得られる：

定理 3.54. 3 次元アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ 内の弱完備な非固有アファイン波面の Lagrangian Gauss 写像が非定値ならば，その除外値数の上限は $3\,(=1+2)$．さらに，この結果は最良である．

4　補遺

4.1　Bloch heuristic principle の定式化や反例について

この節では，1 章で述べた Bloch heuristic principle に関する内容を [Ber06]，[CTC]，[Sch]，[Zal98] をもとにまとめる．まずは，Zalcman の補題と呼ばれる次の主張を証明する：

定理 4.1. $\mathscr{F}$ を $\mathbb{D}$ 上の有理型関数族とする．$\mathscr{F}$ が $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でなければ，次が成立する：

$^{\exists}\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, $^{\exists}\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$, $^{\exists}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$, $^{\exists}g : \mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数 s.t.

$(Z-1)$ $0 <^{\exists} r < 1$　s.t.　$|z_n| \le r$ $(^{\forall}n \in \mathbb{N})$,

$(Z-2)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$,

$(Z-3)$ 任意の $R > 0$ に対して，有限個の n を除いて，有理型関数 $g_n : \overline{\Delta_R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$;

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n\,\zeta) \text{ が定義され，} g_n \overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows} g \ \text{ on } \overline{\Delta_R}, \quad (\text{i.e., } g_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g \text{ on } \mathbb{C}),$$

$(Z-4)$ $g^{\#}(\zeta) \le g^{\#}(0) = 1$ $(^{\forall}\zeta \in \mathbb{C})$.

注意 4.2. Zalcman の補題の逆についても成立する．詳しくは，[Sch, p.103] を参照せよ．

証明. 有理型関数族 $\mathscr{F}$ が $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でないとする．Marty の判定法（定理 2.35）から $\mathscr{F}^{\#}$ は $\mathbb{D}$ 上局所有界でない，つまり

$$^{\exists}r_0 \in (0,1),\ ^{\exists}\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\Delta_{r_0}},\ ^{\exists}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} f_n^{\#}(z_n^*) = +\infty,\ f_n^{\#}(z_n^*) > 0\ (^{\forall}n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．さらに，$r_0 < r < 1$ なる r を取る．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n^{\#}$ は $\overline{\Delta_r}$ 上の実数値連続関数なので，$\left(1 - \dfrac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z)$ も $\overline{\Delta_r}$ 上の実数値連続関数である．そこで，

$$C_n := \max_{|z|\le r} \left\{ \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z) \right\}$$

と定め，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\Delta_r}$ を

$$C_n = \left(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z_n)$$

が成り立つように定める．このとき，$|z_n^*| \le r_0 (< r)$ に注意すれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} C_n &= \max_{|z|\le r} \left\{ \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z) \right\} \\ &\ge \left(1 - \frac{|z_n^*|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z_n^*) \\ &\ge \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z_n^*)\ (>0) \end{aligned}$$

が成り立つ．特に，$\lim_{n\to\infty} C_n = +\infty$ となる．また，$C_n > 0\ ({}^\forall n \in \mathbb{N})$ より，$f_n^\#(z_n) > 0\ ({}^\forall n \in \mathbb{N})$ となることにも注意する．

次に，$\rho_n := \dfrac{1}{f_n^\#(z_n)} \left(= \dfrac{1}{C_n}\left(1 - \dfrac{|z_n|^2}{r^2}\right)\right)$ 及び $R_n := \dfrac{r - |z_n|}{\rho_n}$ とおくと，ρ_n は正の実数列で，

$$
\begin{aligned}
&\rho_n = \frac{1}{C_n}\left(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\right) \le \frac{1}{C_n}, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \\
&R_n = \frac{r - |z_n|}{\rho_n} = (r - |z_n|)\, C_n\, \frac{r^2}{r^2 - |z_n|^2} = \frac{r^2}{r + |z_n|}\, C_n \ge \frac{r^2}{r + r}\, C_n = \frac{r}{2}\, C_n, \\
&\text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \infty
\end{aligned}
$$

をみたす．これらの f_n, z_n, ρ_n, R_n に対して，$g_n : \Delta_{R_n} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を

$$
g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n\, \zeta)
$$

と定める．$z_n + \rho_n\, \zeta \in \Delta_r$ が成り立つことに注意すると，g_n は Δ_{R_n} 上の有理型関数であることがわかる．さらに，

$$
\begin{aligned}
&g_n^\#(\zeta) = \frac{|g_n'(\zeta)|}{1 + |g_n(\zeta)|^2} = \frac{|f_n'(z_n + \rho_n\, \zeta)|}{1 + |f_n(z_n + \rho_n\, \zeta)|^2}\, \rho_n = f_n^\#(z_n + \rho_n\, \zeta)\, \rho_n \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}), \\
&g_n^\#(0) = f_n^\#(z_n)\, \rho_n = 1 \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned} \tag{4.2.1}
$$

をみたす．任意に $R > 0$ を取り固定する．$\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ より，$R_n > 2R\ (n \ge n_0)$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる．このとき，$g_n\ (n \ge n_0)$ は $\overline{\Delta_{2R}}\ (\subset \Delta_{R_n})$ 上で定義される．ところで，$z_n + \rho_n\, \zeta \in \overline{\Delta_r}$ より，

