

2022 年度
修士論文

指導教員：小森 洋平 教授

曲面上のサークルパターンの存在と一意性について

早稲田大学大学院教育学研究科
数学教育専攻

中村 慧

目次

1	序論	3
2	準備	3
2.1	向き付け可能閉曲面やサークルパターンの定義	3
2.2	距離空間の貼り合わせと幾何構造の定義	6
3	曲面上のサークルパターンの存在	7
3.1	トーラス上のユークリッド幾何における Andreev-Thurston の定理	7
3.2	球面上のサークルパターンの存在	26
4	サークルパッキングに関する Thurston のアルゴリズム	30
4.1	Thurston のアルゴリズムの概要と収束性	30
4.2	Thurston のアルゴリズムのサークルパターンへの拡張	38
5	Python による実装	41
5.1	アルゴリズムと誤差関数	41
5.2	実装結果	41
5.3	誤差関数の比較	50

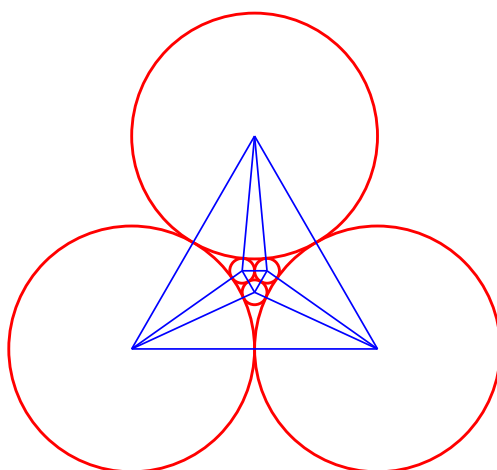


図1 サークルパッキングの例

1 序論

1970 年から 1980 年代に Andreev や Thurston によって, 適当な条件下では, 曲面上の三角形分割に対して幾何構造とサークルパターンの対が存在することが示された [7]. Andreev は球面幾何の場合 [5] を, Thurston はユークリッド幾何および双曲幾何の場合を扱っている. この修士論文では, ユークリッド幾何におけるトーラスや球面上の三角形分割に対応するもののみを扱うこととし, Andreev-Thurston の定理について Thurston が [6] で用いた方法を示す. また, サークルパッキングを得るための Thurston のアルゴリズムについて示す. さらに, このアルゴリズムをサークルパターンの場合に拡張する.

まず, 2.1 節では閉曲面の定義から始め, サークルパターンを定義する. その他の必要な定義や定理については 2.2 節で述べる. 次に, ユークリッド幾何におけるトーラス上のサークルパターンの存在について 3.1 節で述べる. 3.1 節では, まず, 任意の交角 (0 以上 $\pi/2$ 以下) で交わるような任意の半径の円の 3 つ組が等長写像による同型を除いて唯一存在すること (命題 3.1.2) を示し, これをもとに曲面 S_r を構成する. そして, S_r がユークリッド幾何構造を持つことを, 各頂点での曲率を並べた写像 F_0 について考察することにより示していく. さらに, 3.2 節では球面上のサークルパターンの存在について述べる. 球面上のサークルパターンの存在を, トーラス上のサークルパターンの存在を示した方法を利用して証明していく. 具体的には正三角形を 2 つ貼り合わせた曲面 S_E や立体射影を用いる.

このように, トーラスや球面上のサークルパターンの存在について示した後, 球面上のサークルパッキングを求めるための Thurston のアルゴリズムについて 4.1 節で述べる. さらに, このアルゴリズムの収束性の議論はサークルパターンの場合にも適用可能であるため, 適用の仕方を 4.2 節で述べる. そして, 具体的な三角形分割に対して, このアルゴリズムを Python を用いて実装した結果を 5 節で示す.

2 準備

2.1 向き付け可能閉曲面やサークルパターンの定義

ここでは定義や記号を準備していく. まずは閉曲面の定義から始める.

定義 2.1.1 (閉曲面). 第 2 可算公理をみたすコンパクトかつハウスドルフな位相空間 X で以下をみたすものを閉曲面という.

任意の $x \in X$ に対して, x のある開近傍 $U \subset X$ が存在し, U は \mathbb{R}^2 のある開集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ と同相である.

\mathbb{R}^n 内の $m + 1$ 個の点 v_0, v_1, \dots, v_m が一般の位置にあるということを次のように定義する.

定義 2.1.2 (一般の位置). \mathbb{R}^n 内に $m + 1$ 個の点 v_0, v_1, \dots, v_m をとる. $m \geq 1$ のとき, 任意の

$j (0 \leq j \leq m)$ に対して, m 個のベクトルの集合 $V(j)$ を

$$V(j) = \{v_i - v_j \mid 0 \leq i \leq m, i \neq j\}$$

とする. このとき,

$$V(0) = \{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$$

が一次独立ならば $m + 1$ 個の点 v_0, \dots, v_m は一般の位置にあるという. また, $m = 0$ のときは任意の点 v_0 は一般の位置にあるという.

さらに単体と複体の定義をする. 定義は [8] による.

定義 2.1.3 (単体). 一般の位置にある $m + 1$ 個の点 $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ に対して, \mathbb{R}^n の部分集合

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

を v_0, \dots, v_m を頂点とする m -単体という. この σ を $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$ と表す.

v_0, \dots, v_m の中の $k + 1$ 個の点 $v_{i_0}, \dots, v_{i_k} (k \leq m)$ は v_0, \dots, v_m が一般の位置にあれば一般の位置にある. このとき, k -単体 $\tau = \langle v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \rangle$ を m -単体 $\sigma = \langle v_0, \dots, v_m \rangle$ の辺単体という. 単体と辺単体を用いて複体を以下のように定義する.

定義 2.1.4 (複体). \mathbb{R}^n を 1 つ固定する. \mathbb{R}^n の中の有限個の単体の集合 K が次を満たすとき, K を複体と呼ぶ.

- (1) K に属する単体の辺単体も K に属する.
- (2) K に属する 2 つの単体の共通部分は空集合であるか, または 2 つの単体に共通な辺単体である.

複体 K に対して $|K|$ を

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

と定める. K の元は単体だが, $|K|$ は \mathbb{R}^n の部分集合である. 位相空間 X に対し X と同相な $|K|$ を持つ複体 K が存在するとき, X は単体分割可能であるといい, K を X の単体分割という. K が 0-単体, 1-単体, 2-単体のみからなる複体であるとき, この単体分割を三角形分割と呼ぶ.

任意の閉曲面に対して以下の定理が成り立つ.

定理 2.1.5 ([4], 定理 5.36). 任意の閉曲面は単体分割可能である.

この単体分割可能性を用いて閉曲面に対して向き付け可能性を定義する (定義は [9] による). まずは三角形分割の面の向きが同調することを定義する. 三角形分割の頂点集合を $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ とし, 面 f を頂点を用いて $(v_i, v_j, v_k) (i, j, k \in \{0, 1, 2\})$ と表す. このとき, 同値関係 $(v_i, v_j, v_k) \sim$

(v_p, v_q, v_r) を, 3次交代群 A_3 のある元 σ が存在して $p = \sigma(i), q = \sigma(j), r = \sigma(k)$ をみたすことと定義する. つまり,

$$(v_0, v_1, v_2) \sim (v_1, v_2, v_0) \sim (v_2, v_0, v_1)$$

である.

定義 2.1.6 (三角形分割の面, 辺の向き). $\{(v_i, v_j, v_k) \mid i, j, k \in \{0, 1, 2\} : \text{互いに異なる}\}$ を上で定義した同値関係 \sim で割った商集合 $\{(v_i, v_j, v_k) \mid i, j, k \in \{0, 1, 2\} : \text{互いに異なる}\} / \sim$ の2つの元 $[v_0, v_1, v_2], [v_0, v_2, v_1]$ を面 f の向きと呼ぶ. また, $[v_0, v_2, v_1] = -[v_0, v_1, v_2]$ と表す. さらに, 辺 $e = \overline{v_i v_j}$ の向きを図のように定め, それぞれ $[v_i, v_j], [v_j, v_i]$ と表す. 面のときと同様に $[v_j, v_i] = -[v_i, v_j]$ と表す.

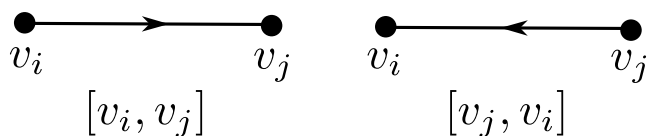
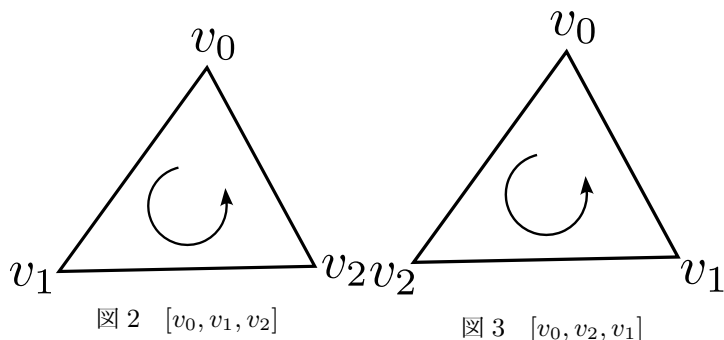


図4 辺の向き

辺 $[v_1, v_2]$ と面 $[v_0, v_1, v_2]$ の向きは同調しているといい, 図5のように2つの面 A, B が辺 C のみを共有し, A と C の向きが同調し, B と $-C$ の向きが同調しているとき, 2つの面 A と B の向きは同調しているという.

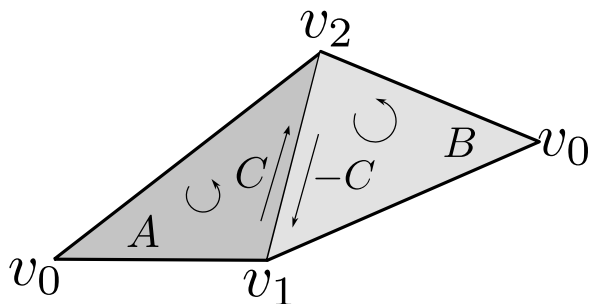


図5 同調する面

定義 2.1.7 (閉曲面の向き付け可能性 [9]). 閉曲面 S が, 任意の2つの三角形の向きが同調しているような三角形分割をもつとき, 閉曲面 S は向き付け可能であるという.

定理 2.1.5 から任意の閉曲面 S に対して単体分割が存在するので, S の単体分割の頂点数を V , 辺数を E , 面数を F とする時, オイラー標数 $\chi(S)$ を以下のように定めることができる.

$$\chi(S) = V - E + F$$

この $\chi(S)$ は Euler-Poincaré の公式 ([8], 定理 11.3) より S の単体分割の取り方によらずに定まる. 任意の向き付け可能閉曲面は以下の定理により分類される.

定理 2.1.8 (向き付け可能閉曲面の分類定理 [[4], 定理 6.15]). 任意の向き付け可能閉曲面は以下のいずれかに同相である.

- (1) 球面 S^2
- (2) 1つ以上のトーラス T^2 の連結和
- (3) 1つ以上の実射影平面 P^2 の連結和

これと以下の定理から向き付け可能閉曲面 S はオイラー標数 $\chi(S)$ により分類できる.

定理 2.1.9 (オイラー標数による向き付け可能閉曲面の分類 [[4], 定理 6.19]). 向き付け可能閉曲面 S のオイラー標数 $\chi(S)$ は以下のいずれかに一致する.

- (1) S が球面 S^2 のとき $\chi(S) = 2$
- (2) S が n 個のトーラス T^2 の連結和のとき $\chi(S) = 2 - 2n$
- (3) S が n 個の実射影平面 P^2 の連結和のとき $\chi(S) = 2 - n$

以上の準備のもとでサークルパターンを以下のように定義する.

定義 2.1.10 (サークルパターン). S を向き付け可能閉曲面とし, \mathcal{T} を S の三角形分割とする. \mathcal{T} の頂点集合, 辺集合, 面集合をそれぞれ $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ と表し, 写像 $\Theta : \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ が与えられているとする. 頂点集合 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ に 1 対 1 に対応する S 上の円の集合 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ が次の条件をみたすとき, データ (\mathcal{T}, Θ) を実現するサークルパターンであるという.

条件 $|\mathcal{T}|$ において円 C_i と C_j の中心が結ばれるならば, C_i と C_j はその辺 e に対応する実数 $\Theta(e)$ で交わる.

特に, 常に $\Theta = 0$ であるとき, \mathcal{C} を三角形分割 \mathcal{T} に対応するサークルパッキングという.

2.2 距離空間の貼り合わせと幾何構造の定義

ここでは距離空間を張り合わせることに幾何構造について定義する. 距離空間を貼り合わせることは以下のように定義する.

定義 2.2.1 (距離空間の貼り合わせ [[2], 定義 5.23]). (X_λ, d_λ) , $(\lambda \in \Lambda)$ を距離空間とし, $A_\lambda \subset X_\lambda$ を X_λ の閉部分空間とする. また, A を距離空間とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して等長写像 $i_\lambda: A \rightarrow A_\lambda$ が存在するとする. 任意の $a \in A$ と $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ に対して $i_\lambda(a) \sim i_{\lambda'}(a)$ とするとき, $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を同値関係 \sim で割った商空間 X を X_λ の A に沿う貼り合わせという.

距離空間を貼り合わせた空間上の距離を以下のように定義する.

命題 2.2.2 ([2], 補題 5.24). X を距離空間 X_λ の A に沿う貼り合わせとする. このとき, $x \in X_\lambda$ と $y \in X_{\lambda'}$ に対して $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定めると, d は X の距離関数になる.

$$d(x, y) = d_\lambda(x, y) \quad (\lambda = \lambda')$$

$$d(x, y) = \inf_{a \in A} \{d_\lambda(x, i_\lambda(a)) + d_{\lambda'}(i_{\lambda'}(a), y)\} \quad (\lambda \neq \lambda')$$

定理 2.2.3 (Brouwer の領域不変性定理 [[1] 系 19.8]). M^n を n 次元位相多様体とする. このとき, 写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が単射かつ連続ならば f は開写像である.

定義 2.2.4 (錐角・特異点 [[3], 3章]). 距離空間を貼り合わせてできた曲面上の点 s が特異点であるとは, s がユークリッド平面内の円板と等長な近傍をもたないこととする. また, 特異点 s に集まっている 2-単体の内角の和を錐角という.

3 曲面上のサークルパターンの存在

3.1 トーラス上のユークリッド幾何における Andreev-Thurston の定理

まずは, ユークリッド幾何におけるトーラス上の Andreev-Thurston の定理を述べる.

定理 3.1.1 (Andreev-Thurston の定理 [[7], 定理 1]). 向き付け可能閉曲面 S に対して, $\chi(S) = 0$ とする. この場合 S はトーラスである. 写像 $\Theta: \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ は次の条件 (1),(2) をみたすとする.

- (1) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ を, これらを繋げた辺 $e_1 + e_2 + e_3$ が S 内の可縮なループを表す任意の 3 組とする. このとき, もし, $\sum_{i=1}^3 \Theta(e_i) \geq \pi$ であれば $e_1 + e_2 + e_3$ は 1 つの面 $f \in \mathcal{F}$ の境界となる.
- (2) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$ を, これらを繋げた辺 $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が S 内の可縮なループを表す任意の 4 組とする. このとき, もし, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e_i) = 2\pi$ であれば $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ は 2 つの面 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ の和集合の作る四角形の境界となる.

このとき, データ (\mathcal{T}, Θ) を実現するようなトーラス上のユークリッド幾何構造とサークルパターン \mathcal{C} の対が存在する. さらに, ユークリッド幾何構造とサークルパターン \mathcal{C} はスカラー倍を除いて一意である.

注意. サークルパッキングの場合は任意の $\{e_i\} \subset \mathcal{E}$ に対して $\sum \Theta(e_i) = 0$ であるため, 定理 3.1.1

の条件 (1),(2) は常にみたされる． よって三角形分割 \mathcal{T} に対応するサークルパッキングは常に存在する．

はじめに以下の命題を示す．

命題 3.1.2. 任意の $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi/2]$ と任意の正数 r_1, r_2, r_3 に対して, r_1, r_2, r_3 を半径を持つユークリッド円の3対 C_1, C_2, C_3 でその交角が $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ となるものが等長写像による同型を除いて唯一存在する．

証明. 正数 l_1, l_2, l_3 を,

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3 \cos \theta_1} \\ l_2 &= \sqrt{r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 \cos \theta_2} \\ l_3 &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \theta_3} \end{aligned}$$

と定義すると,

$$\begin{aligned} r_2, r_3 &< l_1 \leq r_2 + r_3 \\ r_1, r_3 &< l_2 \leq r_1 + r_3 \\ r_1, r_2 &< l_3 \leq r_1 + r_2 \end{aligned}$$

となるため,

$$l_1 < l_2 + l_3, l_2 < l_1 + l_3, l_3 < l_1 + l_2$$

が成り立つ． よって, 各辺の長さが l_1, l_2, l_3 の三角形を作ることができる． 図6のように, この三角形の長さ l_i の辺に向かい合う頂点を $v_i (i = 1, 2, 3)$ とする． 以下, v_i を中心とし半径 r_i の円 C_i を描くと C_i と C_j が交角 θ_k で交わることを示す (ただし, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$)．

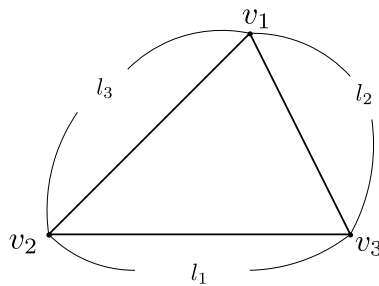


図6 頂点の名前の付けかた

まず, 円 C_1 および C_2 に着目すると,

$$l_3 \leq r_1 + r_2$$

が成り立っている． l_3 は頂点 v_1 と v_2 の距離だから, この不等式から円 C_1 と C_2 は交わる, または接していることが分かる． この2つの円が接する, つまり $l_3 = r_1 + r_2$ のときは $\theta_3 = 0$ に対応するため, $\theta_3 \neq 0$ つまり, $l_3 < r_1 + r_2$ のときを考える． このとき, 以下の図7のようになる．

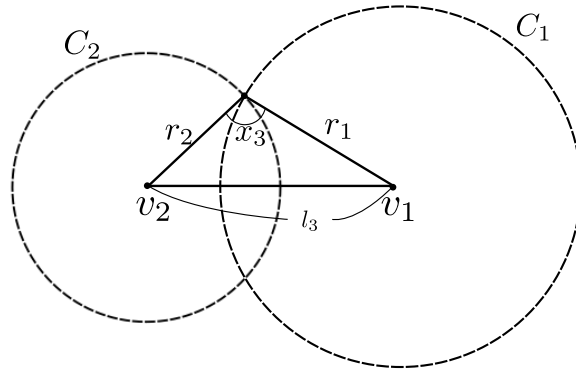


図7 円の位置関係

角 x_3 について余弦定理を用いると

$$l_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos x_3$$

が成り立ち, l_3 の定義から

$$l_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \theta_3$$

である. したがって, l_3 を消去して計算すると,

$$\cos \theta_3 = -\cos x_3$$

が得られ, $\pi - x_3 = \theta_3$ が得られる. 円の交角と x_3 との和は π であることから, C_1 と C_2 は交角 θ_3 で交わることがわかる. 他の円の組 C_1 と C_3 , C_2 と C_3 についても同様にして, それぞれの交角が θ_2, θ_1 であることが分かる. よって, 3辺の長さが l_1, l_2, l_3 であるような三角形の頂点 v_i を中心とする半径 r_i の円を描くことで C_1, C_2, C_3 が得られる ($i = 1, 2, 3$). 一意性は3辺の長さが決まると三角形が一つ定まることから従う. \square

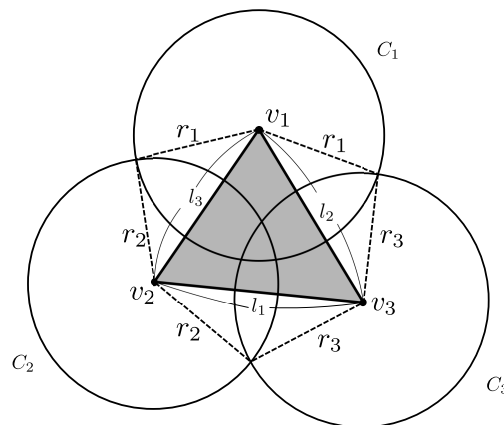


図8 3つの円と面 f

データ (\mathcal{T}, Θ) は以下固定し, 三角形分割 \mathcal{T} の頂点集合を $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とする. \mathcal{T} の面 f を取り, 頂点が v_i, v_j, v_k であるとする.