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{|z_n + \rho_n\, \zeta|^2}{r^2}\right) f_n^\#(z_n + \rho_n\, \zeta) \le \max_{|z|\le r}\left\{\left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^\#(z)\right\} = C_n, \\
&\text{i.e.,} \quad f_n^\#(z_n + \rho_n\, \zeta) \le C_n\, \frac{r^2}{r^2 - |z_n + \rho_n\, \zeta|^2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これと $\rho_n\, C_n = \dfrac{r^2 - |z_n|^2}{r^2}$ であることを用いれば，任意の $n \ge n_0$ 及び任意の $\zeta \in \overline{\Delta_{2R}}$ に対して，

$$
g_n^\#(\zeta) = \rho_n\, f_n^\#(z_n + \rho_n\, \zeta) \le \frac{\rho_n\, C_n\, r^2}{r^2 - |z_n + \rho_n\, \zeta|^2} = \frac{r^2 - |z_n|^2}{r^2 - |z_n + \rho_n\, \zeta|^2} \tag{4.2.2}
$$

となる．ここで，三角不等式を用いれば，

$$
r^2 - (|z_n| + \rho_n\, |\zeta|)^2 \le r^2 - |z_n + \rho_n\, \zeta|^2
$$

が得られる．これを (4.2.2) へ適用すれば，任意の $n \ge n_0$ 及び任意の $\zeta \in \overline{\Delta_{2R}}$ に対して，

$$
g_n^\#(\zeta) \le \frac{r + |z_n|}{r + |z_n| + \rho_n\, |\zeta|}\; \frac{r - |z_n|}{r - |z_n| - \rho_n\, |\zeta|} \tag{4.2.3}
$$

が成り立つ．さらに，

$$\frac{r+|z_n|}{r+|z_n|+\rho_n\,|\zeta|}\le 1,\quad \frac{r-|z_n|}{r-|z_n|-\rho_n\,|\zeta|}\le\frac{r-|z_n|}{r-|z_n|-2\,\rho_n\,R}$$

を (4.2.3) へ用いれば，任意の $n\ge n_0$ 及び任意の $\zeta\in\overline{\Delta_{2R}}$ に対して，

$$g_n^{\#}(\zeta)\le\frac{r-|z_n|}{r-|z_n|-2\,\rho_n\,R}=\frac{\dfrac{r-|z_n|}{\rho_n}}{\dfrac{r-|z_n|}{\rho_n}-2\,R}=\frac{R_n}{R_n-2\,R}\tag{4.2.4}$$

が成り立つ．ここで，最右辺の式 $\dfrac{R_n}{R_n-2\,R}=\dfrac{1}{1-(2\,R/R_n)}$ は，$n\to\infty$ のときに 1 に収束するため，定理 3.7 の $(*1)$ と同様に議論をすることにより，$\{g_n^{\#}\}_{n=n_0}^{\infty}$ は $\overline{\Delta_{2R}}$ 上一様有界である．再び Marty の判定法（定理 2.35）を用いれば，$\{g_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ は Δ_{2R} 上の球面正規族である．従って，

$$^{\exists}\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\text{の部分列},\ ^{\exists}g:\overline{\Delta_R}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}\quad\text{s.t.}\quad g_{n_k}\overset{\text{sph.}}{\rightrightarrows}g\text{ on }\overline{\Delta_R}$$

が成り立つ．また，(4.2.1) に注意して定理 3.7 の $(*2)$ と同様に議論することで，g は $\overline{\Delta_R}$ 上の非定数有理型関数であることが示される．

最後に，$(Z-4)$ が成り立つことを示す．任意に $\zeta\in\overline{\Delta_R}$ を取り固定する．(4.2.1)，(4.2.4) より，

$$g_{n_k}^{\#}(0)-g_{n_k}^{\#}(\zeta)=1-g_{n_k}^{\#}(\zeta)\ge 1-\frac{1}{1-\dfrac{R}{R_{n_k}}}$$

が得られる．$\lim\limits_{k\to\infty}g_{n_k}^{\#}(\zeta)=g^{\#}(\zeta)$ に注意して両辺 $k\to\infty$ とすれば

$$g^{\#}(0)-g^{\#}(\zeta)\ge 1-1=0,\quad\text{i.e.,}\quad g^{\#}(\zeta)\le g^{\#}(0)=1.$$

□

Zalcman の補題は，Liouville の定理や Picard の小定理のような，ある性質 P をみたす $\mathbb{C}$ 上全体で定義される非定数有理型関数が存在しないことを用いて，その性質 P をみたす有理型関数の族が球面正規族であることを導く際に使われる命題である．以下では，Zalcman の補題の使用例（Bloch heuristic principle の例でもある）を紹介するために，まずは完全分岐値及びその weight について [Ber06, Section 1.7]，[CTC, Definition 3.3]，[KW, Definition 1.1] を参考に定義する．

定義 4.3. m を 2 以上の整数または ∞，D を $\mathbb{C}$ 内の領域，$f:D\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ を有理型関数とする．このとき，$\alpha\in\widehat{\mathbb{C}}$ が f の**位数 m の完全分岐値**であるとは，方程式 $f=\alpha$ が D 上で重複度 m 未満の解をもたないことである． ここで，f の除外値 α は位数 ∞ の完全分岐値とみなすことにする（なぜならば，完全分岐値の位数が ∞ であるとは方程式 $f=\alpha$ がどの重複度の解ももたないと解釈できるからである）．また，f の位数 m の完全分岐値の **weight** を $1-\dfrac{1}{m}$ で定めることにする．

注意 4.4. ここでは領域 D 上の有理型関数 f の除外値数を D_f，f の全ての完全分岐値の weight の和を ν_f と記すことにする．f の除外値 α の weight は $1\,(=1-0)$ と換算されるので，

$$\begin{aligned}\nu_f &= (f\text{ の除外値の weight の和}) + (f\text{ の除外値を除く完全分岐値の weight の和})\\ &= D_f + (f\text{ の除外値を除く完全分岐値の weight の和})\end{aligned}$$

となる．特に，$\nu_f \geq D_f$ が成り立つことに注意する．◆

Nevanlinna の第二基本定理（[CY, Theorem 1.6]）から，Nevanlinna の定理と呼ばれる次の主張が示される．注意 4.4 からこの主張は Picard の小定理の精密化であることがわかる．

事実 4.5. [CTC, Theorem 1 in Appendix B],[KW, Fact 2.1] q を 3 以上の整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_q \in \widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる q 個の点，$m_1, \cdots, m_q$ を 2 以上の整数または ∞ とし，

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) > 2 \tag{4.2.5}$$

をみたすものとする．このとき，各 α_j を位数 m_j の完全分岐値としてもつ $\mathbb{C}$ 上の有理型関数は定数関数に限る．言い換えれば，各 α_j を位数 m_j の完全分岐値としてもつ $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数は

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) \leq 2 \tag{4.2.6}$$

をみたす．

注意 4.6. この結果は最良，つまり (4.2.6) の等号をみたす $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数が存在する．実際，$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$（但し，$\omega_1, \omega_2$ は 0 でなく，$(\omega_1/\omega_2) \notin \mathbb{R}$ ）を周期にもつ楕円関数

$$\wp(z) = \sum_{\omega\in\Gamma}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{1}{z^2} \quad (\Gamma := \mathbb{Z}\,\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\,\omega_2)$$

は Abel の定理（[梅村, 命題 1.7]）から $\alpha_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$，$\alpha_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$，$\alpha_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$，$\alpha_4 = \infty$ と位数 2 の 4 つの完全分岐値をもつ，すなわち

$$\sum_{j=1}^{4}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) = 2$$

をみたすことが示される．◆

Zalcman 補題（定理 4.1）と Nevanlinna の定理（事実 4.5）から，次の主張が示される：

定理 4.7. D を $\mathbb{C}$ 内の領域，q を 3 以上の整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_q \in \widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる q 個の点，$m_1, \cdots, m_q$ を 2 以上の整数または ∞ で，(4.2.5) をみたすとする．このとき，

$$\mathscr{F}(D:\alpha_1, \cdots, \alpha_q) = \{f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : \text{有理型：} f \text{ は各 } \alpha_j \text{ を位数 } m_j \text{ の完全分岐値としてもつ}\}$$

は D 上の球面正規族である．

証明. Step 1 : $D = \mathbb{D}$ のとき

背理法で証明する．そこで，$\mathscr{F} := \mathscr{F}(\mathbb{D} : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ が $\mathbb{D}$ 上で球面正規族でないと仮定する．このとき，Zalcman の補題（定理 4.1）より，

$$\exists\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D},\ \exists\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0},\ \exists\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F},\ \exists g : \mathbb{C}_\zeta \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \text{ 非定数有理型関数 s.t.}$$

$(Z-1)$ $0 <^{\exists} r < 1$ s.t. $|z_n| \leq r$ $({}^{\forall}n \in \mathbb{N})$,

$(Z-2)$ $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$,

$(Z-3)$ 任意の $R > 0$ に対して，$n_R \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_R$ ならば，$g_n : \overline{\Delta_R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$;

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta) \text{ が定義され，} g_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g \text{ on } \mathbb{C}_\zeta$$

をみたす．以下では，極限関数 g が各 α_j を位数 m_j の完全分岐値としてもつこと，つまり

$$\mathrm{ord}_{g-\alpha_j}(\zeta) \geq m_j \quad ({}^{\forall}\zeta \in g^{-1}(\alpha_j))$$

を示す．そこで，

$$\mathrm{ord}_{g-\alpha_j}(\zeta_0) < m_j$$

なる $\zeta_0 \in g^{-1}(\alpha_j)$ が存在すると仮定して矛盾を導く．さらに，$(Z-3)$ の $R > 0$ を $|\zeta_0| < R$ をみたすものとして取る．

(case 1) $\alpha_j \neq \infty$ の場合

命題 2.27 の (case 1) を適用すると，

$$\begin{aligned} {}^{\exists}R_0 > 0,\ {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N}_{\geq n_R} \text{ s.t. } & \overline{\Delta_{R_0}(\zeta_0)} \subset \Delta_R \text{ かつ} \\ & g_n\ (n \geq N_0) \text{ 及び } g \text{ は } \Delta_{R_0}(\zeta_0) \text{ 上正則で } g_n \rightrightarrows g \text{ on } \Delta_{R_0}(\zeta_0). \end{aligned}$$