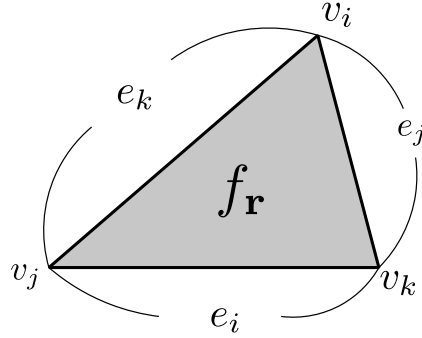


図9 ユークリッド三角形 $f_{\mathbf{r}}$

v_i, v_j, v_k の対辺をそれぞれ e_i, e_j, e_k と表す. また, $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid i = 1, \dots, n, x_i > 0\}$ と表し, $\Theta(e_i) = \theta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と表す. $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して, ユークリッド三角形 $f_{\mathbf{r}}$ を次を満たすように取る (図9).

$$\begin{aligned} e_i &= \sqrt{r_j^2 + r_k^2 + 2r_j r_k \cos \theta_i} \\ e_j &= \sqrt{r_i^2 + r_k^2 + 2r_i r_k \cos \theta_j} \\ e_k &= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \theta_k} \end{aligned}$$

$f_{\mathbf{r}} \in \{f_{\mathbf{r}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ の辺を等長に貼り合わせてできた曲面を $S_{\mathbf{r}}$ とする. このとき, \mathcal{T} の頂点 v_i に対応する $S_{\mathbf{r}}$ 内の点も v_i で表す. $S_{\mathbf{r}}$ 上の点 v_i を中心とする半径 r_i の円を C_i とすると, 命題 3.1.2 から, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ はデータ (\mathcal{T}, Θ) を実現するサークルパターンになっている. しかし, このとき, $S_{\mathbf{r}}$ は各頂点 v_i の周りで特異点を持つ可能性があり, 通常の意味で幾何的構造を持つとは言えない.

$v_i \in \mathcal{V}$ を頂点に持つ $S_{\mathbf{r}}$ 内の 2-単体が l 個である時, これらを $(f_{i1})_{\mathbf{r}}, (f_{i2})_{\mathbf{r}}, \dots, (f_{il})_{\mathbf{r}}$ と表し, 各 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$ の v_i における角度を θ_{ij} とする. $S_{\mathbf{r}}$ の頂点 v_i における錐角とはこれらの角度の総和 $\theta_{i1} + \dots + \theta_{il}$ のことで, 2π と錐角との差を点 v_i における $S_{\mathbf{r}}$ の曲率といい, $\kappa_{\mathbf{r}}(v_i)$ と表す. すなわち,

$$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) = 2\pi - (\theta_{i1} + \dots + \theta_{il})$$

である.

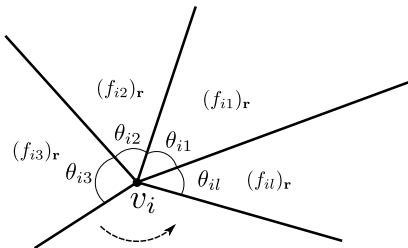


図10 頂点 v_i の周りの角

$S_{\mathbf{r}}$ がユークリッド幾何構造を持つことと, $\kappa_{\mathbf{r}}(v_1) = \dots = \kappa_{\mathbf{r}}(v_n) = 0$ は同値である.

連続写像

$$F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

を $F(\mathbf{r}) = (\kappa_{\mathbf{r}}(v_1), \kappa_{\mathbf{r}}(v_2), \dots, \kappa_{\mathbf{r}}(v_n))$ で定義すると, 今まで述べたことから定理 3.1.1 が成り立つ必要十分条件は以下のようなになる.

定理 3.1.1 が成り立つ.

$$\iff F(\mathbf{r}) = (0, \dots, 0) \text{ を満たす } \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n \text{ がスカラー倍を除いて唯一存在する.} \quad (3.2)$$

これ以降は, $F(\mathbf{r}) = (0, \dots, 0)$ を満たす $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ の存在と一意性を示す. まずは, 証明の第一段階として三角形の辺の変化と内角の大きさの変化に関する次の補題を示す.

補題 3.1.3 ([7] 補題 2). C_1, C_2, C_3 を図のように交角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で交わる半径 r_1, r_2, r_3 の円とする. C_1, C_2, C_3 の中心 v_1, v_2, v_3 で張られるユークリッド三角形を f とし, v_i における f の内角を α_i とする ($i = 1, 2, 3$). C_1 をより小さい半径 r'_1 をもつ円 C'_1 で置き換え, その他の円の半径や交角を固定しておくとき, v'_1, v_2, v_3 の張るユークリッド三角形の内角を α'_i ($i = 1, 2, 3$) とすると

$$\alpha_1 < \alpha'_1, \alpha_2 > \alpha'_2, \alpha_3 > \alpha'_3$$

が成り立つ. とくに, この結果から C'_1 の中心 v'_1 は f の内部に含まれることがわかる (図 12).

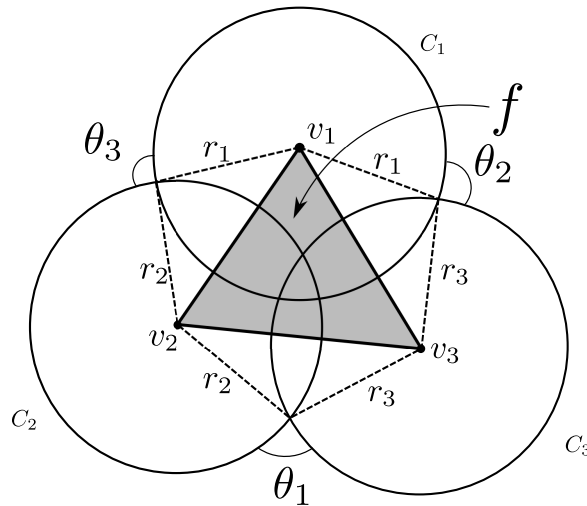


図 11 3つの円

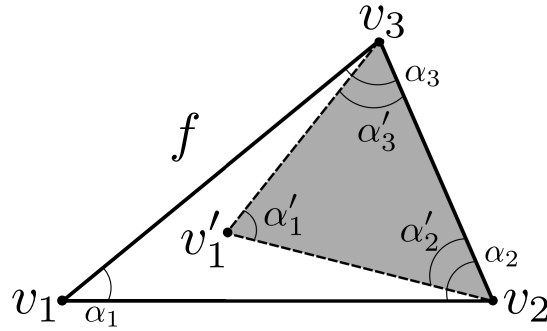


図 12

証明. 頂点 v_1, v_2, v_3 のユークリッド平面上の座標をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とし, A_2 が原点となるように平行移動しておく. 原点を O と表す. $\overrightarrow{OA_1}$ に平行で長さが 1 の位置ベクトルを \vec{U} とし, v_1, v_2 間の距離を l_3 とおくと, $\overrightarrow{OA_1} = l_3 \vec{U}$ と書ける. 以下 $\overrightarrow{OA_1}$ の r_1 による偏微分 $\frac{\partial A_1}{\partial r_1}$ を考える.

$$\frac{\partial A_1}{\partial r_1} = \frac{\partial l_3}{\partial r_1} \vec{U} + l_3 \frac{\partial \vec{U}}{\partial r_1} \quad (3.3)$$

である. $\vec{V} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial r_1}$ とおくと, \vec{U} の大きさが 1 であることから \vec{V} と \vec{U} は直交していることがわかる. 図 13 から,

$$\begin{aligned} l_3 &= r_1 \cos \gamma_1 + r_2 \cos \gamma_2 \\ h &= r_1 \sin \gamma_1 = r_2 \sin \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= \theta_3 \end{aligned}$$

が成り立つ.

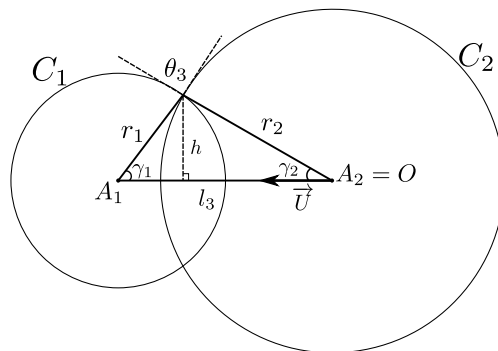


図 13

したがって, $\frac{\partial l_3}{\partial r_1}$ について次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l_3}{\partial r_1} &= \cos \gamma_1 + r_1 \left(\frac{\partial \cos \gamma_1}{\partial r_1} \right) + 0 + r_2 \left(\frac{\partial \cos \gamma_2}{\partial r_1} \right) \\
 &= \cos \gamma_1 + r_1 (-\sin \gamma_1) \frac{\partial \gamma_1}{\partial r_1} + r_2 (-\sin \gamma_2) \frac{\partial \gamma_2}{\partial r_1} \\
 &= \cos \gamma_1 - h \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial r_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial r_1} \right) \\
 &= \cos \gamma_1 - h \left(\frac{\partial (\gamma_1 + \gamma_2)}{\partial r_1} \right) \\
 &= \cos \gamma_1.
 \end{aligned}$$

よって, (3.3) より,

$$-r_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1} = -(r_1 \cos \gamma_1) \vec{U} - r_1 l_3 \vec{V}. \quad (3.4)$$

C_i と C_j の 2 交点を通るユークリッド平面上の直線を L_{ij} とする. (3.4) から A_1 を始点にとると, ベクトル $-r_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1}$ の終点は L_{12} 上にあることが分かる.

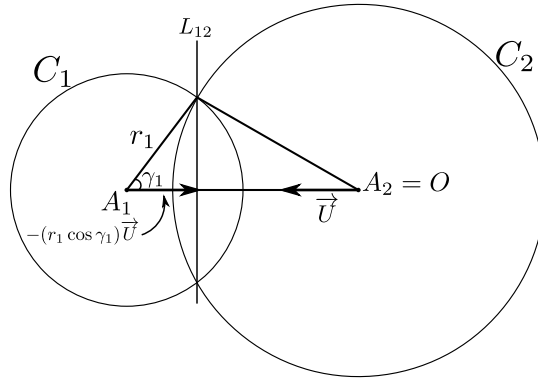


図 14

C_1, C_3 の組についても同様の議論から, $-r_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1}$ の A_3 を始点としたときの終点は L_{13} 上にもあることが分かる. 方べきの定理から 3 つの円の共通弦は 1 点で交わる事が分かるので, 3 直線 L_{12}, L_{13}, L_{23} の交点を Q とすると, $\vec{A}_1 Q = -r_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1}$ すなわち, $-\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1} = \frac{1}{r_1} \vec{A}_1 Q$ が成り立つ. $-\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial r_1}$ は r_1 が減少するときの点 A_1 の運動方向を示しているので, 以下で点 Q が三角形 f の内点であることを示していく. 三角形 $A_1 A_2 A_3$ の各辺ごとに議論をすれば良いので, 点 Q が線分 $A_2 A_3$ に対して A_1 の反対側にあるとする.

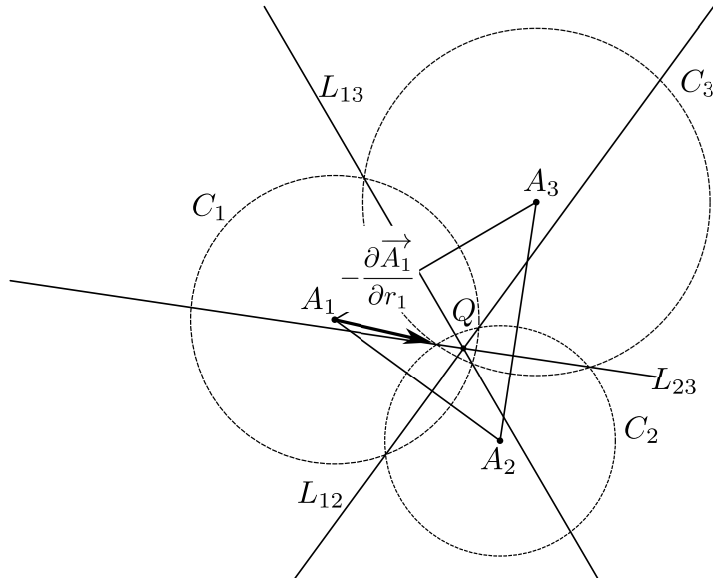


図 15

点 Q が三角形 $A_1A_2A_3$ の内部にあることを背理法で示す.

点 Q は L_{12}, L_{13}, L_{23} 上にあるので, 点 Q が三角形 $A_1A_2A_3$ の内部にないと仮定すると, その存在し得る領域は以下の図のグレーの領域になる.

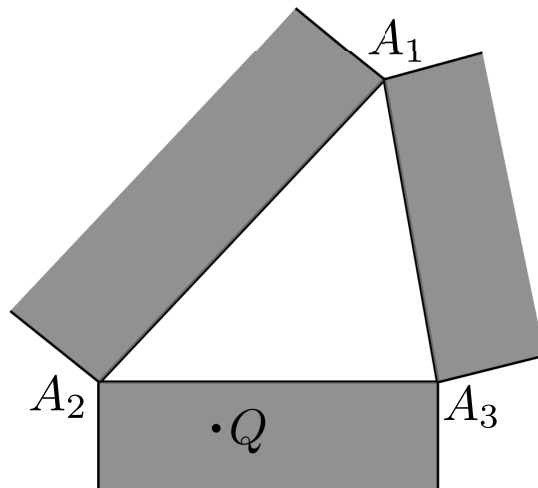


図 16

主張 3.1.4. 円 C_1 と線分 A_2A_3 は交わらない.

(\because) 背理法で示す. $C_1 \cap A_2A_3 \neq \emptyset$ と仮定すると以下の図 17 のようになる. 円 C_1 と円 C_2 の交点のうち, 線分 A_2A_3 に対して点 A_1 と反対側の点を P' とし, $\angle A_1P'A_2 = \alpha$ とする. A_2 から円 C_1 の P' 側に引いた接点を P とおき $A_2P = x$ とおく. 円 C_1 と円 C_2 の半径はそれぞれ r_1, r_2 である. このとき, 三平方の定理から $l_3^2 = r_1^2 + x^2$ であるため, 三角形 $A_1P'A_2$ で余弦定理

から,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - l_3^2}{2r_1r_2} \\ &= \frac{r_2^2 - x^2}{2r_1r_2} \\ &= \frac{(r_2 + x)(r_2 - x)}{2r_1r_2}.\end{aligned}$$

したがって, P' が P よりも A_3 側にあるとき, つまり, $r_2 > x$ のときは, $\cos \alpha > 0$ となって, $0 \leq \alpha < \pi/2$ となるので, 円の交角 θ が $0 \leq \theta \leq \pi/2$ をみたすことに反する. ゆえに, $r_2 \leq x$ である. $r_2 = x$ は $\alpha = \pi/2$ のときに成り立つ. A_1 から線分 A_2A_3 に引いた垂線の足を H とし, $A_1H = h$, $A_2H = y$ とおく. このとき, 三平方の定理から $l_3^2 = r_1^2 + r_2^2$, $l_3^2 = h^2 + y^2$ が成り立ち, 仮定から $r_1 > h$ である. よって,

$$\begin{aligned}r_1^2 + r_2^2 &= h^2 + y^2 \\ r_1^2 - h^2 &= y^2 - r_2^2 \\ (r_1 + h)(r_1 - h) &= (y + r_2)(y - r_2)\end{aligned}$$

から, $y > r_2$ がわかる. $A_3H = z$ に対しても三角形 $A_1P'A_3$ について同様の議論をすると $z > r_3$. したがって, $r_2 + r_3 < l_1$ となり, 円 C_2 と円 C_3 が交わらないので矛盾. ゆえに主張 3.1.4 が示せた.

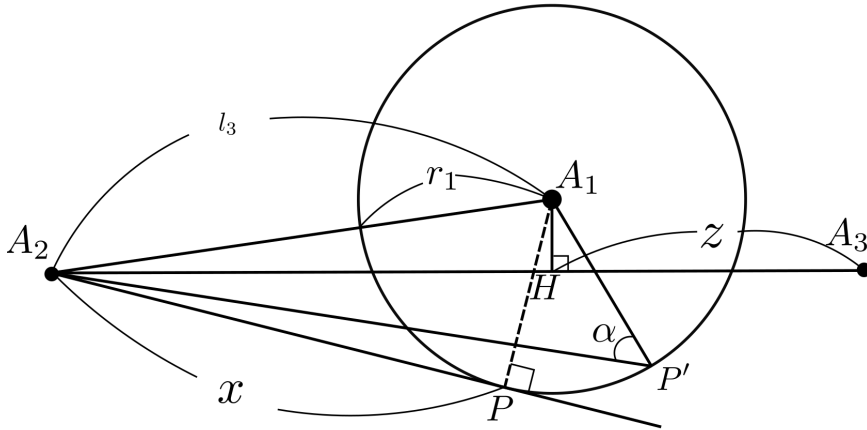


図 17

主張 3.1.4 から, $C_1 \cap A_2A_3 = \emptyset$ である. 点 Q は L_{23} 上にあるので図 18 のグレーの領域に存在するが, C_1 と A_2A_3 は交わらないので L_{12}, L_{13} のどちらかはこの領域を通り得ないため矛盾. したがって, Q は f の内部に含まれることが示せた.

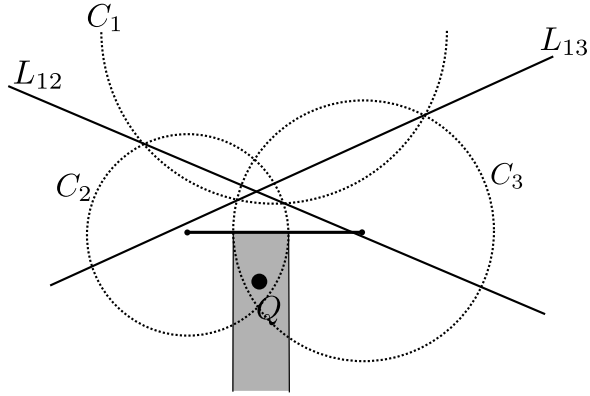


図 18

□

ここで, (3.1) で定めた連続写像 F の像について考察する. はじめに与えた三角形分割の頂点集合, 辺集合, 面集合の元の個数をそれぞれ V, E, F とするとトーラスのオイラー数と, 三角形の面と辺の個数の関係から,

$$V - E + F = 0, \quad 3F = 2E$$

が成り立つ. 2式から E を消去して, $2V - F = 0$ が得られ, この両辺を π 倍して $2\pi V - \pi F = 0$ を得る. これより,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) &= \sum_{v_i \in \mathcal{V}} (2\pi - (\theta_{i1} + \cdots + \theta_{in_i})) \\ &= 2\pi V - \pi F = 0. \end{aligned}$$

よって, \mathbb{R}^n の部分集合 Z を $Z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ とおくと,

$$F(\mathbb{R}_+^n) \subset Z$$

が成り立ち, ユークリッド幾何であることから任意の正数 $t > 0$ に対して $S_{\mathbf{r}}$ と $S_{t\mathbf{r}}$ は相似である. このため, F の定義域を和が 1 になるように正規化して,

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

としてもよい. したがって, 以降は F の Δ への制限写像

$$F_0 : F|_{\Delta} : \Delta \rightarrow Z$$

を考えれば十分である. さらに, Z は \mathbb{R}^{n-1} と同相であり, Δ は \mathbb{R}^{n-1} の開集合であることに注意する. この $F_0 : \Delta \rightarrow Z$ は単射であることを示す.

命題 3.1.5. $F_0 : \Delta \rightarrow Z$ は単射である. とくに, 連続性と Brouwer の領域不変性定理から, F_0 は開写像である.

この命題 3.1.5 を示すために以下の補題を準備する.

補題 3.1.6. $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_n) \in \Delta, \overline{\mathcal{V}_0} = \{v_i : r_i > r'_i\}$ とすると次が成り立つ.

$$\sum_{v_i \in \overline{\mathcal{V}_0}} \kappa_{\mathbf{r}}(v_i) > \sum_{v_i \in \overline{\mathcal{V}_0}} \kappa_{\mathbf{r}'}(v_i). \quad (*)$$

証明. まずは頂点 $v_i (i = 1, \dots, n)$ をつぎのように分類し色分けする. v_i のうち, v_i に対応する半径 r_i の方が r'_i よりも大きい (つまり $r_i > r'_i$ である) ものを黒丸で, v_i のうち, v_i に対応する半径 r_i の方が r'_i よりも小さいまたは等しい (つまり $r_i \leq r'_i$ である) ものを白丸で表す. 例えば, 次の図 19 のようになる.

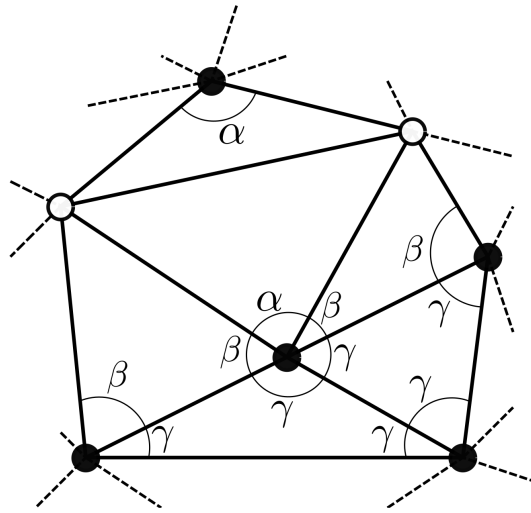


図 19 頂点の色分け

黒丸の頂点が含まれている三角形を以下のように分類する.

(α 型) 黒丸の頂点 1 つ, 白丸の頂点 2 つを頂点に持つ三角形. 内角は α で表す.

(β 型) 黒丸の頂点 2 つ, 白丸の頂点 1 つを頂点に持つ三角形. 内角は β で表す.

(γ 型) 黒丸の頂点 3 つのみで構成される三角形.

式 (*) は黒丸で表された頂点周りに集まっている角の和を表しているため, 以下では α 型, β 型, γ 型のそれぞれの場合で \mathbf{r} に対応する頂点 v_i での内角が \mathbf{r}' に対応する内角よりも大きいことを示す. γ 型の三角形は角の総和の大小に影響しないため α 型, β 型の三角形のみ考える. また, α 型または β 型の三角形を構成する頂点を $v_{\text{I}}, v_{\text{II}}, v_{\text{III}}$ とし, それに対応する円の半径を $r_{\text{I}}, r_{\text{II}}, r_{\text{III}}$ と表す.

(α 型の場合)

$$r_{\text{I}} > r'_{\text{I}} \text{ かつ } r_{\text{II}} \leq r'_{\text{II}} \text{ かつ } r_{\text{III}} \leq r'_{\text{III}} \implies \alpha_{\text{I}} < \alpha'_{\text{I}}$$

を示す. 補題 3.1.3 を繰り返し用いて示していく. まず, $r_I > r_I'', r_{II} = r_{II}'', r_{III} = r_{III}''$ に対して補題 3.1.3 を用いると角の大きさは,

$$\alpha_I < \alpha_I'', \alpha_{II} > \alpha_{II}'', \alpha_{III} > \alpha_{III}'' \quad (1)$$

となる. 次に, $r_I'' = r_I''', r_{II}'' < r_{II}''', r_{III}'' = r_{III}'''$ に対して補題 3.1.3 を用いると

$$\alpha_I'' < \alpha_I''', \alpha_{II}'' > \alpha_{II}''', \alpha_{III}'' < \alpha_{III}''' \quad (2)$$

が成り立ち, さらに $r_I''' = r_I', r_{II}''' < r_{II}', r_{III}''' < r_{III}'$ に対して補題 3.1.3 を用いることで,

$$\alpha_I''' < \alpha_I', \alpha_{II}''' < \alpha_{II}', \alpha_{III}''' > \alpha_{III}' \quad (3)$$

これら (1),(2),(3) から, $\alpha_I < \alpha_I'' < \alpha_I''' < \alpha_I'$ が分かり,

$$r_I > r_I' \text{ かつ } r_{II} \leq r_{II}' \text{ かつ } r_{III} \leq r_{III}' \implies \alpha_I < \alpha_I'$$

が得られる.

(β 型の場合)

α 型の場合と同様に補題 3.1.3 を用い以下を示す.

$$r_I > r_I' \text{ かつ } r_{II} > r_{II}' \text{ かつ } r_{III} \leq r_{III}' \implies \beta_I + \beta_{II} < \beta_I' + \beta_{II}'$$

ユークリッド幾何の場合を考えているため, $\beta_I + \beta_{II} < \beta_I' + \beta_{II}'$ であるための必要十分条件は $\beta_{III} > \beta_{III}'$ である. α 型の場合と同様の議論を

$$\begin{aligned} r_I &> r_I'' = r_I''' = r_I' \\ r_{II} &= r_{II}'' > r_{II}''' = r_{II}' \\ r_{III} &= r_{III}'' = r_{III}''' < r_{III}' \end{aligned}$$

について行うことで, $\beta_{III} > \beta_{III}'$ が得られる. したがって, 曲率 $\kappa_{\mathbf{r}}(v_i)$ の定義から,

$$\sum_{v_i \in \overline{\mathcal{V}_0}} \kappa_{\mathbf{r}}(v_i) > \sum_{v_i \in \overline{\mathcal{V}_0}} \kappa_{\mathbf{r}'}(v_i).$$

□

命題 3.1.5 の証明. $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ を仮定し, $F_0(\mathbf{r}) \neq F_0(\mathbf{r}')$ を示す. ここで, $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ならば $\emptyset \neq \overline{\mathcal{V}_0} \subsetneq \mathcal{V}$ であり, 曲率の総和は 0 であるため, 補題 3.1.6 から, $F_0(\mathbf{r}) \neq F_0(\mathbf{r}')$ が成り立つ. したがって, F_0 は単射である. □

F_0 は作り方から連続であるため, Brouwer の領域不変性定理 (定理 2.2.3) から F_0 は開写像である. よって, $F_0 : \Delta \rightarrow F_0(\Delta) \subset Z$ は同相写像であり, 逆写像が存在する. したがって, $(0, \dots, 0) \in F_0(\Delta)$ が分かれば定理 3.1.1 の証明が終わる. 以下 $(0, \dots, 0) \in F_0(\Delta)$ を示していく.

\mathbf{r} の変動範囲が Δ 内のいかなるコンパクト集合にも含まれない状態を $\mathbf{r} \rightarrow \partial\Delta$ と表す. つまり, $\mathbf{r} \rightarrow \partial\Delta$ とは, 「任意の $N \in \mathbb{N}, \mathbf{r}_N \in \Delta$ と任意のコンパクト集合 $K \subset \Delta$ に対して, ある $N_0 \in \mathbb{N}$

が存在して、 $N \geq N_0$ ならば $\mathbf{r}_N \notin K$ をみたす。」ということである。このとき、 $\bar{\Delta} \subset \mathbb{R}^n$ 内に \mathbf{r}_N の収束部分列がとれるので、 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \partial\Delta$ を与え、 \mathbf{s} に収束する \mathbf{r}_N を考える。 $\mathbf{s} \in \partial\Delta$ だから、 \mathbf{s} の成分のうちいくつかは 0 である。 $\mathcal{V}_0 = \{v_i \in \mathcal{V} \mid \mathbf{s} \text{ の第 } i \text{ 成分 } s_i = 0\}$ と定義すると

$$\emptyset \neq \mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

が成り立つ。ここで定義した \mathcal{V}_0 の元を含むような面 f を以下のように分類する。

$$f \text{ が } \alpha \text{ 型の三角形である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |f \cup \mathcal{V}_0| = 1$$

$$f \text{ が } \beta \text{ 型の三角形である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |f \cup \mathcal{V}_0| = 2$$

$$f \text{ が } \gamma \text{ 型の三角形である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |f \cup \mathcal{V}_0| = 3$$

このように分類した f の \mathcal{V}_0 に属する頂点での内角のこともそれぞれ α 型の角などと呼ぶ。面の集合と角の集合を以下の記号で表す。

$$\mathcal{F}_\alpha = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ は } \alpha \text{ 型}\}, \mathcal{F}_\beta = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ は } \beta \text{ 型}\}, \mathcal{F}_\gamma = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ は } \gamma \text{ 型}\}$$

$$A = \{\alpha \text{ 型の角}\}, B = \{\beta \text{ 型の角}\}, \Gamma = \{\gamma \text{ 型の角}\}$$

$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$ のとき、 $r_i \rightarrow 0$ となるため、下図から次の補題が成り立つ。

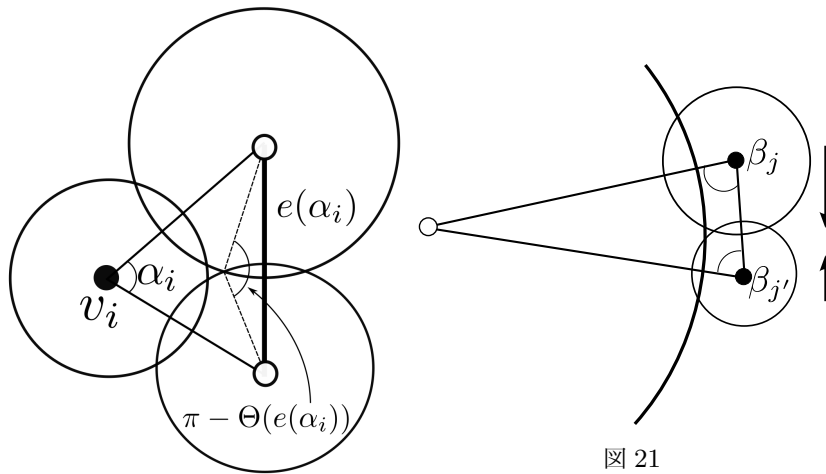


図 20

図 21

補題 3.1.7. $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$ のとき、次が成り立つ。

- (1) $\alpha_i \in A$ の対辺 $e(\alpha_i) \in \mathcal{E}$ に対して、

$$\angle \alpha_i \rightarrow \pi - \Theta(e(\alpha_i))$$

- (2) $f \in \mathcal{F}_\beta$ の β 型の内角 $\beta_j, \beta_{j'}$ に対して、

$$\angle \beta_j + \angle \beta_{j'} \rightarrow \pi$$

(3) $f \in \mathcal{F}_\gamma$ の内角 $\gamma_k, \gamma_{k'}, \gamma_{k''}$ に対して,

$$\angle\gamma_k + \angle\gamma_{k'} + \angle\gamma_{k''} = \pi$$

補題 3.1.7 から $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$ のときの α, β, γ 型それぞれの総和は次のようになる.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_i \in A} \angle\alpha_i &\rightarrow \sum_{\alpha_i \in A} \Theta(e(\alpha_i)) \\ \sum_{\beta_j \in B} \angle\beta_j &\rightarrow \frac{|B|}{2}\pi \\ \sum_{\gamma_k \in \Gamma} \angle\gamma_k &= \frac{|\Gamma|}{3}\pi \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) &= \sum_{v \in \mathcal{V}_0} (2\pi - (\mathcal{V}_0 \text{ の各頂点に集まっている角の和})) \\ &= 2\pi|\mathcal{V}_0| - \left(\sum_{v \in \mathcal{V}_0} (\text{各黒丸の頂点に集まっている角の和}) \right) \\ &= 2\pi|\mathcal{V}_0| - \left(\sum_{\alpha_i \in A} \angle\alpha_i + \sum_{\beta_j \in B} \angle\beta_j + \sum_{\gamma_k \in \Gamma} \angle\gamma_k \right) \\ &\rightarrow 2\pi|\mathcal{V}_0| - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) - \frac{|B|}{2}\pi - \frac{|\Gamma|}{3}\pi \quad (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$I(\mathcal{V}_0) = 2\pi|\mathcal{V}_0| - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) - \frac{|B|}{2}\pi - \frac{|\Gamma|}{3}\pi$$

とおく.

注意. 補題 3.1.7 のそれぞれの角の収束の仕方から, $\sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) > I(\mathcal{V}_0)$ である.

\mathcal{V}_0 の元と \mathcal{V}_0 によって張られる \mathcal{E} の元, \mathcal{F} の元からなる複体を $T_{\mathcal{V}_0}$, \mathcal{V}_0 によって張られる辺のうち \mathcal{E} に属するものの全体の集合を \mathcal{E}_0 と表す. さらに, $T_{\mathcal{V}_0}$ のオイラー標数を χ_0 と表すと $T_{\mathcal{V}_0}$ の作り方から

$$\chi_0 = |\mathcal{V}_0| - |\mathcal{E}_0| + |\mathcal{F}_\gamma| \quad (3.5)$$

である. \mathcal{F}_γ の面を構成する 3 辺は全て \mathcal{E}_0 の元であり, \mathcal{F}_β の面を構成する 3 辺のうち 1 辺が \mathcal{E}_0 の元である. また, \mathcal{E}_0 の任意の元 e は $\mathcal{F}_\beta \cup \mathcal{F}_\gamma$ のちょうど 2 つに共有されているので,

$$3|\mathcal{F}_\gamma| + |\mathcal{F}_\beta| = 2|\mathcal{E}_0|$$

が成り立つ. (3.5) と上式から $|\mathcal{E}_0|$ を消去すると,

$$2\chi_0 = 2|\mathcal{V}_0| - \frac{|B|}{2} - \frac{|\Gamma|}{3}$$

が得られる。したがって、 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) &\rightarrow I(\mathcal{V}_0) \\
 &= \pi \left(2|\mathcal{V}_0| - \frac{|B|}{2} - \frac{|\Gamma|}{3} \right) - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) \\
 &= 2\pi\chi_0 - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

α 型の面を構成する辺であり、 \mathcal{V}_0 の頂点を含まないものの全体の集合を $\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})$ と表す。 $\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})$ の元の個数 $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})|$ は $|A|$ 以下である。 $I(\mathcal{V}_0)$ に対して次の補題が成り立つ。

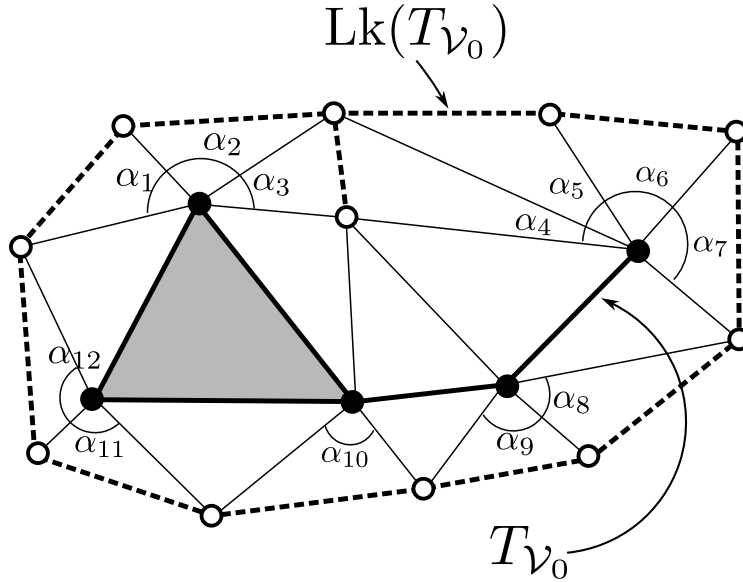


図 22

補題 3.1.8. \mathcal{V} の空でない任意の真部分集合 \mathcal{V}_0 に対して、

$$I(\mathcal{V}_0) := 2\pi\chi_0 - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) < 0$$

が成り立つ。

ここで、補題 3.1.8 の証明のためにトーラスの三角形分割に関する主張と連結な平面グラフのオイラー数に関する主張を準備する。

主張 3.1.9. \mathcal{T} をトーラス \mathbb{T}^2 の三角形分割、 S を \mathcal{T} の空でない部分グラフで任意の辺 e が 2 つの三角形に共有されているものとする。このとき、 S が連結ならば、 $S = \mathcal{T}$ である。

証明. S の実現 $|S|$ を S とおくと $\emptyset \neq S$ である。このとき、この S に対して \mathbb{T}^2 の連結性から、 $\partial S = \emptyset$ ならば $\mathbb{T}^2 = S$ が成り立つので $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{T}^2$ ならば $\partial S \neq \emptyset$ である。以下、 $\emptyset \neq S \subsetneq \mathcal{T}$