をみたす．そこで，$n \geq N_0$ に対して，$h_n : \Delta_{R_0}(\zeta_0) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ を

$$h_n(\zeta) := g_n(\zeta) - \alpha_j$$

と定めると，$h_n \rightrightarrows g - \alpha_j$ on $\Delta_{R_0}(\zeta_0)$ をみたす．また，極限関数 $g - \alpha_j$ は $\Delta_{R_0}(\zeta_0)$ 上の非定数正則関数なので，Hurwitz の定理（命題 2.29）より必要があれば R_0 を小さくし，N_0 を大きくすることにより

$$\begin{aligned} m_j > \mathrm{ord}_{g-\alpha_j}(\zeta_0) &= (g - \alpha_j \text{の} \Delta_{R_0}(\zeta_0) \text{ における零点の位数}) \\ &= (h_{N_0} \text{の} \Delta_{R_0}(\zeta_0) \text{ における零点の位数}), \end{aligned}$$

つまり

$$g_{N_0}(\zeta_*) - \alpha_j = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{ord}_{g_{N_0}-\alpha_j}(\zeta_*) < m_j$$

をみたす $\zeta_* \in \Delta_{R_0}(\zeta_0)$ が存在することを意味する．従って，$z_* := z_n + \rho_n \zeta_*\ (\in \Delta_r \subset \mathbb{D})$ は $f_{N_0} - \alpha_j$ の零点で，その位数は m_j 未満である．これは $f_{N_0} \in \mathscr{F}(\mathbb{D} : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ であることに矛盾する．

(case 2) $\alpha_j = \infty$ の場合

命題 2.27 の (case 2) を適用すると，

$$^\exists R_0 > 0,\ ^\exists N_0 \in \mathbb{N}_{\geq n_R}\ \text{s.t.}\ \overline{\Delta_{R_0}(\zeta_0)} \subset \Delta_R\ \text{かつ}$$
$$\frac{1}{g_n}\ (n \geq N_0)\ \text{及び}\ \frac{1}{g}\ \text{は}\ \Delta_{R_0}(\zeta_0)\ \text{上正則で}\ \frac{1}{g_n} \rightrightarrows \frac{1}{g}\ \text{on}\ \Delta_{R_0}(\zeta_0).$$

をみたす．特に，$\dfrac{1}{g}(\zeta_0) = 0$ をみたすことに注意する．Hurwitz の定理（命題 2.29）から必要があれば R_0 を小さくし，N_0 を大きく取り直すことにより

$$\begin{aligned} m_j > \mathrm{ord}_{\frac{1}{g}}(\zeta_0) &= \left(\frac{1}{g}\text{の}\Delta_{R_0}(\zeta_0)\ \text{における零点の位数}\right) \\ &= \left(\frac{1}{g_{N_0}}\text{の}\Delta_{R_0}(\zeta_0)\ \text{における零点の位数}\right), \end{aligned}$$

つまり位数 m_j 未満の g_{N_0} の極 $\zeta_* \in \Delta_{R_0}(\zeta_0)$ が存在することを意味する．従って，$z_* := z_n + \rho_n\,\zeta_*\,(\in \Delta_r \subset \mathbb{D})$ は f_{N_0} の極で，その位数は m_j 未満である．これは $f_{N_0} \in \mathscr{F}(\mathbb{D} : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ であることに矛盾する．

以上，(case 1)，(case 2) より

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 2$
- 各 α_j を位数 m_j の完全分岐値としてもつ

をみたす非定数有理型関数 $g : \mathbb{C}_\zeta \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ が存在することが導かれる．しかし，これは Nevanlinna の定理（事実 4.5）の帰結に矛盾する．よって，$\mathscr{F}(\mathbb{D} : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族である．

Step 2 : $D = \Delta_r(a)$ のとき

$D = \Delta_r(a)$ 上の有理型関数族 $\mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ に対して，$\mathbb{D}$ 上の有理型関数族

$$\widetilde{\mathscr{F}} := \{f(a + r\,\zeta) : f \in \mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)\}$$

を考える．$\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Delta_r(a)$; $\varphi(\zeta) := a + r\,\zeta$ は全単射なので，$\widetilde{\mathscr{F}} \subset \mathscr{F}(\mathbb{D} : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$，特に $\widetilde{\mathscr{F}}$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族である．そこで，任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ を取る．このとき，$\{g_n := f_n \circ \varphi\}_{n=1}^{\infty}$ は $\widetilde{\mathscr{F}}$ 内の関数列なので，$\mathbb{D}$ 上球面的局所一様収束する部分列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもつ．$\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限関数が有理型関数 g の場合は $f_{n_k} := g_{n_k} \circ \varphi^{-1} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} g \circ \varphi^{-1}$ on $\Delta_r(a)$，$\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限関数が ∞ の場合は $f_{n_k} := g_{n_k} \circ \varphi^{-1} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} \infty$ on $\Delta_r(a)$ をみたすため，$\mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ は $\Delta_r(a)$ 上の球面正規族になる．