と仮定して矛盾を導く．仮定から S の実現 S の境界 ∂S は空でないから $x_0 \in \partial S$ を任意にとって固定できる． x_0 が S のある三角形の内部に含まれるとき， $x_0 \in \partial S$ に矛盾． x_0 が辺の相対内部にあるとき， x_0 が頂点になっているときは，仮定から S の元が存在し，下図のようになるので $x_0 \in \partial S$ に反する．

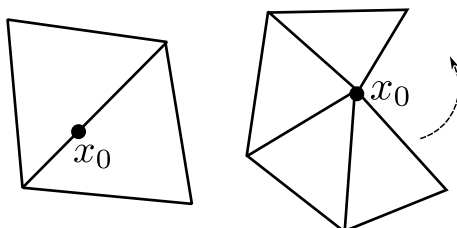


図 23 x_0 の様子

□

したがって， $T_{\mathcal{V}_0}$ の作り方から $T_{\mathcal{V}_0}$ が連結のとき， $T_{\mathcal{V}_0}$ は 2 つの三角形に共有されない辺をもつ．よって $T_{\mathcal{V}_0}$ に面が存在する場合，以下の操作ができ，連結な $T_{\mathcal{V}_0}$ のオイラー数 χ_0 について $\chi_0 = 1$ が成り立つ．

操作

面の境界になっている辺を取り除く．この操作で連結性は保たれ，面と辺の数が 1 つずつ減るため χ_0 は変化しない．これを全ての面がなくなるまで繰り返すと，ループが全て取り除かれるためグラフと 1 つの辺でしか繋がっていない頂点が存在する．この辺と頂点を取り除いても連結性は保たれ， χ_0 は変化しない．これを繰り返すことで 2 つの頂点と 1 つの辺のみが残り， $\chi_0 = 1$ が言える．

トーラスのオイラー数は 0 なので主張 3.1.9 と合わせて $T_{\mathcal{V}_0}$ の連結成分に対してオイラー数 χ_0 は $\chi_0 \leq 1$ を満たす．

補題 3.1.8 の証明． $T_{\mathcal{V}_0}$ が連結でないときは連結成分ごとに議論をすることで， $T_{\mathcal{V}_0}$ は連結と仮定できる． $\chi_0 < 0$ のときは $I(\mathcal{V}_0)$ の定義から $I(\mathcal{V}_0) < 0$ であるため， $\chi_0 = 1$ のときのみ考える．このとき， $T_{\mathcal{V}_0}$ は可縮である．円の交角 θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を満たすので，

$$\sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) \geq \frac{|A|}{2} \pi. \quad (3.7)$$

したがって， $|A| \geq 5$ ならば $I(\mathcal{V}_0) < 0$ が成り立つので，以下では $0 \leq |A| \leq 4$ とする．

$|A| = 4$ のとき，(3.6) と (3.7) から

$$I(\mathcal{V}_0) < 0 \iff \sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) < 2\pi$$

である． $|A| = 4$ のとき， $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 2$ または $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 4$ である．

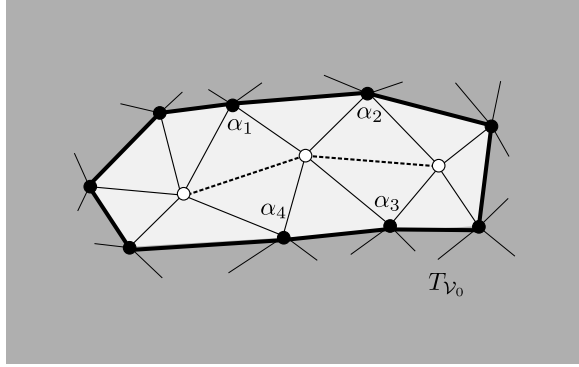


図 24 $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 2$ のとき

$|\text{Lk}(T_{V_0})| = 2$ のとき, $S \setminus T_{V_0}$ は可縮で S が球面 S^2 と同相になり矛盾. よって, $|A| = 4$ のときは $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 4$ である. このとき, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) = 2\pi$ を仮定すると, 定理 3.1.1 の条件 (2) から $\text{Lk}(T_{V_0})$ は 2 つの 2 単体を作る四角形の境界になる.

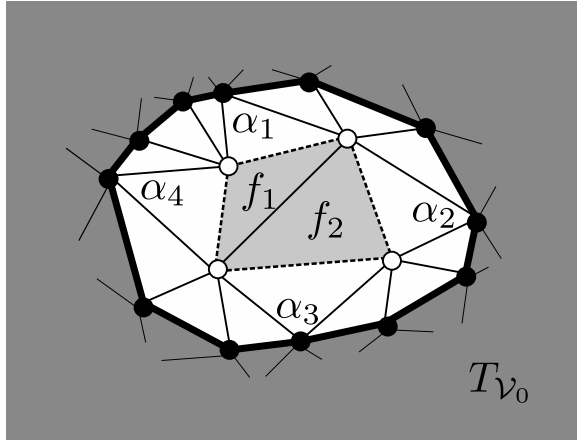


図 25 $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 4$ のとき

したがってこのときも $S \setminus T_{V_0}$ が可縮となり, 矛盾. もともと, $\Theta(e(\alpha_i)) \leq \pi/2 (i = 1, \dots, 4)$ より $\sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) \leq 2\pi$ だから $\sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) < 2\pi$.

次に, $|A| = 3$ のとき, $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 3$ である. (3.7) から,

$$I(\mathcal{V}_0) < 0 \iff \sum_{i=1}^3 \Theta(e(\alpha_i)) < \pi$$

である. もしも $\sum_{i=1}^3 \Theta(e(\alpha_i)) \geq \pi$ ならば定理 3.1.1 の条件 (1) から, $\text{Lk}(T_{V_0})$ はある 2 単体の境界になっているため, $S \setminus T_{V_0}$ は可縮となり矛盾.

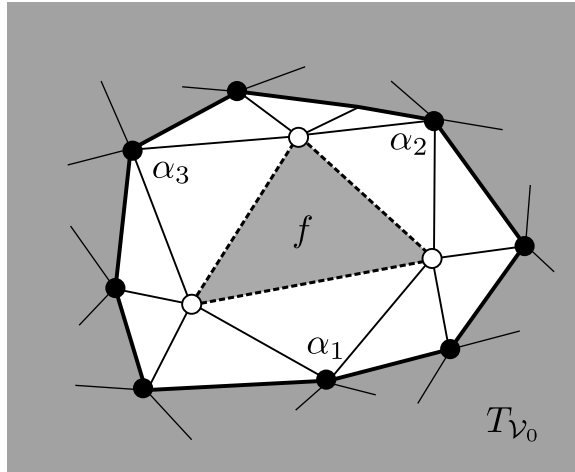


図 26 $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 3$ のとき

最後に $|A| = 2$ と $|A| = 0$ の場合はどちらも $S \setminus T_{V_0}$ が可縮となり矛盾.

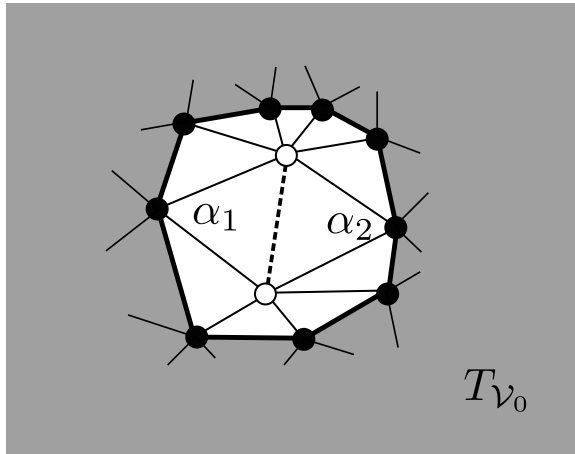


図 27 $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 1$ のとき

以上から全ての場合に $I(V_0) < 0$ である. □

$Z = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ と $\emptyset \neq \mathcal{V}' = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\} \subsetneq \mathcal{V}$ に対して半空間 $H_I(\mathcal{V}')$ を $H_I(\mathcal{V}') = \{(x_1, \dots, x_n) \in Z \mid x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \geq I(\mathcal{V}')\}$ と定義する. さらに, P を $P = \bigcap_{\emptyset \neq \mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V}} H_I(\mathcal{V}')$ と定義すると, 補題 3.1.8 から, $(0, \dots, 0) \in \text{int}P$ である. 以下では $F_0(\Delta) = \text{int}P$ を示し, $(0, \dots, 0) \in F_0(\Delta)$ を言うことで (3.2) を示す. 集合 P は凸集合の共通部分であるため $\text{int}P$ も凸集合であり, 弧状連結であるため連結である. 補題 3.1.7 から \mathcal{V} の任意の部分集合 \mathcal{V}' に対して $\sum_{v' \in \mathcal{V}'} \kappa(v') > I(V_0)$ なので, $F_0(\Delta) \subset \text{int}P$ である. 次の補題が成り立つ.

補題 3.1.10. $F_0 : \Delta \rightarrow \text{int}P$ は全射である.

これを示すために次の補題を用いる。

補題 3.1.11. Δ の 1 点コンパクト化 $\Delta \cup \{\mathbf{r}_\infty\}$ と $\text{int}P$ の 1 点コンパクト化 $\text{int}P \cup \{\mathbf{p}_\infty\}$ および, F_0 に対して写像 \widetilde{F}_0 を以下のように定義すると, $\widetilde{F}_0 : \Delta \cup \{\mathbf{r}_\infty\} \rightarrow \text{int}P \cup \{\mathbf{p}_\infty\}$ は連続写像になる。

$$\widetilde{F}_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} F_0(\mathbf{r}) & (\mathbf{r} \in \Delta) \\ \mathbf{p}_\infty & (\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty) \end{cases}$$

証明. まず, $\text{int}P$ の任意のコンパクト集合 K に対して, $F_0^{-1}(K) \subset \Delta$ もコンパクト集合であることを背理法で示す. $F_0^{-1}(K)$ がコンパクトではないと仮定すると, ある点列 $\{\mathbf{x}_n\} \subset F_0^{-1}(K)$ が存在し, $\{\mathbf{x}_n\}$ は Δ 内に収束部分列を持たない. しかし, $\overline{\Delta}$ はコンパクトなので, $\overline{\Delta}$ 内には $\{\mathbf{x}_n\}$ の収束部分列 $\{\mathbf{x}_{i_k}\}$ が存在する. ゆえに, その極限を \mathbf{x}_0 とすると

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{i_k} = \mathbf{x}_0 \in \partial\Delta$$

である.

一方, 仮定から K はコンパクトなので K の任意の点列 $\{\mathbf{y}_n\}$ に対してその収束部分列 $\{\mathbf{y}_{i_k}\}$ が存在して, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{i_k} := \mathbf{y}_0 \in K$ をみたく. $\mathbf{y}_n = F_0(\mathbf{x}_n)$ とすると, F_0 の連続性から $\lim_{k \rightarrow \infty} F_0(\mathbf{x}_{i_k}) = F_0(\mathbf{x}_0)$ である. $F_0(\mathbf{x}_0)$ について $\mathbf{x}_0 \in \partial\Delta$ なので, $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ のいくつかの成分は 0 である. したがって, $\mathcal{V}_0 = \{v_i \in \mathcal{V} \mid i \text{ は } \mathbf{x}_0 \text{ で } 0 \text{ になっている成分}\}$ とおく. するとこのとき, $\mathbf{x}_0 \in \partial\Delta$ より \mathbf{x}_0 は Δ 内のいかなるコンパクト集合上にも含まれていない. よって,

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{x}_0}(v) \rightarrow \mathbf{I}(\mathcal{V}_0)$$

をみたくので, $F_0(\mathbf{x}_0) \in \partial P$ となり, K のコンパクト性に矛盾. よって, $\text{int}P$ の任意のコンパクト集合 K に対して, $F_0^{-1}(K) \subset \Delta$ もコンパクト集合である.

つぎに, このとき \widetilde{F}_0 が連続になることを示す. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty$ で \widetilde{F}_0 が連続になることを示せば良い. $K \subset \text{int}P$ をコンパクト集合とする. $\mathbf{p}_\infty = \widetilde{F}_0(\mathbf{r}_\infty)$ の任意の開近傍 $(\text{int}P \setminus K) \cup \{\mathbf{p}_\infty\}$ に対して, $F_0^{-1}((\text{int}P \setminus K) \cup \{\mathbf{p}_\infty\}) = (\Delta \setminus F_0^{-1}(K)) \cup \{\mathbf{r}_\infty\}$ は \mathbf{r}_∞ の開近傍である. さらに,

$$F_0((\Delta \setminus F_0^{-1}(K)) \cup \{\mathbf{r}_\infty\}) = F_0(F_0^{-1}((\text{int}P \setminus K) \cup \{\mathbf{p}_\infty\})) \subset (\text{int}P \setminus K) \cup \{\mathbf{p}_\infty\}$$

が成り立つため, \widetilde{F}_0 は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty$ で連続である. □

補題 3.1.10 の証明. Δ はコンパクトかつハウスドルフなので $\Delta \cup \{\mathbf{r}_\infty\}$ もコンパクトであり, \widetilde{F}_0 の連続性から $\widetilde{F}_0(\Delta \cup \{\mathbf{r}_\infty\}) \subset \text{int}P \cup \{\mathbf{p}_\infty\}$ もコンパクトである. また, ハウスドルフ性から $\widetilde{F}_0(\Delta \cup \{\mathbf{r}_\infty\})$ は閉集合で $F_0(\Delta) \subset \text{int}P$ は閉集合である. また, F_0 は開写像であるから $F_0(\Delta) \subset \text{int}P$ は開集合である. $\text{int}P$ は連結で空ではないから, $F_0(\Delta) = \text{int}P$ である. □

以上から, $F_0(\mathbf{r}) = (0, \dots, 0)$ をみたく $\mathbf{r} \in \Delta$ が唯一存在することが分かり, 定理 3.1.1 が成り立つことが示せた.

3.2 球面上のサークルパターンの存在

ここでは球面上の Andreev-Thurston の定理について述べる．定理は以下ようになる．

定理 3.2.1 (球面上の Andreev-Thurston の定理 [[5], 定理 B]). S を 2次元球面とし, \mathcal{T} を球面上の三角形分割とする．さらに, 写像 $\Theta: \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ はつぎの 2つの条件をみたすとする．

- (1) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3$ が S 内の可縮なループを表すような任意の 3組とすると, $\sum_{i=1}^3 \Theta(e_i) < \pi$ である．
- (2) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$ を $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が S 内の可縮なループを表すような任意の 4組とすると, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e_i) < 2\pi$ である．

このとき, データ \mathcal{T}, Θ を実現するようなサークルパターンが S 上の等角変換を除いて一意に存在する．

三角形分割の面 $f_0 \in \mathcal{F}$ を 1つ固定し, f_0 の頂点を v_1, v_2, v_3 とする．2つの合同なユークリッド正三角形の辺を等長的に貼り合わせてできた曲面 S_E を考える．まずはこの曲面 S_E 上のサークルパターンの存在を示す． S_E は 2次元球面 S と同相であり, 錐角が $2\pi/3$ の特異点を 3つ持つような曲面である．曲面 S_E 上の向きを固定する． $h: S \rightarrow S_E$ を向きを保つ同相写像で v_i を特異点に移す写像とする ($i = 1, 2, 3$)． $i = 1, 2, 3$ に対して, 各 $h(v_i)$ での S_E での曲率は $2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3$ である．定理 3.1.1 の証明と同様に, $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ とし, $\mathbf{r} \in \Delta$ に対応する曲面を $S_{\mathbf{r}}$ とする．さらに, $S_{\mathbf{r}}$ 上の頂点 v_i における曲率を $\kappa_{\mathbf{r}}(v_i)$ と表す．また, 連続写像 $F_0: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ も同様に定義する．三角形分割 \mathcal{T} の頂点数, 辺数, 面数をそれぞれ V, E, F と書くと, 球面のオイラー数から, $V - E + F = 2$ であり, 三角形の辺数と面数の関係から, $3F = 2E$ である．したがってこの 2式から $2V - 4 = F$ が成り立つので, 曲率の定義と合わせて,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \kappa_{\mathbf{r}}(v_i) &= 2\pi V - \pi F \\ &= 2\pi V - \pi(2V - F) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

よって, $Y = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + \dots + y_n = 4\pi\}$ とすると $F_0(\Delta) \subset Y$ である．命題 3.1.5 での議論を用いることで, $F_0: \Delta \rightarrow Y$ は単射であることがわかる． $\mathbf{r} \in \Delta$ に対応する $S_{\mathbf{r}}$ が S_E と一致するための必要十分条件は,

$$F_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \dots, 0 \right)$$

である．以下では

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \dots, 0 \right)$$

とおく．このとき, 次の補題が成り立つ．

補題 3.2.2. \mathcal{V} の空でない任意の真部分集合 $\mathcal{V}_0 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}\}$ に対して

$$p_{i_1} + \dots + p_{i_m} > I(\mathcal{V}_0) \quad (3.8)$$

が成り立つ。ただし,

$$I(\mathcal{V}_0) = 2\pi\chi_0 - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i)))$$

である。

証明. (3.8) の左辺は 0 以上である。円の交角は $\pi/2$ 以下なので, $\pi - \Theta(e(\alpha_i)) \geq \pi/2$ である。このため, $\chi_0 \leq 0$ の場合および, $\chi_0 = 1$ かつ $|A| \geq 5$ の場合は $I(\mathcal{V}_0) < 0$ である。よって, $\chi_0 = 1$ かつ $0 \leq |A| \leq 4$ の場合のみ考える。 $|A| = 4$ のときは, 以下の 2 つの場合が考えられる。

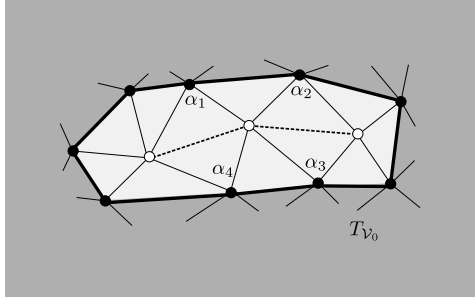


図 28 $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 2$ のとき

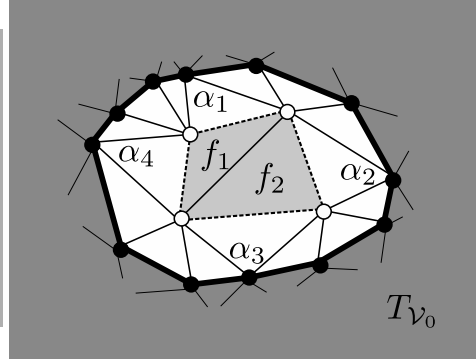


図 29 $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 4$ のとき

- $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 4$ のとき

定理 3.2.1 の条件 (2) より, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) < 2\pi$ である。したがって,

$$\begin{aligned} I(\mathcal{V}_0) &= 2\pi - \sum_{i=1}^4 (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) \\ &= -2\pi + \sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) < 0. \end{aligned}$$

- $|\text{Lk}(T_{\mathcal{V}_0})| = 2$ のとき

図中の白丸で表された $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ の元は, この 3 つでは \mathcal{T} の 2-単体を張らないので白丸 3 つの集合は $\{v_1, v_2, v_3\}$ とは一致しない。よって, $\{v_1, v_2, v_3\} \cap \mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ である。よって, $p_{i_1} + \dots + p_{i_m} \geq 4\pi/3$ である。また, $I(\mathcal{V}_0)$ について, 円の交角が $\pi/2$ 以下であることから,

$$I(\mathcal{V}_0) = -2\pi + \sum_{i=1}^4 \Theta(e(\alpha_i)) \leq 0$$

であるため, (3.8) が成り立つ。

つぎに, $|A| = 3$ のときは図のような状況になっている.