Step 3 : D が一般の領域の場合

任意に $a \in D$ を取る．また，$\Delta_r(a) \subset D$ をみたす $r > 0$ をとる．このとき，定理 2.36 より $\mathscr{F}(D : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ が $\Delta_r(a)$ 上の球面正規族であることを示せば十分である．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(D : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ を取る．ここで，

$$(f|_{\Delta_r(a)})^{-1}(\alpha_j) \subset f^{-1}(\alpha_j)$$

に注意すれば，$\{f_n|_{\Delta_r(a)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ をみたす．Step 2 より $\mathscr{F}(\Delta_r(a) : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ は $\Delta_r(a)$ 上の球面正規族なので，$f_n|_{\Delta_r(a)}{}_{n=1}^{\infty}$ は $\Delta_r(a)$ 上球面的局所一様収束する部分列をもつ．よって，$\mathscr{F}(D : \alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ は $\Delta_r(a)$ 上の球面正規族である．

□

一方で，1 章で述べたように，Bloch heuristic principle には反例が存在する．ここでは，[Ber06, Example 1.6.1] または [Zal98, Example 9] で述べられている例を紹介する：

例 4.8. $\mathbb{C}$ 内の領域 D 上の正則関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，次のような性質を考える：

$$^{\exists}g : D \longrightarrow \mathbb{C} : \text{単葉正則} \quad \text{s.t.} \quad f = g'' \text{ on } D.$$

このとき，この性質を満たす整関数は定数関数に限ることが示される．一方で，領域 D 上の正則関数族

$$\mathscr{F} := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : \ ^{\exists}g : D \longrightarrow \mathbb{C} : \text{単葉正則} \quad \text{s.t.} \quad f = g'' \text{ on } D\}$$

は D 上の球面正規族とは限らない．

上の性質をもつ整関数が定数に限ることの証明

まず，次の主張が成り立つことを思い出す：

事実 4.9. [吉田, p.151] $k \in \mathbb{N}$，$c_1, \cdots, c_k \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ とする．$\widehat{\mathbb{C}}_z - \{c_1 \cdots, c_k\}$ または $\widehat{\mathbb{C}}_z$ 上の単葉な有理型関数は 1 次変換に限る．特に，$f : \widehat{\mathbb{C}}_z - \{c_1, \cdots, c_k\} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ が単葉有理型ならば，ある k 個の点 $d_1, \cdots, d_k \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ が存在して，$f(\widehat{\mathbb{C}}_z - \{c_1, \cdots, c_k\}) = \widehat{\mathbb{C}}_w - \{d_1, \cdots, d_k\}$ をみたす．

整関数 $f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$ が

$$^{\exists}g : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w : \text{単葉正則} \quad \text{s.t.} \quad f = g'' \text{ on } \mathbb{C}_z.$$

をみたすとする．このとき，事実 4.9 からある $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ が存在して，$g(\mathbb{C}_z) = \widehat{\mathbb{C}}_w - \{\alpha\}$，特に $g(\mathbb{C}_z) \supset \widehat{\mathbb{C}}_w - \{\alpha\}$ が成り立つ．また，g は正則なので，$g(\mathbb{C}_z) \subset \mathbb{C}_w$ をみたす．故に，$\alpha = \infty$ で，$g(\mathbb{C}_z) = \mathbb{C}_w$ となる．よって，$g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{a\,z + b : a \neq 0, b \in \mathbb{C}\}$ であるため，$\mathbb{C}$ 上で $f \equiv g'' = 0$，特に f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である．

□

上の性質をもつ球面正規族でない正則関数族の例について

$g_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$g_n(z) := n\left(z + \frac{1}{10}\,z^2 + \frac{1}{10}\,z^3\right),$$

$f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_n(z) := g_n''(z) = n\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,z\right)$$

と定める．このとき，各 g_n は $\mathbb{D}$ 上で単葉正則である．まず，各 g_n は z の多項式で表されているため，正則である．また，単葉性については

$$\begin{aligned} g_n(z) = g_n(w) &\implies (z-w) + \frac{1}{10}\,(z-w)(z+w) + \frac{1}{10}\,(z-w)(z^2 + z\,w + w^2) = 0 \\ &\implies (z-w)\,\{10 + (z+w) + (z^2 + z\,w + w^2)\} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

となる．ここで，$z,\, w \in \mathbb{D}$ に注意して三角不等式を用いると，

$$\begin{aligned} |10 + (z + w + z^2 + z\,w + w^2)| &\geq 10 - |z + (w + z^2 + z\,w + w^2)| \\ &> 10 - (1 + |w + z^2 + z\,w + w^2|) \\ &= 9 - |w + z^2 + z\,w + w^2| \\ &> \cdots > 0, \end{aligned}$$

つまり $\mathbb{D}$ 上 $10 + (z+w) + (z^2 + z\,w + w^2) \neq 0$ が導かれる．よって，(4.2.7) ならば，$z = w$ となり，各 g_n の単葉性も示される．

従って，上で定めた $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ をみたす．一方，連続関数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 f は

$$f = \begin{cases} 0 & \left(\text{if } z = -\dfrac{1}{3}\right), \\ \infty & \left(\text{if } z \in \mathbb{D} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}\right) \end{cases}$$

と $\mathbb{D}$ 上で不連続なので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどの部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を取っても $z = -\dfrac{1}{3}$ を内点にもつコンパクト集合 K 上で一様収束し得ない．よって，$\mathscr{F}$ は $\mathbb{D}$ 上の広義正規族でない．命題 2.32 より $\mathscr{F}$ は $\mathbb{D}$ 上の球面正規族でもない．