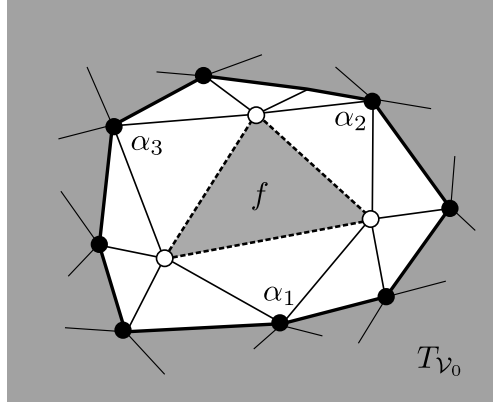


図 30 $|\text{Lk}(T_{V_0})| = 3$ のとき

よって, 定理 3.2.1 の条件 (2) から

$$\sum_{i=1}^3 \Theta(e(\alpha_i)) < \pi$$

である. したがって,

$$I(\mathcal{V}_0) = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \Theta(e(\alpha_i)) < 0$$

であるから (3.8) が成り立つ. さらに, $|A| = 2$ のとき, 白丸であるような $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ の元は 2 個である. よって, v_1, v_2, v_3 のうち少なくとも 1 つは \mathcal{V}_0 の元なので,

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_m} \geq \frac{4\pi}{3}.$$

また,

$$I(\mathcal{V}_0) = 2\pi - \sum_{i=1}^2 (\pi - \Theta(e(\alpha_i))) = \Theta(e(\alpha_1)) + \Theta(e(\alpha_2)) \leq \pi$$

から (3.8) は成り立つ. $|A| = 1$ の場合は存在しないので最後に $|A| = 0$ のときを考えると, 白丸である $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ の元は 1 つなので v_1, v_2, v_3 のうち少なくとも 2 つは \mathcal{V}_0 の元である. よって,

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_m} \geq \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

であり, $I(\mathcal{V}_0) = 2\pi$ である. 以上から, (3.8) が示せた. \square

この準備のもとで, 定理 3.2.1 を示していく.

定理 3.2.1 の証明. 定理 3.1.1 の証明の際と同様に, \mathcal{V} の空でない任意の真部分集合 $\mathcal{V}' = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ に対して $H_I(\mathcal{V}') = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y \mid y_{i_1} + \dots + y_{i_m} \geq I(\mathcal{V}')\}$ と定義し, P を

$$P = \bigcap_{\emptyset \neq \mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V}} H_I(\mathcal{V}')$$

と定義する. すると補題 3.2.2 より $\mathbf{p} \in \text{int}P = F_0(\Delta)$ である. よって, $\mathbf{r}_0 = F_0^{-1}(\mathbf{p})$ に対応する曲面 $S_{\mathbf{r}_0}$ は S_E と一致し, S_E 上のサークルパターン $\mathcal{C}_0 = \{C_1, \dots, C_n\}$ がデータ $h(\mathcal{T}), \Theta$ を実現する唯一のものである. 固定しておいた $f_0 \in \mathcal{F}$ に対して定まる 2-単体 $T_0 := (f_0)_{\mathbf{r}_0}$ は $h(v_1), h(v_2), h(v_3)$ を頂点にもつ S_E 内の 2-単体である. したがって, S_E の作り方から, T_0 は正三角形であり, $T_1 = S_E \setminus \text{int}T_0$ も正三角形である. 主張 3.1.4 の証明と同様に, 任意の $C_j (j = 4, \dots, n)$ は三角形 T_0 と交わらないので $\text{int}T_1$ に含まれる. T_1 内の頂点での曲率は 0 であるから, 向きを逆にする等長的埋め込み $g: T_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考えることができ, T_1 上にあった分割は正三角形 $T_2 = g(T_1)$ 内に移される.

$C_i \in \mathcal{C}_0$ に対して T_1 との共通部分 $C_i \cap T_1$ を C_i の T_1 への制限と呼び, $C_i|_{T_1}$ と表す. さらに $\mathcal{C}_0|_{T_1} = \{C_i|_{T_1} \mid i = 1, \dots, n\}$ と表す. $i = 1, 2, 3$ に対して $g(C_i|_{T_1})$ は T_2 内の $1/6$ 円になっており, この $1/6$ 円と同じ半径を持つ同心円を $D_i (i = 1, 2, 3)$ とする. このとき, 円の集合

$$\mathcal{C}_1 = g(\mathcal{C}_0 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}) \cup \{D_1, D_2, D_3\}$$

はデータ Θ を実現する \mathbb{R}^2 上のサークルパターンである. S を \mathbb{R}^3 内の単位球面 $\{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + (t-1)^2 = 1\}$ と同一視し, $\varphi: S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ を立体射影とする.

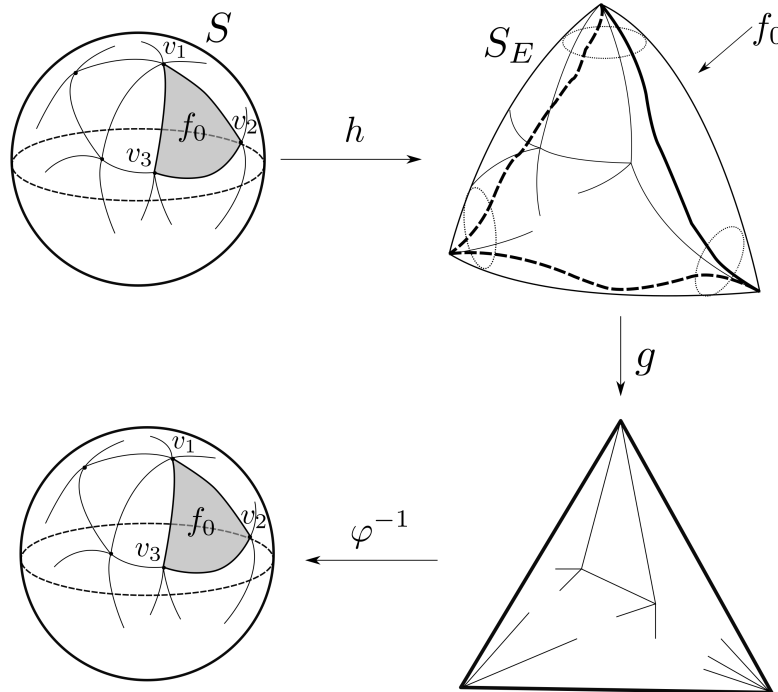


図 31

立体射影は円円対応かつ等角であるため、 $C = \varphi^{-1}(C_1)$ はデータ \mathcal{T}, Θ を実現するサークルパターンである。 S 上のサークルパターンの存在は示せたので、このサークルパターンが S 上の等角変換を除き一意であることを示す。 C' をデータ \mathcal{T}, Θ を実現する任意のサークルパターンとし、頂点 v_1, v_2, v_3 に対応する $C'_1 = \varphi(C')$ 内の円をそれぞれ、 D'_1, D'_2, D'_3 とする。円の交角は写像 Θ から定まるものなので、 D_1, D_2, D_3 間の交角と D'_1, D'_2, D'_3 の交角は一致する。したがって、 \mathbb{C} 上のメビウス変換 γ で $\gamma(D'_i) = D_i$ ($i = 1, 2, 3$) をみたすものが存在する。 C_0 の S_E 上での一意性から、複素平面内の円の集合 $\gamma(C'_1)|_{T_2}$ の g による引き戻し $g^{-1}(\gamma(C'_1)|_{T_2})$ は $C_0|_{T_1}$ と一致する。よって、 $\gamma(C'_1)|_{T_2} = g(C_0|_{T_1}) = C_1|_{T_2}$ である。よって、 $\gamma(D'_i) = D_i$ ($i = 1, 2, 3$) と合わせて

$$\gamma(C'_1) = C_1$$

である。 $\bar{\gamma}: S \rightarrow S$ を $\bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi$ と定めると、これは等角変換であり、 $\bar{\gamma}(C') = C$ が成り立つ。よって、一意性も示せた。

□

4 サークルパッキングに関する Thurston のアルゴリズム

サークルパターンうち、任意の辺 $e \in \mathcal{E}$ に対して常に $\Theta(e) = 0$ という特別な場合がサークルパッキングであった。三角形分割からサークルパッキングを得る Thurston のアルゴリズムが知られている。以下では Thurston のアルゴリズムとその収束性を示し、このアルゴリズムによってサークルパッキングが得られることを示す。さらに、このアルゴリズムをサークルパターンの場合に拡張する。

4.1 Thurston のアルゴリズムの概要と収束性

ここでは、サークルパッキングを得るための Thurston のアルゴリズムを示し、このアルゴリズムが収束することを証明する。

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ とし、 $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathcal{V}$ を外部三角形の3頂点とする。外部三角形 $v_1v_2v_3$ の v_i ($i = 1, 2, 3$) に対応する内角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ として $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in (0, \infty)^n$ とする。面 f が三角形 $v_iv_jv_k$ であるとき、面 f の頂点集合を $V(f)$ と書く。すなわち、 $V(f) = \{v_i, v_j, v_k\}$ である。また、三角形 $v_iv_jv_k$ の v_j における内角を $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$ と書く。 $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j) \in (0, \pi)$ である。さらに、 \mathbf{r} という円の半径が与えられているときの v_j に集まっている角の和を $\sigma_j(\mathbf{r})$ と書く。すなわち、 $\sigma_j(\mathbf{r}) = \sum_{f:V(f)\ni v_j} \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$ である。サークルパッキングになっている \mathbf{r} は以下をみたす。

$$\sigma_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \theta_i & (i = 1, 2, 3) \\ 2\pi & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1$$

このような \mathbf{r} を見つけることは以下で定義する $\kappa_i(\mathbf{r})$ という関数が恒等的に 0 になる \mathbf{r} を見つけることと考えることができる。

$$\kappa_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \theta_i - \sigma_i(\mathbf{r}) & (i = 1, 2, 3) \\ 2\pi - \sigma_i(\mathbf{r}) & (\text{その他}) \end{cases}$$

$\kappa_i(\mathbf{r})$ は n 変数関数であるが, 三角形 $v_1v_2v_3$ の内部のある頂点 v に着目し, この頂点 v にふられている半径 r 以外を固定して 1 変数関数 $\kappa(r)$ を以下のように定義する。

$$\kappa: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto 2\pi - \sum_{i=1}^l \alpha_i.$$

ただし, l は頂点 v の周りの三角形の個数である ($l \geq 3$). すると, 頂点 v に対する内角の 1 つ α_i は余弦定理から,

$$\alpha_i = \cos^{-1} \left(1 - \frac{2r_i r_{i+1}}{(r + r_i)(r + r_{i+1})} \right)$$

と書けるので r の連続関数になっている。したがって κ は連続関数であり, α_i が r について単調減少であることから κ は単調増加であることが分かる。さらに, $\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_i = \pi$ と $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_i = 0$ から

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = 2\pi - l\pi = (2 - l)\pi < 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa(r) = 2\pi > 0$$

だから, 中間値の定理により, ある $r^* \in \mathbb{R}_+$ がただ 1 つ存在して $\kappa(r^*) = 0$ をみたく。また, v_i ($i = 1, 2, 3$) に集まる三角形の個数 l は $l \geq 2$ であり,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = \theta_i - l\pi < 0 \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa(r) = 2\pi > 0$$

であるため, 中間値の定理より $r^* \in \mathbb{R}_+$ がただ 1 つ存在し, $\kappa(r^*) = 0$ をみたく。

このように各頂点 v_i ごとに求まる r_i^* に対して写像 $\tilde{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ を

$$(\log r_j) = (t_j) \mapsto \tilde{F}_i(t_1, \dots, t_N) = \log r_i^*$$

と定める。角度は三角形の辺の長さを一齐に定数倍しても変化しないので, $\tilde{F}(t_i + c) = \tilde{F}(t_i)$ である。 \mathbb{R}^N の 1 次元部分ベクトル空間 $D = \{(c, \dots, c) \in \mathbb{R}^N \mid c \in \mathbb{R}\}$ による商空間 \mathbb{R}^N/D を考えると, 以下のように写像 F が誘導される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N/D & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^N/D \end{array}$$

$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, [x] \in \mathbb{R}^N/D$ に対して $\|[x]\| = \sup_i x_i - \inf_i x_i$ と定めると, \mathbb{R}^N/D 上のノルムになる。サークルパッキングの存在から, ある $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$ がただ 1 つ存在して $F([a_i]) = [a_i]$ をみたく。つまり, サークルパッキングに対応する $[a_i]$ は F の固定点になっている。 F の n 回合成を F^n と書く。

定理 4.1.1 (Thurston の反復アルゴリズム). 任意の $[t_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n([t_i]) = [a_i]$ である. ただし, $[a_i]$ は前述したサークルパッキングに対応する \mathbb{R}^N/D の元である. ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n([t_i]) = [a_i]$ とは, \mathbb{R}^N/D 内の距離 $d([x], [y]) = \|[x] - [y]\|$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n([t_i]), [a_i]) = 0$ を意味するものとする.

注意. サークルパッキングの一意性は Thurston の反復アルゴリズムから言える. 実際, $[a_i], [b_i] \in \mathbb{R}^N/D$ をともにサークルパッキングに対応するものとする, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F^n([a_i]) = [a_i]$ が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} d([a_i], [b_i]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d([a_i], [b_i]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n([a_i]), [b_i]) = 0 \end{aligned}$$

であるため, $[a_i] = [b_i]$ である.

κ_i の偏微分について, κ_i の定義から次の主張が成り立つ.

主張 4.1.2. 頂点 v_i, v_j が隣接していることを, $i \sim j$ と表す. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} &> 0 \\ i \neq j: \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} &= \begin{cases} < 0 & (i \sim j) \\ = 0 & (i \not\sim j) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって, \tilde{F}_i について以下の主張が成り立つ.

主張 4.1.3.

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ -\frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} / \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} & (i \neq j) \end{cases}$$

(\because) $\kappa_i(t_1, \dots, t_{i-1}, \tilde{F}_i(t_1, \dots, t_N), t_{i+1}, \dots, t_N) = 0$ であることと主張 4.1.2 から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_i} &= 0 \\ \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つため, これらを $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j}$ について解くと結果が得られる. さらに, \tilde{F}_i の t_j 偏微分の和について以下の主張が成り立つ.

主張 4.1.4.

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = 1$$

(\cdot) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\kappa_i(t_1 + c, \dots, t_N + c) = \kappa_i(t_1, \dots, t_N)$ であるため, 両辺を t_j 偏微分することで $\sum_{j=1}^N \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} = 0$ が得られる. これと主張 4.1.2 および主張 4.1.3 の結果から,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} + \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} &= 0 \\ \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial t_j} / \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_i} \right) &= -1 \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} &= 1 \end{aligned}$$

となるため, 示せた. 定理 4.1.1 を示すために以下の行列の補題を用いる.

補題 4.1.5 (行列の補題). $A = (a_{ij})$ を $N \times N$ 正方行列で, 以下をみたすものとする.

- ある $\alpha \geq 0$ が存在して, $a_{ij} \geq \alpha$ ($1 \leq i, j \leq N$) をみたす.
- $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$.

このとき, $x, x' \in \mathbb{R}^N$ に対して, $x' = Ax$ と書くと次の3つが成り立つ.

- (1) $(1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \leq x'_j \leq (1 - \alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j$.
- (2) $D = \{(t, \dots, t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$ と定義すると $AD \subset D$ である. よって, $\hat{A}: \mathbb{R}^N/D \rightarrow \mathbb{R}^N/D$ が誘導される.
- (3) \mathbb{R}^N/D の任意の元 $[x_i]$ に対して, $\|[x_i]\| = \sup x_j - \inf x_j$ とすると,

$$\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha \leq 1$$

が成り立つ.

(1) の証明. $x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N$ である. 仮に $x_1 = \sup x_j$ とすると, $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$ から,

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha \sup x_j + (a_{i1} - \alpha) \sup x_j + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N \\ &\geq \alpha \sup x_j + (a_{i1} - \alpha) \sup x_j + (a_{i2} + \dots + a_{iN}) \inf x_j \\ &= \alpha \sup x_j + (a_{i1} - \alpha) \sup x_j + (1 - a_{i1}) \inf x_j \\ &\geq \alpha \sup x_j + (a_{i1} - \alpha) \inf x_j + (1 - a_{i1}) \inf x_j \\ &= (1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \end{aligned}$$

また, $x_1 = \inf x_j$ とすると,

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha \inf x_j + (a_{i1} - \alpha) \inf x_j + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iN}x_N \\ &\leq \alpha \inf x_j + (a_{i1} - \alpha) \inf x_j + (a_{i2} + \cdots + a_{iN}) \sup x_j \\ &= \alpha \inf x_j + (a_{i1} - \alpha) \inf x_j + (1 - a_{i1}) \sup x_j \\ &\leq \alpha \inf x_j + (a_{i1} - \alpha) \sup x_j + (1 - a_{i1}) \sup x_j \\ &= \alpha \inf x_j + (1 - \alpha) \sup x_j \end{aligned}$$

よって,

$$(1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \leq x'_j \leq (1 - \alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j$$

が示せた. □

(2) の証明. $AD = \{Ax \mid x \in D\}$ の任意の元 y に対して, $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$ から,

$$y = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}$$

よって, $y_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}t = t$ であるため, $y \in D$. したがって, $AD \subset D$ よって, 下のように写像 \hat{A} が誘導される.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N/D & \xrightarrow{\hat{A}} & \mathbb{R}^N/D \end{array}$$

□

(3) の証明. $x' = Ax$ とおけば, $\|\hat{A}\| = \max \frac{\|[x']\|}{\|[x]\|}$ である. (1) から,

$$\begin{aligned} \|[x']\| &= \sup x'_j - \inf x'_j \\ &\leq ((1 - \alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j) - ((1 - \alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j) \\ &= (1 - 2\alpha)(\sup x_j - \inf x_j) \\ &= (1 - 2\alpha)\|[x]\| \end{aligned}$$

したがって, $\|[x']\| \leq (1 - 2\alpha)\|[x]\|$. $[x] \neq [0]$ のとき,

$$\frac{\|[x']\|}{\|[x]\|} \leq 1 - 2\alpha.$$

$[x] = [0]$ のときは $[x'] = 0$. 以上から, $\|\hat{A}\| \leq 1 - 2\alpha$ が示せた. □

補題 4.1.6. サークルパッキングを与える $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$ と任意の $[t_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対して, $[a_i]$ と $[t_i]$ を結ぶ線分上で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\alpha \geq 0$ が存在して,

$$\frac{\partial(F^n)_i}{\partial t_j} \geq \alpha \geq 0$$

をみたすとする. このとき,

$$\|F^n([t_i]) - [a_i]\| \leq (1 - 2\alpha)\|[t_i] - [a_i]\|$$

が成り立つ. 特に, $\alpha = 0$ のとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\|F^n([t_i]) - [a_i]\| \leq \|[t_i] - [a_i]\|$$

である.

証明. $h = t - a \in \mathbb{R}^N$ とおく. $a \in \mathbb{R}^N$ はサークルパッキングに対応する半径であるため,

$$\begin{aligned} \tilde{F}^n(t) - a &= \tilde{F}^n(t) - \tilde{F}^n(a) \\ &= \left[\tilde{F}^n(a + sh) \right]_{s=0}^{s=1} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \tilde{F}^n(a + sh) ds \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで,

$$\tilde{F}^n(x) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1^n(x) \\ \vdots \\ \tilde{F}_N^n(x) \end{pmatrix}$$

とおくと, その x 微分 $M(x)$ は

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{d}{dx} \tilde{F}^n(x) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{F}_1^{n'}(x) \\ \vdots \\ \tilde{F}_N^{n'}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}_1^n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_1^n}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{F}_N^n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_N^n}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. したがって, (4.1) は

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1^n(t) - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_N^n(t) - a_N \end{pmatrix} = \int_0^1 M(a + sh) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} ds$$

と書ける。さらに、この右辺の被積分関数を

$$\begin{pmatrix} h_1'(s) \\ \vdots \\ h_N'(s) \end{pmatrix} = M(a + sh) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$$

と表す。行列 M は補題 4.1.5 の仮定を満たすので、補題 4.1.5 の (1) から、

$$(1 - \alpha) \inf h_j + \alpha \sup h_j \leq h_j'(s) \leq (1 - \alpha) \sup h_j + \alpha \inf h_j$$

が成り立つ。この最左辺と最右辺は s について定数であるから、 s で 0 から 1 まで積分して、

$$(1 - \alpha) \inf h_j + \alpha \sup h_j \leq \int_0^1 h_j'(s) ds \leq (1 - \alpha) \sup h_j + \alpha \inf h_j$$

つまり、

$$(1 - \alpha) \inf h_j + \alpha \sup h_j \leq \widetilde{F}_j^n(t) - a_j \leq (1 - \alpha) \sup h_j + \alpha \inf h_j$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} \|F^n([t]) - [a]\| &= \sup (\widetilde{F}_j^n(t) - a_j) - \inf (\widetilde{F}_j^n(t) - a_j) \\ &\leq (1 - 2\alpha)(\sup h_j - \inf h_j) \\ &= (1 - 2\alpha)\|[h]\| \\ &= (1 - 2\alpha)\|[t - a]\| = (1 - 2\alpha)\|[t] - [a]\| \end{aligned}$$

□

補題 4.1.7. Δ を閉曲面の三角形分割とし、 n_0 を Δ の直径、つまり、 Δ 内の最長の 2 頂点間の距離とする。このとき、 Δ の任意の頂点 i, j 間はちょうど n_0 ステップで到達できる。ただし、隣接する 2 頂点間の移動を 1 ステップと数える。

証明. Δ の直径が n_0 なので、任意の $i, j \in \Delta$ に対してある n_0 以下の $n \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n = (i, j$ を結ぶ道の長さ) をみताす。

- $n_0 - n = 2k$ ($k = 0, 1, \dots$) のとき
 i に隣接する頂点間を k 往復し、 i から j まで n ステップで到達することで、 i, j は n_0 ステップで結べる。
- $n_0 - n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき
 i に隣接する頂点を $k - 1$ 往復し、その後 $i, i + 2, i + 1$ と 2 ステップで移動し、 $n - 1$ ステップで j に移動すると、 i, j は n_0 ステップで結べる。

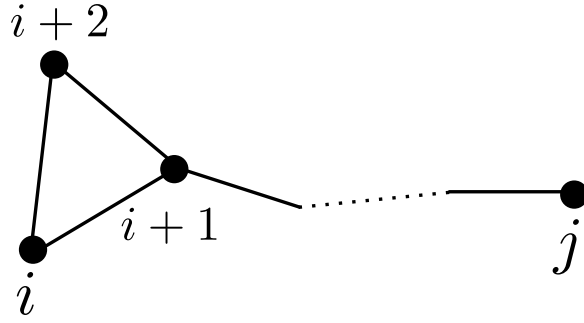


図 32 i, j は n ステップで結ばれている

□

この準備のもとで、サーストンの反復アルゴリズムを証明する。

定理 4.1.1 の証明. 有限次元ベクトル空間の閉球はコンパクトなので,

$$\overline{B}([a_i], \|[t_i] - [a_i]\|) = \{[x] \in \mathbb{R}^N/D \mid \|[x] - [a_i]\| \leq \|[t_i] - [a_i]\|\} \subset \mathbb{R}^N/D$$

はコンパクトである. したがって, m_0 を三角形分割の直径とし, $n_0 \in \mathbb{N}$ を $n_0 \geq m_0$ とすると, ある $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $[x] \in \overline{B}([a_i], \|[t_i] - [a_i]\|)$ に対して,

$$\frac{\partial(F^{n_0})_i}{\partial x_j}([x]) > \alpha$$

をみます. よって, 補題 4.1.6 により,

$$\|F^{n_0}([t_i]) - [a_i]\| \leq (1 - 2\alpha)\|[t_i] - [a_i]\|$$

および, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$F^n([t_i]) \in \overline{B}([a_i], \|[t_i] - [a_i]\|)$$

が成り立つ. このため, 任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \|F^{ln_0}([t_i]) - [a_i]\| &\leq (1 - 2\alpha)\|F^{(l-1)n_0}([t_i]) - [a_i]\| \\ &\leq (1 - 2\alpha)^l\|[t_i] - [a_i]\| \end{aligned}$$

が成り立つ. また, 補題 4.1.5 の (3) で $\alpha = 0$ を考えることにより,

$$\|F^{n+1}([t_i]) - [a_i]\| \leq \|F^n([t_i]) - [a_i]\|$$

である. これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n([t_i]) = [a_i]$$

が示せた.

□

4.2 Thurston のアルゴリズムのサークルパターンへの拡張

定理 (**Andreev-Thurston の定理 (定理 3.1.1 再掲)**). 向き付け可能閉曲面 S に対して, $\chi(S) = 0$ とする. この場合 S はトーラスである. 写像 $\Theta : \mathcal{E} \rightarrow [0, \pi/2]$ は次の条件 (1),(2) をみたすとする.

- (1) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ を, これらを繋げた辺 $e_1 + e_2 + e_3$ が S 内の可縮なループを表す任意の 3 組とする. このとき, もし, $\sum_{i=1}^3 \Theta(e_i) \geq \pi$ であれば $e_1 + e_2 + e_3$ は 1 つの面 $f \in \mathcal{F}$ の境界となる.
- (2) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$ を, これらを繋げた辺 $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が S 内の可縮なループを表す任意の 4 組とする. このとき, もし, $\sum_{i=1}^4 \Theta(e_i) = 2\pi$ であれば $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ は 2 つの面 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ の和集合の作る四角形の境界となる.

このとき, データ (\mathcal{T}, Θ) を実現するようなトーラス上のユークリッド幾何構造とサークルパターン \mathcal{C} の対が存在する. さらに, ユークリッド幾何構造とサークルパターン \mathcal{C} はスカラー倍を除いて一意である.

頂点集合 \mathcal{V} を $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とする. また, $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathcal{V}$ を外部三角形の 3 頂点とする. 頂点 v_i に対応する三角形分割の辺を e_i とし, その長さを $|e_i| = l_i$ とおく. また, $\Theta(e_i) = \theta_i$ と書く. サークルパターン \mathcal{C} の円 C_i の半径を r_i とすると, 三角形 v_i, v_j, v_k の辺 e_i, e_j, e_k の長さ l_i, l_j, l_k はそれぞれ,

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{r_j^2 + r_k^2 + 2r_j r_k \cos \theta_i} \\ l_j &= \sqrt{r_i^2 + r_k^2 + 2r_i r_k \cos \theta_j} \\ l_k &= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \theta_k} \end{aligned}$$

と書ける. したがって余弦定理より,

$$\cos(\angle v_i v_j v_k) = \frac{l_i^2 + l_k^2 - l_j^2}{2l_i l_k}$$

と表せる. 頂点 v ($v \notin \{v_1, v_2, v_3\}$) に対して v の周りに k 個の三角形があるとする, $k \geq 3$ である. 頂点 v に対応する円の半径 r 以外を固定し, l_i, l_j, l_k を r の関数と考えると,

$$\alpha_j(r) := \cos^{-1} \left(\frac{l_i(r)^2 + l_k(r)^2 - l_j(r)^2}{2l_i(r)l_k(r)} \right)$$

は r の連続関数になっている. したがって,

$$\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto \kappa(r) = 2\pi - \sum_{j=1}^k \alpha_j(r)$$

と定義すると、 $\kappa(r)$ も r の連続関数になっている。この $\alpha_j(r)$ は以下の補題より、 r について単調減少である。

補題 (補題 3.1.3 再掲). C_1, C_2, C_3 を図のように交角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で交わる半径 r_1, r_2, r_3 の円とする。 C_1, C_2, C_3 の中心 v_1, v_2, v_3 で張られるユークリッド三角形を f とし、 v_i における f の内角を α_i とする ($i = 1, 2, 3$)。 C_1 をより小さい半径 r'_1 をもつ円 C'_1 で置き換え、その他の円の半径や交角を固定しておくとき、 v'_1, v_2, v_3 の張るユークリッド三角形の内角を α'_i ($i = 1, 2, 3$) とすると

$$\alpha_1 < \alpha'_1, \alpha_2 > \alpha'_2, \alpha_3 > \alpha'_3$$

が成り立つ。とくに、この結果から C'_1 の中心 v'_1 は f の内部に含まれることがわかる。

したがって、 $\kappa(r)$ は r について単調増加である。ここで、

$$\frac{l_i(r)^2 + l_k(r)^2 - l_j(r)^2}{2l_i(r)l_k(r)} = \frac{2r^2 + 2rr_k \cos \theta_i + 2rr_i \cos \theta_k - 2r_i r_k \cos \theta_j}{2\sqrt{r^2 + r_k^2 + 2rr_k \cos \theta_i} \sqrt{r^2 + r_i^2 + 2rr_i \cos \theta_k}}. \quad (4.2)$$

したがって、(4.2) より

$$\begin{aligned} \frac{l_i(r)^2 + l_k(r)^2 - l_j(r)^2}{2l_i(r)l_k(r)} &= \frac{2 + 2r_k \cos \theta_i / r + 2r_i \cos \theta_k / r - 2r_i r_k \cos \theta_j / r^2}{2\sqrt{1 + r_k^2 / r^2 + 2r_k \cos \theta_i / r} \sqrt{1 + r_i^2 / r^2 + 2r_i \cos \theta_k / r}} \\ &\rightarrow 1 \quad (r \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

よって、 $\alpha_j(r)$ の連続性から

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_j(r) = \cos^{-1}(1) = 0$$

であるため、

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa(r) = 2\pi > 0.$$

つぎに、 $r \rightarrow 0$ の場合を考える。この場合も $\alpha_j(r)$ の連続性から、

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \alpha_j(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos^{-1} \left(\frac{2r^2 + 2rr_k \cos \theta_i + 2rr_i \cos \theta_k - 2r_i r_k \cos \theta_j}{2\sqrt{r^2 + r_k^2 + 2rr_k \cos \theta_i} \sqrt{r^2 + r_i^2 + 2rr_i \cos \theta_k}} \right) \\ &= \cos^{-1}(-\cos \theta_j) \\ &= \cos^{-1}(\cos(\pi - \theta_j)) = \pi - \theta_j \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = 2\pi - \sum_{j=1}^k (\pi - \theta_j) = 2\pi - k\pi + \sum_{j=1}^k \theta_j.$$

もともと交角は $\theta_j \in [0, \pi/2]$ であるから、

$$2\pi - k\pi + \sum_{j=1}^k \theta_j \leq 2\pi - \frac{k\pi}{2} = \pi \left(2 - \frac{k}{2} \right)$$

が成り立つので、 $k \geq 5$ のときは

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) < 0$$

である。つぎに $k = 3$ のとき、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = -\pi + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

ここで、辺 e_1, e_2, e_3 は1つの面 f の境界にはなっていないため定理の仮定から、 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \pi$ 。
ゆえに $k = 3$ の場合も

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) < 0$$

である。さらに $k = 4$ のとき、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = -2\pi + \sum_{j=1}^4 \theta_j.$$

仮定から、 $\sum_{j=1}^4 \theta_j < 2\pi$ である。よって $k = 4$ のときも

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) < 0$$

であり、以上から $k \geq 3$ で $\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) < 0$ が成り立つ。 $r \rightarrow +\infty$ と $r \rightarrow 0$ の場合の考察、および $\kappa(r)$ の連続性と単調性から中間値の定理により、ある $r^* \in \mathbb{R}_+$ がただ1つ存在し、 $\kappa(r^*) = 0$ をみtas。

$v \in \{v_1, v_2, v_3\}$ に対して $\kappa(r)$ を

$$\kappa(r) = \theta_i - \sum_{j=1}^k \alpha_j(r) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と定義する。 $0 < \theta_i < \pi$ であるため、

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa(r) = \theta_i - 0 > 0$$

が成り立つ。さらに $0 \leq \theta_j \leq \pi/2, \theta_i < \pi$ と $k \geq 2$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) &= \theta_i - \sum_{j=1}^k (\pi - \theta_j) \\ &\leq \theta_i - \sum_{j=1}^k \frac{\pi}{2} \\ &= \theta_i - \frac{k\pi}{2} < 0 \end{aligned}$$

であるため、中間値の定理から、ある $r^* \in \mathbb{R}_+$ がただ1つ存在し、 $\kappa(r^*) = 0$ をみtas。

以上から、サークルパターンの場合にも Thurston のアルゴリズムにおける r^* が存在し、サークルパッキングの場合の収束性の議論からサークルパターンの場合にもこのアルゴリズムが機能することがわかる。

5 Python による実装

5.1 アルゴリズムと誤差関数

ここではまず、Python で実装したプログラムの概略を示す。

- はじめに三角形分割の頂点数，辺数，面数を指定し，三角形の位置関係を入力する
- アルゴリズムを繰り返す回数を変数 j のループ回数として指定する
- 各頂点 v_i に対応する半径 r_i に対して， v_i の周りの曲率を返すような r_i の 1 変数関数 κ を定義する
- `root_scalar` という Python の関数を用いて $\kappa(r_i) = 0$ をみたすような r_i を求め，これを変数 v のループを用いて頂点の個数分 r_i を求める
- r_i の値を上で求めた値に置き換えながら j ループで指定回数分繰り返し処理を行う

頂点ごとに r_i の 1 変数関数 κ を定義し，`root_scalar` という Python の関数で解を求めることが Thurston のアルゴリズムにおいて r^* を求めることに相当する．このときの解の存在と一意性は，Thurston のアルゴリズムを証明した 4.1 節での議論で保証されている．収束の度合いについてみるために曲率関数を用いて誤差関数を以下のように定義する．

$$E^{(j)} = \sum_{i=1}^n \kappa_i(\mathbf{r}^{(j)})^2$$

サークルパッキング（サークルパターン）に収束するほど曲率関数 κ_i の値は小さくなり，サークルパッキングやサークルパターンを与える半径では 0 になっているはずである．したがって，符号の影響を消すために 2 乗和をとったものを考えると，現状の半径とサークルパッキングを与える半径との「近さ」の 1 つの尺度となる．この意味で $E^{(j)}$ を誤差関数と呼んでいる．なお，誤差関数の j は繰り返し回数を表しており，理論上は $E^{(j)} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) となる．

5.2 実装結果

まずは以下のような 5 頂点の三角形分割についての結果を示す．頂点は図に示したようにラベル付けし， v_i ($i = 1, \dots, 5$) に対応する円を C_i とし，その半径を r_i ($i = 1, \dots, 5$) とする．

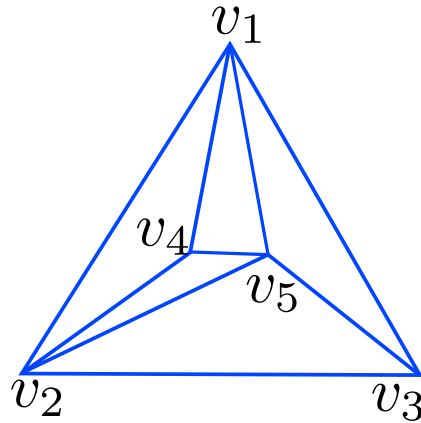


図 33 5 頂点の三角形分割

Python を用いて、サークルパッキングを求める Thurston のアルゴリズムを j 回繰り返すと、以下の表のような結果が得られた。なお、初期値は $\mathbf{r}_0 = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (1, \dots, 1)$ としている。

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	誤差関数
$j = 1$	0.3674681	0.3674681	0.2211326	0.0119458	0.0319852	24.12569964
$j = 3$	0.3161798	0.3161798	0.3005639	0.0188442	0.0482321	3.5739×10^{-2}
$j = 5$	0.3119253	0.3119253	0.3082661	0.0193543	0.0485289	2.7940×10^{-3}
$j = 10$	0.31068	0.31068	0.3110755	0.0195295	0.048020	4.2277×10^{-5}
$j = 60$	0.3108020	0.3108020	0.3108020	0.0195126	0.0480812	1.7154×10^{-23}

表 1 5 頂点の三角形分割の結果

繰り返し回数が 1 回、すなわち $j = 1$ のときに得られた半径を元に Python で描いた図が図 34 である。このときは、たとえば円 C_1, C_2 や C_3, C_5 は接しているが、 C_1, C_3 や C_1, C_4 など大きく離れていることがわかる。

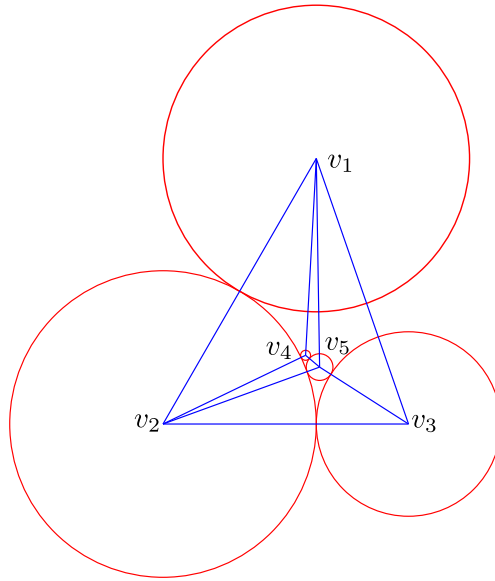


図 34 $j = 1$ のとき

少し繰り返し回数を増やして $j = 3$ とすると、以下のような図になる。図 36 に矢印で示したように、接していない箇所があるが、 $j = 1$ のものと比べるとサークルパッキングに近づいていることがわかる。