□

上で確認したように，Bloch heuristic principle は常に成り立つとは限らない．そこで，どのような性質に対して Bloch heuristic principle が成り立つのか，という問題が次に考えられる．1 章で述べたように，この問題は Zalcman により明示的に解決された．この節の最後に，Zalcman が定式化した有理型関数の族が球面正規族であるための十分条件を確認する．

定理 4.10. P を有理型関数のある性質とするとき，次の条件を考える：
(i) f が領域 D 上で性質 P をみたすならば，D の任意の部分領域 D' 上でも性質 P をみたす．
(ii) $\varphi(z) = \rho\,z + c$ $(\rho \in \mathbb{C} - \{0\},\, c \in \mathbb{C})$ であり，f が D 上で性質 P をみたすならば，$f \circ \varphi$ は $\varphi^{-1}(D)$ 上で性質 P をみたす．
(iii) $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$ をみたす $\mathbb{C}$ 内の領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，各 f_n が D_n 上で性質 P をみたし，$f_n \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} f$ on $\mathbb{C}$ ならば，f は $\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたす．
(iv) f が $\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたすならば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である．

性質 P が上で定めた 4 つの条件をみたすとき（この P を **normal property** と呼ぶ），$\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D に対して，有理型関数族

$$\mathscr{F}(D:P) := \{f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ は } D \text{ 上で性質 } P \text{ をみたす }\}$$

は D 上の球面正規族になる．

注意 4.11. 1 章で述べた例 1.1 の性質 P_L や例 1.2 の性質 P_X は定理 4.10 の 4 つの条件を満たすため，Bloch heuristic principle が成り立つことがわかる．また，例 1.2 の P_X の精密化である定理 4.7 の性質も定理 4.10 の 4 つの条件を満たすことがわかる．一方で，例 4.8 の性質は (i), (ii), (iv) を満たすため，(iii) が成り立たないことがわかる．◆

証明. 背理法で証明する．そこで $\mathbb{C}$ 内のある領域 D_0 で $\mathscr{F}(D_0 : P) = \{f : D_0 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f$ は D_0 上で性質 P をみたす $\}$ が D_0 上の球面正規族でないと仮定する．正規性は局所的な性質（定理 2.36）なので，

$$^{\exists}a \in D_0,\ ^{\exists}r > 0 \quad \text{s.t.} \quad \Delta_r(a) \subset D_0 \quad \text{and} \quad \mathscr{F}(D_0 : P) \text{ は } \Delta_r(a) \text{ 上球面正規族でない}$$

をみたす．条件 (i) より任意の $f \in \mathscr{F}(D_0 : P)$ に対して，$f|_{\Delta_r(a)}$ は $\Delta_r(a)$ 上で性質 P をみたす．そこで，

$$\mathscr{F}_1 := \{f|_{\Delta_r(a)} : \Delta_r(a) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \in \mathscr{F}(D_0 : P)\}$$

と定めると，$\mathscr{F}_1$ は $\Delta_r(a)$ 上の球面正規族でなく，$\mathscr{F}_1$ の任意の元 g は $\Delta_r(a)$ 上で性質 P をみたす．次に $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Delta_r(a)$ を

$$\varphi(w) := r\,w + a$$

と定める．条件 (ii) より任意の $g \in \mathscr{F}_1$ に対して，$g \circ \varphi$ は $\mathbb{D}$ 上性質 P をみたす．そこで，

$$\mathscr{F}_2 := \{g \circ \varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : g \in \mathscr{F}_1\}$$

と定めると，$\mathbb{D}$ 上の球面正規族でなく，$\mathscr{F}_2$ の任意の元 h は $\mathbb{D}$ 上で性質 P をみたす．この $\mathscr{F}_2$ に対して Zalcman の補題（定理 4.1）を用いると，

$$\begin{aligned}
&^{\exists}\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D},\ ^{\exists}\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0},\ ^{\exists}r \in (0,1),\ ^{\exists}\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}, \\
&^{\exists}\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}_2,\ ^{\exists}H : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ 非定数有理型関数} \quad \text{s.t.} \\
&(Z-1)\ |z_n| \le r\ (^{\forall}n \in \mathbb{N}), \\
&(Z-2)\ \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} R_n = +\infty, \\
&(Z-3)\ \widetilde{h_n} : \Delta_{R_n} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\ ;\ \widetilde{h_n}(\zeta) := h_n(z_n + \rho_n\,\zeta) \text{ と定めると，} \widetilde{h_n} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} H \text{ on } \mathbb{C} \\
&(Z-4) H^{\#}(\zeta) \le H^{\#}(0) = 1\ (^{\forall}\zeta \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

をみたす．ここで，条件 (i), (ii) から各 $\widetilde{h_n}$ は Δ_{R_n} 上で性質 P をみたすことに注意する．さらに，単調増加列 $\{\Delta_{R_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_{R_n} = \mathbb{C}$ をみたし，$\widetilde{h_n} \overset{\text{sph. loc.}}{\rightrightarrows} H$ on $\mathbb{C}$ が成り立つので，条件

(iii) より非定数有理型関数 H は $\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたす．条件 (iv) より H は $\mathbb{C}$ 上の定数関数となるがこれは明らかに不合理である．