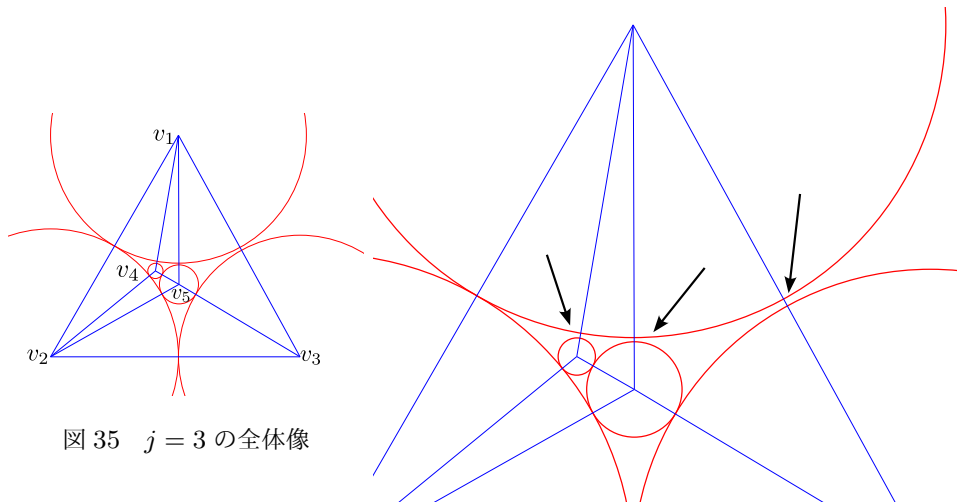


図 35 $j = 3$ の全体像

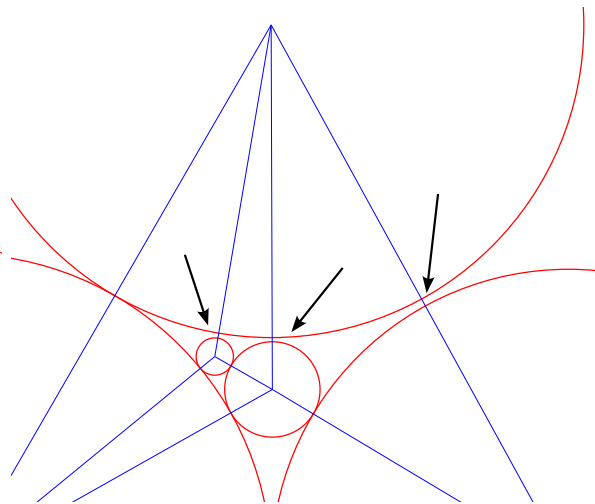


図 36 $j = 3$ の拡大図

もう少し繰り返し回数を増やし、 $j = 5$ としたものが図 37 である。 $j = 3$ のときよりもサークルパッキングに近づいているため、各円が離れている状態から単調に近づき、接していくように見えるが、円 C_5 を中心に拡大した図 38 を参照すると円が交わっていることがわかる。円は離れていたり、交わったりを繰り返しサークルパッキングに収束していくことが観察できる。

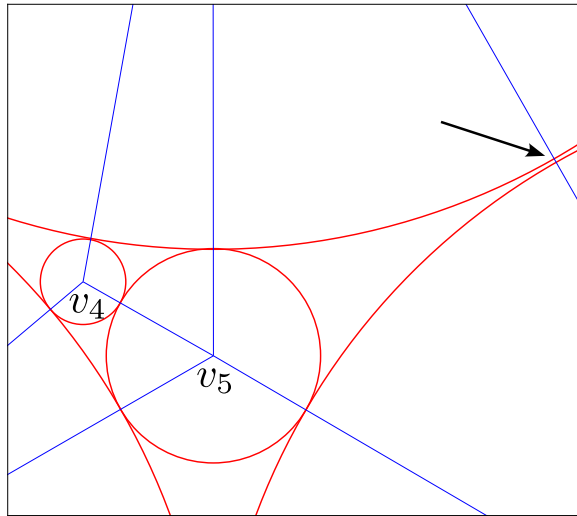


図 37 $j = 5$ の拡大図

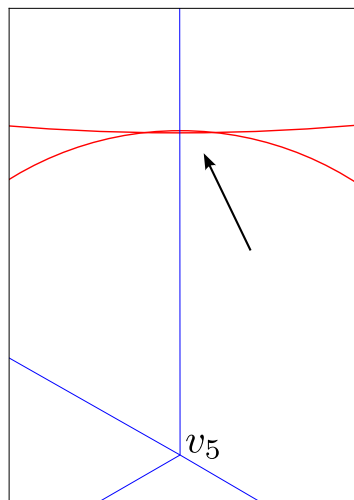


図 38 $j = 5$ の拡大図

さらに回数を多くし, $j = 60$ とすると, この段階でほとんどサークルパッキングに収束し終わっている (図 39 参照). 誤差関数はまだ変動するので, $j = 60$ 以降の誤差関数の値を以下に示す.

繰り返し回数	誤差関数の値
$j = 60$	$1.7154003680970886 \times 10^{-23}$
$j = 70$	$7.869972213324272 \times 10^{-27}$
$j = 80$	$1.6950352878097033 \times 10^{-26}$
$j = 88$	$1.6731098850252168 \times 10^{-26}$
$j = 120$	$1.6731098850252168 \times 10^{-26}$

表 2 $j = 60$ 以降の誤差関数の値

このように $j = 88$ までは誤差関数の値に僅かなぶれが見られるが、 $j = 88$ 以降は $1.6731098850252168 \times 10^{-26}$ という値から変動していないことがわかる。

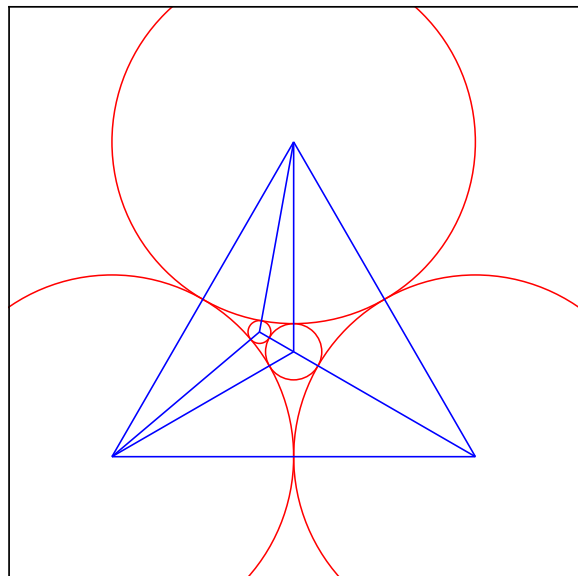


図 39 $j = 60$

つぎに同じ三角形分割を用いて、不揃いな初期値を採用してみる。具体的には初期値を

$$\mathbf{r}_1 = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (20, 4, 8000, 1, 12)$$

$$\mathbf{r}_2 = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (1, 1, 1, 1, 1000)$$

としてプログラムを動かした結果を示す。初期値を変動させたことによる誤差関数の挙動については 5.3 節で述べるので、ここではサークルパッキングが収束する様子の差異について述べる。まずは、 $j = 1$ のときの図を示す。

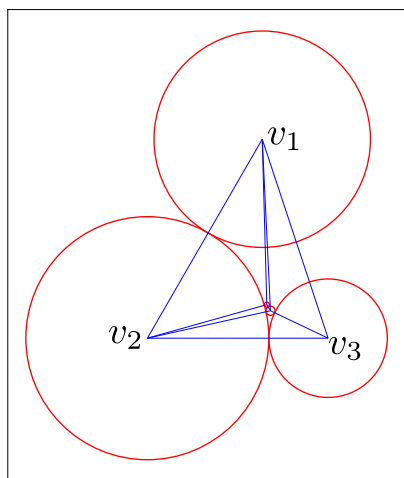


図 40 r_1 の $j = 1$

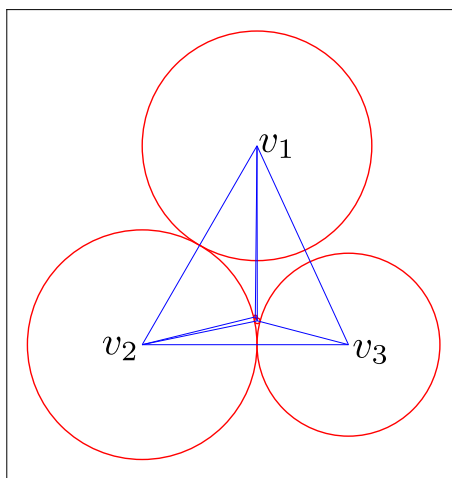


図 41 r_2 の $j = 1$

頂点 v_1 と v_3 に対応する円 C_1, C_3 に着目すると、初期値をまばらに設定した r_1 のときが大きく離れていることがわかる。 r_2 でも初期値が r_0 のときよりも頂点 v_4, v_5 に対応する円 C_4, C_5 が小さく、辺 v_2v_3 側によっていることがわかる。少し繰り返し回数を増やし、 $j = 3$ とすると、初期値を r_0 としたときとは異なり、 r_1, r_2 のときはともに円 C_1, C_3 が交わっていることがわかる。また、矢印で示した部分の円どうしの離れ方が初期値が全て 1 の場合よりも大きい。初期値が変化することで、サークルパッキングの収束のしかたが変化することが観察できた。

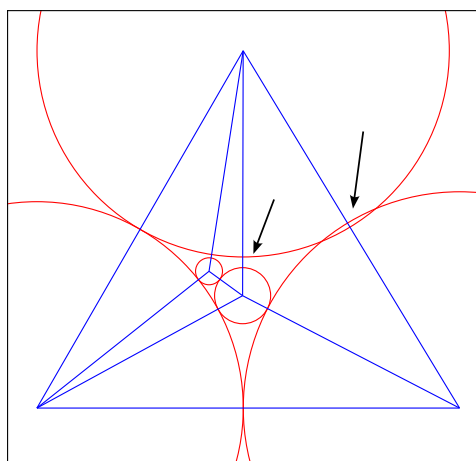


図 42 r_1 の $j = 1$

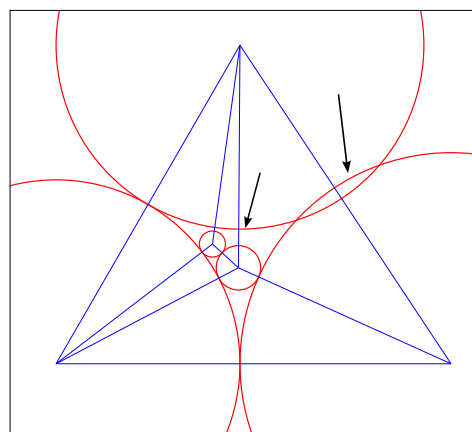


図 43 r_2 の $j = 1$

さらに 5 頂点の骨格は変えずに以下のように辺番号を決め、サークルパターンを得ることを考える。図 44 の場合、辺 v_1v_2 の番号を e_1 と表すことを意味する。なお、プログラムにおける辺の情報の書き方の都合で辺番号は順番が揃っていない。

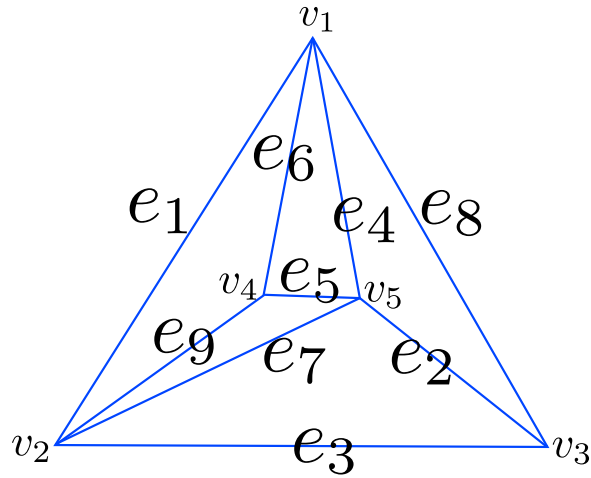


図 44 骨格と辺番号

ここでは、交角のデータ Θ を

$$(\Theta(e_1), \Theta(e_2), \dots, \Theta(e_9)) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

としてサークルパターンを求める．アルゴリズムを実行したときの半径と誤差関数は以下の表のようになる．

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	誤差関数
$j = 1$	0.34330905	0.37348926	0.23784128	0.00819557	0.03716484	21.9796997
$j = 2$	0.34427149	0.33281235	0.28038435	0.00872046	0.03381136	0.0324954
$j = 3$	0.34202593	0.34664786	0.26639401	0.00819648	0.03673571	0.0120824
$j = 10$	0.34220709	0.3422622	0.2716436	0.00845602	0.03543109	7.90702×10^{-5}
$j = 41$	0.34238292	0.34238292	0.27126553	0.00843625	0.03553238	2.28395×10^{-14}
$j = 60$	0.34238292	0.34238292	0.27126553	0.00843625	0.03553238	3.24983×10^{-20}
$j = 84$	0.34238292	0.34238292	0.27126553	0.00843625	0.03553238	$5.3765801 \times 10^{-27}$
$j = 120$	0.34238292	0.34238292	0.27126553	0.00843625	0.03553238	$1.3616232 \times 10^{-27}$

表 3 サークルパターンの場合

$j = 1$ のときの図が以下の図 45 である．

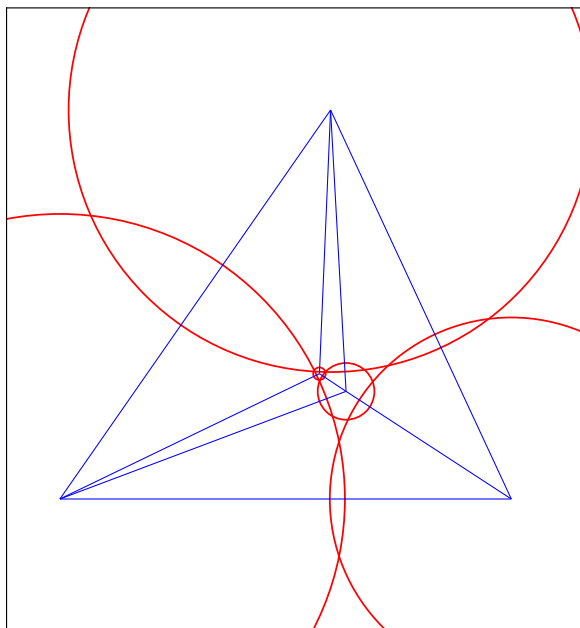


図 45 $j = 1$ 全体像

全体図ではわかりにくい以下の拡大図を見ると、とくに矢印で示した C_4 付近で円どうしが重なり、サークルパターンが歪んでしまっていることがわかる。繰り返し回数を多くしたときに、この部分がどのように変化するかを図で示す。

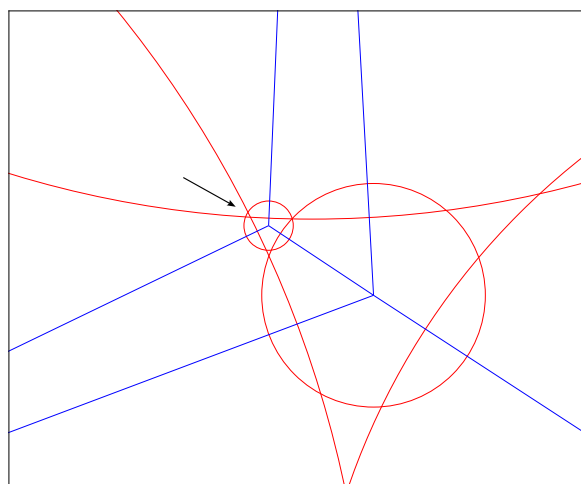


図 46 $j = 1$ 拡大図

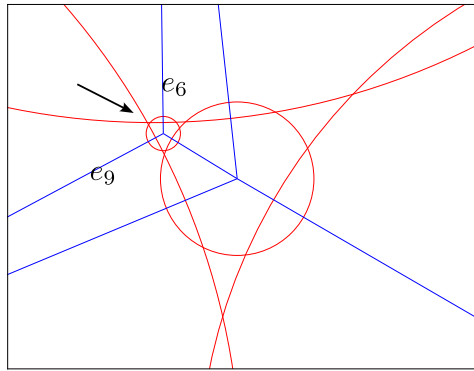


図 47 $j = 3$ の拡大図

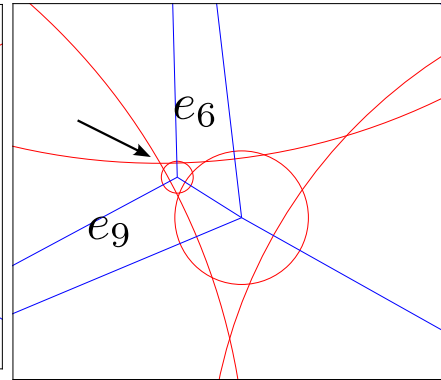


図 48 $j = 10$ の拡大図

図 47 および図 48 を比べると，徐々に矢印で示した部分の円どうしの隙間が開き，データ Θ の $\Theta(e_6) = \pi/6, \Theta(e_9) = \pi/3$ に近づいていく様子がわかる．半径の値は $j = 41$ 程度で安定し，誤差関数の値は $j = 84$ 回程度から安定することが読み取れた．サークルパターンの完成形として $j = 120$ のときの全体図と拡大図を以下に示す．

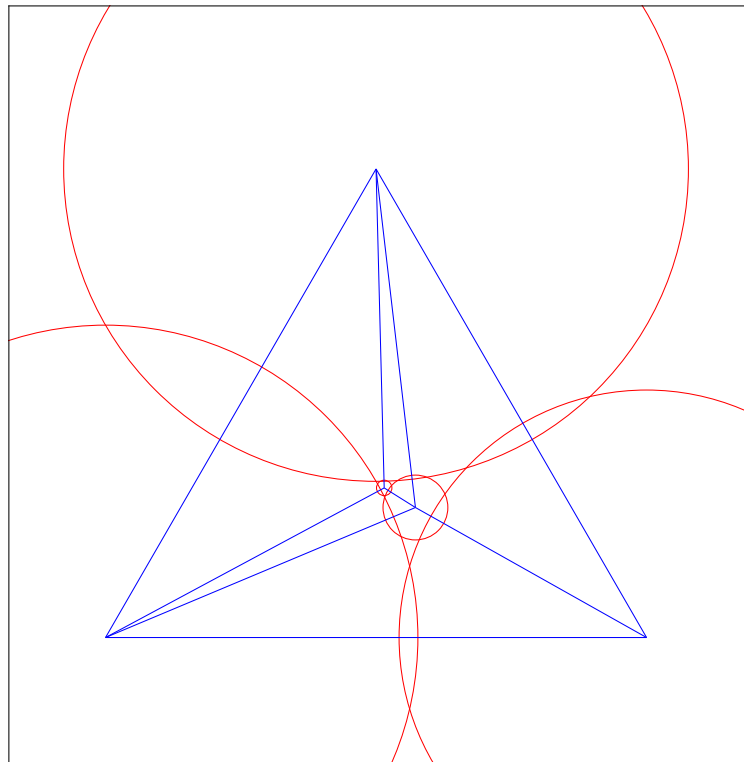


図 49 $j = 120$ 全体図

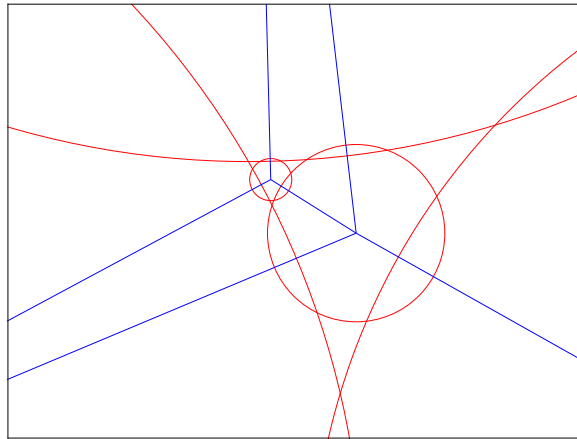


図 50 $j = 120$ 拡大図

5.3 誤差関数の比較

ここでは、様々な条件で誤差関数の減衰の様子を比較していく。比較するのはサークルパッキングとサークルパターンの場合のそれぞれについて \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 を初期値としたものを比較し、サークルパッキングでは \mathbf{r}_2 を初期値としたものも比較する。すべての初期値の場合を重ねたグラフは次のようになる ($j = 8$ まで)。

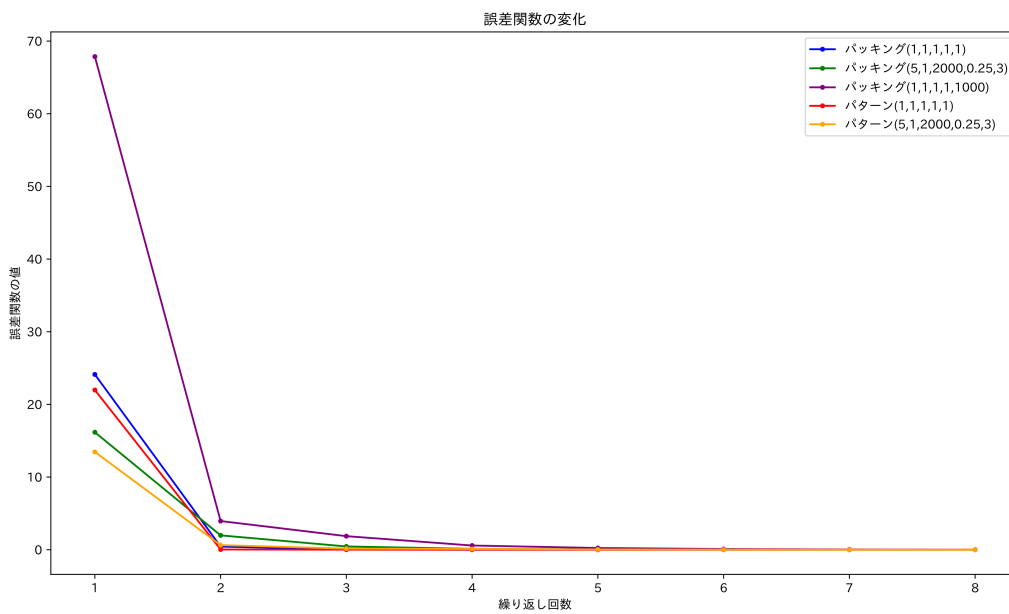


図 51 パッキングとパターンの誤差関数

まずはサークルパッキングの誤差関数のグラフのみを以下に示す。

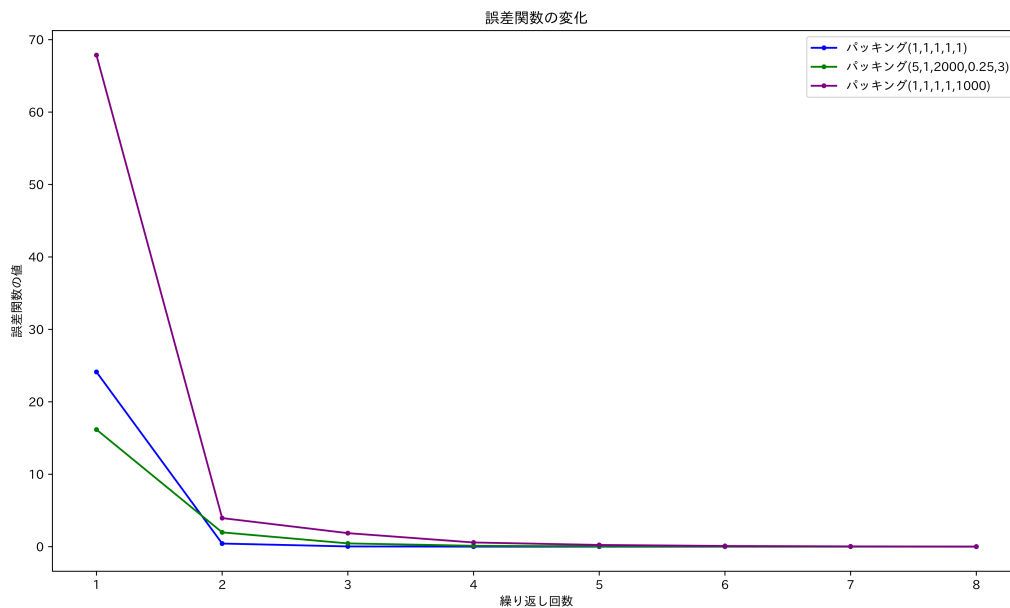


図 52 パッキングの誤差関数 $j = 8$ までの全体図

アルゴリズムを 1 回繰り返した段階では初期値が \mathbf{r}_2 の誤差関数の値が最も大きく、サークルパッキングの値から遠いことがわかる。また、初期値がそろっている \mathbf{r}_0 は 2 回繰り返した時点で \mathbf{r}_1 を初期値としたときよりも誤差関数の値が小さくなっていることが読み取れる。その後の変化をみると、 \mathbf{r}_0 を初期値としたときのほうが \mathbf{r}_1 を初期値としたときより速く収束していることがわかる。さらに、 \mathbf{r}_2 を初期値としたときは $j = 2$ 以降で誤差関数の減衰率が急速に落ちていることも読み取れる。繰り返し回数を増やしたときに誤差関数の値がどのようになるのかを、半径の値が安定する $j = 40$ 付近で確認する。図 53 に示すとおりである。

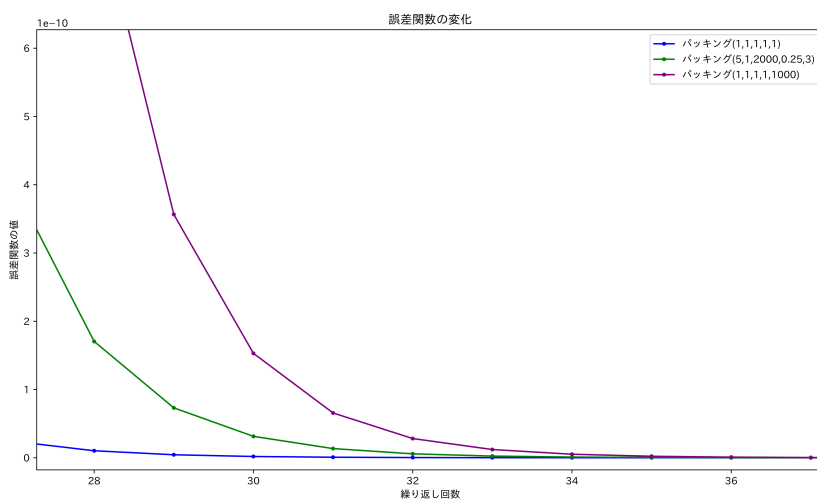


図 53 パッキングの誤差関数 $j = 40$ 付近

この段階でも誤差関数の値に逆転は起こっていない。繰り返し回数が増えるにつれてサークルパッキングに近づいていくため減衰のしかたがおだやかになることが読み取れる。 r_1 から始めたときはこのスケールでは $j = 28$ で値が変動しなくなっているが、 r_2 から開始したときは $j = 34$ 付近で値の変動がなくなる。

つぎにサークルパターンの場合の誤差関数の変動の様子を確認する。先ほどのサークルパッキングのグラフからサークルパターンの誤差関数の減衰のグラフを抜き出し、少し拡大したものが図 54 である。

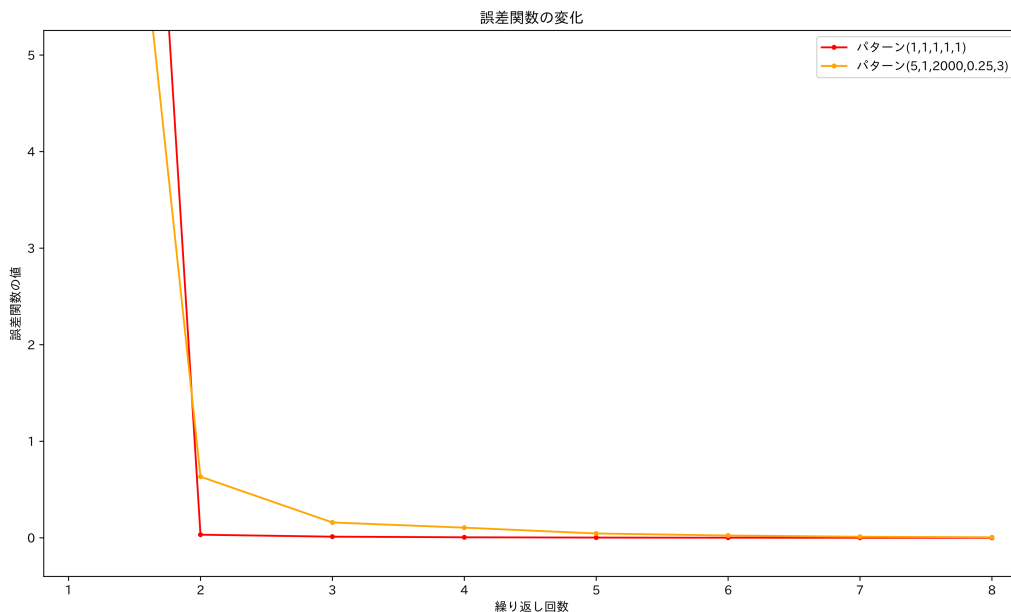


図 54 サークルパターンの誤差関数

サークルパターンの場合もサークルパッキングの場合と同様に、 r_0 を初期値とした方が r_1 を初期値とした方よりも、2回目の繰り返し後に誤差関数の値が小さくなっていることがわかる。

最後にサークルパッキングとサークルパターン間での誤差関数の収束のしかたを比較する。図 51 を拡大したものが図 55 である。グラフの傾きを読み取ると、サークルパターンとサークルパッキング間で同じ初期値を採用したときの反復回数 1 回目から 2 回目への誤差関数の減衰率が同程度であることがわかる。この段階では r_1 を初期値としたものはサークルパッキングの方が値が大きくなっているが、 $j = 6$ の時点で値が逆転する (図 56 参照)。この初期値のときにはサークルパターンの方が収束が遅いことがわかる。

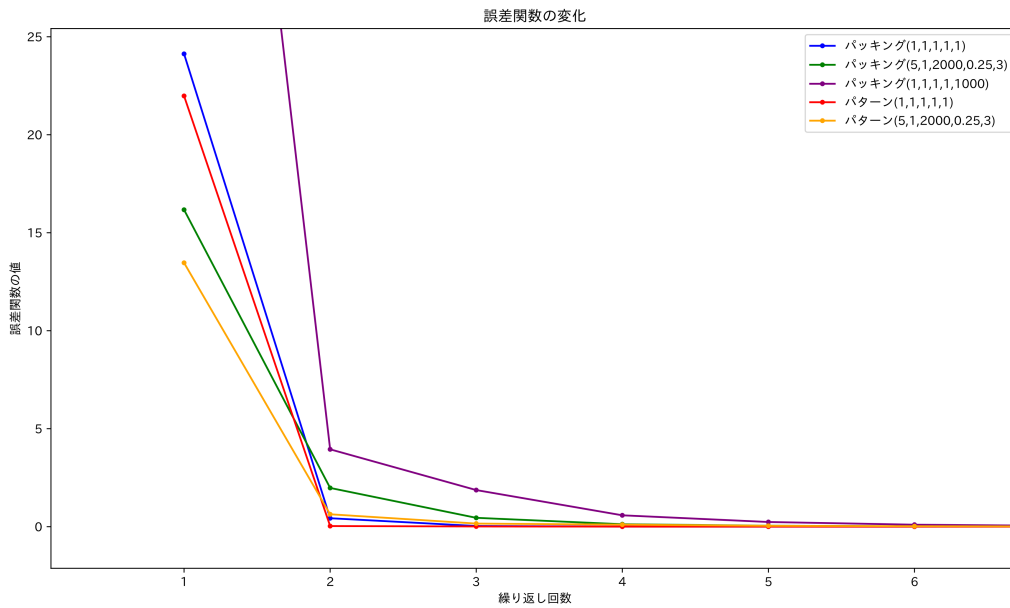


図 55 パッキングとパターンの誤差関数

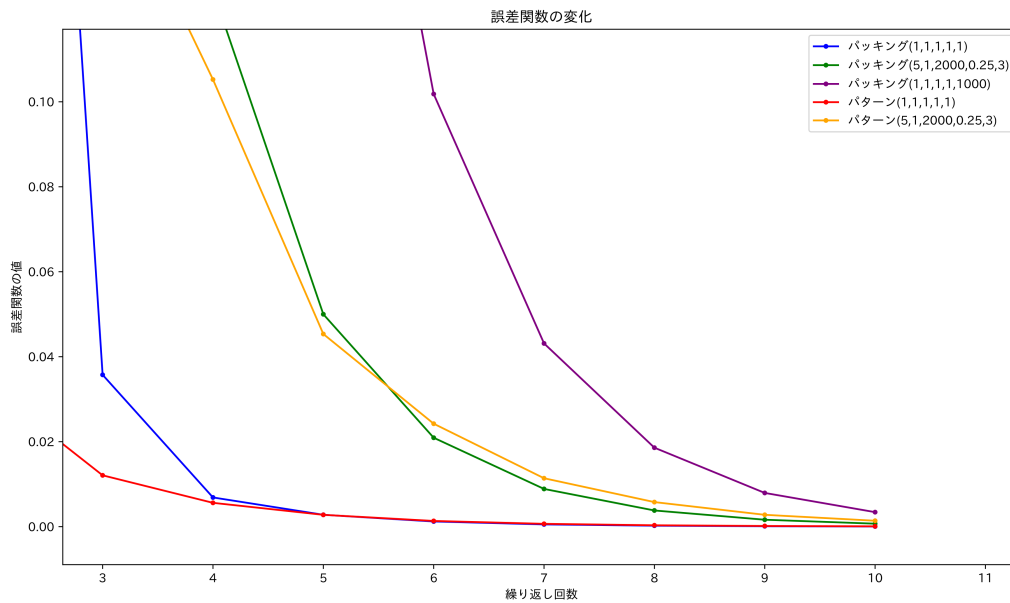


図 56 パッキングとパターンの誤差関数

じつは r_1 を初期値としたときのサークルパターンの誤差関数の収束が比較しているものの中で一番遅いことがわかる。以下の図を見ると、17回目の繰り返しの後で誤差関数の値が逆転していることが読み取れる。

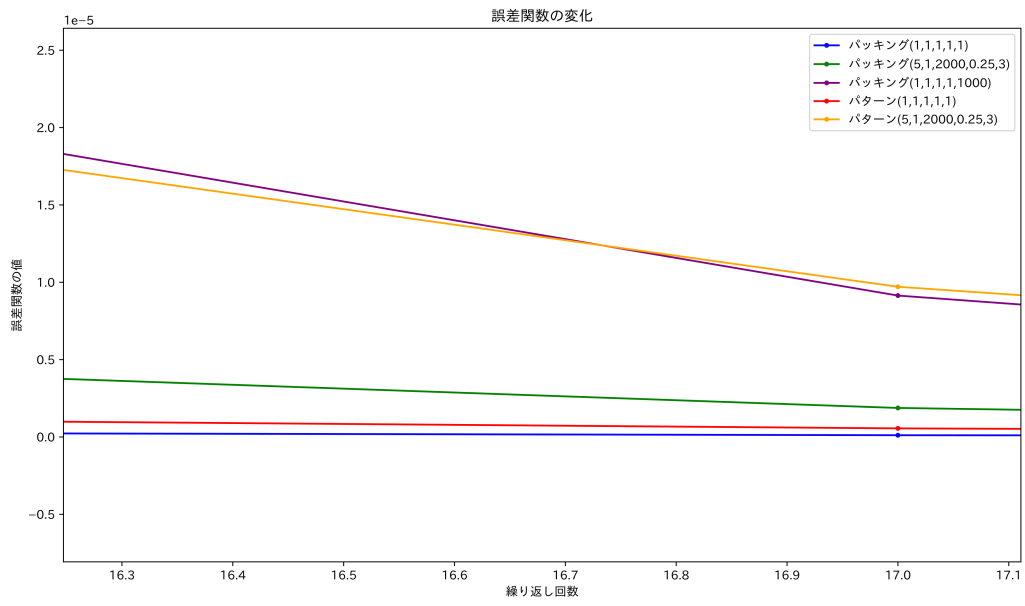


図 57 パッキングとパターンの誤差関数

謝辞

この論文を完成させるにあたり，懇切丁寧に指導して下さった小森洋平教授に深く感謝いたします。また，論文の作成に協力して下さった雪田友成助教に感謝いたします。

参考文献

- [1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer New York, 1st edition, 1993.
- [2] Martin R. Bridson. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, Berlin, 1999.
- [3] Cooper Daryl, Hodgson Craig, and Kerckhoff Steve.
- [4] John. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer New York, New York, NY, 2nd edition, 2011.
- [5] Al Marden and Burt Rodin. On thurston’s formulation and proof of andreev’s theorem. In *Computational Methods and Function Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1435, pp. 103–115, Berlin, Germany, 1990. Springer.
- [6] William P Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1978.
- [7] 相馬輝彦. Thurston’s formulation and proof of Andreev’s theorem. 数理解析研究所講究録, Vol. 893, pp. 4–23, 1995.
- [8] 小宮克弘. 位相幾何入門. 裳華房, 2001.
- [9] 本間龍雄. 組合せ位相幾何. 数学ライブラリー ; 29. 森北出版, 東京, 1972.