$\square$

注意 4.12. 上の証明を見てわかるように，実は定理 4.10 の条件 (iv) は，これよりも弱い条件

f が $\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたし，$f^{\#}$ が $\mathbb{C}$ 上有界ならば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である

に代えることができる．

注意 4.13. 定理 4.10 の逆として，有理型関数のある性質 P に対して，

- (ii) $\varphi(z) = \rho z + c$ ($\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$, $c \in \mathbb{C}$) であり，f が D 上で性質 P をみたすならば，$f \circ \varphi$ は $\varphi^{-1}(D)$ 上で性質 P をみたす．

- $\mathbb{C}$ 内の任意の領域 D に対して，有理型関数族

$$\mathscr{F}(D : P) = \{f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ は } D \text{ 上で性質 } P \text{ をみたす }\}$$

  が D 上の球面正規族になる

が成り立てば，条件

(iv) f が $\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたすならば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である

が成り立つ．実際，補題 3.4 を少し修正すればこの結果は得られるが，ここでは次の命題を用いた証明を紹介する：

事実 4.14. [CTC, Theorem 3.2] 有理型関数 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，族

$$\mathscr{F} := \{f_n(z) := f(2^n z) : n \in \mathbb{N}\}$$

が Δ_2 上の球面正規族であるならば，f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である．

注意 4.13 の証明

$\mathbb{C}$ 上で性質 P をみたす有理型関数 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を考える．条件 (ii) より

$$\{f_n(z) := f(2^n z)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(\mathbb{C} : P)$$

が成り立つ．仮定より，上で定めた $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ 上の球面正規族．事実 4.14 より f は定数関数．

$\square$

4.2　命題 3.23 を用いた Picard の小定理の証明

この節では [藤本, 5.2 節 (a)] をもとに，命題 3.23 を用いた Picard の小定理の証明を与える．著者は，Picard の小定理を（特段新しい知識を必要としないという意味で）初等的に導ける点が，この方法によるメリットの 1 つであると考える．まずは，Landau の定理と呼ばれる次の主張を示す．

定理 4.15. 任意の複素数 $\alpha,\,\beta,\,\lambda$ (但し，$\alpha \neq \beta$) に対して，次の条件を満たす $\widetilde{R} = \widetilde{R}(\alpha,\beta,\lambda) > 0$ が存在する：

$$g(0) = \lambda, \quad g'(0) = 1, \quad g(z) \neq \alpha,\,\beta \;\; (z \in \Delta_R)$$

をみたす非定数正則関数 $g : \Delta_R \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在すれば，$R \leq \widetilde{R}$.

証明. $g(0) = \lambda,\, g'(0) = 1,\, g(z) \neq \alpha,\,\beta \;\, (z \in \Delta_R)$ をみたす非定数正則関数 $g : \Delta_R \longrightarrow \mathbb{C}$ を考える．$q = 3,\, \alpha_1 = \alpha,\, \alpha_2 = \beta,\, (\alpha_3 = \infty)$ として命題 3.23 を用いれば，$a_0 > 1$ 及び $C_2 = C_2(\alpha,\,\beta) > 0$ が存在して，Δ_R 上で

$$\frac{|g'|}{1+|g|^2}\,\frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{3} \chi(g,\,\alpha_j)\,\log\,\frac{a_0}{\chi(g,\,\alpha_j)^2}} \leq C_2\,\frac{2\,R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ．この不等式は $z=0$ でも成立するため，上式の両辺に $z=0$ を代入すると，

$$\frac{1}{1+|\lambda|^2}\left(\prod_{j=1}^{3} \chi(\lambda,\,\alpha_j)\,\log\,\frac{a_0}{\chi(\lambda,\,\alpha_j)^2}\right)^{-1} \leq \frac{2\,C_2}{R},$$

$$\text{i.e.,}\quad R \leq 2\,C_2\,(1+|\lambda|^2)\left(\prod_{j=1}^{3} \chi(\lambda,\,\alpha_j)\,\log\,\frac{a_0}{\chi(\lambda,\,\alpha_j)^2}\right)$$

を得る．故にこの式の右辺を $\widetilde{R}$ とおけばよい． □

定理 4.16. $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数の除外値数の上限は高々 2 である．さらに，この結果は最良である．

証明. 背理法で示す．すなわち，$\alpha,\,\beta,\,\gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ を除外値にもつ非定数有理型関数 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が存在すると仮定して矛盾を導く．ここで，必要があれば 1 次変換を施すことにより，$\gamma = \infty$ としてもよい．また，f は $\mathbb{C}$ 上の非定数正則関数なので，$f'(z_0) \neq 0$ となる $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在する．$\lambda = f(z_0) \in \mathbb{C}$ とおく．このとき，$\alpha,\,\beta,\,\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，定理 4.15 の $\widetilde{R} = \widetilde{R}(\alpha,\beta,\lambda)$ が存在する．そこで，$R > \widetilde{R}$ をみたす $R > 0$ を 1 つ取り固定する．さらに，$g : \Delta_R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を

$$g(z) := f\left(z_0 + \frac{z}{f'(z_0)}\right)$$

と定めると，g は $\alpha, \beta, \gamma\,(=\infty)$ を除外値にもつ非定数正則関数で，

$$g(0) = f(z_0) = \lambda, \quad g'(0) = f'(z_0)\,\frac{1}{f'(z_0)} = 1$$

をみたす．これは明らかに定理 4.15 に矛盾する．

また，$f(z) := e^z$ は $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ を除外値にもつ $\mathbb{C}_z$ 上の非定数有理型関数なので，除外値数が 2 である $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数は存在する． □

注意 4.17. Picard の小定理（定理 4.16）に現れる $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数の除外値数の上限 “2” は Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の Euler 標数であることが知られている．詳しくは [Chern, Theorem 3] を参照せよ．◆

参考文献

[梅村] 梅村浩：楕円関数論［増補新装版］，東京大学出版会，2020.

[川上・藤森] 川上裕，藤森祥一　共著：極小曲面論入門，サイエンス社，2019.

[河野] 河野俊丈：曲率とトポロジー，東京大学出版会，2021.

[佐々木] 佐々木重夫：微分幾何学　曲面論（岩波基礎数学選書），岩波書店，1991.

[西川] 西川青季：幾何学的変分問題，岩波書店，2006.

[藤本] 藤本坦孝：複素解析，岩波書店，2006.

[宮岡 19] 宮岡礼子：曲線と曲面の現代幾何学，岩波書店，2019.

[宮岡 22] 宮岡礼子：極小曲面，共立出版株式会社，2022.

[吉田] 吉田洋一：関数論（第 2 版），岩波書店，1965.

[Ber98] W. Bergweiler : A new proof of the Ahlfors five islands theorem, J. Anal. Math. **76** (1998), 337—347.

[Ber00] W. Bergweiler : The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics, Conform. Geom. Dyn. **4** (2000), 22–34.

[Ber06] W. Bergweiler : Bloch's principle, Comput. Methods Funct. Theory **6** (2006), 77–108.

[Bloch] A. Bloch : La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes, Enseignement Math. **25** (1926), 83–103.

[Chern] S. -S. Chern : Complex analytic mappings of Riemann surfaces I, Amer. J. Math. **82** (1960), 323–337.

[CY] C. -T. Chuang & C. -C. Yang : Fix-points and factorization of meromorphic functions, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1990.

[CTC] C. -T. Chuang : Normal families of meromorphic functions, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.

[Fuji] H. Fujimoto : On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), No.2, 235—247.

[GW] R. E. Greene & H. Wu : Function theory on manifolds which possess a pole, Lecture Notes in Math., No.699, Springer, New York, 1979.

[Heinz] E. Heinz : Über die Lösungen der Minimalflächengleichung, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. K1. II (1952), 51–56.

[KN] Y. Kawakami & D. Nakajo : Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), No.3, 799—821.

[Kawa] Y. Kawakami : On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, Math. Z. **274** (2013), No.3–4, 1249–1260.

[KW] Y. Kawakami & M. Watanabe : The Gauss images of complete minimal surfaces of genus zero of finite total curvature, arXiv:2309.06846 (2023).

[KL] K. -T. Kim & H. Lee : Schwarz's lemma from a differential geometric viewpoint, IISc Lecture Notes Series, 2, World Scientific, 2011.

[KobO] O. Kobayashi : Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3, Tokyo J. Math. **6** (1983), No.2, 297—309.

[LP] X. Liu & X. Pang : Normal family theory and Gauss curvature estimate of minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$, J. Defferential Geom. **103** (2016), No.2, 297–318.

[Mar] A. Martínez : Improper affine maps, Math. Z. **249** (2005), No.4, 755—766.

[EMJ] J. Matsumoto : The classification of complete improper affine fronts of low total curvature in affine 3-space and new examples, Master Thesis of Tokyo Institute of Technology (2023).

[Mil] J. Milnor : Dynamics in one complex variable (Third edition), Ann. of Math. Stud., 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. viii+304 pp.

[Minda] D. Minda : A heuristic principle for a nonessential isolated singularity, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), No.3, 443—447.

[Oss] R. Osserman : A survey of minimal surfaces, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[OR] R. Osserman & M. Ru : An estimate for the Gauss curvature of minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ whose Gauss map omits a set of hyperplanes, J. Differential Geom. **46** (1997), No.3, 578–593.

[Zarko] Ž. Pavićević : Normal families, theorems of Liouville and Picard and Bloch principle, Math. Montisnigri **43** (2018), 5–9.

[Rob73] A. Robinson : Metamathematical problems, J. Symbolic Logic **38** (1973), 500—516.

[Ros] A. Ros : The Gauss map of minimal surfaces, Differemtial Geometry, Valencia 2001, Proceedings of the conference in honour of Antonio M. Naveira, edited by O. Gil-Medrano and V. Miquel, World Scientific, (2002) 235–252.

[Sch] J. L. Schiff : Normal families, Springer-Verlag, New York, 1993.

[UY] M. Umehara & K. Yamada : Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, Hokkaido Math. J. **35** (2006), No.1, 13—40.

[Yau] S. T. Yau : A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, Amer. J. Math.**100** (1978), No.1, 197—203.

[Zal75] L. Zalcman : A heuristic principle in complex function theory, Amer. Math. Monthly **82** (1975), No.8, 813—817.

[Zal98] L. Zalcman : Normal families: new perspectives, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **35** (1998), No.3, 215–230.